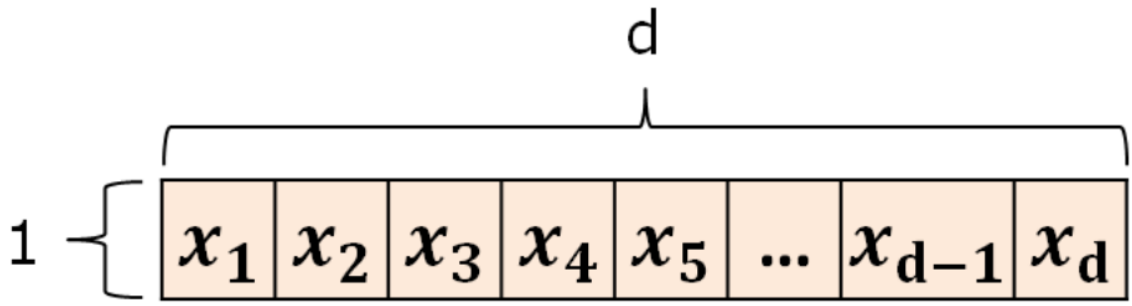
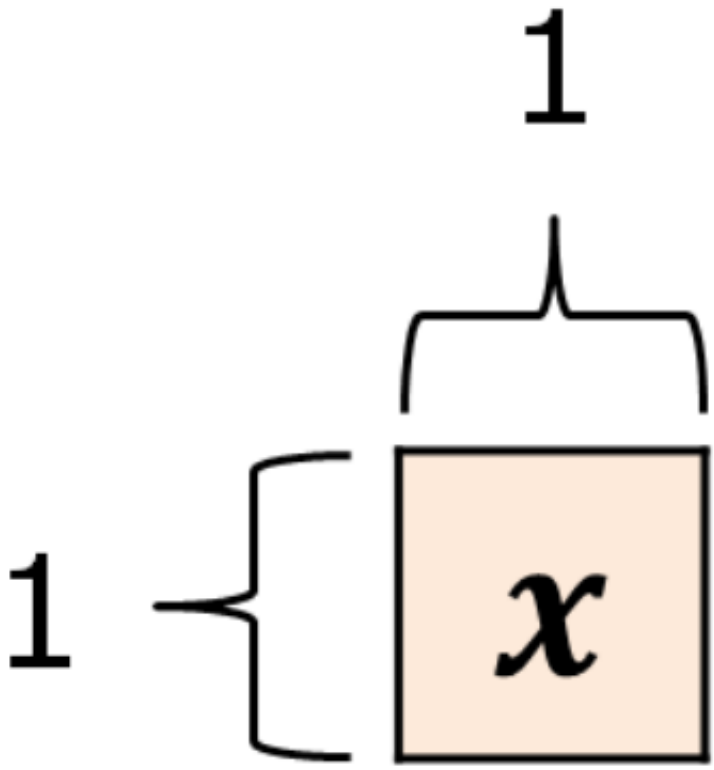
ベクトルの概要についてまとめよ（理解を採点者に伝える）

身長や年齢などを情報を1つの数式でまとめて扱うためにベクトルや行列を使用することがある。ベクトルの成分を縦に並べたものを縦ベクトルといい、横に並べたものを横ベクトルという。大きさが 1 になるベクトルを単位ベクトルと言い、ベクトルと内積と向きの関係をまとめるとベクトルの内積が小さくなるほど、ベクトルの向きは反対となり,ベクトルの内積が大きくなるほど、ベクトルの向きは同じになる。 内積を利用して、ベクトルの向きにおける類似を確かめることができる

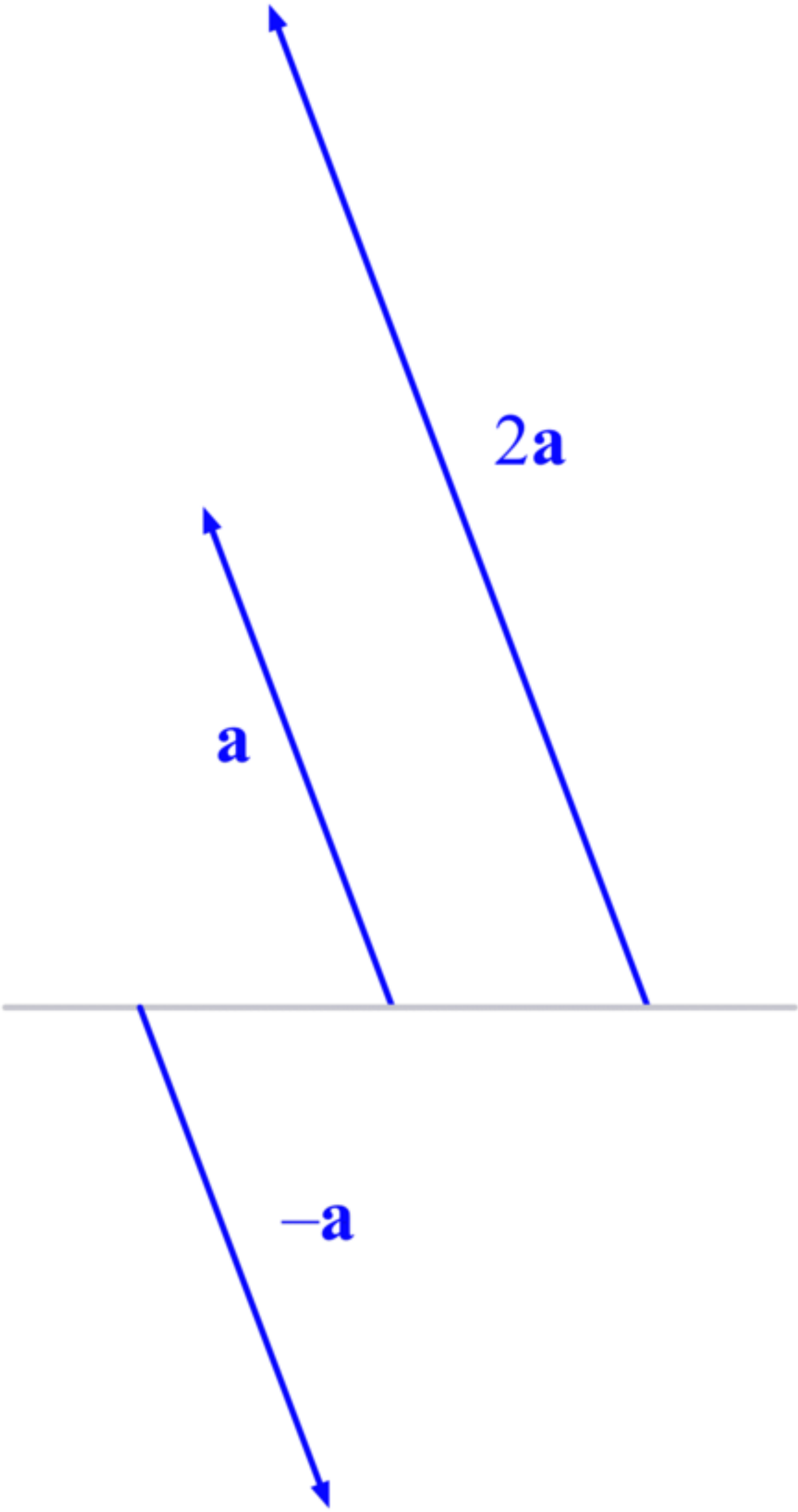
ベクトルはいくつかの数を並べたものであり並んでいる数の個数をそのベクトルの次元いいプログラミングでいう配列のことを指す。ベクトルの表現方法として「数の並び」と「矢印」に対応させた方が考えやすい場合がある。



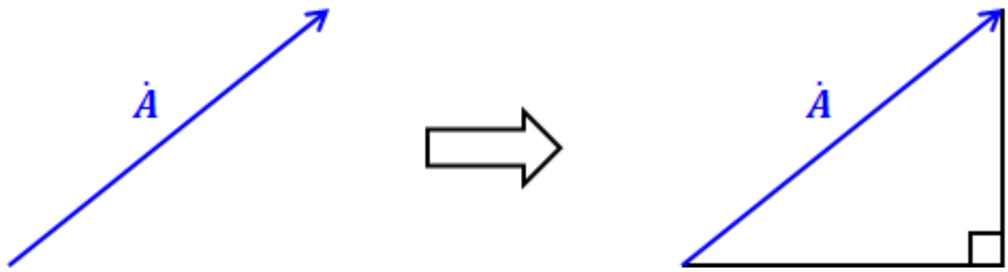
それに対して、数がたった1つの数のことをスカラーと呼ぶ。



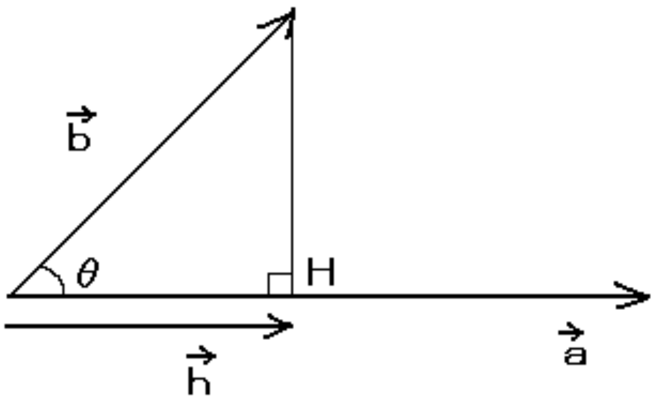
ベクトルのスカラー倍の計算は全ての成分のスカラーをかけることでできる。図形的解釈 としては
スカラーが正であれば向きを変えずに拡大・縮小、負であれば逆向きに拡大縮小することである。



ベクトルのノルムとは、それぞれの成分を２乗してルートをとるスカラーである。ノルムを表現する時には ベクトルを矢印として捉える。仮に２次元の座標で考えた場合に、ベクトルの長さは 三平方の定理により求められる。つまり、ノルムとは三平方の定理を使って長さを算出することである。



ベクトルの内積（ドット積)の定義は、対応する成分ごとの積の和であり結果はスカラーとなる。 つまりベクトルとベクトルの内積はスカラーとなる。内積の幾何学的な解釈をすると 内積は正射影の長さ×片方のベクトルで計算できる。



つまりxベクトルとyベクトルが90で交わっていたら、正射影（影の長さ)がなくなるので上図では内積=$\vec{h} + \vec{a}$(片方のベクトルの長さ)

$\vec{h}$は$\vec{a}$と$\vec{b}$が垂直であれば影が生じなくなるので\vec{b}、内積の定義である

正射影の長さ×片方のベクトルの長さを当てはめるとを、内積は0となる。

つまりベクトルの直交条件は内積が0であることである。 ここで$X = Y$である場合、影がXと同じになるのでXのノルムとなる。 内積の応用として、多変数の１次関数の各々の項（係数と変数)を内積を用いて 計算することがあげられる。パーセプトロンの層入力の式で用いられる。 つまり、内積を用いると一次関数を簡潔に計算できる。

行列の概要について素人にも分かるように簡潔に説明せよ

行列とは数を横方向と縦方向に数字を菜食べたもので簡単にいうと、数字・文字を長方形や正方形に並べたものと言える。

$$
n\left\{\overbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}
\hline
x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & \cdots & x_{1d} \\
\hline
x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} & \cdots & x_{2d} \\
\hline
x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} & \cdots & x_{3d} \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\hline
x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & x_{n4} & x_{n5} & \cdots & x_{nd} \\
\hline
\end{array}}^{d}\right.
$$

行列の和とスカラー倍はベクトルと同様に成分ごとの計算ができる。二つの行列の同じ場所の要素同士を足すことで和を求めることができる。これを言い換えると、２つの行列の行と列が一致していれば計算できるということである。行列の積は行列の和のように成分ごとの積ではなく、まず行列AとBの積をABと書き、Aの各行ベクトルを（上から）Bの各列ベクトル（左から）のそれぞれ列と行が同じ要素を掛けて足し、新しい行列の行と列の要素にいれていく。また積を計算するためのAの列数とBの行数が同じでなければ計算できない。単位行列とは対角成分に１が並び、他が０となる正方行列。単位行列は行列の世界における1の役割をもつ。

$$
\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

逆数は元の数をかけたら１になるという概念であるが、この概念が逆行列で表現される。 また逆行列はいつでも存在するとは限らず、逆行列が存在する行列を正則行列といい存在しない行列を非正則行列と呼ぶ。また行列Aの行と列を入れ替えてできる行列を行列Aの転置行列といい ${}^tA$ で表す。転置行列に変形しても元の行列と同じであれば、その行列を対称行列と言う。また、行列Aと$\vec{x}$の積A$\vec{x}$の結果は違うベクトル（像)に変換される。このような$\vec{x}$を行列Aをかけて変換することを線形変換という。行列変換後のベクトルがスカラー倍で表せることができる。（$A\vec{x}=\lambda\vec{x}$)これを満たすような、$\vec{x}$を固有ベクトル。スカラーλを行列Aの固有値λという。

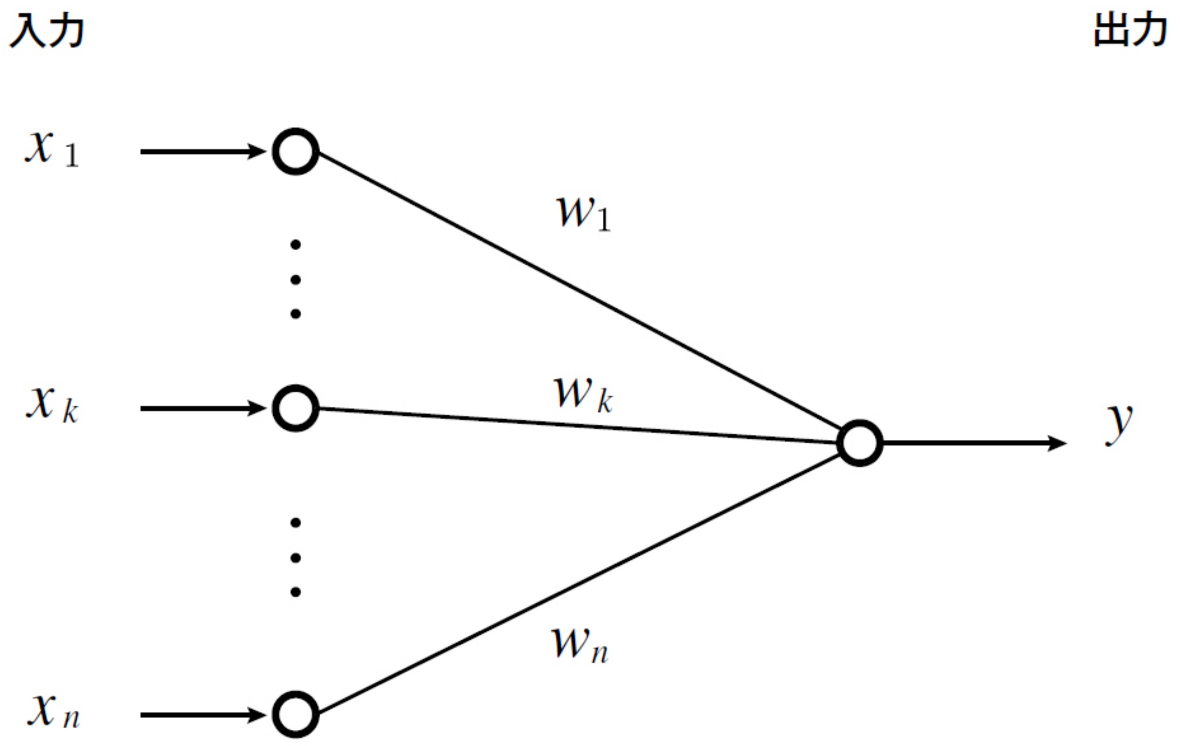
図形的な解釈でいうと、通常は行列Aを掛け算すると$\vec{x}$の方向と大きさが変わってしまう。そこで行列Aを掛け算した時に方向が変わらないベクトルを固有ベクトル、伸び縮みの倍率を固有値という。固有ベクトルを縦に並べて、正則行列Pを作る。正則行列は逆行列が存在するので逆行列を求める。$P^{-1}AP$ を計算してみる。まずAPを計算して,そのあとにP^{-1}とその結果をかける。$P^{-1}AP$の結果は、対角成分に0以外の値があり、それ以外が0の対角行列ができる。その対角成分には、対応する固有値が入る。この一連の操作を行列の対角化と呼ぶ。

$P^{-1}AP=$ 対角行列

上記の式の左辺をAにするために変形を行い $A=P$対角行列P^{-1}

この形は行列Aを３つの行列の積に分解できた。このような分解を行列Aの固有値分解という。行列はベクトルの変換を表す複雑な行列Aを、扱いやすい（単純な変換）対角行列と残りのPとP^{-1}も容易に扱えることが多い。すなはち、固有値分解によって難しい行列を扱いやすい行列に分解できることがメリットである。行列Aの形が対称行列（転置しても形が変わらない行列）だと、PとP^{-1}をただの回転ととれ、λは各軸の拡大とみることができる。ただし行列の形によっては対角化ができない場合もある。

線形代数が機械学習、深層学習における使用について素人にも分かるように説明せよ



https://book.mynavi.jp/manatee/detail/id=75803

機械学習ではよく$y = w_1x_1 + w_2x_2$のような計算が大量に現れる。

このように線形代数を使えば簡単に式を表示させることができ、連立方程式を解くために発してきた様々な線形代数の操作を使うことができる。機械学習、深層学習の文脈での線形代数とは、数の集合を演算するための便利な手法を提供してくれる、数学的ツールといえる。線形代数は、複雑な問題を純粋に直感的に理解でき、計算効率の問題に変換する。上図は線形代数を使っている高速で単純な解法を導くことができるかを示す例です。

固有値と固有ベクトル

例題1

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

固有値はまずdet(A-λE)=0を求め、この式の解が固有値である。

まず固有方程式det$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0$

以上を解いて固有値を求める。

$$(\text{与式}) = (3-\lambda)(-\lambda)(3-\lambda) + 2\times2\times4 + 4\times2\times2 - (3-\lambda)\times2\times2 - 2\times(3-\lambda) - 4\times(-\lambda)\times4$$

$= -\lambda(3-\lambda)^2 + 16 + 16 - 4(3-\lambda) - 16(3-\lambda)$

$= -\lambda(3-\lambda)^2 + 24\lambda + 8$

$= 8 + 15\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3$

$= (1+\lambda)^2(8-\lambda)$

固有値はλ=-1,8となる

λ=-1に対応する固有ベクトルは

$$(A+E)\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

以上の解であり、固有ベクトルは$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$の解になる

$x_2 = -2x_1 - 2x_3$

$s = x_1, t = x_3$

以上より固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

λ=8に対する固有ベクトルは

$$(A+E)\vec{x} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

以上の式は

$-5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0$

$2x_1 - 8x_2 + 2x_3 = 0$

$4x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0$

以上の解なので$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

例題2

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

例題１と同様に

det(A-λE)= $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & -3 \\ 1 & 1 & -2-\lambda \end{pmatrix}$

$= (1-\lambda)(2-\lambda)(-2-\lambda) - (1-\lambda)(-3))$

$= (1-\lambda)(-4;\lambda^2) + 3(1-\lambda)$

$= (1-\lambda)(-1+\lambda^2)$

$= (1-\lambda)^2(1+\lambda)$

固有値はλ=1,-1となる

λ=1に対する固有ベクトルは

$(A+E)\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$

以上は$x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$

$x_1 = -x_2 + 3x_3$

$s = x_2, t = x_3$

固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

λ=-1に対する固有ベクトルは

$$(A+E)\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

以上は

$2x_1 = 0$

$x_1 + 3x_2 + -3x_3 = 0$

$x_1 + x_2 - x_3 = 0$

つまり

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

以上から

$s = x_2, t = x_3$

固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ゆえに，固有値λ1=-1，固有ベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (s, t\text{は任意定数}, s, t \neq 0)$

固有値λ2=1，固有ベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (s, t\text{は任意定数}, s, t \neq 0)$

対角行列

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

det(A-λE)=$\begin{pmatrix} 3-λ & 1 & -1 \\ 1 & 2-λ &0 \\-1 & 0& 2-λ \end{pmatrix}$

$=(3-\lambda)(2-\lambda)(2-\lambda)-(2-\lambda)+(2-\lambda)(-1)$

$=(2-\lambda)(4-\lambda)(1-\lambda)$

よってλ=1に対する固有ベクトルは

固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

λ=-1に対する固有ベクトルは

$$(A+E)\vec{x}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0$$

以上は

$2x_1+x_2-x_3=0$

$x_1+x_2=0$

$-x_1+x_3=0$

よって

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

λ=-1に対する固有ベクトルは

$$(A+E)\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

以上は

$x_1 + x_2 - x_3 = 0$

$x_1 = 0$

よって

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$B^t AB$が対角行列とは、対角化の事であるので

$B^t = B^{-1}$ならばBは求める直行行列である。

よって

$\overrightarrow{v_1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,$\overrightarrow{v_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,$\overrightarrow{v_3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$B = [\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}]$とおくと

$A[\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}]$

$AB = [\lambda_1 \overrightarrow{v_1}, \lambda_2 \overrightarrow{v_2}, \lambda_3 \overrightarrow{v_3}]$

$AB = [1\overrightarrow{v_1}, 1\overrightarrow{v_2}, 2\overrightarrow{v_3}]$

$$AB = B \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$detB$は 0 ではないため、逆行列B^{-1}が存在しB^{-1}を両辺の左側からかけると

$$B^{-1}AB=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{pmatrix}$$

となり対角化される。

そこで

$$B^t=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\2&1&-1\end{pmatrix}$$

以上より

$$B^tB=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\2&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&2\\-1&1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

$$(\text{与式})=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}$$

$B^tB=E$となるように各列に$\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{6}}$をかける

$$B=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}&0&2\\-\sqrt{2}&\sqrt{3}&1\\\sqrt{2}&\sqrt{3}&-1\end{pmatrix}$$

$B^t=B^{-1} を満たすためのBは直交行列である$