

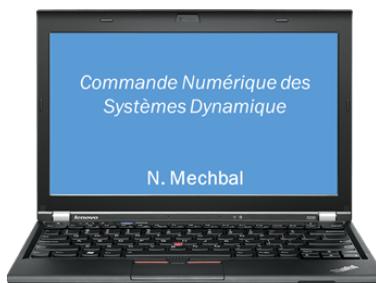
Unité d'Enseignement Fondamentale

EEA



Commande des Systèmes Numériques

Discrete Linear Control Systems



Enseignant : ***Nazih MECHBAL***

Nazih.mechbal@ensam.eu

SOMMAIRE

Partie I

Chapitre I : Introduction d'un calculateur numérique pour la commande de processus

1.	INTRODUCTION.....	2
2.	CHOIX DE LA PERIODE D'ECHANTILLONNAGE	4
3.	ÉTUDE SPECTRALE ET FILTRE ANTIREPLIMENT :	6
4.	RECONSTRUCTION PAR BLOQUEUR D'ORDRE ZERO.....	9
5.	QUANTIFICATION.....	13
6.	INFLUENCE DE LA REPRESENTATION DES NOMBRES.....	15

Chapitre II : Transformée en z

1.	LA TRANSFORMEE EN Z	18
2.	TRANSFORMEE INVERSE EN Z.....	20
3.	APPLICATION DE LA TRANSFORMEE EN Z.....	22

Chapitre III: Fonction de transfert d'un système échantillonné

1.	FONCTION DE TRANSFERT D'UN SYSTEME LINEAIRE DISCRET.....	24
2.	FONCTION DE TRANSFERT D'UN SYSTEME LINEAIRE ECHANTILLONNE.....	24
3.	REPONSE D'UN SYSTEME DISCRET OU ECHANTILLONNE.....	25
4.	ASSOCIATION DE TRANSMITTANCES	26
5.	PRESENCE D'UN BLOQUEUR D'ORDRE ZERO.....	27
6.	STABILITE ET REGIME TRANSITOIRE D'UN SYSTEME DISCRET.....	28
7.	POLES D'UN SYSTEME CONTINU, POLES DE SON SYSTEME ECHANTILLONNE BLOQUE ET REGIME TRANSITOIRE	31
8.	REGIME STATIQUE D'UN SYSTEME DISCRET.....	36

Chapitre IV : Correction des systèmes échantillonnés

1.	INTRODUCTION.....	40
2.	ANALYSE FREQUENTIELLE DES SYSTEMES ECHANTILLONNES.....	40
3.	COMMANDE PID DES SYSTEMES ECHANTILLONNES.	43
4.	EXEMPLE D'APPLICATION : ASSERVISSEMENT D'UN PALPEUR.....	46
5.	DISCRETISATION D'UN CORRECTEUR CONTINU.....	53

<i>Exercices & Problèmes : Partie I.....</i>	<i>67</i>
--	-----------

Partie II

Chapitre V : Représentation d'Etat des Systèmes Échantillonnés

1.	INTRODUCTION.....	67
2.	VARIABLES D'ETAT EN TEMPS ECHANTILLONNEES	68
3.	DISCRETISATION D'UN SYSTEME MIS SOUS FORME D'ETAT.	68
4.	STABILITE	71
5.	OBTENTION D'UNE REPRESENTATION D'ETAT D'UN SYSTEME DISCRET A PARTIR DE SA FONCTION DE TRANSFERT.....	71
6.	GOUVERNABILITE ET OBSERVABILITE D'UN SYSTEME DISCRET.....	72

Chapitre VI : Commande par Retour d'Etat des Systèmes Monovariables.

1.	INTRODUCTION.....	75
2.	COMMANDE PAR RETOUR D'ETAT D'UN SYSTEME ECHANTILLONNE.	76
3.	PLACEMENT DES POLES EN BOUCLE FERMEE.....	80
4.	COMMANDE PAR RETOUR D'ETAT AVEC EFFET INTEGRAL D'UN SYSTEME ECHANTILLONNE..	84
5.	OBSERVATEUR ET ESTIMATION D'ETAT D'UN SYSTEME ECHANTILLONNE	90
6.	COMMANDE PAR RETOUR D'ETAT AVEC EFFET INTEGRAL ET OBSERVATEUR D'UN SYSTEME ECHANTILLONNE.	93

<i>Exercices & Problèmes : Partie II.....</i>	109
---	-----

Annexes

Annexe 1 : Table des transformées

Annexe 2 : Choix de la période d'échantillonnage

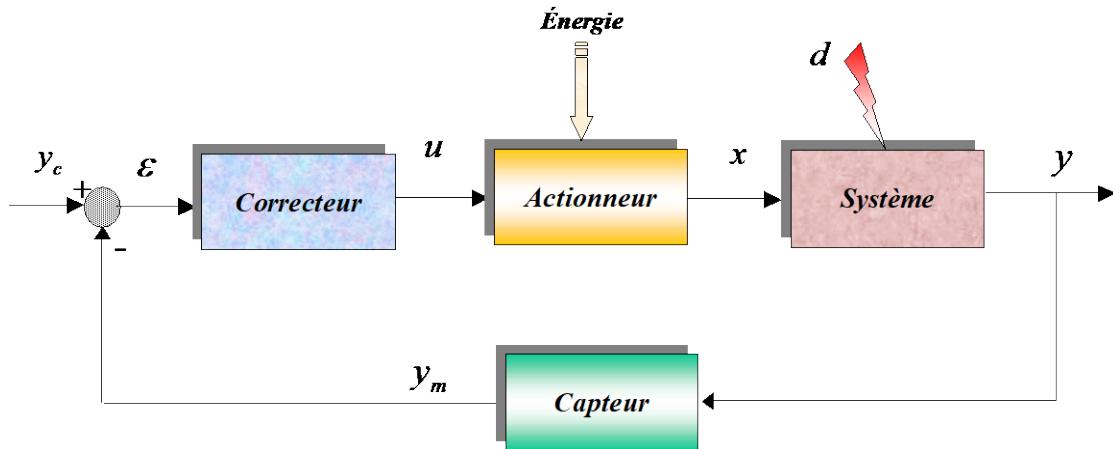
Chapitre I

Introduction d'un calculateur numérique pour la commande de processus.

1. INTRODUCTION.....	2
2. CHOIX DE LA PERIODE D'ECHANTILLONNAGE.	4
3. ÉTUDE SPECTRALE ET FILTRE ANTIREPLIMENT :.....	6
4. RECONSTRUCTION PAR BLOQUEUR D'ORDRE ZERO.....	9
A. RECONSTITUTION D'UN SIGNAL.	9
B. REALISATION.	10
C. FONCTION DE TRANSFERT DU BLOQUEUR D'ORDRE ZERO.....	12
D. SPECTRE D'UN SIGNAL BLOQUE.....	12
E. RECONSTITUTION PAR BLOQUEUR D'ORDRE SUPERIEUR.....	13
5. QUANTIFICATION.....	13
6. INFLUENCE DE LA REPRESENTATION DES NOMBRES.	15

1. INTRODUCTION.

Dans les cours d'automatique des années précédentes, vous avez étudié la commande des systèmes linéaires continus. Le schéma de correction utilisé était alors le suivant :



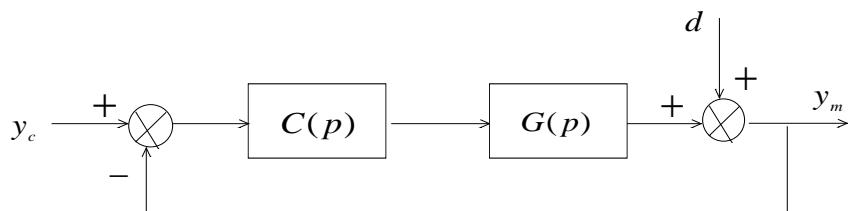
Dans ce schéma, on distingue différents *signaux* :

- $y(t)$, la *sortie* du processus à réguler,
- $y_m(t)$, la *mesure* de la sortie $y(t)$ par l'intermédiaire d'un capteur,
- $y_c(t)$, la valeur de *consigne* de $y_m(t)$,
- $\varepsilon(t)$, l'*erreur*, c'est-à-dire l'écart entre la consigne et la mesure,
- $u(t)$, la variable de *commande* pour l'actionneur,
- $x(t)$, la variable d'*action*,
- $d(t)$, une *perturbation* quelconque agissant sur le système,

et différents systèmes :

- *le système étudié*, qui est un processus physique pour lequel on a obtenu une modélisation, c'est-à-dire un ensemble d'équations mathématiques décrivant le plus fidèlement possible son comportement physique.
- *le capteur* qui permet d'obtenir une mesure de la sortie du système à corriger, mesure utilisée pour générer l'erreur,
- *le correcteur* qui, s'il est conçu de manière adéquate, permet de calculer, sur la base de l'écart entre la consigne et la mesure de sortie, la commande à appliquer en entrée du système pour annuler cet écart,
- *l'actionneur*, relais physique de la commande, qui permet sa mise en œuvre en agissant directement sur le système.

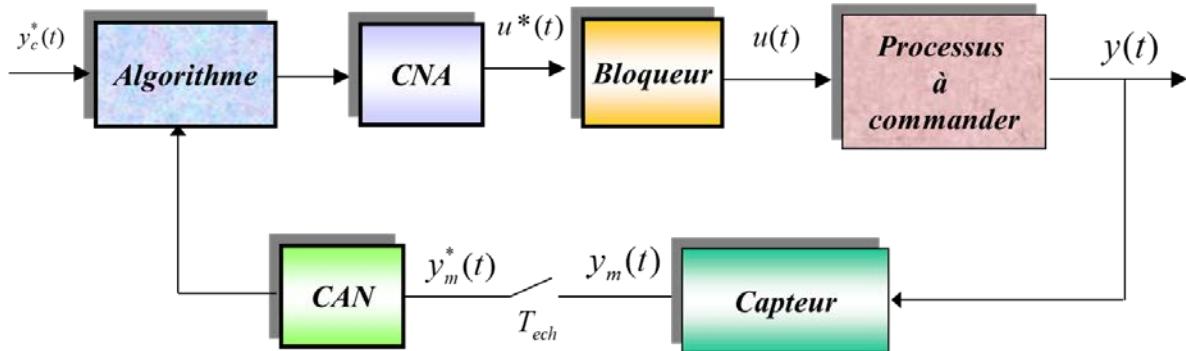
En utilisant la transformée de Laplace, et en rassemblant les systèmes actionneur – système étudié – capteur, ce schéma général de régulation est alors synthétisé sous la forme du schéma à retour unitaire classique suivant,



où $C(p)$ est la fonction de transfert du correcteur, et $G(p)$ est la fonction de transfert de la partie opérative, qui rassemble la fonction de transfert du système proprement dit, mais aussi celle de l'actionneur et du capteur.

Vous avez alors étudié **differentes méthodes pour concevoir** à partir de la donnée de $G(p)$, un correcteur $C(p)$ permettant de remplir certains objectifs de commande (un cahier des charges) concernant la **stabilité** du système en boucle fermée, la qualité de son régime transitoire (**temps de réponse** et **dépassemant**), ainsi que la précision de son régime stationnaire (**erreur statique** nulle en réponse à un échelon de consigne).

Dans ces différents cours n'ont jamais été abordées les questions de mise en œuvre d'une telle commande, une fois son calcul effectué. C'est l'objet principal du cours à venir, qui concerne la **commande automatique des systèmes par calculateur numérique**. Le schéma de principe est donné ci-dessous :

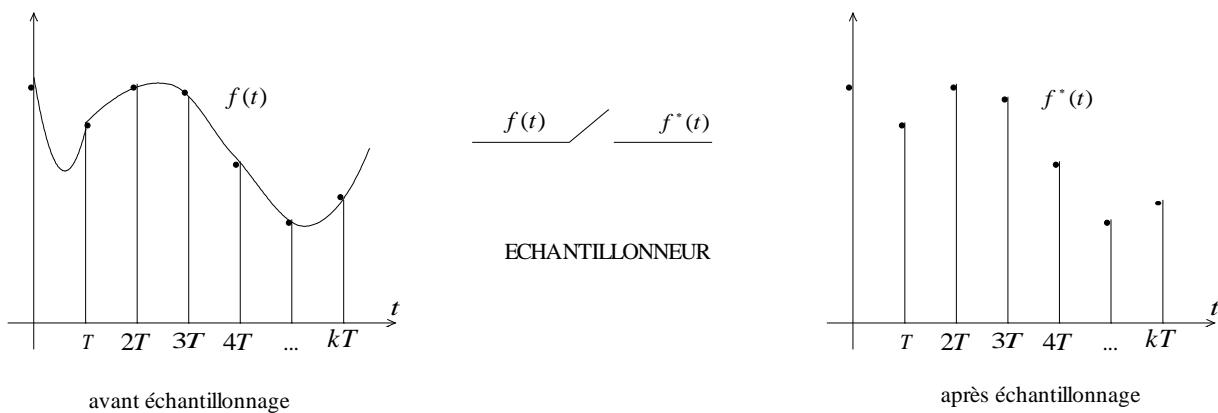


L'utilisation d'un tel calculateur placé dans la boucle de correction nécessite l'emploi de **convertisseurs** des informations d'entrée et de sortie du calculateur : il impose donc en particulier le choix à l'entrée du calculateur d'une fréquence de discréttisation temporelle (**échantillonnage**), ainsi que celui d'un mode de lissage des informations binaires sortant du calculateur afin d'adapter celles-ci à l'entrée des actionneurs (**restitution**). Il est dans ce cas possible de représenter la boucle de correction comme suit.

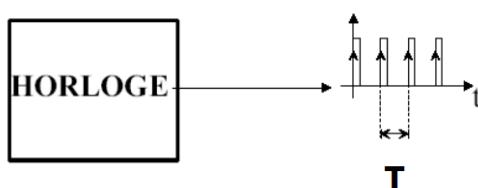
- L'opération d'**échantillonnage** (représenté de manière symbolique par un interrupteur) est la transformation d'une fonction continue du temps $f(t)$ en une suite d'unités d'informations $f^*(t)$ sur cette fonction à des instants discrets du temps nommés **instants d'échantillonnage**. On a, avec $\delta(t)$ l'impulsion de Dirac,

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \cdot \delta(t - kT).$$

soit, graphiquement,



Le réel T est la **période d'échantillonnage**, constante pour un processus donné. L'échantillonneur est commandé par l'horloge du calculateur, il peut être assimilé à un interrupteur normalement ouvert qui se ferme aux instants d'échantillonnage $t = 0$, $t = T$, $t = 2T$, etc...

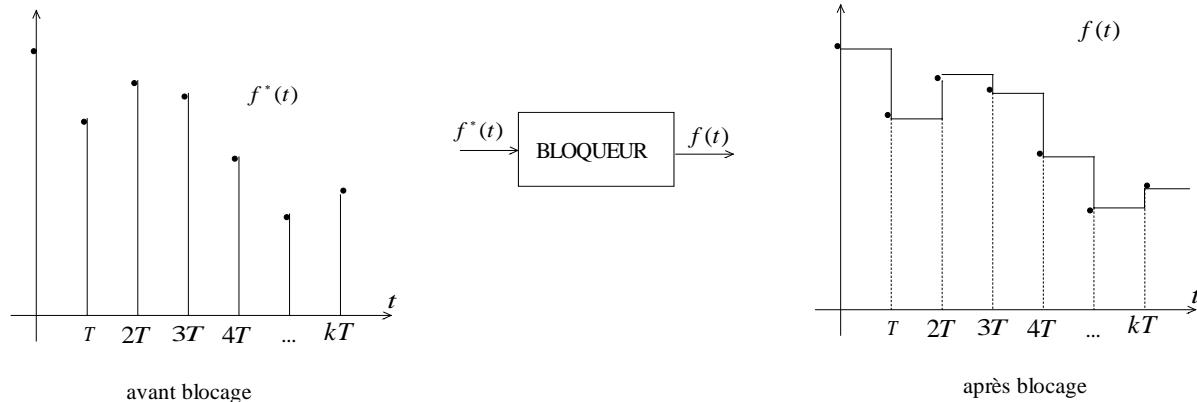


- Le **convertisseur CAN** (analogique → numérique) effectue ensuite la conversion d'un signal échantillonné $f^*(t)$ en un signal numérisé f_n (nombres entiers binaires en 8 bits, 12 bits, 16 bits) apte à être traité par le calculateur. Celui-ci exécute l'**algorithme de commande** programmé par l'utilisateur, et génère, en utilisant l'erreur entre la sortie mesurée et sa consigne, un signal numérisé de commande du système. Le **convertisseur CNA** (numérique → analogique) effectue alors la conversion inverse de celle du **CAN**.

- L'opération de **reconstitution**, ou de **blocage**, consiste enfin à transformer une fonction $f^*(t)$ définie aux instants d'échantillonnage en une fonction continue du temps $f(t)$ telle que, pour tout k ,

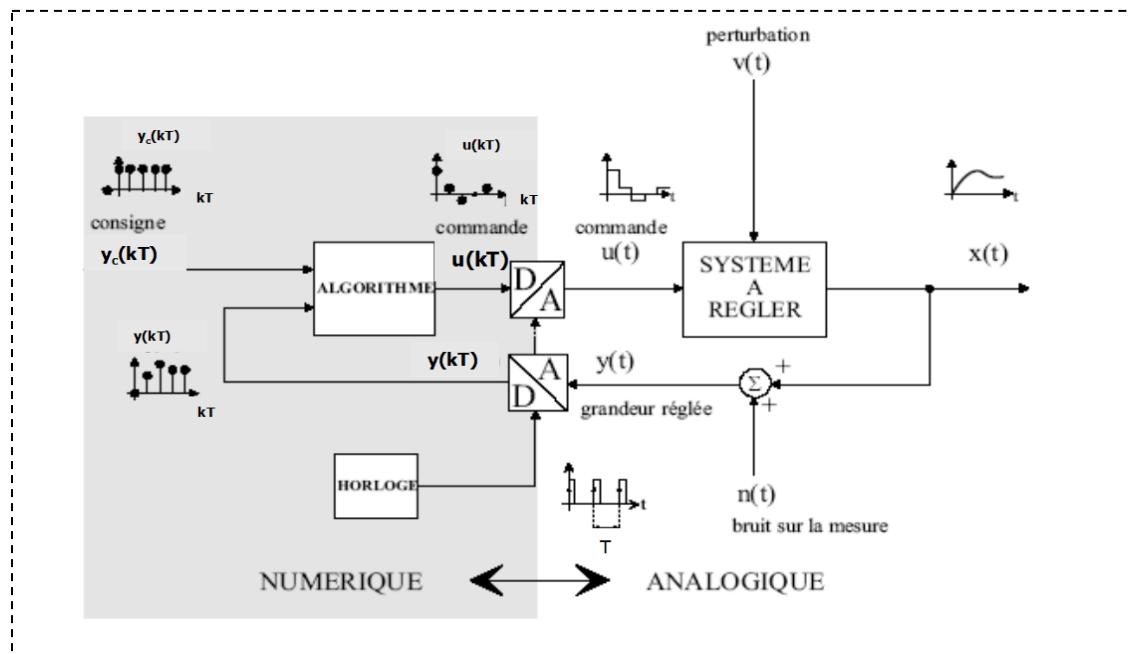
$$f(t) = f^*(kT) \quad \forall t \in [kT, (k+1)T[$$

soit, graphiquement,



Le bloqueur sert donc à **maintenir constant le signal de commande** entre deux instants d'échantillonnage.

Le schéma fonctionnel générale d'une régulation numérique ainsi que l'allure des différents signaux sont représentés par la figure suivante :



2. CHOIX DE LA PERIODE D'ECHANTILLONNAGE.

A priori, le principe de l'échantillonnage d'un signal analogique peut laisser croire qu'une partie de l'information originale qu'il contient est irrémédiablement perdue. Dans le cas particulier de la régulation automatique, on conçoit que ce phénomène pourrait avoir des conséquences inadmissibles, le régulateur numérique ne réagissant

par exemple plus en certaines situations, simplement parce l'information manque, masquée par le processus d'échantillonnage.

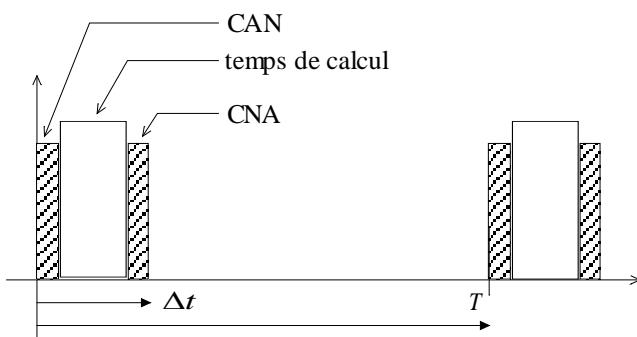
Même si cet effet secondaire de l'échantillonnage se produit pratiquement toujours, le phénomène reste négligeable d'un point de vue pratique si la période d'échantillonnage T est choisie convenablement. Qui plus est, on se propose ici de montrer de manière qualitative que l'observation même intermittente d'un signal analogique $y(t)$ est suffisante si ses caractéristiques répondent aux hypothèses du *théorème de Shannon*.

Le choix d'une période est donc une étape délicate. La période d'échantillonnage doit être assez grande par rapport au temps nécessaire au calcul de la commande à partir de la mesure, mais assez faible pour éviter les pertes d'information. Il y a donc un compromis à réaliser.

• Pourquoi choisir T grande ?

Nous faisons en premier lieu l'hypothèse suivante : la durée de fermeture de l'échantillonneur est négligeable devant T . En général, on a $t_f = \frac{T}{10}$.

Le chronogramme des opérations est alors le suivant :



Nous n'avons donc pas représenté sur ce chronogramme le temps de fermeture de l'échantillonneur t_f . En revanche, les temps de conversion analogique – numérique et numérique – analogique, ainsi que le temps de calcul sont incontournables. La somme de ces trois temps, à savoir Δt , doit être la plus faible possible devant la période d'échantillonnage T .

En effet, considérons un instant d'échantillonnage quelconque $t = kT$. On suppose disposer à cet instant-là de la mesure de la sortie, soit $y_m(kT)$. On calcule alors la commande du système adaptée à la situation, soit $u(kT)$. En théorie, on suppose donc **simultanément** mesurer la sortie et appliquer la commande. D'après le chronogramme des opérations, on s'aperçoit que ce n'est pas le cas, puisque la commande est en fait disponible à $kT + \Delta t$ et non à kT . Toutefois, cette confusion a d'autant moins d'importance que le temps Δt est faible devant la période d'échantillonnage T . C'est pourquoi celle-ci doit être choisie **assez grande**.

• Pourquoi choisir T assez petite ?

Vous avez étudié en traitement du signal le théorème de Shannon, que nous rappelons ici.

Théorème de Shannon : Soit $f(t)$ un signal périodique de période $T_f = \frac{2\pi}{\omega_f}$.

Pour que l'on puisse reconstituer ce signal à partir de son signal échantillonné $f^*(t)$ (c'est-à-dire pour qu'il n'y ait pas de perte d'information), il faut que la période d'échantillonnage vérifie

$$T_{ech} < \frac{T_f}{2}$$

Ce théorème est souvent cité dans un contexte de contrôle – commande, mais c'est à tort car il s'applique essentiellement au traitement des signaux. Dans le contexte qui nous occupe, il faut plutôt utiliser **une approche système**. En effet, il faut bien comprendre que l'on ne s'intéresse pas tant ici à ses signaux d'entrée et de sortie, mais plutôt à la commande de celui-ci. **Comment échantillonner un système pour que la perte d'information**

inévitale associée à cette opération ne vienne pas fausser la conception de sa commande ? Cette question est complexe et ne peut être résolue en utilisant le théorème de Shannon

Une approche système : considérons un système de fonction de transfert en boucle ouverte

$$G(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p) \cdots (1 + \tau_n p)}$$

Alors, si τ_{\min} est la plus petite constante de temps associée au système, la période d'échantillonnage T_{ech} doit être $\leq \frac{\tau_{\min}}{2}$ et peut être choisie telle que

$$\frac{\tau_{\min}}{10} \leq T_{ech} \leq \frac{\tau_{\min}}{5}.$$

De cette manière, on retiendra dans l'échantillonnage du système toutes les dynamiques de celui-ci. C'est une approche **temporelle**, qui ne s'applique qu'à des systèmes ne possédant pas de pôles complexes. Mais cette approche peut s'énoncer aussi dans le domaine **fréquentiel**, et elle est alors valable pour tous les systèmes.

Dans ce cadre on considère, plutôt que des constantes de temps, la pulsation de coupure ω_c à -3dB du système en boucle ouverte (c'est-à-dire la pulsation à laquelle le gain du système est 3dB en dessous de son gain statique en dB), et on choisit alors T_{ech} telle que

$$5\omega_c \leq \omega_{ech} \leq 10\omega_c$$

Cette méthode est souvent mentionnée dans les ouvrages d'automatique, mais on peut lui trouver un défaut : *elle ne tient compte que de la boucle ouverte*, alors que le système corrigé fonctionnera en boucle fermée. Or, en général, on veut que la commande fasse en sorte que le système en boucle fermée soit plus rapide que le système en boucle ouverte (c'est-à-dire que ses constantes de temps soit plus faibles, ou d'une manière équivalente que sa pulsation de coupure soit plus haute). *Il faut donc plutôt appliquer les règles qui viennent d'être énoncées à la boucle fermée*. Comme c'est l'utilisateur qui fixe les performances de celle-ci, elles sont donc connues et la période d'échantillonnage peut être calculée sur cette base.

Remarque : Il existe aussi une abaque qui permet de quantifier l'erreur de reconstitution en fonction de l'ordre du système (voir **Annexe 2** pour plus de détails).

En résumé, on peut dire que :

La période d'échantillonnage T d'un système dynamique fait l'objet d'un compromis entre la qualité de la discréétisation (T petit) et la mise en œuvre de l'asservissement (T grand). Pour assurer ce compromis, on peut s'inspirer des règles qui ont été présentées.

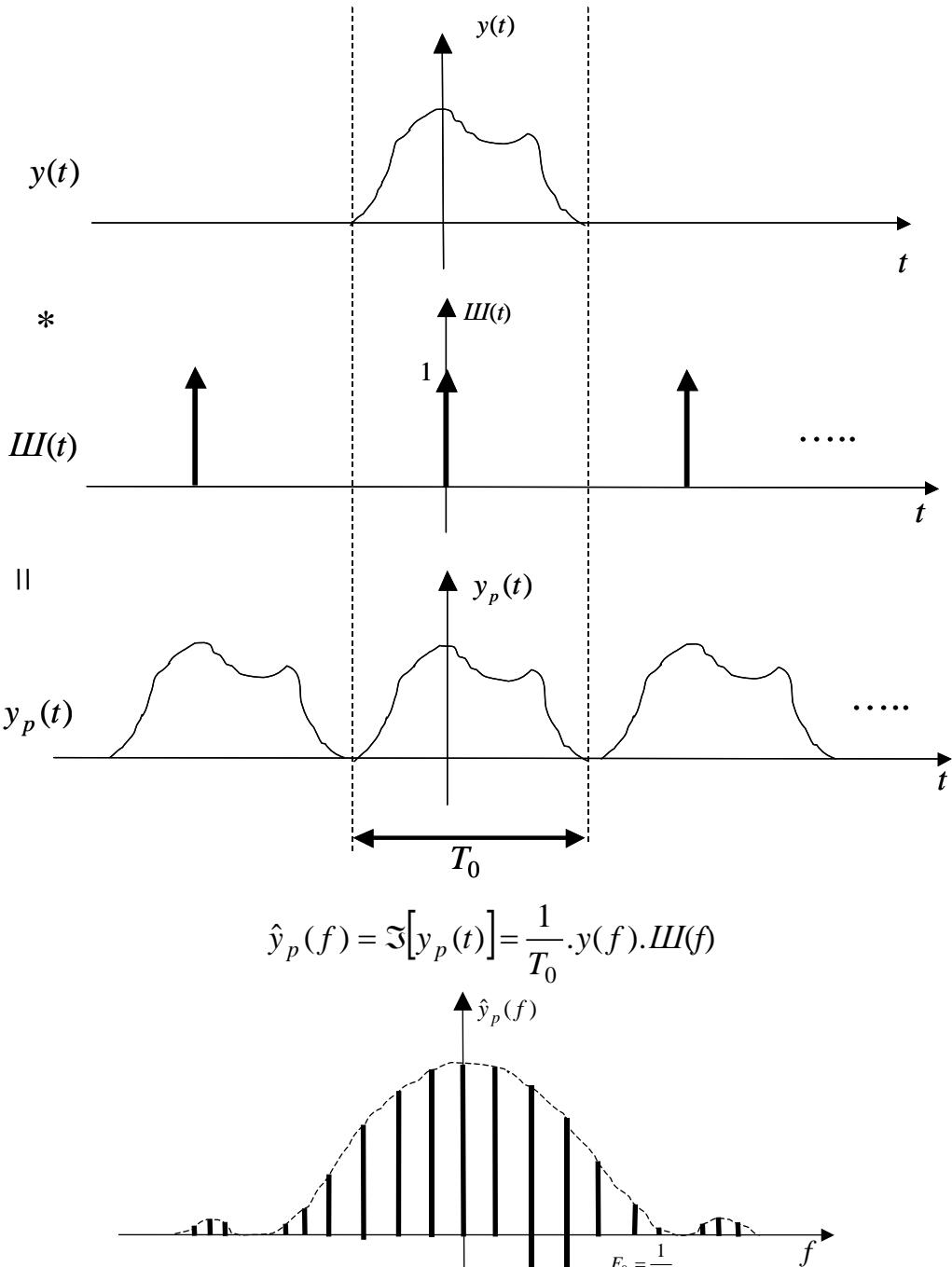
3. ÉTUDE SPECTRALE ET FILTRE ANTI-REPLIMENT :

Afin d'introduire et d'expliquer le rôle du filtre anti-repliement ou anti-recouvrement (en anglais – anti-aliasing filter), nous allons rappeler certaines propriétés spectrales des signaux :

Théorème de dualité :

- Une fonction périodique a un spectre de raies.
- Une fonction échantillonnée (raies temporelles) a un spectre périodique.

Soit le signal $y(t)$ périodisé par une convolution avec un peigne de Dirac de période T_0 et de « dents » unitaires. Le spectre du signal périodique aura alors un spectre de raies. En fait, $\hat{y}_p(f)$ peut être assimiler à un peigne modulé par la transformée du motif.



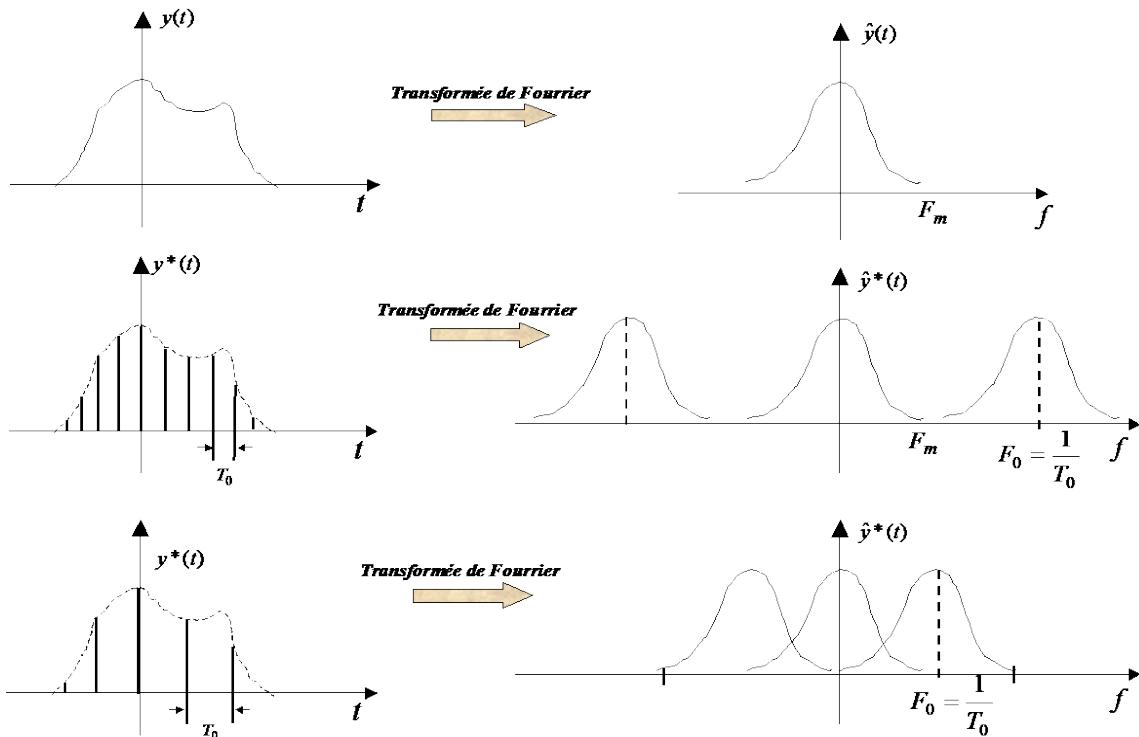
Spectre d'une fonction périodique

Si maintenant on prend un signal échantilloné $y^*(t)$ à une période T_0 et on étudie son spectre :

$$y^*(t) = \sum_k y(kT_0) \delta(t - kT_0) = y(t) \cdot III(t)$$

$$\Rightarrow \hat{y}^*(f) = \Im[y^*(t)] = y(f) \cdot III(f)$$

La transformée d'une fonction échantillonnée est une fonction périodique dans l'espace fréquentiel, sa période est $F_0 = \frac{1}{T_0}$.



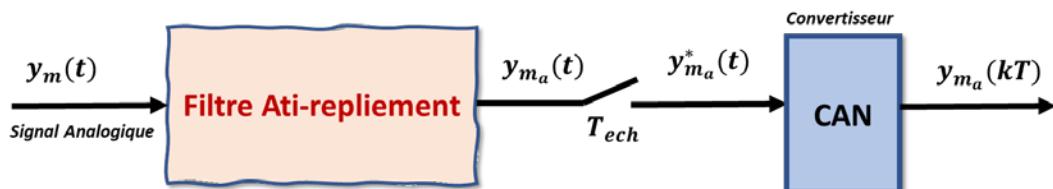
Spectre d'un signal échantillonné

La connaissance qu'on doit posséder sur $y(t)$ est de nature fréquentielle. La figure ci-dessus montre bien l'utilité du théorème de Shannon. En effet, si F_m (fréquence max) est suffisamment petit devant la fréquence d'échantillonnage F_0 , la périodisation due à l'échantillonnage se fait sans recouvrement. Du spectre périodique il est donc possible d'extraire le spectre $\hat{y}(t)$ de $y(t)$ à l'aide d'un filtre passe-bas avec la condition minimum qui apparaît sur la figure. C'est la condition de Shannon :

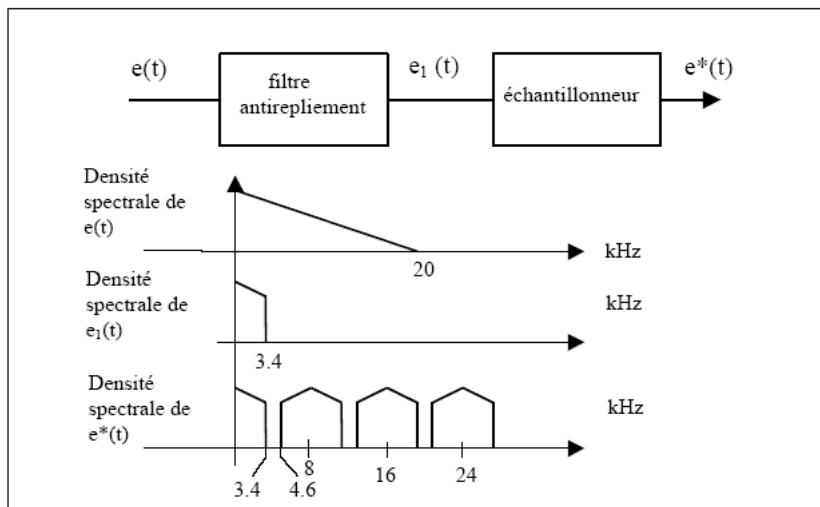
$$F_0 \geq 2F_m$$

Il n'est pas possible de connaître cette fréquence maximale F_m . Mathématiquement elle est infinie. En pratique, au-delà de F_m , les harmoniques restants ne contiennent qu'une faible partie (1 à 2%) de l'énergie. Ainsi, pour limiter le spectre du signal discrétilisé et obtenir F_m , on place des **filtres analogiques** type passe-bas sur le signal continu. Ces filtres coupent aussi les bruits parasites superposés au signal avant qu'il soit échantillonné. Ils sont donc **indispensables** pour une bonne reconstitution. Ils sont nommés **filtres anti-repliement** ou **anti-aliasing filters**. Ils ont donc pour pulsation de coupure $\omega_{Nyquist} = \frac{\pi}{T_0}$, appelée aussi **pulsation de Nyquist..**

Un filtre anti-recouvrement ou anti-repliement est nécessaire avant la conversion A/D pour prévenir du recouvrement spectral :



La figure suivante représente très schématiquement le spectre du signal avant et après échantillonnage dans le cas du téléphone numérique (la densité spectrale représente la puissance spectrale équivalente au diagramme de Bode).



Filtre antirepliement en téléphonie numérique. Choix de $F_m=3.4\text{ kHz}$

Remarque : Pour des motifs de réalisabilité, on doit pratiquement se contenter d'un filtre d'ordre idéalement très élevé (4 à 8), le plus souvent de type Butterworth ou Bessel. Un tel filtre doit être intégré à tout système échantillonné, même si une partie de son action est souvent déjà réalisée par le système à asservir lui-même, ce dernier étant par nature de type filtre passe-bas.

Le filtre anti-repliement est inévitablement vu d'un mauvais œil par l'ingénieur automatien. Il provoque en effet des déphasages considérables dans la boucle de régulation, diminuant, pour une précision donnée, le degré de stabilité.

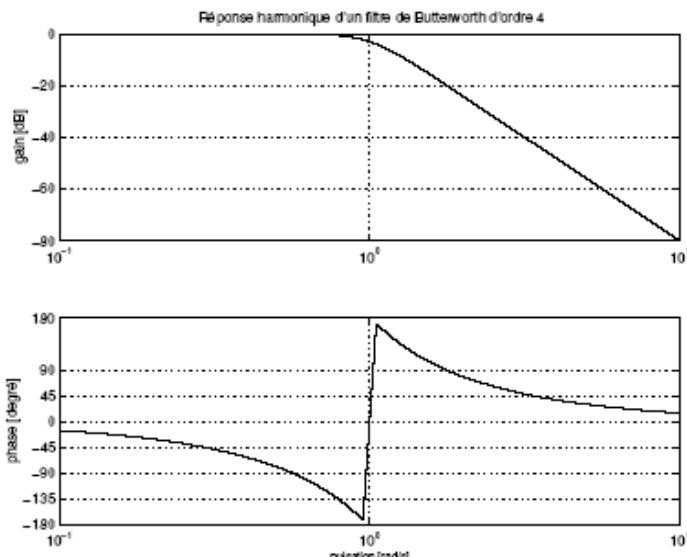


Diagramme de Bode d'un filtre Butterworth d'ordre 4

4. RECONSTRUCTION PAR BLOQUEUR D'ORDRE ZERO.

a. Reconstitution d'un signal.

L'étage de reconstitution d'un signal échantillonné est indispensable car il est en général nécessaire de transformer la suite des échantillons en signaux continus acceptables technologiquement par les actionneurs.

Considérons un signal quelconque $f(t)$ que l'on échantillonne à la période T . Comment reconstituer le signal d'origine sur la base de ses échantillons. Entre deux instants d'échantillonnage kT et $(k+1)T$, effectuons un développement de Taylor de $f(t)$, soit

$$f(kT + \tau) = f(kT) + \tau \cdot f'(kT) + \frac{\tau^2}{2!} f''(kT) + \dots$$

Ne disposant que des valeurs de la fonction $f(t)$ aux instants d'échantillonnage, on ne connaît pas ses dérivées. Celles-ci peuvent être alors approximées par des différences finies, soit

$$\begin{aligned} f'(kT) &= \frac{1}{T} [f(kT) - f((k-1)T)] \\ f''(kT) &= \frac{1}{T^2} [f(kT) - 2f((k-1)T) + f((k-2)T)] \end{aligned}, \text{etc...}$$

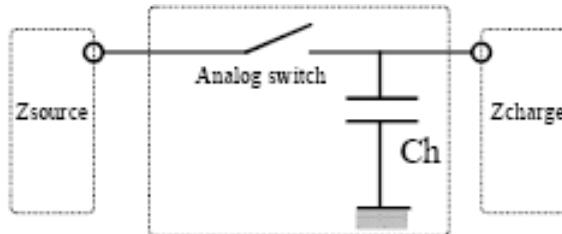
Pour en revenir à la fonction $f(t)$ elle-même, on aura alors sur la base de ses échantillons une approximation d'autant meilleure que l'on prendra plus de termes dans le développement limité. Toutefois, pour des raisons technologiques (complexité rapidement croissante de la réalisation matérielle), on ne considère en pratique que les bloqueurs d'ordre 0 et 1, soit

$$\begin{aligned} f(kT + \tau) &= f(kT) \quad \text{bloqueur d'ordre 0,} \\ f(kT + \tau) &= f(kT) + \frac{\tau}{T} [f(kT) - f((k-1)T)] \quad \text{bloqueur d'ordre 1.} \end{aligned}$$

D'un point de vue industriel, on n'utilise même que le bloqueur d'ordre 0 ; c'est pourquoi nous n'aborderons que celui-ci dans notre étude. L'utilisation d'un tel bloqueur revient donc à approximer la valeur de la fonction $f(t)$ sur un intervalle d'échantillonnage à sa valeur au début de l'intervalle. Plus la période d'échantillonnage est faible, meilleure est cette approximation.

b. Réalisation.

Réaliser un échantillonneur bloqueur consiste dans sa forme basique à associer un *interrupteur à une capacité*.

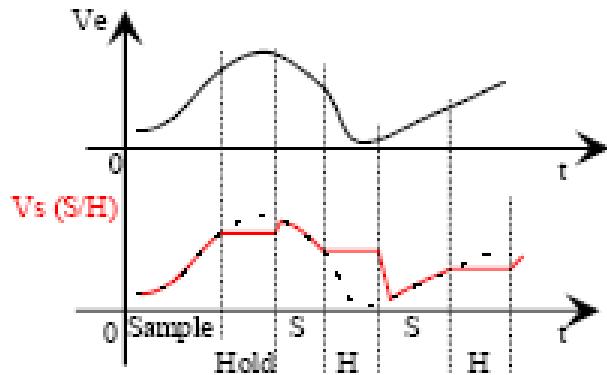


Structure de base de l'échantillonneur bloqueur

La capacité joue le rôle d'élément mémoire, l'interrupteur est là pour réactualiser la valeur mémorisée ou bien l'isoler vis à vis de l'entrée. Dans le cas idéal :

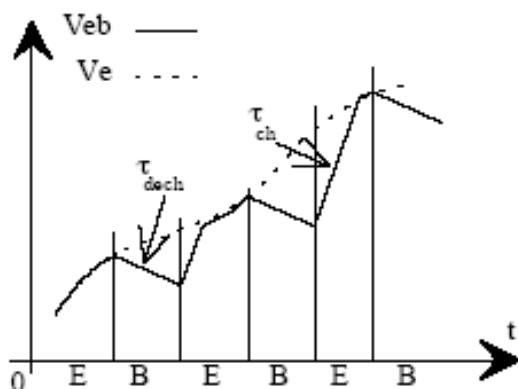
- **Interrupteur fermé : $V_{eb} = V_e$**
La sortie V_{eb} suit les variations de l'entrée V_e . On transmet directement l'entrée sur la sortie. On dit que l'on est en phase d'échantillonnage (*Sample*).
- **Interrupteur ouvert : $V_{eb} = Cste$**
La sortie reste constante et égale à la dernière valeur transmise du signal d'entrée. On dit que l'on est en phase de blocage (*Hold*).

La figure suivante montre l'évolution du signal de sortie durant les différentes phases de fonctionnement.



Évolution du signal de sortie durant les phases d'échantillonnage et de maintien

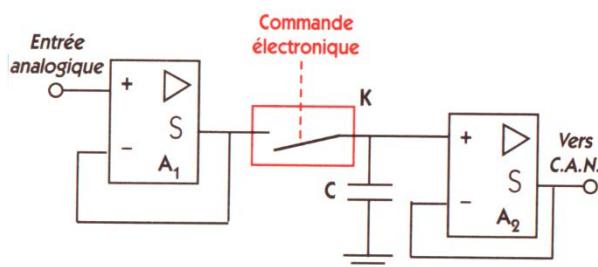
Ainsi, en exagérant les constantes de temps de charge et décharge liées au condensateur, l'évolution du signal de sortie correspondant à un signal d'entrée échantillonné bloqué devient :



Influence des constantes de temps de l'E/B

On voit apparaître les deux grandes limitations d'un E/B. Sa vitesse de fonctionnement va être liée à la constante de charge (limitation de la fréquence d'échantillonnage). Sa capacité à maintenir l'échantillon va être liée à la constante de décharge (limitation de la résolution obtenue).

De manière à s'affranchir de l'environnement amont et aval de l'E/B, on dispose en entrée et en sortie de l'E/B deux suivieurs :

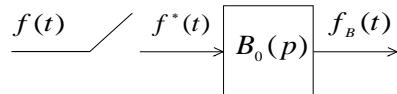


L'échantillonneur bloqueur contient alors :

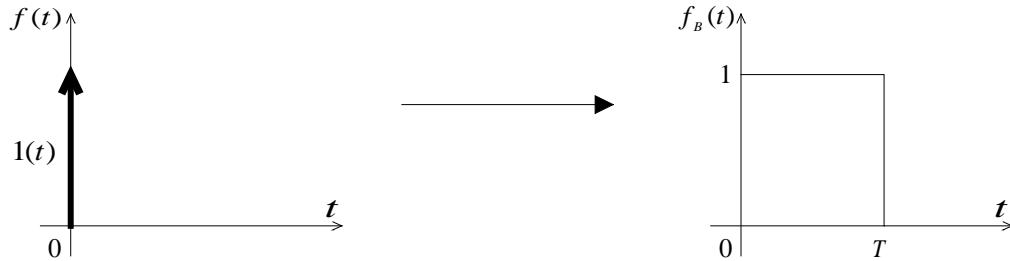
- un **amplificateur d'entrée (A1)** qui offre une haute impédance d'entrée au signal analogique et une basse impédance de sortie pour une **charge rapide** du **condensateur de mémorisation C**, après la fermeture de K, c'est la phase **mémorisation de la tension par C**,
- un **amplificateur de sortie (A2)** qui présente une haute impédance d'entrée et permet, après l'ouverture de K, une **décharge très lente** de C, d'où une tension pratiquement constante appliquée par sa sortie à l'entrée du C.A.N.

c. Fonction de transfert du bloqueur d'ordre zéro.

Considérons le schéma de l'échantillonneur – bloqueur, avec $B_0(p)$ la fonction de transfert à déterminer,



et appliquons une impulsion de Dirac en entrée de celui-ci, soit $f(t) = \delta(t)$. On a la situation suivante :



avec donc en sortie

$$f_B(t) = 1(t) - 1(t-T) \Rightarrow F_B(p) = \frac{1}{p} - \frac{\exp(-Tp)}{p} = \frac{1 - \exp(-Tp)}{p}.$$

La fonction $\mathbf{1}(t)$ représente la fonction échelon unitaire.

Comme la fonction de transfert d'un système est égale à la transformée de Laplace de sa réponse impulsionnelle, on a

$$B_0(p) = \frac{1 - \exp(-Tp)}{p}.$$

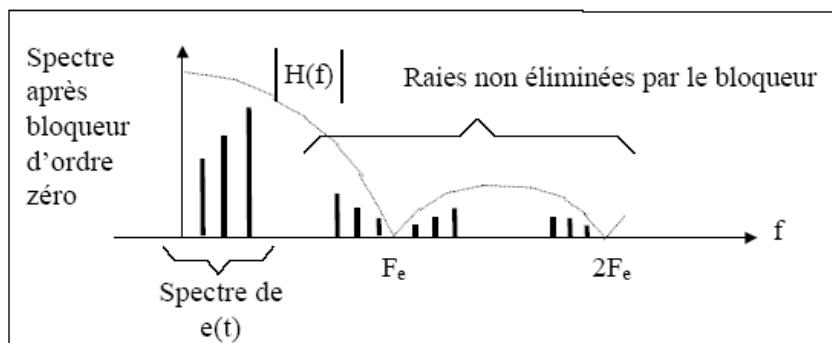
Un échantillonneur – bloqueur est donc un système introduisant un gain et un déphasage du signal d'origine. On calcule facilement que

$$|B_0(j\omega)| = T \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \text{ et } \arg(B_0(j\omega)) = -\frac{\omega T}{2}$$

Exercice : tracer et commenter les lieux de Bode du bloqueur d'ordre 0.

d. Spectre d'un signal bloqué.

Après passage dans le bloqueur d'ordre zéro le signal présente des "marches d'escalier", celles-ci se traduisent dans le domaine des fréquences par les raies supplémentaires de la figure ci-dessous.



Spectre du signal après passage dans le bloqueur d'ordre zéro

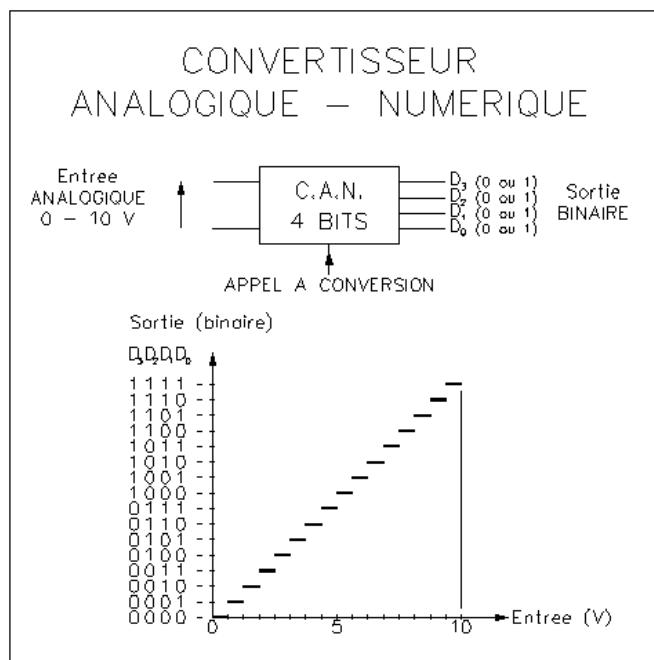
e. Reconstitution par bloqueur d'ordre supérieur

En pratique, c'est la reconstruction par bloqueur d'ordre 0 qui est presque toujours mise en oeuvre. On peut toutefois imaginer perfectionner la reconstruction en effectuant une extrapolation d'ordre 1 (voir figure ci-dessous).

Une telle méthode de reconstruction est coûteuse en matériel. Elle présente néanmoins l'avantage de lisser la commande, effet favorable lorsque le système à régler possède des modes (pôles) rapides mal amortis. S'agissant de ce point - là, un effet comparable est obtenu en filtrant la commande provenant d'un bloqueur d'ordre 0.

5. QUANTIFICATION.

La quantification est l'opération qui permet de *traduire une grandeur continue en une représentation binaire*. C'est donc une correspondance entre un nombre infini de valeurs possibles du signal à traduire et un nombre fini de valeurs du signal traduit. En conséquence, cette opération introduit des *erreurs* qui dépendent directement du format du convertisseur *analogique – numérique* (CAN), c'est-à-dire en fait du *nombre de bits* caractérisant le convertisseur.



Convertisseur Analogique - Numérique 4 Bits

Soit q le pas de quantification d'un CAN : par exemple si le convertisseur numérise le signal exprimé en volts sur 12 bits, q représente la différence des tensions à traduire provoquant deux codes de sortie différent, soit

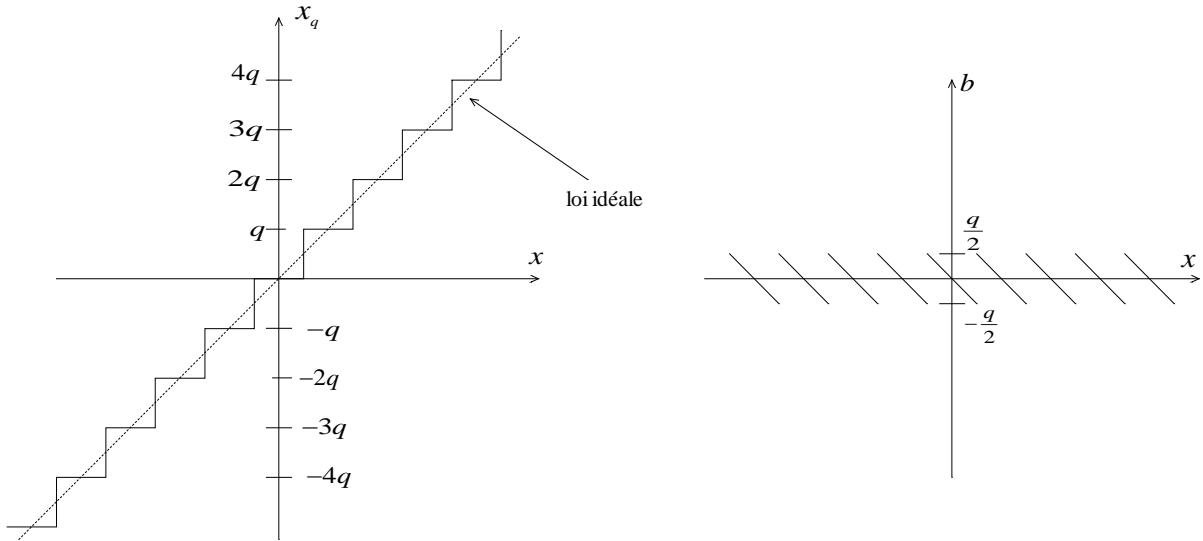
$$q^{-1} = 2^r = 2^{12} = 1024.$$

Dans ce cas, la loi de quantification est dite uniforme. Le choix du nombre de bits dépend du *compromis entre la rapidité de conversion et la précision souhaitée*. En pratique, lorsque le signal est bruité, il est classique d'utiliser un convertisseur 12 bits.

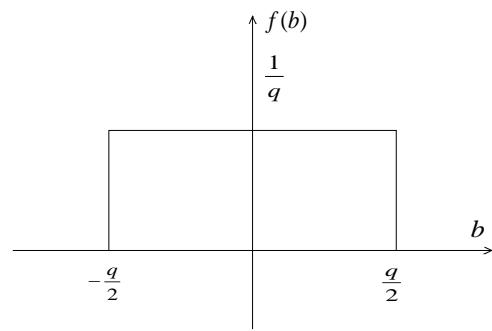
Soit $x(t)$ un signal à quantifier, et $x_q(t)$ le signal quantifié. Il est commode de considérer ce dernier comme la somme du signal à quantifier et d'un bruit aléatoire $b(t)$, soit

$$b(t) = x(t) - x_q(t),$$

qui représente l'erreur de quantification et que l'on appelle le **bruit de quantification**. Représentons les signaux x_q et b en fonction du signal à quantifier x .



On voit ainsi que le bruit de quantification varie entre $-\frac{q}{2}$ et $\frac{q}{2}$. On modélise alors le bruit en fonction du pas de quantification par une loi de densité de probabilité uniforme.



Densité de probabilité du bruit de quantification.

Dans ce cas, la variance du bruit de quantification est donnée par

$$\sigma_n^2 = \frac{q^2}{12}$$

et le rapport des variances du signal à quantifier et du bruit de quantification est alors égal à

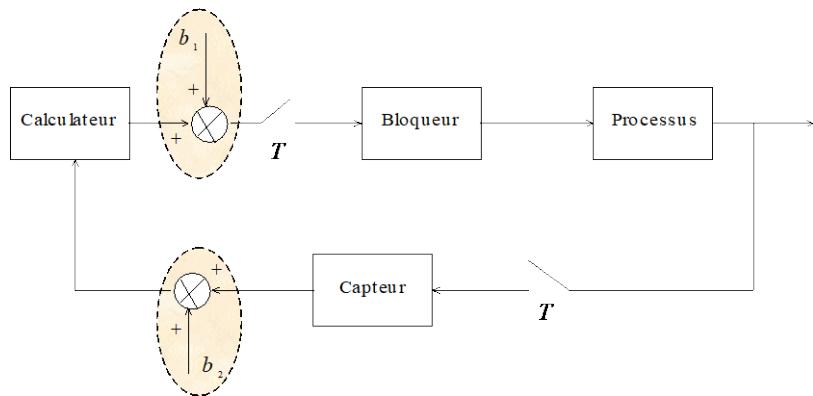
$$R_{s/b} = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_n^2} = 12 \frac{\sigma_x^2}{q^2} = 12 \frac{\sigma_x^2}{4^{-r}},$$

soit, en décibels,

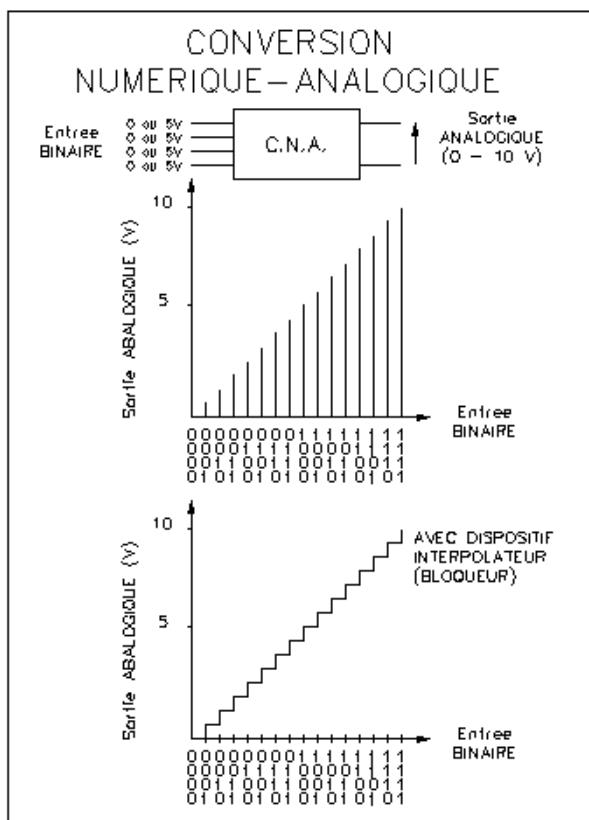
$$R_{s/b} = 20 \log_{10}(12\sigma_x^2) + 20 \log_{10}(4) \cdot r.$$

Le rapport signal/bruit varie donc linéairement en fonction du nombre de bits r du convertisseur. Plus r augmente, plus le rapport est favorable.

En outre, tout comme la conversion analogique – numérique, le conversion *numérique –analogique* (CNA) peut être représentée par un bruit additif. Par conséquent, une boucle d'asservissement comporte, en dehors des bruits physiques pouvant perturber le système, deux **bruits additifs** comme représentés à la figure suivante.



Ces bruits provoqueront des **oscillations de la sortie**, oscillations négligeables si le rapport signal – bruit $R_{s/b}$ est suffisamment important.



Convertisseur Numérique – Analogique 4 Bits

6. INFLUENCE DE LA REPRESENTATION DES NOMBRES.

Tout calculateur utilise une représentation particulière des nombres. Certains ne travaillent qu'en nombres entiers, d'autres acceptent la représentation des nombres flottants. Plusieurs formats sont classiquement adoptés (norme IEEE) : par exemple un format 32 bits ou un format 64 bits est disponible en langage C. La précision de cette représentation provoque un comportement plus ou moins précis de la programmation du correcteur.

Considérons par exemple le correcteur ayant pour entrée l'erreur de boucle $\varepsilon(k)$ et pour sortie la commande $u(k)$ à appliquer au bloqueur. Supposons que l'équation récurrente du correcteur soit

$$u(k) = -bu(k-1) + \varepsilon(k) + a\varepsilon(k-1).$$

Traitons alors deux cas pour une entrée $\varepsilon(k) = 1$.

Cas n°1 : $a = -0,9999$ et $b = -0,9998996$.

En effectuant les calculs sur un calculateur où les nombres sont représentés sur 64 bits, on obtient

$$u(0) = 1, \quad u(1) = 0,9999996, \quad u(2) = 0,9999959, \quad u(3) = 0,99999518, \\ u(4) = 0,99999417 \text{ et pour } k \text{ très grand, } u(k) = 0,996.$$

Cas n°2 : $a = -0,9999$ et $b = -0,9999$.

En effectuant les calculs sur un calculateur où les nombres sont représentés sur 16 bits, on obtient

$$u(0) = 1, \quad u(1) = 1,0009, \quad u(2) = 1,0017, \quad u(3) = 1,0026, \\ u(4) = 1,0035 \text{ et pour } k \text{ très grand, } u(k) = 10,002.$$

On constate donc que les valeurs calculées sont extrêmement différentes. *Cette situation se reproduit chaque fois que les pôles et zéros du correcteur sont proches de 1.* Le correcteur de l'exemple est du premier ordre. Pour un correcteur d'ordre élevé, il est conseillé de l'implanter sous la forme d'une somme de correcteurs élémentaires du premier ou du second ordre.

Chapitre II

Transformée en z

Comme dans le cas continu, la transformée en de Laplace nous permet de définir des fonctions de transfert discrètes des systèmes linéaires. La transformée en z est la transformée de Laplace des signaux échantillonnés. Elle joue vis-à-vis des systèmes linéaires échantillonnés le même rôle que la transformée de Laplace vis-à-vis des systèmes linéaires continus.

1. LA TRANSFORMEE EN Z	18
A. DEFINITION.....	18
B. PROPRIETES.....	19
2. TRANSFORMEE INVERSE EN Z.	20
A. USAGE DE LA TABLE DE TRANSFORMEES.....	20
B. METHODE DE LA LONGUE DIVISION	20
C. OBTENTION D'UNE EQUATION DE RECURRENCE.	21
3. APPLICATION DE LA TRANSFORMEE EN Z.....	22

1. LA TRANSFORMEE EN Z

a. Définition.

Soit $f(t)$ un signal temporel nul pour $t < 0$. On sait que l'échantillonnage de $f(t)$ à la période T conduit au signal

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(kT) \delta(t - kT).$$

Si l'on prend alors la transformée de Laplace (noté \mathcal{L}) de ce signal temporel, il vient

$$F^*(p) = \mathcal{L}(f^*(t)) = \mathcal{L}(\sum_{k=0}^{+\infty} f(kT) \delta(t - kT)) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(kT) \cdot \mathcal{L}[\delta(t - kT)] = \sum_{k=0}^{+\infty} f(kT) \cdot \exp(-kTp).$$

En posant alors

$$z = \exp(Tp)$$

cette transformée s'écrit

$$F(z) = F^*(p) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(kT) \cdot z^{-k}$$

Si cette série converge, $F(z)$ est appelée transformée en z du signal $f(t)$. On utilisera la notation $Z[f(t)] = F(z)$

La transformée en z joue vis-à-vis des systèmes linéaires échantillonnes le même rôle que la transformée de Laplace vis-à-vis des systèmes linéaires continus.

On donne à titre d'exemple les transformées en z d'un échelon et d'une rampe.

Exemple 1 : Soit $f(t) = 1(t)$, échelon d'amplitude 1. Alors

$$F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} 1(kT) \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1 - z^{-(k+1)}}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

dans la couronne de convergence $|z^{-1}| < 1 \Leftrightarrow |\exp(-Tp)| < 1$.

Exemple 2 : Soit $f(t) = t \cdot 1(t)$, une rampe de pente 1. Alors :

$$F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} kT \cdot 1(kT) \cdot z^{-k} = T \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} kz^{-k}.$$

Or, d'après le théorème du retard, on a, pour une fonction quelconque $f(t)$,

$$\begin{aligned} L[f^*(t) - f^*(t-T)] &= L[f^*(t)] - L[f^*(t-T)] = F^*(p) - \exp(-Tp) \cdot F^*(p). \\ Z[f^*(t) - f^*(t-T)] &= (1 - z^{-1}) F(z) \end{aligned}$$

Mais, ici,

$$\begin{aligned} Z[f^*(t) - f^*(t-T)] &= 0 + Tz^{-1} + 2Tz^{-2} + 3Tz^{-3} + \dots - 0 - 0 - Tz^{-2} - 2Tz^{-3} - 3Tz^{-4} - \dots = Tz^{-1} + Tz^{-2} + Tz^{-3} + \dots \\ \Rightarrow Z[f^*(t) - f^*(t-T)] &= T \frac{1}{z-1}, \end{aligned}$$

d'où

$$(1 - z^{-1})F(z) = T \frac{1}{z-1} \Rightarrow F(z) = T \frac{z}{(z-1)^2}.$$

Exercice : Calculer la transformée en z de $f(t) = a^{t/T}$ (a est une constante)

b. *Propriétés.*

On note $F(z) = Z[f(t)]$ et $G(z) = Z[g(t)]$.

• *Linéarité :*

$$Z[a.f(t) + b.g(t)] = a.F(z) + b.G(z).$$

• *Théorème du retard :*

$$Z[f(t - nT)] = z^{-n}F(z).$$

• *Théorème de l'avance :*

$$Z[f(t + nT)] = z^n \cdot \left[F(z) - \sum_{m=0}^{n-1} f(mT)z^{-m} \right].$$

• *Théorème de la valeur finale :* si les limites existent, on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (f(kT)) = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)F(z)].$$

• *Translation de la variable complexe :*

$$Z[\exp(-at)f(t)] = F(\exp(aT)z).$$

• *Multiplication par t :*

$$Z[t.f(t)] = -Tz \frac{dF(z)}{dz}.$$

• *Convolution discrète :* Soient deux signaux temporels $u(t)$ et $y(t)$, et leur produit de convolution $v(t)$ défini par

$$v(t) = \int_0^{+\infty} u(\tau).y(t - \tau)d\tau.$$

On sait que leurs transformées de Laplace $V(p) = \mathcal{L}[v(t)]$, $U(p) = \mathcal{L}[u(t)]$ et $Y(p) = \mathcal{L}[y(t)]$ vérifient alors

$$V(p) = U(p).Y(p).$$

Si l'on échantillonne maintenant ces trois signaux à la période T , on obtient

$$v(kT) = \sum_{i=0}^{+\infty} u(iT).y((k-i)T).$$

Les transformées en z vérifient alors

$$V(z) = X(z).Y(z).$$

2. TRANSFORMEE INVERSE EN Z.

Connaissant $F(z)$, la transformation inverse consiste à déterminer la suite d'échantillons $f(kT)$ telle que

$$F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(kT)z^{-k}$$

Une fonction $f(t)$ vérifiant une telle équation n'est naturellement pas unique, puisque une infinité de fonctions peuvent coïncider à tous les instants d'échantillonnage sans pour autant être égales. On cherche donc une fonction ayant les valeurs souhaitées aux instants d'échantillonnage. Il y a pour cela deux méthodes principales.

a. Usage de la table de transformées.

Etant donné une fraction rationnelle $F(z)$, on distinguera deux cas : soit elle est dans les tables (fournies à la fin de cette annexe), soit elle n'y est pas. Dans le deuxième cas, il faut la décomposer en éléments simples pour retomber sur une addition de fractions rationnelles dont les transformées inverses sont données par les tables.

Exemple : considérons la fonction $F(z)$ définie par

$$F(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}.$$

On a alors

$$F(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}.$$

L'examen de la table fournit

$$Z^{-1}\left[\frac{z}{z-1}\right] = 1(t) \text{ et } Z^{-1}\left[\frac{z}{z-2}\right] = 2^{\frac{t}{T}}.$$

On transforme alors la décomposition en éléments simples obtenus pour faire apparaître les fonctions intervenant dans les tables, soit en utilisant le théorème du retard,

$$F(z) = z^{-1} \frac{z}{z-2} - z^{-1} \frac{z}{z-1} \Rightarrow f(t) = 2^{\frac{t-T}{T}} - 1(t-T),$$

valable uniquement pour $t = kT$, soit

$$f(k) = (2^{k-1} - 1).1(k-1)$$

d'où l'on tire le tableau suivant :

k	0	1	2	3	4	5	6	...
$f(kT)$	0	0	1	3	7	15	31	...

b. Méthode de la longue division

Elle consiste à effectuer la division du numérateur de $F(z)$ par son dénominateur selon les puissances décroissantes. On aura pris soin avant cela de normer le dénominateur.

Exemple : on reprend l'exemple précédent. Il vient

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{c} 1 \\ - \\ 1 \quad - \quad 3z^{-1} \quad + \quad 2z^{-2} \\ \hline 0 \quad \quad 3z^{-1} \quad - \quad 2z^{-2} \\ \quad \quad \underline{3z^{-1} \quad - \quad 9z^{-2} \quad + \quad 6z^{-3}} \\ \quad \quad \quad \quad 7z^{-2} \quad - \quad 6z^{-3} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \end{array} \left| \begin{array}{l} z^2 - 3z + 2 \\ \hline z^{-2} + 3z^{-3} + 7z^{-4} + \dots \end{array} \right.
 \end{array}$$

En comparant ensuite avec l'égalité

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + f(3T)z^{-3} + \dots,$$

on obtient les valeurs recherchées aux instants d'échantillonnage. On n'obtient cependant pas comme avec l'autre méthode une expression analytique de $f(kT)$. Ici on a seulement la valeur de la fonction aux instants d'échantillonage.

c. Obtention d'une équation de récurrence.

Cette méthode consiste à obtenir une équation récurrente à partir de $F(z)$.

Exemple :

$$F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{z^2 - 3z + 2} \Rightarrow (z^2 - 3z + 2)Y(z) = U(z)$$

Ici $U(z) = \delta(z)$ et par conséquent $Y(z) = F(z)$, d'où en utilisant le théorème de l'avance (avec des conditions initiales nulles, $CI = 0$), on a :

$$f(k+2) - 3f(k+1) + 2f(k) = \delta(k)$$

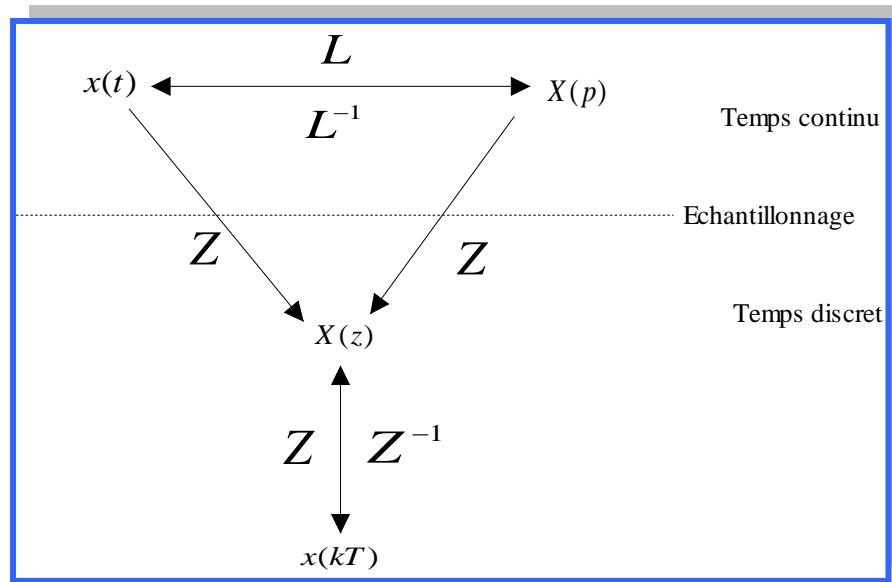
avec $\delta(k)$ l'impulsion de Dirac, soit $\delta(k) = 1$ si $k = 0$, $\delta(k) = 0$ sinon. On a alors

$$f(k+2) = 3f(k+1) - 2f(k) + \delta(k),$$

qui est l'équation de récurrence recherchée, à partir de laquelle on va calculer $f(k)$, $k \geq 0$. On a ainsi

$$\begin{aligned}
 f(0) &= 3f(-1) - 2f(-2) + \delta(-2) = 0 \\
 f(1) &= 3f(0) - 2f(-1) + \delta(-1) = 0 \\
 f(2) &= 3f(1) - 2f(0) + \delta(0) = 1, \text{ etc...} \\
 f(3) &= 3f(2) - 2f(1) + \delta(1) = 3 \\
 f(4) &= 3f(3) - 2f(2) + \delta(2) = 7
 \end{aligned}$$

Pour résumer, on donne un schéma d'utilisation des transformées de Laplace et en z , avec les irréversibilités associées à cette dernière.



3. APPLICATION DE LA TRANSFORMEE EN Z.

Tout comme on pouvait utiliser la transformée de Laplace pour résoudre une équation différentielle, on peut maintenant utiliser la transformée en z pour résoudre une équation aux différences, appelée aussi équation récurrente, du type

$$y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \cdots + a_{n-1} y(k+1) + a_n y(k) = b_0 u(k+n) + b_1 u(k+n-1) + \cdots + b_n u(k),$$

dans laquelle on connaît $u(k)$ pour tout $k \geq 0$, et où l'on cherche $y(k)$.

En effet, en prenant la transformée en z des deux membres d'une telle équation, on obtient

$$(z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n) Y(z) = (b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n) U(z),$$

d'où

$$Y(z) = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n} U(z).$$

Connaissant alors $u(k)$ pour tout $k \geq 0$, on connaît $U(z)$, et il ne reste plus qu'à effectuer une décomposition en éléments simples de $Y(z)$ puis à utiliser les tables de transformées pour trouver $y(k)$ pour tout $k \geq 0$.

Exercice : Résoudre l'équation aux différences suivante :

$$y(k+1) + 0.5y(k) = au(t) \quad \text{avec} \quad y(0) = b$$

$u(t)$ est un échelon unitaire et a et b des constantes.

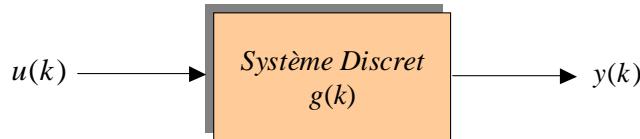
Chapitre III

Fonction de transfert d'un système échantillonné.

1. FONCTION DE TRANSFERT D'UN SYSTEME LINEAIRE DISCRET.....	24
2. FONCTION DE TRANSFERT D'UN SYSTEME LINEAIRE ECHANTILLONNE.....	24
3. REPONSE D'UN SYSTEME DISCRET OU ECHANTILLONNE.....	25
4. ASSOCIATION DE TRANSMITTANCES.....	26
5. PRESENCE D'UN BLOQUEUR D'ORDRE ZERO.....	27
6. STABILITE ET REGIME TRANSITOIRE D'UN SYSTEME DISCRET.....	28
7. POLES D'UN SYSTEME CONTINU, POLES DE SON SYSTEME ECHANTILLONNE BLOQUE ET REGIME TRANSITOIRE.....	31
8. REGIME STATIQUE D'UN SYSTEME DISCRET.....	36

1. FONCTION DE TRANSFERT D'UN SYSTEME LINEAIRE DISCRET.

Considérons un système linéaire discret



caractérisé par sa **réponse impulsionnelle** $g(k)$, $k \geq 0$, c'est-à-dire la réponse à une entrée impulsion de valeur 1 à l'instant 0. La réponse d'un tel système à une entrée quelconque $u(k)$, $k \geq 0$, est alors donnée par

$$y(k) = \sum_{i=0}^{+\infty} g(k-i).u(i) .$$

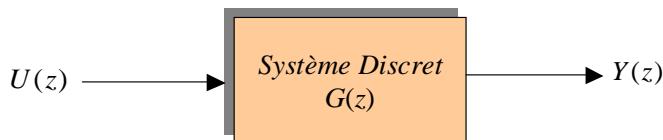
Cette égalité est la « transposition discrète » de l'équation de convolution continue que vous connaissez, soit

$$y(t) = \int_0^{+\infty} g(t-\tau).u(\tau) d\tau .$$

Calculons alors la transformée en z du signal $y(k)$, $k \geq 0$. Il vient

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} y(k) z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} g(k-i) u(i) \right) z^{-k} \\ &= g(0)u(0) + [g(1)u(0) + g(0)u(1)].z^{-1} + [g(2)u(0) + g(1)u(1) + g(0)u(2)].z^{-2} + \dots \\ &= [g(0) + g(1)z^{-1} + g(2)z^{-2} + \dots] \cdot [u(0) + u(1)z^{-1} + u(2)z^{-2} + \dots] \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} g(k) z^{-k} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} u(k) z^{-k} \\ &= G(z).U(z) \end{aligned}$$

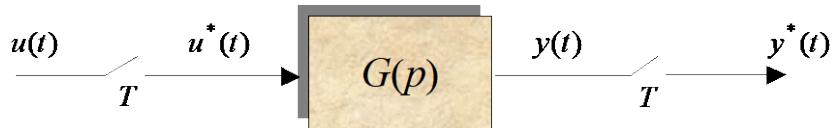
Le système discret, vu sous l'angle de la transformée en z , est équivalent à



La fraction rationnelle $G(z)$ est la **fonction de transfert du système discret** (ou **transmittance**). C'est, d'après le calcul effectué, la transformée en z de sa réponse impulsionnelle. On avait exactement le même phénomène avec la fonction de transfert d'un système continu vis-à-vis de la transformée de Laplace.

2. FONCTION DE TRANSFERT D'UN SYSTEME LINEAIRE ECHANTILLONNE.

Considérons le schéma suivant, qui fait intervenir des échantilleurs encadrant la fonction de transfert d'un système linéaire continu.



Posons

$$X^*(p) = L[x^*(t)] \text{ et } Y^*(p) = L[y^*(t)]$$

les transformées de Laplace des signaux échantillonnés. On a alors le résultat suivant, que nous ne démontrerons pas.

Théorème fondamental de l'échantillonnage : les entrées et sorties du système échantillonné vérifient

$$Y^*(p) = G^*(p) \cdot U^*(p)$$

où $G^*(p)$ est la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle échantillonnée $g^*(t)$ du système.

$g^*(t)$ est donc la fonction issue de l'échantillonnage à la période T de la réponse impulsionnelle $g(t)$, qui correspond à la sortie $y(t)$ du système lorsque l'entrée $u(t)$ est un Dirac.

Grâce à la *transformée en z*, qui revient à poser

$$z = \exp(pT),$$

on sait que les transformées en z des signaux temporels $u(t)$, $y(t)$ et $g(t)$ sont définies par

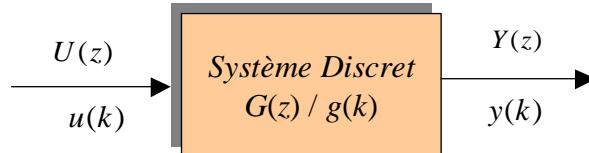
$$X(z) = X^*(p), \quad Y(z) = Y^*(p) \text{ et } G(z) = G^*(p).$$

Le théorème fondamental de l'échantillonnage revient donc à

$$Y(z) = G(z) \cdot U(z),$$

où $G(z)$ est la **fondation de transfert du système échantillonné** (ou **transmittance**). On l'obtient à partir de la fonction de transfert $G(p)$ du système continu, en calculant par les tables sa transformée de Laplace inverse $g(t)$ (qui est la réponse impulsionnelle du système), puis en prenant la transformée en z de celle-ci. On dit parfois abusivement que $G(z)$ est la transformée en z de $G(p)$.

Le système échantillonné est donc équivalent au système suivant.



3. REPONSE D'UN SYSTEME DISCRET OU ECHANTILLONNE.

Considérons le système de fonction de transfert $G(z)$. On lui applique l'entrée $u(k)$, $k \geq 0$. Pour calculer sa réponse $y(k)$, $k \geq 0$, il suffit de procéder de la manière suivante :

- **calcul de $U(z)$ à partir de $u(k)$, $k \geq 0$,**
- **calcul de $Y(z) = G(z) \cdot U(z)$,**
- **calcul de $y(k)$, $k \geq 0$, en utilisant l'une des trois méthodes de calcul de transformée inverse présentées au Chapitre II.**

On peut aussi utiliser l'égalité de convolution discrète

$$y(k) = \sum_{i=0}^{+\infty} g(k-i) \cdot u(i)$$

dans laquelle on aura au préalable calculé $g(k)$, $k \geq 0$, par transformée en z inverse de $G(z)$.

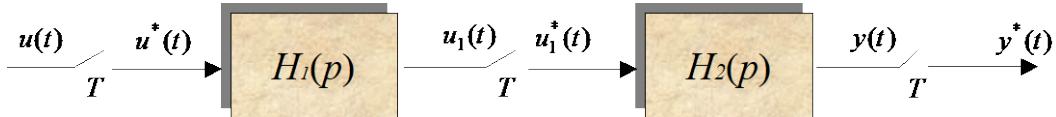
Exercice : Soit le système discret de fonction de transfert

$$G(z) = \frac{z}{z-0,5}.$$

On considère l'entrée $u(k)$ définie par $u(0)=0$, $u(1)=1$, $u(2)=2$, $u(3)=1$, $u(k)=0 \forall k \geq 4$. Calculer la réponse $y(k)$, pour $k=0, \dots, 5$, de quatre façons différentes.

4. ASSOCIATION DE TRANSMITTANCES.

Considérons le schéma en série suivant.



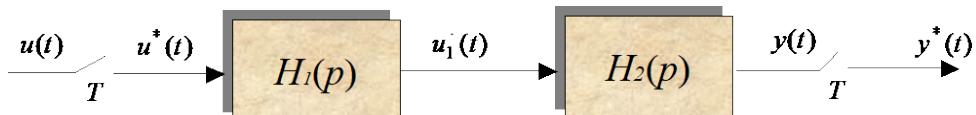
On a d'après le théorème de l'échantillonnage

$$U_1(z) = H_1(z) \cdot U(z) \text{ et } Y(z) = H_2(z) \cdot U_1(z)$$

où $H_1(z)$ et $H_2(z)$ sont par abus de langage les transformées en z de $H_1(p)$ et $H_2(p)$, d'où

$$Y(z) = H_1(z)H_2(z) \cdot U(z).$$

Cependant, dans la situation suivante,



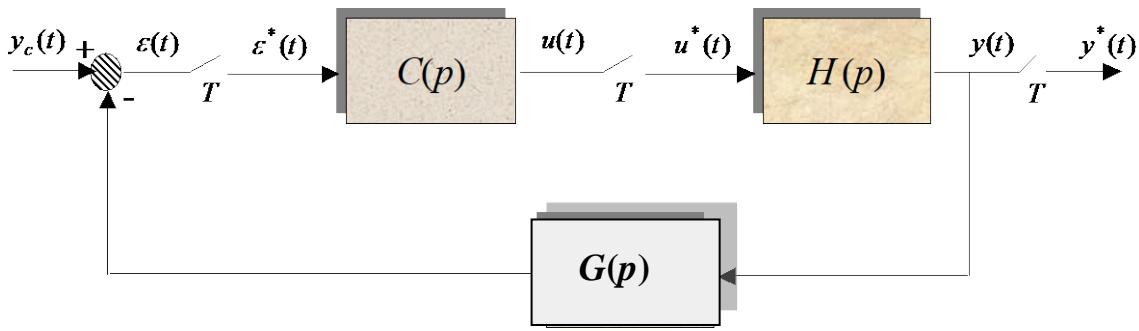
on a maintenant

$$Y(z) = Z[H_1(p)H_2(p)] \cdot U(z).$$

C'est une situation différente de la précédente car on a bien sûr

$$Z[H_1(p)H_2(p)] \neq H_1(z)H_2(z).$$

Appliquons ce qui vient d'être vu à la structure bouclée suivante :



On a

$$E(z) = Y_c(z) - Z[\varepsilon(z)].U(z)$$

où l'on a noté $E(z) = Z[\varepsilon(z)]$. De plus,

$$U(z) = C(z).E(z),$$

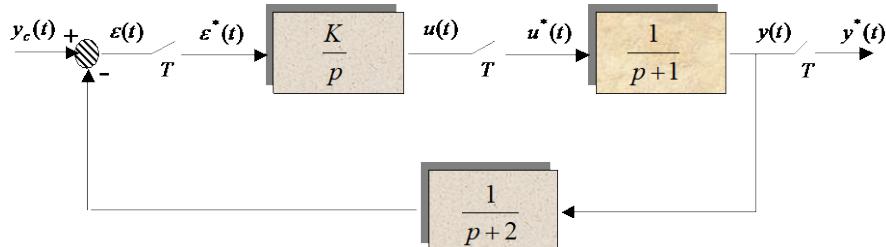
d'où

$$E(z) = \frac{1}{1 + C(z)Z[G(p)H(p)]} \cdot Y_c(z).$$

D'autre part

$$Y(z) = H(z)C(z).E(z) \quad \Rightarrow \quad Y(z) = \frac{H(z)C(z)}{1 + C(z)Z[G(p)H(p)]} \cdot Y_c(z).$$

Exercice : Soit le système suivant.

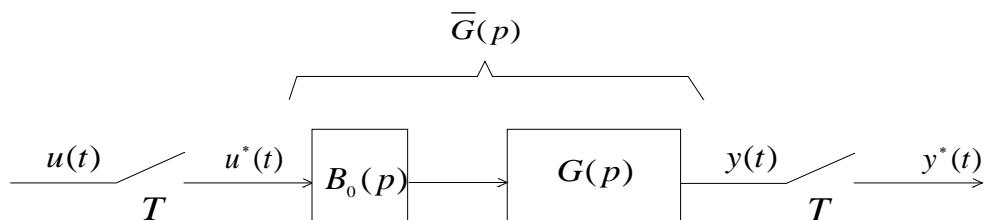


1. Calculer sa fonction de transfert en boucle fermée.
2. Calculer l'erreur statique ($y_e(t) = 1(t)$).
3. Calculer l'erreur dynamique ($y_e(t) = t$).

Application numérique : $T = 0.1$ s et $K = 1$.

5. PRÉSENCE D'UN BLOQUEUR D'ORDRE ZERO.

On considère maintenant un système échantillonné – bloqué, ce qui correspond à la réalité technologique de la structure de commande présentée au chapitre 1.



On désire calculer la fonction de transfert de ce système. D'après le théorème fondamental de l'échantillonnage, on a

$$Y(z) = \overline{G}(z) \cdot U(z)$$

avec, en utilisant le théorème du retard,

$$\begin{aligned} Z(\overline{G}(p)) &= Z[B_0(p)G(p)] \\ &= Z\left[\frac{1-\exp(-Tp)}{p} \cdot G(p)\right] \\ &= Z\left[\frac{G(p)}{p}\right] - Z\left[\exp(-Tp) \cdot \frac{G(p)}{p}\right] \\ &= Z\left[\frac{G(p)}{p}\right] - z^{-1}Z\left[\frac{G(p)}{p}\right] \\ &= (1-z^{-1})Z\left[\frac{G(p)}{p}\right] \end{aligned}$$

soit finalement

$$Z(\overline{G}(p)) = \frac{z-1}{z} \cdot Z\left(\frac{G(p)}{p}\right).$$

Exercice : Calculer la fonction de transfert discrète du système échantillonné – bloqué de fonction de transfert continue

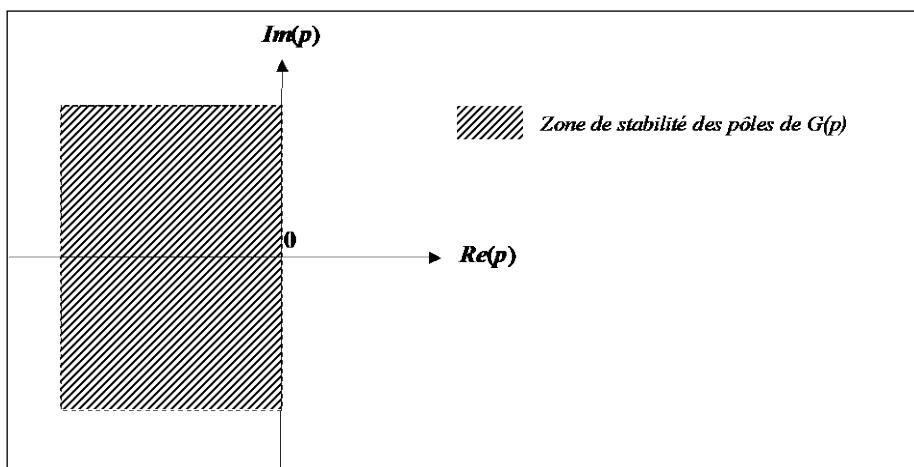
$$G(p) = \frac{2}{p(1+2p)}.$$

Lorsqu'on échantillonne un système continu en vue de le commander au moyen d'un calculateur numérique, il faudra donc toujours tenir compte du bloqueur d'ordre zéro. A l'**Annexe 1** figurent des tables de transformées avec bloqueur, dont l'utilisation permet de se passer du calcul à effectuer en temps normal.

6. STABILITE ET REGIME TRANSITOIRE D'UN SYSTEME DISCRET.

• Stabilité d'un système discret.

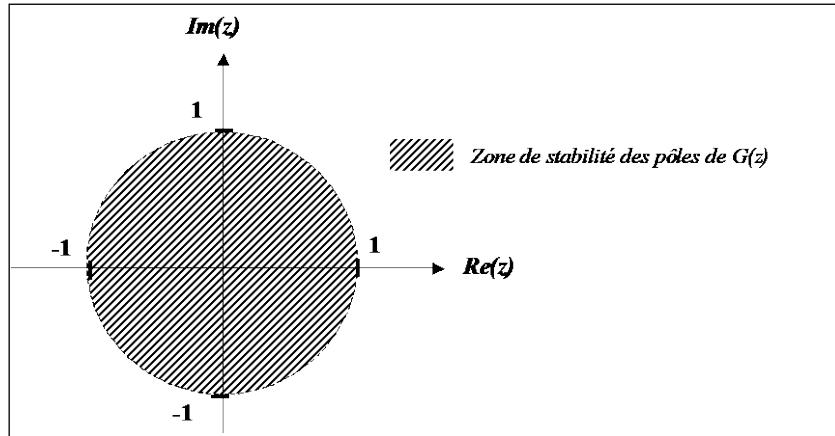
La stabilité est une propriété fondamentale que vous avez déjà étudiée dans le cadre des systèmes continus. On sait ainsi qu'un système **continu** de fonction de transfert $G(p)$ est asymptotiquement stable si ses pôles (les racines de son dénominateur) sont toutes à **partie réelle strictement négative**. Le domaine de stabilité pour les pôles d'un système continu est donc le demi-plan complexe gauche ouvert.



On a dans le cas discret le résultat suivant.

Théorème de stabilité : Soit un système discret de fonction de transfert $G(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$. Ce système est asymptotiquement stable si et seulement si ses *pôles*, à savoir les racines de son équation caractéristique $D(z) = 0$, sont tous de **module strictement inférieur à 1**.

La zone de stabilité pour les pôles d'un système discret est donc le disque ouvert de centre O et de rayon 1.



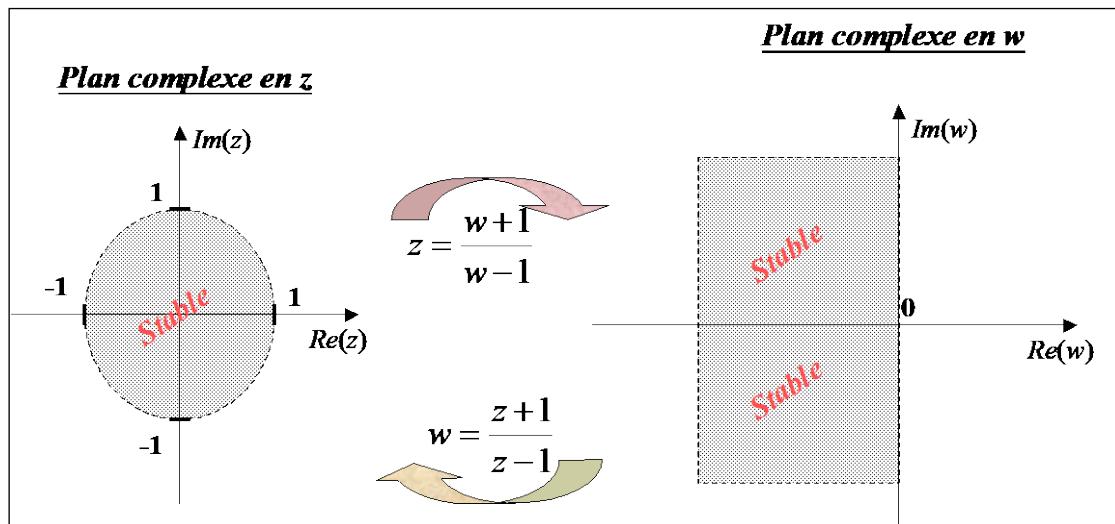
• **Un critère de stabilité.**

Pour vérifier qu'un système discret est stable, il suffit donc de calculer le module de ses pôles. Lorsque l'on a affaire à un système d'ordre élevé, il est naturellement peu commode de calculer les pôles si l'on ne dispose pas de moyens informatiques.

Dans ce cas, on peut utiliser la **transformation de Möbius**, soit

$$w = \frac{z+1}{z-1}, \text{ ou de manière équivalente } z = \frac{w+1}{w-1}$$

qui transforme le disque de rayon unité du plan complexe en z en le demi-plan gauche du plan complexe en w , d'où la correspondance



Intérieur strict du cercle \leftrightarrow demi-plan gauche strict.

En remplaçant z par $z = \frac{w+1}{w-1}$ dans la fonction de transfert $G(z)$, on obtient alors une fonction de transfert

$$\tilde{G}(w) = G\left[z = \frac{w+1}{w-1}\right]$$

qui est l'équivalente continue de notre fonction de transfert discrète $G(z)$. Pour vérifier la stabilité de cette dernière, il suffit alors de vérifier la stabilité (au sens continu) de $\tilde{G}(w)$, puisque l'on a la relation

$$G(z) \text{ n'a pas de pôles hors du cercle unité} \Leftrightarrow \tilde{G}(w) \text{ n'a pas de pôles dans le demi-plan droit.}$$

Exemple : Soit un système du second ordre discret de fonction de transfert

$$G(z) = \frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{z^2 + a_1 z + a_0} = \frac{N(z)}{D(z)}.$$

Si l'on applique la transformation de Moebius à ce système, on trouve

$$\tilde{G}(w) = \frac{\tilde{N}(w)}{\tilde{D}(w)}$$

avec

$$\tilde{D}(w) = (w+1)^2 + a_1(w+1)(w-1) + a_0(w-1)^2,$$

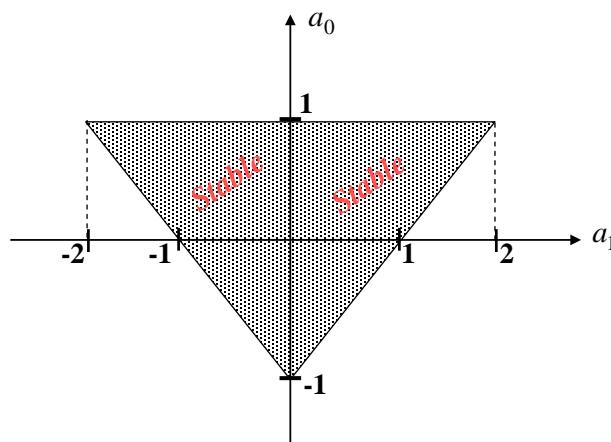
soit après calcul,

$$\tilde{D}(w) = (1+a_1+a_0)w^2 + 2w(1-a_0) + 1 - a_1 + a_0.$$

Le critère de Routh appliqué à $\tilde{D}(w)$ donne alors les conditions de stabilité

$$\begin{aligned} 1 + a_1 + a_0 &> 0 \\ 1 - a_0 &> 0 \\ 1 - a_1 + a_0 &> 0 \end{aligned}$$

On peut interpréter ces conditions de manière géométrique : le système discret de fonction de transfert $G(z)$ est asymptotiquement stable si et seulement si ses coefficients a_0 et a_1 sont à l'intérieur du triangle représenté à la figure suivante.



Exercice : Considérons la commande d'un moteur à courant continu au moyen d'un microprocesseur.

On prendra comme correcteur un gain constant, soit $C(z) = K$. On note T la période d'échantillonnage.

$$G(p) = \frac{2}{p(1+p)}$$

1. Calculer la fonction de transfert $G(z)$ du système « moteur » échantillonné – bloqué.
2. Calculer la fonction de transfert $H(z)$ du système en boucle fermée, ainsi que son équation caractéristique.
3. Donner les conditions de stabilité du système en boucle fermée.
4. Tracer le domaine de stabilité de K en fonction de T .
5. Quelles conclusions pouvez-vous en tirer ?

7. POLES D'UN SYSTEME CONTINU, POLES DE SON SYSTEME ECHANTILLONNE BLOQUE ET REGIME TRANSITOIRE.

On a le résultat suivant (qui sera démontré lorsque l'on abordera la représentation d'état).

Théorème : Considérons un système continu de fonction de transfert d'ordre n

$$G(p) = \frac{N(p)}{D(p)}.$$

Soit p_1, p_2, \dots, p_n ses n pôles, c'est-à-dire les racines de l'équation caractéristique $D(p) = 0$.

Supposons que ce système soit, en vue de sa commande par un calculateur numérique, bloqué – échantillonné à la période T , et soit $\bar{G}(z)$ la fonction de transfert obtenue, à savoir

$$\bar{G}(z) = \frac{z-1}{z} \cdot Z\left[\frac{G(p)}{p}\right].$$

Alors, si l'on pose

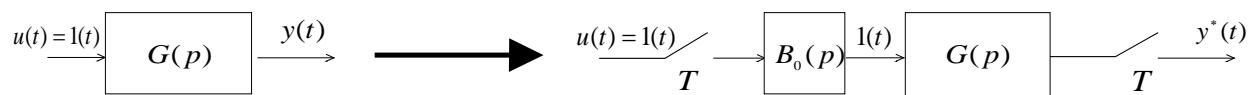
$$\bar{G}(z) = \frac{\bar{N}(z)}{\bar{D}(z)},$$

les n racines de l'équation caractéristique $\bar{D}(z) = 0$, c'est-à-dire les n pôles du système échantillonné – bloqué sont donnés par

$$z_1 = \exp(p_1 T), z_2 = \exp(p_2 T), \dots, z_n = \exp(p_n T).$$

Remarque : même si cela ne constitue pas une démonstration, le fait que la transformée en z consiste à poser $z = \exp(pT)$ rend ce résultat assez intuitif. Il montre au passage que l'ordre du système ne change pas.

En outre, le régime transitoire en réponse à un échelon d'un système échantillonné – bloqué en boucle ouverte est entièrement déterminé par celui du système continu d'origine. La transformation de la figure suivante n'induit en effet pas de changement de comportement en réponse indicielle.



Le régime transitoire d'un système échantillonné – bloqué n'est que le régime transitoire du système continu d'origine regardé aux instants d'échantillonnage.

Comme pour les systèmes continus, il existe des courbes représentant les lieux des pôles à amortissement constant et fréquence propre non amortie constante pour un système du second ordre échantillonné – bloqué.

Ces courbes concernent un système du deuxième ordre de fonction de transfert

$$G(p) = \frac{K\omega_n^2}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2}$$

qui a été échantillonné – bloqué à la période T . Les pôles du système discret obtenu sont donc donnés par

$$z_1 = \exp(Tp_1) \text{ et } z_2 = \exp(Tp_2)$$

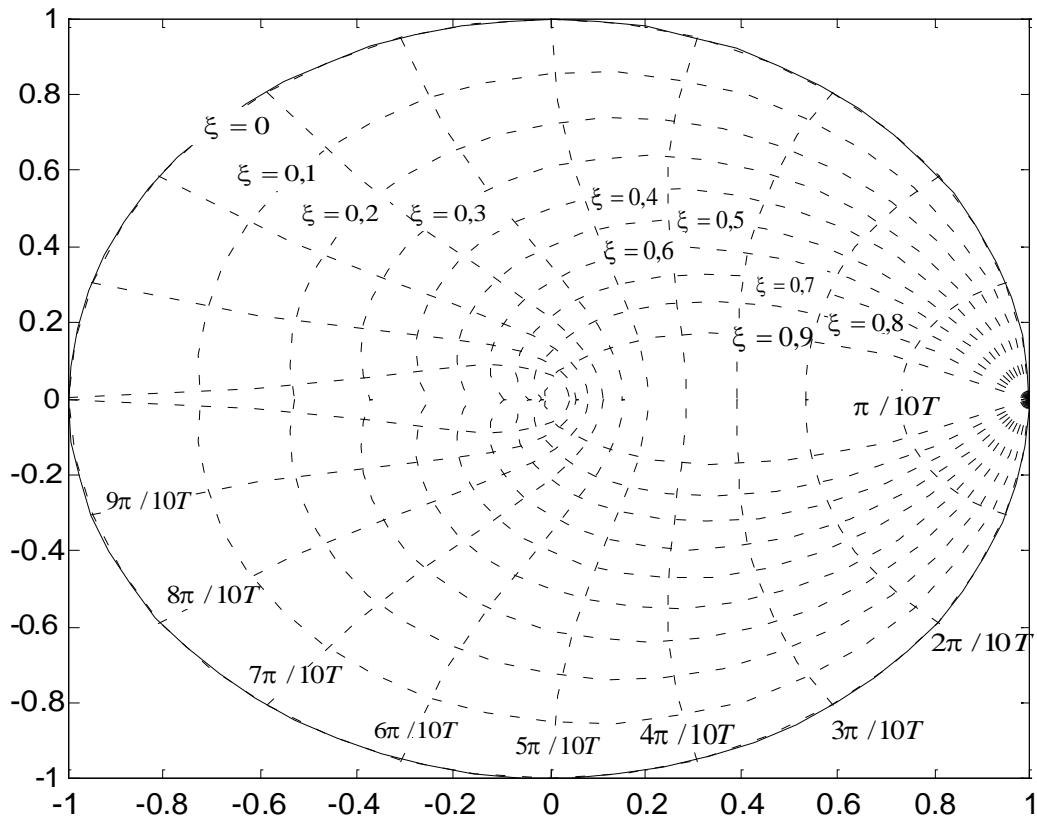
avec

$$p_1 = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \text{ et } p_2 = -\xi\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\xi^2},$$

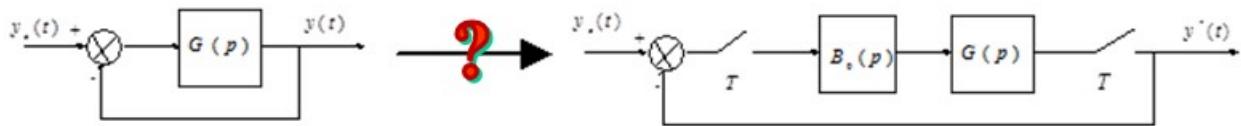
soit

$$\begin{aligned} z_1 &= \exp(-T\xi\omega_n) \cdot \cos\left(T\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\right) + j \exp(-T\xi\omega_n) \cdot \sin\left(T\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\right) \\ z_2 &= \exp(-T\xi\omega_n) \cdot \cos\left(T\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\right) - j \exp(-T\xi\omega_n) \cdot \sin\left(T\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\right) \end{aligned}.$$

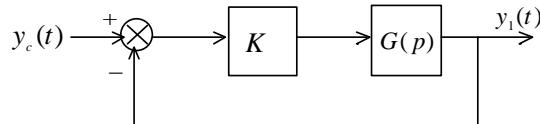
Les courbes représentent donc les lieux de z_1 et z_2 à ξ constant ou ω_n constant. Toutefois, on les donne ici à titre indicatif, car elles sont **peu utilisées du fait de leur complexité** (qui est due à la complexité géométrique induite par la transformation $z = \exp(Tp)$). On se rend en effet aisément compte de la difficulté éprouvée à essayer d'effectuer un placement de pôles sur la base d'un tel graphique.



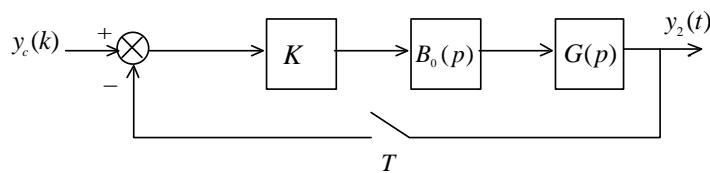
En revanche, la **correspondance** établie entre un système continu en boucle ouverte et le système échantillonné – bloqué qui en résulte **n'est pas valable en boucle fermée**. On ne peut rien dire de la transformation



En particulier, vous savez qu'un système du deuxième ordre stable en boucle ouverte ne peut être instable en boucle fermée, ce qui est faux pour un système échantillonné – bloqué comme on peut le constater dans l'exemple suivant.



Système 1

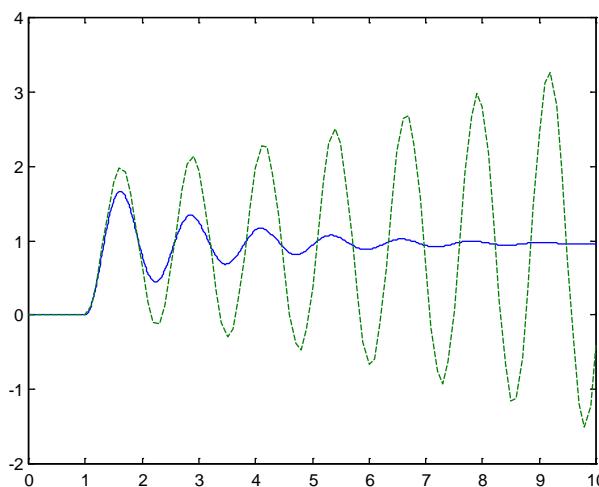


Système 2

avec

$$G(p) = \frac{1}{p^2 + p + 1}, \quad K = 25 \text{ et } T = 0,1 \text{ s.}$$

On a tracé sur la figure de la page suivante les réponses indicielles de ces deux systèmes (*en trait plein pour le système 1, et en trait pointillé pour le système 2*). Pour la valeur de K choisie, le système commandé numériquement est instable, alors qu'il est stable lorsque la commande est continue (et il le serait pour n'importe quelle valeur de K).



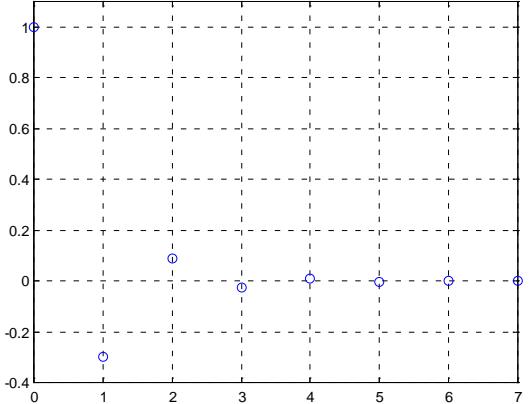
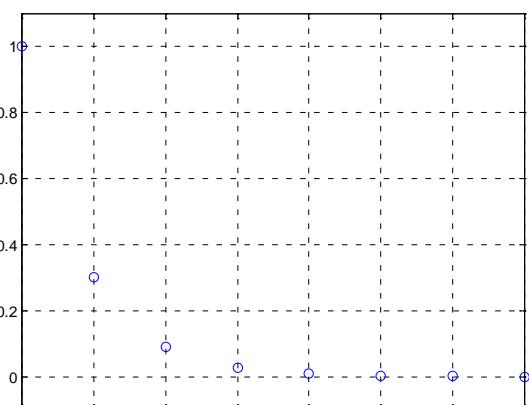
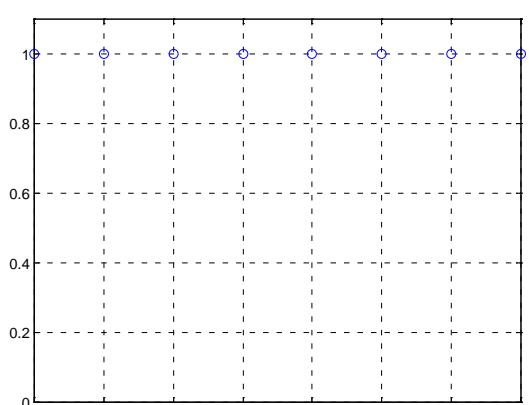
Ces différences proviennent du fait que **le bloqueur apporte un retard de phase**, ce qui entraîne en particulier qu'un système du deuxième ordre échantillonné – bloqué ne possède pas une marge de gain infinie.

La conception d'une commande pour un système échantillonné – bloqué constitue donc un problème à part entière.

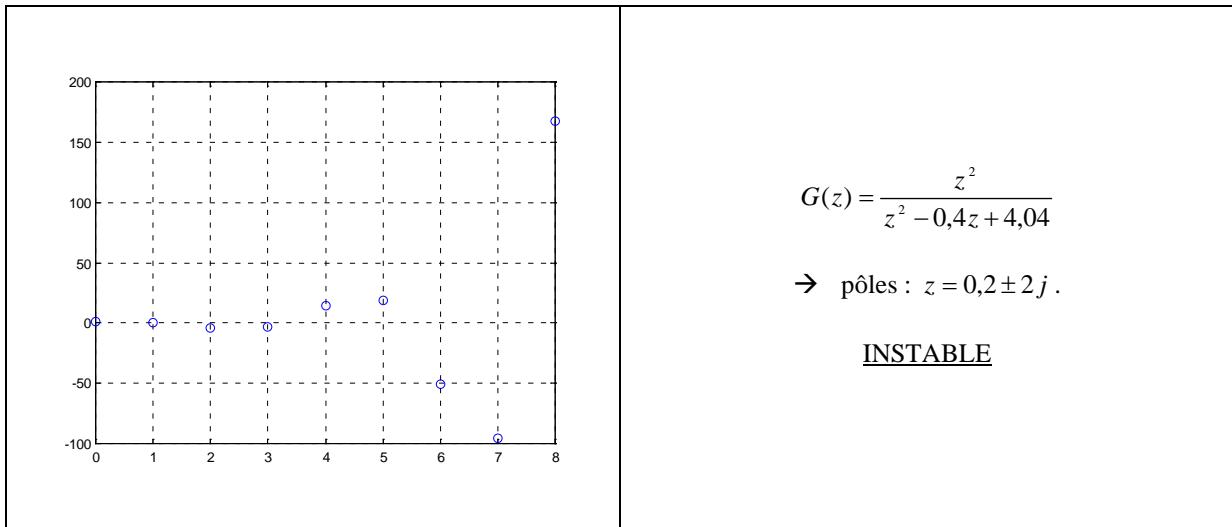
- Exemples de régimes transitoires d'un système discret.

Pour conclure ce paragraphe, on représente, à titre de brève étude du régime transitoire, les réponses impulsionales de systèmes discrets en fonction de la position de leurs pôles. On n'insiste pas sur l'étude de ces régimes transitoires, pour les raisons qui viennent d'être exposées.

La seule chose intéressante à constater est la suivante : parmi les systèmes proposés, lesquels sont forcément des systèmes discrets purs (et pas des systèmes échantillonnés - bloqués) ? En outre, pour les systèmes issus d'un échantillonnage - blocage, donner le système continu d'origine ainsi que l'amortissement de celui-ci.

Réponse impulsionnelle	Système et pôles
	$G(z) = \frac{z}{z + 0,3} \rightarrow \text{pôle : } z = -0,3.$
	$G(z) = \frac{z}{z - 0,3} \rightarrow \text{pôle : } z = 0,3.$
	$G(z) = \frac{z}{z - 1} \rightarrow \text{pôle : } z = 1.$

Réponse impulsinelle	Système et pôles
	$G(z) = \frac{z}{z+1} \rightarrow \text{pôle : } z = -1.$
	$G(z) = \frac{z^2}{z^2 - 0,4z + 0,4}$ <p style="margin-left: 20px;">→ pôles : $z = 0,2 \pm 0,6j$.</p> <p style="margin-left: 20px;">Partie réelle positive.</p>
	$G(z) = \frac{z^2}{z^2 + 0,4z + 0,4}$ <p style="margin-left: 20px;">→ pôles : $z = -0,2 \pm 0,6j$.</p> <p style="margin-left: 20px;">Partie réelle négative.</p>



8. REGIME STATIQUE D'UN SYSTEME DISCRET.

- Cas d'un système en boucle ouverte.

Considérons de nouveau un système continu de fonction de transfert $G(p)$. Si on met en entrée de ce système un échelon d'amplitude A , soit $u(t) = A \cdot 1(t)$, on a en sortie

$$Y(p) = G(p) \cdot U(p) = G(p) \cdot \frac{A}{p}.$$

Alors, une fois le régime transitoire passé, si le système est stable, la sortie $y(t)$ tend vers

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pY(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \left(p \cdot G(p) \cdot \frac{A}{p} \right) = A \cdot G(0)$$

d'après le théorème (continu) de la valeur finale. Le gain statique du système, égal à la valeur statique de la sortie sur l'amplitude de l'échelon, est donc égale à

$$GS = \frac{A \cdot G(0)}{A} = G(0).$$

Supposons maintenant que ce système soit échantillonné – bloqué à la période T . Sa fonction de transfert est donnée par

$$\bar{G}(z) = \frac{z-1}{z} \cdot Z\left[\frac{G(p)}{p} \right].$$

Si l'on applique en entrée de ce système le même échelon d'amplitude A , la sortie est égale à

$$Y(z) = \bar{G}(z) \cdot U(z) = \bar{G}(z) \cdot \frac{Az}{z-1}.$$

En régime établi, la sortie $y(kT)$ tend donc vers

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} y(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)Y(z)] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z-1) \cdot \bar{G}(z) \cdot \frac{Az}{z-1} \right] = A \cdot \bar{G}(1)$$

d'après le théorème (discret) de la valeur finale. Le gain statique du système échantillonné, égal à la valeur statique de la sortie sur l'amplitude de l'échelon, est donc égale à

$$GS = \frac{A \cdot \bar{G}(1)}{A} = \bar{G}(1).$$

C'est naturellement le même gain statique puisque

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} y(kT) = \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t).$$

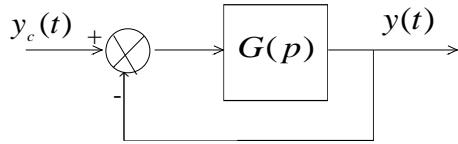
On a donc

$$GS = G(0) = \bar{G}(1).$$

Le gain statique, qui en continu s'obtient en appliquant la fonction de transfert en $p = 0$, s'obtient en discret en appliquant la fonction de transfert en $z = 1$ (notons encore la correspondance $z = \exp(pT)$).

- **Cas d'un système en boucle fermée.**

Pour un système continu en boucle fermée, soit



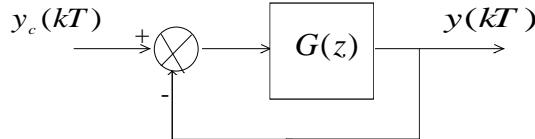
on sait que le **gain statique en boucle fermée vaut 1** si la fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$ contient au moins **un intégrateur**, soit

$$G(p) = \frac{N(p)}{pD(p)}.$$

En effet, on a

$$H(p) = \frac{G(p)}{1+G(p)} = \frac{N(p)}{pD(p)+N(p)} \Rightarrow H(0) = \frac{N(0)}{0 \cdot D(0) + N(0)} = 1.$$

On peut dans ce cas suivre un échelon. **On a le même résultat pour un système discret.** En effet, considérons le système suivant en boucle fermée



et supposons que le système discret en boucle ouverte possède un intégrateur, soit

$$G(z) = \frac{N(z)}{(z-1)D(z)}.$$

On a alors

$$H(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{N(z)}{(z-1)D(z)+N(z)} \Rightarrow H(1) = \frac{N(1)}{(1-1) \cdot D(1) + N(1)} = 1.$$

En conséquence, lorsque l'on concevra une commande numérique par calculateur, il faudra que le **correcteur** en z conçu **comporte un intégrateur** (c'est-à-dire un terme $(z-1)$ au dénominateur) si le système à corriger n'en contient pas naturellement un.

Remarque : Si l'on veut suivre une rampe en boucle fermée, il faut bien sûr au moins deux intégrateurs en boucle ouverte.

Chapitre IV

Correction des systèmes échantillonnés.

*Nous présenterons dans ce chapitre la commande PID d'un système échantillonné mono – entrée mono – sortie. La **commande PID** vous a déjà été présentée pour les systèmes continus. Il vous est donc conseillé de revoir vos notes sur "la **Commande des Systèmes linéaires continus**"..*

1. INTRODUCTION.....	40
2. ANALYSE FREQUENTIELLE DES SYSTEMES ECHANTILLONNES.....	40
A. LA TRANSFORMEE EN W.....	40
B. LIEUX DE BODE D'UN SYSTEME ECHANTILLONNE.....	41
C. MARGES DE GAIN ET DE PHASE.....	42
3. COMMANDE PID DES SYSTEMES ECHANTILLONNES.....	43
A. PRINCIPE.....	43
B. CORRECTION A AVANCE DE PHASE, CORRECTION PD.....	43
C. CORRECTION A RETARD DE PHASE, CORRECTION PI.....	44
D. CORRECTION PID.....	45
4. EXEMPLE D'APPLICATION : ASSERVISSEMENT D'UN PALPEUR.....	46
5. DISCRETISATION D'UN CORRECTEUR CONTINU	53
A. PRINCIPE.....	53
B. DISCRETISATION DU PID CONTINU	53

1. INTRODUCTION.

Nous nous intéressons ici à une structure bouclée à calculateur numérique de la forme classique suivante.

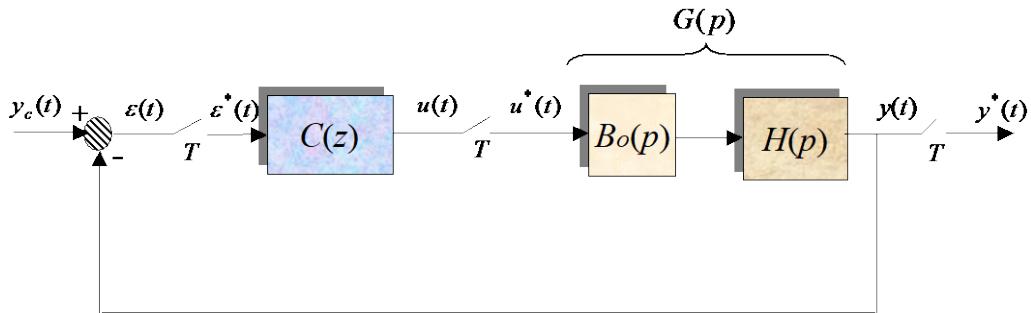


Figure 1

Nous utiliserons dans un souci de simplicité la notation $G(z)$ au lieu de $\bar{G}(z)$ introduite dans les chapitres précédents. Ici $H(p)$ est la fonction de transfert du système à corriger et le but est de trouver un correcteur numérique $C(z)$ qui satisfasse les objectifs du cahier des charges.

Pour démarrer ce chapitre, nous présentons les techniques d'analyse fréquentielle des systèmes échantillonnés, que nous utiliserons dans la conception de la commande.

2. ANALYSE FREQUENTIELLE DES SYSTEMES ECHANTILLONNES.

Les techniques fréquentielles sont pour différentes raisons très utilisées en automatique. Vous avez vu qu'elles permettent pour les systèmes continus :

- de prédire l'ordre du système (dans le cadre de l'identification) à partir de la pente et de la phase du système en boucle ouverte si celui-ci est sans retard pur et à « minimum de phase », c'est-à-dire sans zéro instable,
- d'analyser les propriétés d'une boucle de correction, à savoir la bande passante, les marges de phase et de gain, donnant ainsi une idée des performances et de la robustesse de la loi de commande en boucle fermée,
- d'effectuer la synthèse de la boucle de correction.

Il est donc indispensable de pouvoir disposer de ces outils fréquentiels dans un cadre discret. Nous allons voir que pour cela, on définit, à l'aide de la « transformée en w », un « équivalent continu » d'un système bloqué – échantillonné auquel on appliquera les outils que vous connaissez.

a. La transformée en w .

Les techniques fréquentielles utilisées pour la synthèse de nombreuses commandes ne s'appliquent pas directement aux transmittances en z . En revanche, elles s'appliquent aux transmittances en w , variable introduite au chapitre précédent pour l'analyse de la stabilité, soit $w = \frac{z-1}{z+1}$ qui, on l'a vu, fait correspondre à l'intérieur du cercle unité du plan complexe en z le demi-plan gauche du plan complexe en w . Toutefois, pour des raisons que l'on explicitera bientôt, on utilisera plutôt une transformée équivalente, qui établit la même correspondance, soit

$$w = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$$

où T est la période d'échantillonnage utilisée. Cette transformation correspond à

$$z = \frac{1 + \frac{wT}{2}}{1 - \frac{wT}{2}}$$

b. *Lieux de Bode d'un système échantillonné.*

Comme le but est tracer le lieu de Bode de la fonction de transfert échantillonnée $G(z)$ après transformation en w , on ne s'intéresse qu'aux valeurs imaginaires pures des variables, soit puisque $z = \exp(pT)$,

$$w = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} = \frac{2}{T} \frac{\exp(pT)-1}{\exp(pT)+1} \quad \text{avec } p = j\omega, \quad \omega \in [0; +\infty[$$

On a donc

$$\begin{aligned} w &= \frac{2}{T} \frac{\exp(j\omega T)-1}{\exp(j\omega T)+1} = \frac{2}{T} \frac{\exp(j \frac{\omega T}{2}) \cdot \left[\exp(j \frac{\omega T}{2}) - \exp(-j \frac{\omega T}{2}) \right]}{\exp(j \frac{\omega T}{2}) \cdot \left[\exp(j \frac{\omega T}{2}) + \exp(-j \frac{\omega T}{2}) \right]} \\ &= \frac{2}{T} \frac{2j \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{2 \cos\left(\frac{\omega T}{2}\right)} \\ &= j \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega T}{2}\right) \end{aligned}$$

soit finalement

$$w = jv \quad \text{avec} \quad v = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

La procédure à utiliser pour tracer les lieux de Bode d'une fonction de transfert échantillonnée est alors la suivante :

- ✓ calcul de $\tilde{G}(z) = Z[B_0(p)G(p)]$,
- ✓ calcul de $\tilde{G}(w)$ en remplaçant z par la relation $z = \frac{1 + \frac{wT}{2}}{1 - \frac{wT}{2}}$ dans $G(z)$,
- ✓ calcul du module et de la phase de $\tilde{G}(w)$ pour $w = jv$ avec v variant de 0 à $+\infty$.

Remarques :

- Le fait d'avoir pris un terme $\frac{2}{T}$ pour la définition de w permet d'obtenir une variable v homogène à une pulsation.
- Une variation de v de 0 à $+\infty$ correspond à une variation de la pulsation ω de 0 à $\frac{\omega T}{2} = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire de 0 à $\omega = \frac{\pi}{T}$.
- Cette pulsation est appelée la **pulsation de Nyquist** (voir chapitre I). Lorsque l'on trace les lieux de Bode d'un système échantillonné, on le fait sur une plage qui ne dépasse pas cette pulsation particulière. Est-ce ennuyeux ? Pour le savoir, il faut se souvenir que l'on choisit la fréquence d'échantillonnage du système au moins deux fois supérieure à la fréquence maximum existant dans celui-ci à savoir $\frac{\omega_{max}}{2\pi}$, où ω_{max} est la pulsation associée au(x) pôle(s) le(s) plus rapide(s) de $G(p)$. La période d'échantillonnage vérifie donc

$$\frac{1}{T} \geq 2 \frac{\omega_{max}}{2\pi}$$

ce qui signifie que la plus haute pulsation nous intéressante (la bande passante utile) satisfait

$$\omega_{max} \leq \frac{\pi}{T}.$$

En conclusion, la pulsation de Nyquist se situe au-delà de la bande passante utile. Notre étude recouvre bien alors entièrement cette bande passante.

Exemple : Soit La fonction de transfert suivante :

$$G(p) = \frac{1}{p(1+10p)}.$$

Sa transformée en z (avec bloqueur pour $T=1s$) est alors donnée par :

$$\bar{G}(z) = \frac{0.048(z+0.967)}{(z-1)(z+0.905)}.$$

Appliquons maintenant la transformation en w on obtient alors

$$\tilde{G}(w) = \frac{-0.85(1 + w/102)(1 - 0.5w)}{w(1 + w/0.0999)}$$

Nous remarquons sur cet exemple que :

- L'intégrateur présent dans $G(p)$ se retrouve dans $\bar{G}(z)$ et $\tilde{G}(w)$
- Le **gain statique** des 3 fonctions est le **même**.
- $G(p)$ et $\tilde{G}(w)$ n'ont pas les mêmes zéros.

c. **Marges de gain et de phase.**

Les marges de stabilité se calculent alors à partir des lieux de Bode obtenus pour $\tilde{G}(w)$, puisque l'on a véritablement remplacé l'étude de $\bar{G}(z)$ par celle de son équivalent continu $\tilde{G}(w)$. Lorsque l'on fera la conception de la commande, il s'agira de trouver un correcteur $C(w)$ tel que le système en boucle ouverte de fonction de transfert $C(w)\tilde{G}(w)$ possède des marges suffisantes. La conception de la commande se fait alors « en continu ». C'est ce que nous allons voir maintenant.

3. COMMANDE PID DES SYSTEMES ECHANTILLONNES.

La commande PID a un avantage certain sur les autres types de commande : elle est simple. En effet, **le correcteur PID est d'ordre 2, quel que soit l'ordre du système à corriger**. L'algorithme associé à sa réalisation est donc dans un cadre numérique particulièrement peu coûteux. En outre, elle est relativement robuste. C'est pourquoi elle répond parfaitement à environ 90% des problèmes d'automatique. Cependant, elle est parfois insuffisante car ses performances ne sont pas exceptionnelles..

On décrit ici une procédure conduisant à l'obtention d'une commande PID numérique pour un système donné, d'ordre quelconque. La synthèse du correcteur est réalisée en utilisant une approche fréquentielle. En fait, cette procédure utilise la transformée en w , et l'on conçoit alors le correcteur PID comme si l'on était en continu.

a. *Principe*

La recherche du correcteur $K(z)$ s'effectue à partir du tracé des courbes de **Bode de $G(w)$** . La méthode consiste à déterminer les valeurs numériques d'un correcteur $K(w)$ comme si l'ensemble $K(w)$, $G(w)$ était continu. On recherche donc :

- une marge de phase de l'ordre de 40 à 50°.
- une marge de gain de l'ordre de 6 dB,
- une bande passante en accord avec le temps de réponse désiré en boucle fermée.

On ne peut pas toujours atteindre ces objectifs simultanément. Des **compromis** sont alors nécessaires.

b. *Correction à avance de phase et correction PD.*

Un correcteur à avance de phase a pour objectif d'améliorer la marge de phase du système asservi. En général il s'accompagne d'une augmentation de la bande passante et donc de la rapidité du système asservi.

La détermination du correcteur repose sur l'idée d'avancer la phase au voisinage du point critique.

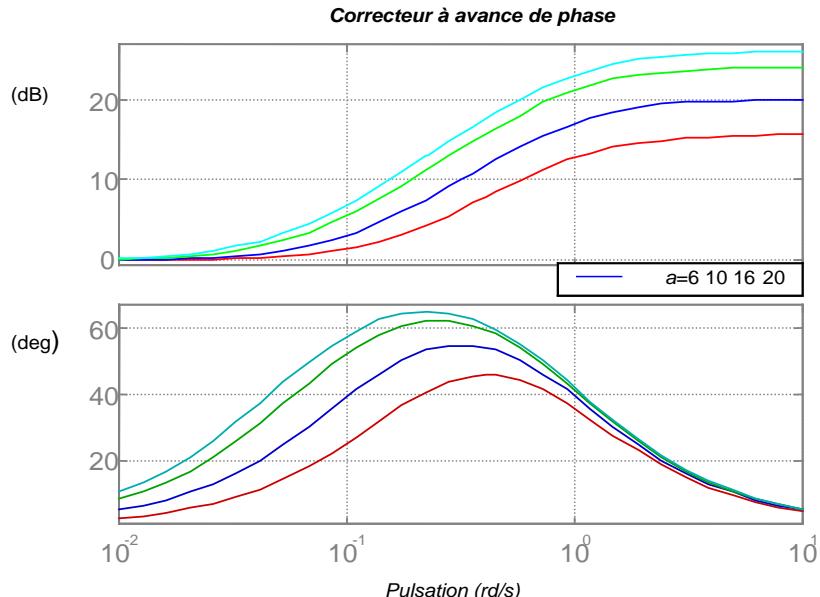
Par exemple, un correcteur à **avance de phase** de la forme

$$K(w) = k \cdot \frac{1 + a \tau w}{1 + \tau w} \quad \text{où } a > 1,$$

présente une phase maximum

$$\Phi_m = \arcsin \frac{a - 1}{a + 1} \quad \text{pour } w = \frac{1}{\tau \sqrt{a}}.$$

Dans ce cas, il est classique de choisir a de l'ordre de 8 à 20. Malheureusement, ce correcteur possède un gain variable (voir la figure). Il modifie le gain de la fonction de transfert en boucle ouverte $L(w) = K(w)G(w)$. Ainsi, plusieurs essais (et simulations temporelles) sont nécessaires pour déterminer k et τ .



Un autre correcteur PD possible est :

$$K(w) = k \cdot (1 + \tau \cdot w)$$

Celui-ci augmente la phase de 45° pour $\omega_c = \frac{1}{\tau}$ et présente une phase de $+90^\circ$ pour les hautes fréquences.

Ce correcteur joue le rôle d'un PD. Comme le correcteur précédent, son gain n'est pas constant. Un choix de départ est de placer ω_c au voisinage du point critique.

Lorsque le correcteur $K(w)$ est connu, on évite la transformation

$$w = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1},$$

qui provoque dans $K(z)$ le pôle $z = -1$ ce qui implique des oscillations de la commande (correcteur en limite de stabilité). On préfère la transformation approchée :

$$w = \frac{z-1}{T z}.$$

c. Correction à retard de phase et correction PI.

L'objectif de ce correcteur est d'augmenter le gain en basse fréquence afin de diminuer l'erreur en régime permanent. Cependant, les correcteurs classiquement utilisés introduisent un retard de phase nuisible à la stabilité de l'asservissement. Il faudra veiller alors à ne pas dégrader la marge de phase.

Par exemple le correcteur à retard de phase :

$$K(w) = k \cdot \frac{1 + \tau w}{1 + a \cdot \tau w} \quad \text{où } a > 1,$$

présente une phase minimum (voir figure)

$$\Phi_m = -\arcsin \frac{a-1}{a+1}.$$

En fait, on cherche à placer le retard de phase en très basses fréquences (loin du point critique).

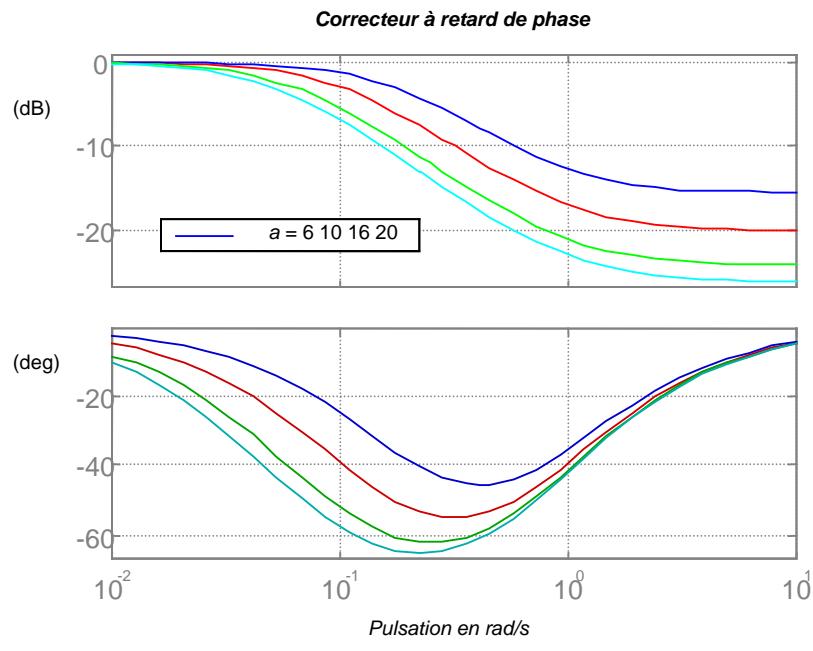


Figure 3

Un autre moyen est tout simplement de placer de l'action intégrale (**correcteur PI pure**) :

$$K(w) = \frac{k}{w}.$$

Le retard de phase est alors de 90° , ce qui déstabilise souvent le système. Il est préférable d'utiliser alors

$$K(w) = \frac{a}{w} + b = g \frac{(1 + \tau_i w)}{w}$$

avec g et τ_i qui sont fonction de a et b . Ce correcteur joue le rôle d'un **correcteur PI** :

Le gain en basse fréquence est infini, l'erreur statique s'annule si le système bouclé est stable.

Lorsque le correcteur $K(w)$ est connu, on utilise alors la transformation suivante pour calculer $K(z)$.

$$w = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$$

d. **Correction PID.**

Le correcteur PID admet pour fonction de transfert

$$K(w) = k_p + k_d \cdot w + \frac{k_i}{w}$$

que l'on écrit sous la forme

$$K(w) = (1 + \tau \cdot w) \left(\frac{a}{w} + b \right).$$

Le calcul montre que

$$k_p = b + a \cdot \tau \quad k_d = b \cdot \tau \quad k_i = a$$

Le principe du choix du correcteur consiste à :

- placer le correcteur **PD** qui avance la phase, cela donne τ .
- placer le correcteur **PI** en essayant de ne pas trop modifier la marge de phase.

Plusieurs simulations sont alors nécessaires. Lorsque le correcteur $K(w)$ est connu, pour obtenir $K(z)$, on applique les transformations suivantes :

$$w = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1} \quad \text{pour l'action intégrale}$$

$$w = \frac{z-1}{Tz} \quad \text{pour l'action dérivée}$$

Après transformation, on obtient :

$$K(z) = \frac{1}{T} \frac{(\tau+T)z - \tau}{z} \cdot \frac{(0.5aT + b)z + 0.5aT - b}{z-1}$$

4. EXEMPLE D'APPLICATION : ASSERVISSEMENT D'UN PALPEUR

La vérification de l'état surface d'une pièce usinée s'effectue par un palpeur mécanique dont on cherche la position. Le palpeur se déplace verticalement le long de la surface usinée. Pour cela on utilise un moteur électrique à courant continu commandé par sa tension d'induit noté $U(t)$ (en V). Un système vis écrou transforme le mouvement de rotation du moteur en mouvement de translation : on note $y(t)$ le signal électrique (en V) image de la position du capteur. Le modèle linéarisé de ce système est alors donné par

$$H(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = \frac{1}{(1 + 0.01p)^2}$$

Le but est de déterminer un correcteur numérique (PI puis PI+PD) répondant au cahier de charge suivant :

- Stabilité en boucle fermée
- Pas d'erreur statique
- Tension d'entrée <2V pour une consigne en position de 0.1m
- Dépassement limité à 30%
- Temps de réponse inférieur à 0.02s

- **Choix de la période d'échantillonnage :**

Pour choisir la période d'échantillonnage, on trace la courbe de Bode de $H(p)$:

Courbes de Bode en continu

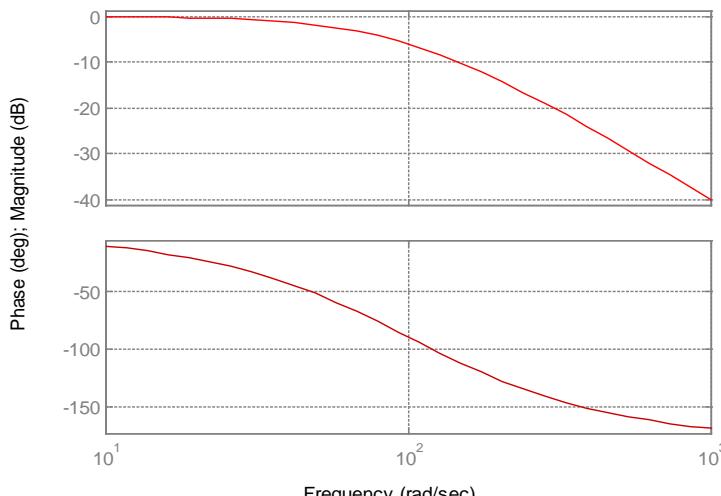


Figure 4

Nous choisissons alors la période d'échantillonnage $T = 0.002\text{ s}$ car :

- ✓ Elle vérifie le critère de Shannon : $T = 0.002 < \frac{\tau}{2} = \frac{0.01}{2}$
- ✓ La pulsation de Nyquist correspond à un affaiblissement de 50 dB par rapport à la basse fréquence :

$$\omega_n = \frac{\pi}{T} = 1571\text{ rad/s}$$

- **Discrétisation :**

La fonction de transfert bloquée échantillonnée :

$$G(z) = Z(Bo(p)H(p)) = \frac{0.01752z + 0.01534}{z^2 - 1.637z + 0.6703} = \frac{0.01752(z + 0.8752)}{(z - 0.8187)^2}$$

La transformation de Tustin $z = \frac{1+wT/2}{1-wT/2}$ appliquée à $G(z)$ fournit :

$$G(w) = \frac{0.00066137(1.502e4 + w)(1000 - w)}{(w + 99.67)^2}$$

Les courbes de Bode de $G(w)$ et $G(p)$ sont tracées à la suivante .

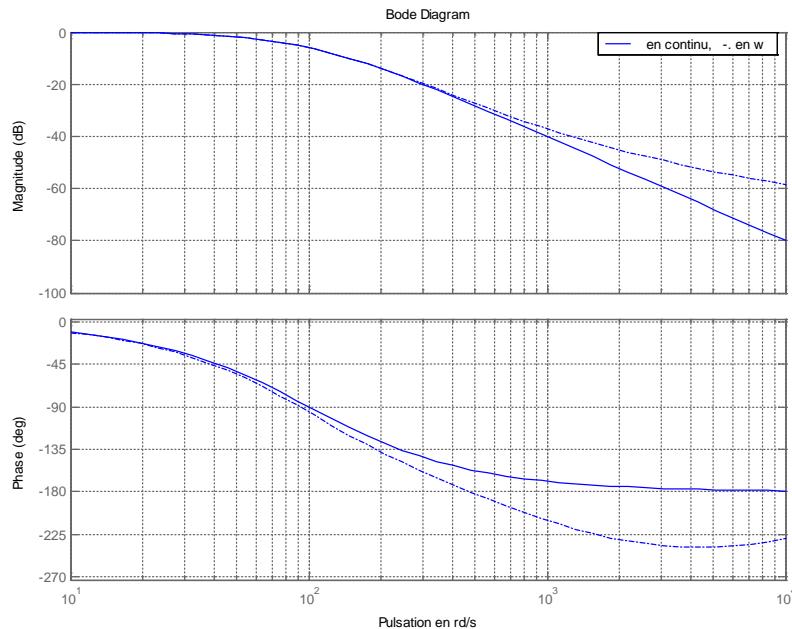


Figure 5

- **Correcteur PI**

La Figure 5 montre que le système ne présente pas d'intégrateur (phase nulle en basse fréquence). Il faut donc commencer par placer un correcteur PI de la forme :

$$K(w) = \frac{a}{w} + b.$$

La cassure d'un tel correcteur a lieu pour $w = a/b$: elle doit se situer en basse fréquence, inférieure à 10 rad/s . Des essais successifs nous ont conduit à retenir $b/a = 2.5\text{ rad/s}$. Puis la valeur de a fixe le gain du correcteur. Il faut donner au système une marge de phase suffisante, de l'ordre de 30 à 50 °. Nous avons obtenu les courbes de Bode de la Figure 6 où la marge de phase est de 25 °. On note que le retard de phase a lieu en basses fréquences.

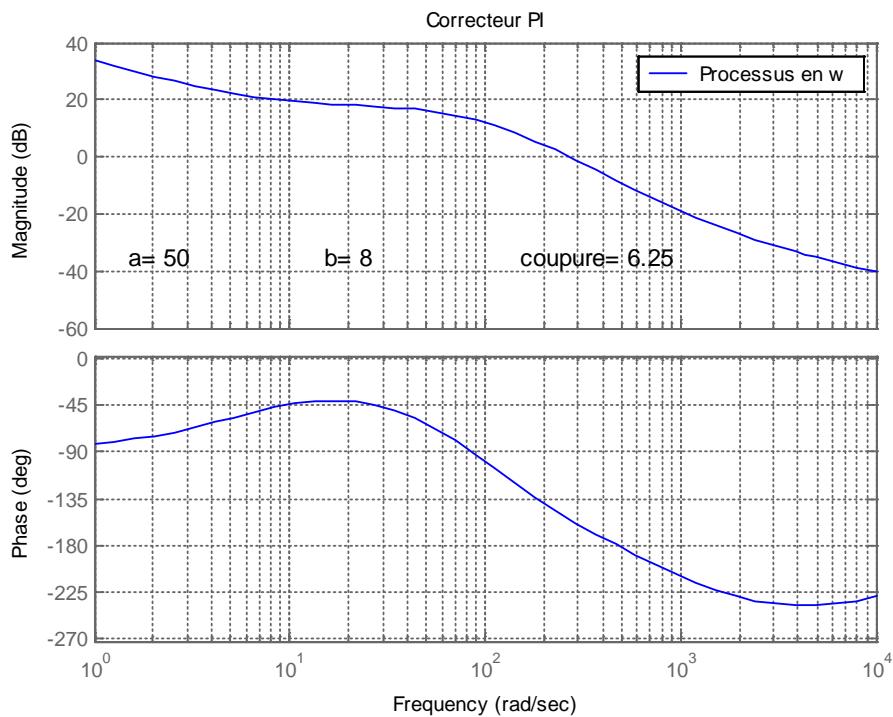


Figure 6

Ayant le correcteur $K(w)$, la transformation classique $w = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} = 1000 \cdot \frac{z-1}{z+1}$ fournit le correcteur :

$$K(z) = \frac{8.05 z - 7.95}{z - 1}.$$

La simulation s'effectue sous Simulink, selon le schéma de la Figure 11, pour un échelon d'amplitude 0.1 commençant à l'instant T . Nous obtenons les évolutions de la Figure 7. On note que le système est faiblement amorti, très oscillant et que sa valeur finale tend lentement vers 0.1.

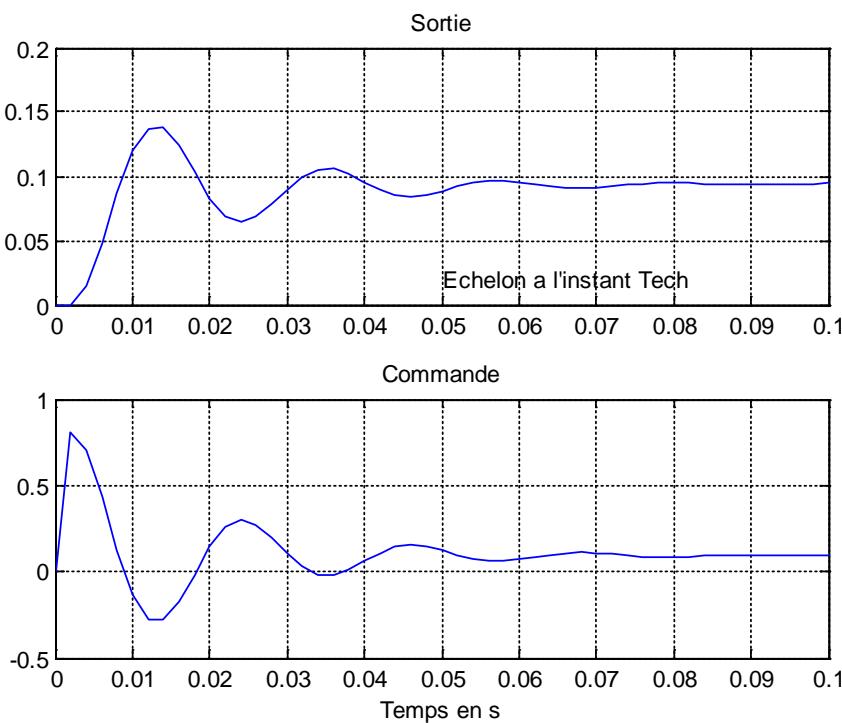


Figure 7

Donnons le programme Matlab qui à fourni la figure 7 :

```
%=====
% fichier palpeur2.m
%
% cours correction systèmes échantillonnés
% Palpeur, correction fréquentielle PI
% matlab 6.1
%=====
clear; clf;
% processus continu
disp('Process continu')
nump = 1; denp=conv([0.01 1],[0.01 1]);
palp_p = tf(nump,denp);
% échantillonnage
Tech = 0.002; % en secondes
palp_z = c2d(palp_p,Tech);
zpk(palp_z); % factorise
[nump, denp] = tfdata(palp_z); % récupère numérateur en cellule
poly_nump = nump{1}; % transforme en polynôme
poly_denp = denp{1};

% passage en w
palp_w = d2c(palp_z,'tustin');
zpk(palp_w);
% courbes de Bode en w
bode(palp_w); grid
Legend('Processus en w')
 xlabel('Pulsation en rad/s')
```

```
% pour comparer
figure(2)
bode(palp_p,'-',palp_w,'-.'); grid;
Legend(' - en continu, -. en w')
 xlabel ('Pulsation en rad/s')

% correcteur à action PI
a=50;
b=8; % a/b= cte de temps en rad/s
corr2 = tf([b a], [1 0]);
bou_ouv = series(corr2, palp_w);
figure(3)
bode(bou_ouv); grid
title('Correcteur PI');
text(1.5,-35,['a= ', num2str(a)])
text(15,-35,['b= ', num2str(b)])
text(150,-35,['coupure= ', num2str(a/b)])
% Correcteur : passage en z
num_k = [0.5*a*Tech+b 0.5*a*Tech-b];
den_k = [1 -1];

tfin = 0.1; % temps final en sec
% fait appel fichier modèle (dessin simulink)
% temps de départ = 0
% [] : classique si flag = 0
% flag = 0, renvoie ce qui suit :
% retourne sys = taille des paramètres
% ... x0 = état initial
[sys,x0] = s_palpe1(0,[],[],0);

% appel du fichier modèle
```

```
% état initial = x0 obtenu par instruction précédente (voir [sys, x0] =... )
%
options = simget('s_palpel'); % récupère les options
% l'instruction suivante force les options retenues
options = simset(options, ...
    'MaxStep', Tech, ...
    'InitialState', x0, ...
    'Solver', 'ode45', ...
    'RelTol', 1e-4, ...
    'AbsTol', 1e-5);
sim('s_palpel', tfin, options);

figure(4);
subplot(2,1,1); plot(t,y); grid;
text(0.05, 0.02, 'Echelon à l''instant Tech')
title('Sortie')
subplot(2,1,2); plot(t,u); grid;
title('Commande')
xlabel('Temps en s')
```

- **Correcteur PI+PD**

L'analyse de la Figure 6 suggère d'apporter de l'avance de phase pour stabiliser et réduire le temps de réponse du système bouclé. Le correcteur à avance de phase a pour fonction de transfert $K(w)=k \cdot \frac{1+a\tau w}{1+\tau w}$. Il augmente la

phase pour $w=\frac{1}{\tau \cdot \sqrt{a}}$.

D'après la courbe de la Figure 6, il faut apporter de l'avance de phase autour de 500 rad/s. Nous prenons donc $a=10$ et $\tau = 1/6000$ ce qui apporte le maximum de la phase à 1896 rad/s. Pour assurer la stabilité, il faut ajuster le gain k du correcteur de telle sorte que la marge de phase soit de l'ordre de 40°. Des essais ont conduit à retenir $k=0.5$ nous obtenons les courbes de la Figure 8

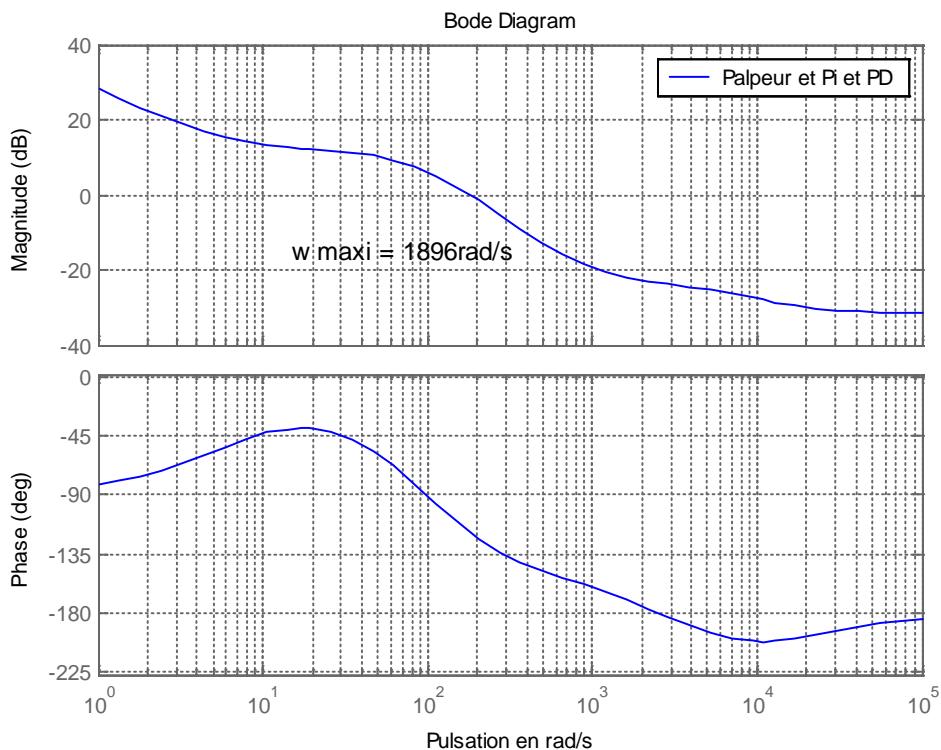


Figure 8

La Figure 8 montre que la marge de phase est voisine de 50°. La Figure 9 présente l'évolution temporelle des entrées sorties du système. Cette dernière montre que :

- ✓ Il n'y a pas d'erreur statique.
- ✓ Le temps de réponse est convenable.
- ✓ On ne peut pas réduire le dépassement.
- ✓ L'entrée est trop importante.
- ✓ Le régulateur PID est du second ordre alors que le correcteur obtenu par placement de pôles est d'ordre 3.

Ce régulateur est assez robuste. On peut modifier le gain du processus physique. Si le gain passe de 1 à 3, alors le dépassement et le temps de réponse restent sensiblement inchangés. Si le gain est réduit de 50%, le dépassement est légèrement réduit et le temps de réponse est peu modifié. Il en est de même pour de faibles variations des pôles de $G(p)$.

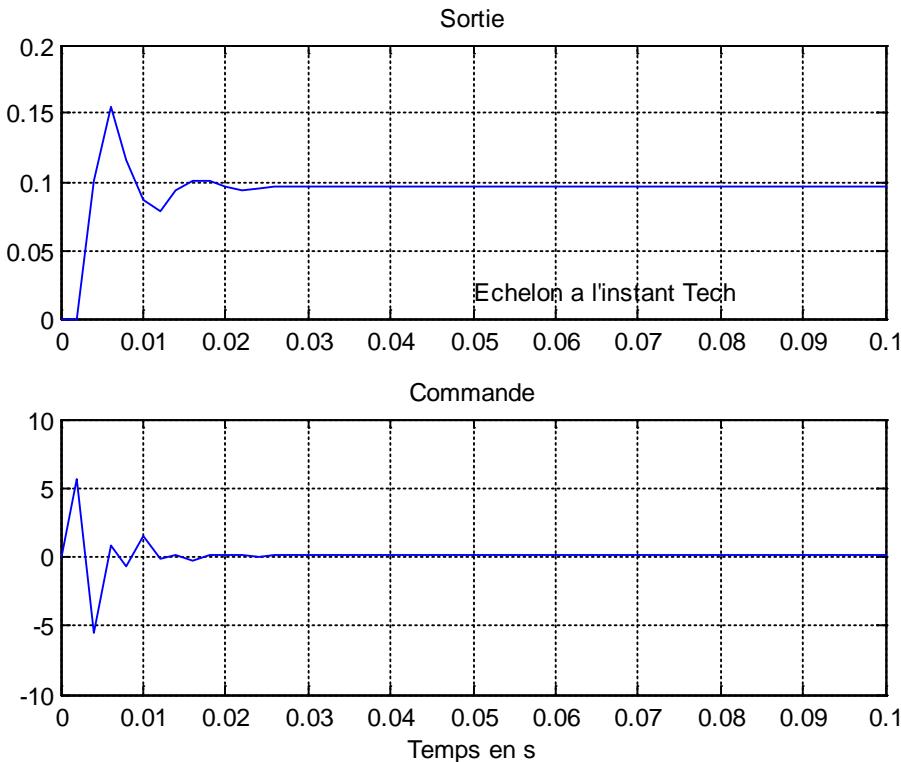


Figure 9

On obtient

$$K(z) = \frac{57.15(z - 0.9997)(z - 0.25)}{(z - 1)(z + 0.7143)}.$$

Ce correcteur est stable et possède un intégrateur.

Donnons le fichier Matlab qui a conduit à ces simulations :

```
%=====
% fichier palpeur3.m
%
% cours correction syst échantilli
% Palpeur, correction PI et avance de phase
% matlab 61
%=====
clear; clf;
% processus continu
disp('Process continu')
nump = 1; denp=conv([0.01 1],[0.01 1]);
palp_p = tf(nump,denp);
% échantillonnage
Tech = 0.002; % en secondes
palp_z = c2d(palp_p,Tech);
zpk(palp_z); % factorise
```

```

[nump, denp] = tfdata(palp_z);      % récupère numérateur en cellule
poly_num = num{1};                  % transforme en polynôme
poly_den = den{1};

% passage en w
palp_w = d2c(palp_z,'tustin');
zpk(palp_w);
% courbes de Bode en w
figure(1)
bode(palp_w); grid
Legend('Processus en w')
xlabel('Pulsation en rad/s')

% correcteur à action PI
a=50;
b=8;          % a/b= cte de temps en rad/s
corr1 = tf([b a], [1 0]);
bou_ouv = series(corr1, palp_w);
num_k=[a+b*Tech/2 b*Tech/2-a];
den_k = [1 -1];

% correcteur à action PD
tau = 1/6000; % cassure près de la Bande passante désirée
gain_cor = 0.5;
corr2 = tf(gain_cor*[10*tau 1],[tau 1]);
bouc_ouv2 = series(corr2,bou_ouv);
figure(2)
bode(bouc_ouv2); grid
Legend('Palpeur et Pi et PD')
text(15,-15,['w maxi = ', num2str(0.316/tau), 'rad/s'])
xlabel('Pulsation en rad/s')

% programmation manuelle du correcteur PI et avance de phase
num_k=gain_cor*conv(num_k,[1+10*tau^2/Tech 1-10*tau^2/Tech]);
den_k=conv(den_k,[1+tau^2/Tech 1-tau^2/Tech]);

tfin = 0.1;           % temps final en sec
% fait appel fichier modèle (dessin simulink)
% temps de départ = 0
% [] : classique si flag = 0
% flag = 0, renvoie ce qui suit :
% retourne sys = taille des paramètres
% ... x0 = état initial
[sys,x0] = s_palpel(0,[],[],0);

% appel du fichier modèle
% état initial = x0 obtenu par instruction précédente ([sys, x0] =...)
%
options = simget('s_palpel'); % récupère les options
% l'instruction suivante force les options retenues
options = simset(options,...
    'MaxStep',Tech,...,
    'InitialState',x0,...,
    'Solver', 'ode45',...
    'RelTol',1e-4,...,
    'AbsTol',1e-5);
sim('s_palpel', tfin, options);

figure(3);
subplot(2,1,1);plot(t,y); grid;
text(0.05, 0.2, 'Echelon à l''instant Tech')
title('Sortie')
subplot(2,1,2);plot(t,u); grid;
title('Commande')
xlabel('Temps en s')

```

5. DISCRETISATION D'UN CORRECTEUR CONTINU

a. *Principe*

Le correcteur continu $K(p)$ est discrétré en utilisant la transformation approximative :

$$p = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1}$$

En général, pour que cette approximation soit valable, il faut utiliser une période d'échantillonnage très faible, nettement plus faible que celle fournie par le théorème de Schannon. Cependant, si l'ordre du correcteur est élevé, cette discrétrisation soulève des problèmes numériques délicats.

b. *Discrétrisation du PID continu*

Le cas particulier du correcteur PID est important dans la mesure où de nombreux asservissements sont réalisés avec des PID. Rappelons que la fonction de transfert d'un PID continu est de la forme :

$$K(p) = k_p + k_d \cdot p + \frac{k_i}{p}$$

On sait qu'en pratique la partie action dérivée est légèrement différente ($k_d \frac{p}{1+\tau \cdot p}$), la constante de temps τ étant très inférieure à 1 elle sera négligée ici.

La forme en z est alors donnée par :

$$K(z) = k_p + k_d \cdot \frac{z-1}{Tz} + \frac{Tk_i}{2} \frac{z+1}{z-1}$$

La substitution donne :

$$K(z) = \frac{az^2 + bz + c}{z(z-1)}$$

avec

$$a = \frac{k_i * T}{2} + \frac{k_d}{T} + k_p \quad b = \frac{k_i * T}{2} - \frac{2 * k_d}{T} - k_p \quad c = \frac{k_d}{T}$$

Application : Asservissement du palpeur

Pour l'asservissement du palpeur, le PID continu est simulé en utilisant SIMULINK avec le schéma ci-dessous, où la méthode d'intégration est celle de **Runge Kutta** avec le pas de calcul de 0.001s.

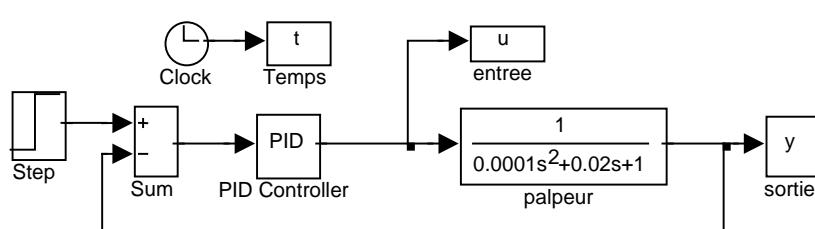


Figure 10

La consigne est un échelon unité commençant à l'instant 0s. Pour

$$k_p = 25, \quad k_i = 900, \quad k_d = 0.02$$

les résultats sont alors les suivants :

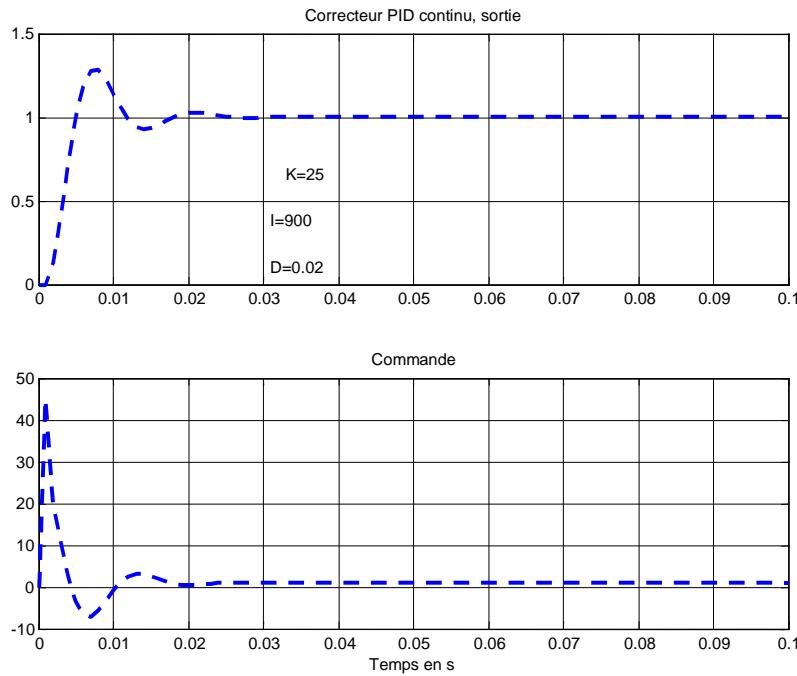


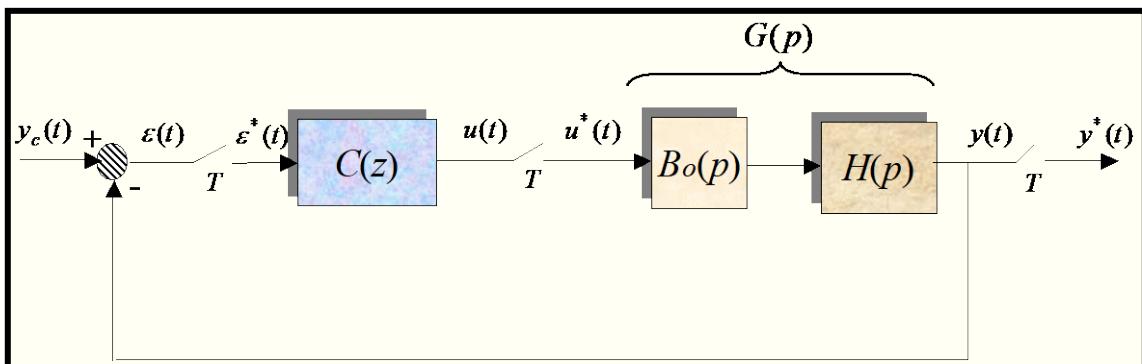
Figure 11

Le correcteur PID est numérisé pour $T = 0.01\text{ s}$. Les valeurs numériques du correcteur sont donc:

$$K(z) = \frac{45z^2 - 64.55z + 20}{(z-1).z}$$

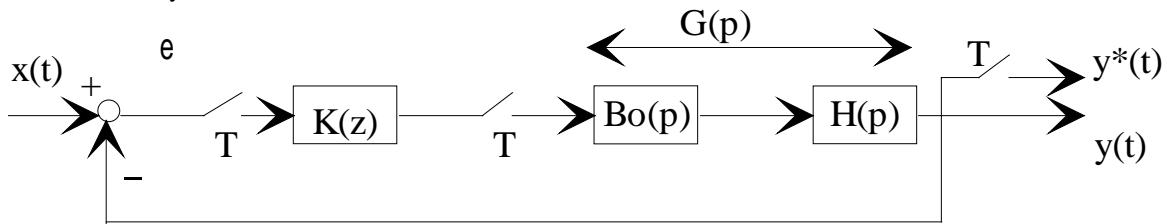
Partie I

Exercices & Problèmes



Exercice 1

Soit le système échantillonné :



- 1.1) Calculer $y(z)$ en fonction de $x(z)$
- 1.2) On donne $H(p) = a/(p+1)$, calculer $G(z)$
- 1.3) $K(z) = 1$, calculer la fonction de transfert en boucle fermée : $y(z)/x(z)$
- 1.4) On choisit $T = 1$, $a = 1$, on applique un échelon unitaire en x , calculer $y(kT)$ pour quelques valeurs de k , en supposant que le système est initialement au repos. Quelle est la valeur finale de y ?
- 1.5) On programme le correcteur : $u(k) = u(k-1) + e(k)$ où e est l'erreur de boucle, u est la sortie du correcteur. Donner $K(z)$. Pour quelles valeurs de a le système bouclé est-il stable ? Quelle sera la valeur finale de y si le système est stable ?

Exercice 2

On considère le système bouclé représenté dans l'exercice 1 avec $T = 1$ s, $H(p) = a/(1+2p)$

2.1) Calculer $G(z)$

2.2) Déterminer les valeurs de a assurant la stabilité lorsque $K(z) = 1$.

2.3) Déterminer a pour que le système bouclé ait un pôle à l'origine lorsque $K(z) = 1$.

2.4) On note $\alpha = \exp(-T/2)$ et le correcteur est de la forme :

$$K(z) = \frac{(z-\alpha)(z-\beta)}{(z-1)^2} \quad \text{où } \beta \text{ est à déterminer. Montrer que l'erreur statique en régime permanent est nulle.}$$

Calculer a et β pour qu'en boucle fermée, le système présente un mode dominant avec $\omega_0 = 1.5$ rd/s et $\xi = 0.7$.

Exercice 3

On considère le système bouclé représenté dans l'exercice 1 avec $T = 1$ s, $K(z) = 1$ et $H(p) = a/p$

3.1) On applique un échelon unitaire sur x . Sans aucun calcul, tracer $y(t)$ pour tout t compris entre 0 et 4 s dans les trois cas : $a = 1$, $a = 2$, $a = 0.5$

3.2) Conditions de stabilité en fonction de a

3.3) Dans toute la suite, on suppose que le capteur est entaché d'un retard pur de une période d'échantillonnage.

a) Calculer $y(z)/x(z)$

b) En déduire les conditions de stabilité.

c) Calculer $y(k)$ et $e(k)$ pour quelques valeurs de k lorsque l'entrée est un échelon.

d) On applique une "rampe" : $x(t) = t$ pour $t \geq 0$. Calculer $y(k)$ et $e(k)$ pour quelques valeurs de k .

3.4) Pour éliminer l'erreur de traînage, on prend envisage le correcteur $K(z) = z/(z - 1)$. Calculer l'erreur en régime permanent. Commenter

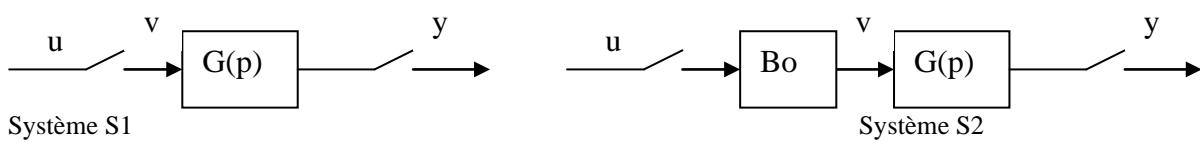
Exercice 4

On considère le système bouclé représenté dans l'exercice 1 avec $H(p) = h/(0.1+p)(1+p)$ et $K(z) = 1$.

Calculer $y(z)/x(z)$ et étudier la stabilité en fonction de h et T .

Exercice 5 : Rôle du bloqueur

Soient les deux systèmes S1 et S2 représentés à la figure suivante :



On pose $G(p) = \frac{1}{1+\tau p}$ et on note T la période d'échantillonnage.

5.1) Calculer les fonctions de transfert et les gains statiques de S1 et S2.

5.2) On applique l'entrée $u(t) = 1$ pour t positif ou nul. Calculer $y(t)$ pour $0 < t < 3T$ pour les deux systèmes. Calculer, si elles existent les valeurs limites de $y(t)$.

5.3) Commenter le rôle de T/τ .

Exercice 6 : Régulation en température

Afin de tester le comportement de pièces à la tenue en température, on utilise un four régulé en température. Le chauffage du four est réalisé par l'ouverture progressive $u(t)$ d'une vanne admettant un débit variable de vapeur d'eau. L'ouverture de la porte du four est notée $d(t)$ et agit comme un signal de perturbation. On admet que la température $\theta(t)$ à l'intérieur du four est uniforme. En petites variations autour d'une température nominale, la modélisation conduit au schéma de la figure 1 où le temps est exprimé en minute.

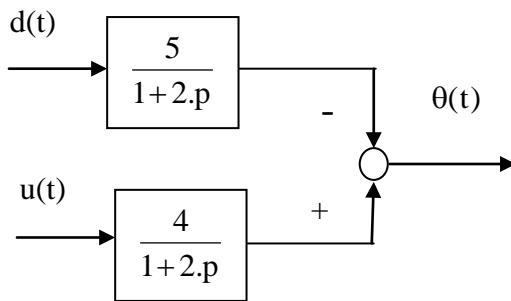


Figure 1

On admet qu'un thermocouple de constante de temps négligeable et de gain 0.04 V/°C mesure la température du four. On envisage de commander ce four par un calculateur numérique selon le schéma de la figure 2.

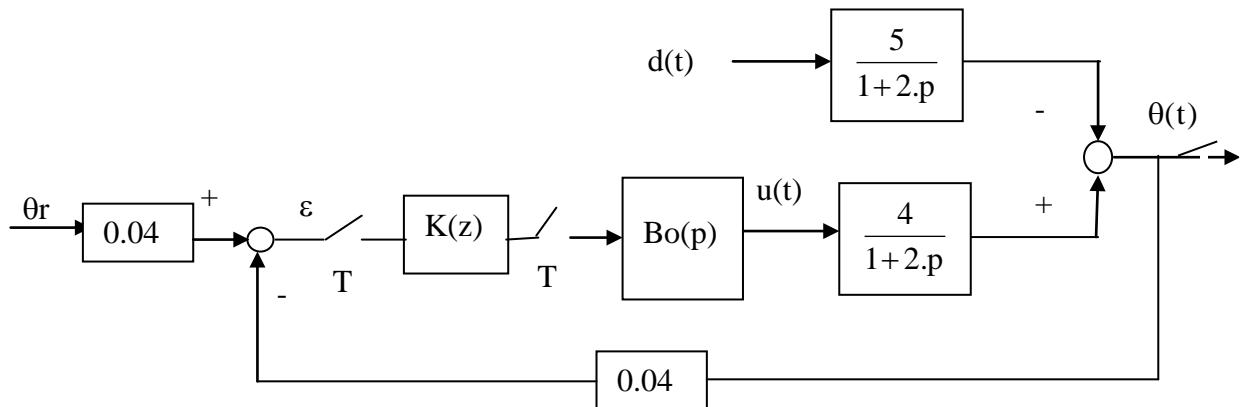


Figure 2

6.1) On suppose $d(t) = 0$. Calculer la fonction de transfert en z : $\frac{\theta(z)}{\theta_r(z)}$

6.2) Justifier le choix de $T=0.4$ mn.

6.3) On choisit le correcteur: $K(z) = \frac{a.z+b}{z-1}$ Donner les conditions assurant la stabilité.

6.4) Calculer a et b pour que le système bouclé présente un temps de réponse à 5% de l'ordre de **4 min.** (ce qui revient à un système de second ordre d'amortissement $\zeta = 0.7$ et de pulsation propre $\omega_0 = 1.25\text{rd/mm}$)

6.5) Effectuer la synthèse d'un correcteur PI en utilisant l'analyse fréquentielle : tracer les courbes de Bode de $G(w)$, choisir le correcteur $K(w)$, en déduire $K(z)$ puis tracer la réponse indicielle de la température pour une variation de la consigne de 1° . Commenter.

Exercice 7 : Régulation des gaz d'émission d'une voiture

Un effort considérable a été réalisé par les constructeurs d'automobiles pour réduire la pollution atmosphérique qui dépend essentiellement du rejet des fumées. Dans les automobiles modernes la combustion est commandée par un calculateur dont le but est de réguler le rapport entre l'air et le combustible admis tout en pilotant l'allumage et le recyclage d'une partie de l'air injecté.

Le but de cet exercice est l'étude de la régulation du rapport air / combustible. Dans certaines conditions ce rapport est fixé à 14.7 g d'air pour 1 g de combustible : dans ce cas, le rejet de monoxyde de carbone est réduit. Ce rapport est noté $C(t)$ à la figure 1 qui représente de façon schématique l'asservissement.

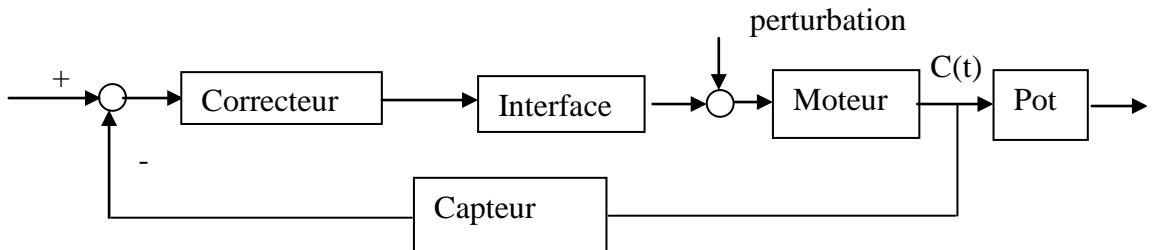


Figure 1

Les perturbations $d(t)$ dépendent du régime de fonctionnement, du taux d'humidité, de la température du moteur ainsi que de la pression barométrique. Cet asservissement est modélisé à la figure 2

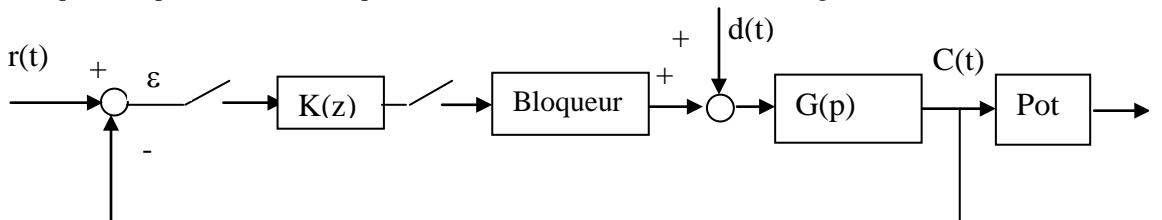


Figure 2

A la figure 2, on note $K(z)$ la fonction de transfert du correcteur, d la perturbation et T la période d'échantillonnage.

On admet que la fonction de transfert du moteur est donnée par : $G(p) = \frac{e^{-\theta p}}{1 + \tau p}$ avec $\tau = 0.25 \text{ s}$, $\theta = 1 \text{ s}$

- 7.1) On choisit $T = 0.1 \text{ s}$, justifier ce choix.
- 7.2) Calculer la fonction de transfert $C(z)/R(z)$.
- 7.3) Dans le cas où le correcteur K est une constante, déterminer la limite de stabilité.
- 7.4) Pour $K=0.5$ et $r(t)$ en échelon unitaire, tracer les premières valeurs de $C(kT)$ et donner la valeur finale de $C(kT)$.
- 7.5) Le correcteur est un PI de transfert : $K(z) = a + b \frac{1}{z - 1}$. Étudier la stabilité de l'asservissement en fonction de a et de b . On choisit $b=1$ et $a = 0.5$: tracer $C(kT)$ et commenter.

- 7.5) On remplace l'asservissement de la figure 2 par celui de la figure 3

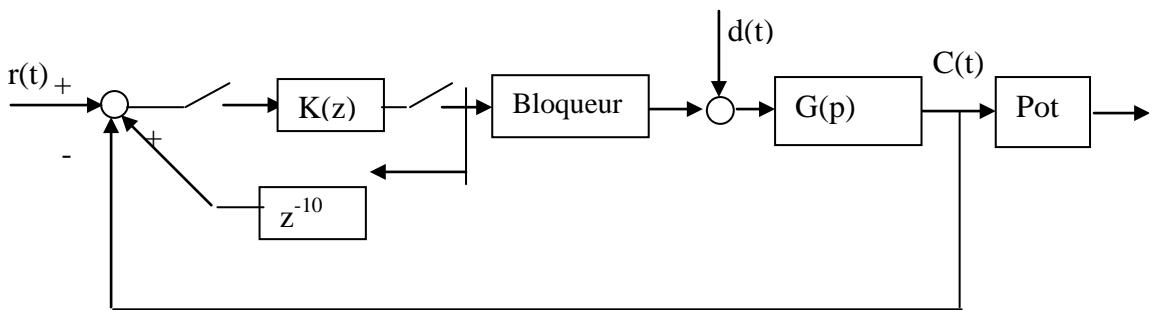


Figure 3

On choisit $K(z) = 0.05$. Calculer le transfert $C(z)/r(z)$. Quelle est la valeur finale ? Donner les premières valeurs de $C(k)$.

Exercice 8

Soit le filtre défini par sa réponse impulsionnelle $h(k) = \frac{1}{10}$ pour $0 \leq k \leq 9$ et $h(k) = 0$ pour $k > 9$.

- 8.1) Donner $h(z)$.
- 8.2) Quel est le rôle de ce filtre ?
- 8.3) Tracer les courbes de Bode et conclure.

Exercice 9

Tracer les courbes de Bode du système $1/(1+p)$ précédé d'un bloqueur d'ordre zéro, lorsque $Tech=0.2s$. Comparer avec celles du système continu.

Exercice 10 : Transmission électrique souple

Un moteur à courant continu entraîne une charge d'inertie J_c au travers d'un axe présentant une raideur k non négligeable. On note f le frottement visqueux "ramené" sur l'axe moteur. Les notations sont celles de la figure 1

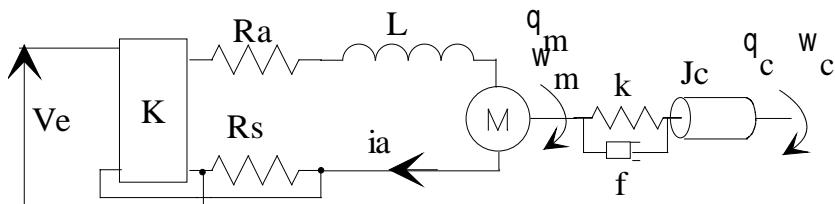


Figure 1.

On adoptera les notations et les valeurs numériques suivantes.

K	Gain de l'amplificateur	150
Ra	Résistance de l'armature du moteur	4Ω
Rs	Résistance de retour	0.2Ω
L	Inductance de l'armature	0.002 H
a	Constante de couple du moteur	3.5 Nm / A
b	Constante de fcem du moteur	0.03 V / (rd/s)
Jm	Inertie du moteur	$2.5 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$
Jc	Inertie de la charge	$12 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$
k	Raideur de l'axe	3500 N m / rd
f	Coefficient de frottement visqueux	.1 N m / (rd/s)

10.1) Modélisation.

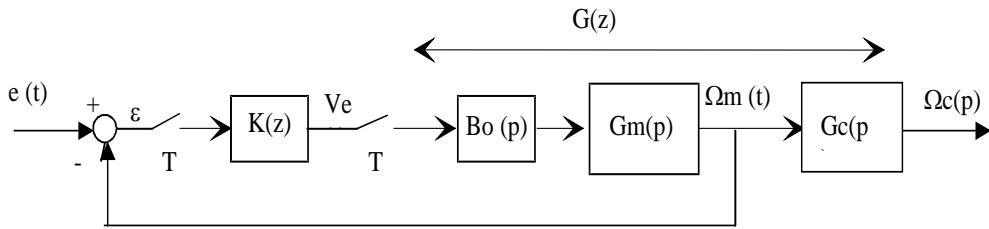
Écrire les équations électromécaniques de cet ensemble. Les transformer en schéma blocs puis en déduire que la fonction de transfert s'écrit sous la forme

$$\frac{\partial c}{V_e} = \frac{K \cdot a \cdot (k + f \cdot p)}{p^4 \cdot J_m \cdot J_c \cdot L \cdot p^4 + n_3 \cdot p^3 + n_2 \cdot p^2 + n_1 \cdot p + a \cdot b \cdot k}$$

avec

$$\begin{aligned} n_3 &= J_m \cdot J_c \cdot (R_a + K \cdot R_s) + f \cdot L \cdot (J_m + J_c) \\ n_2 &= (J_m + J_c) \cdot k \cdot L + (J_m + J_c) \cdot f \cdot (R_a + K \cdot R_s) + a \cdot b \cdot J_c \\ n_1 &= (J_m + J_c) \cdot k \cdot (R_a + K \cdot R_s) + a \cdot b \cdot f \end{aligned}$$

- 10.2) Faire l'application numérique et présenter la fonction de transfert précédente sous forme normalisée.
Donner l'allure des courbes de Bode.
- 10.3) Procéder de même avec la fonction de transfert : $\frac{\omega_m}{V_e}$.
- 10.4) Pour commander cette machine par calculateur numérique, on envisage la boucle suivante



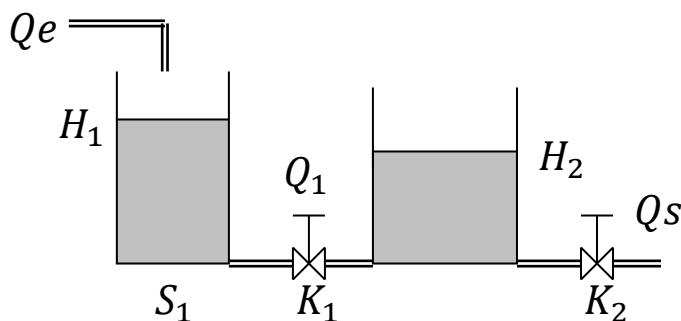
Justifier le choix de la période d'échantillonnage $T=0.1$ ms

- 10.5) Étudier la stabilité de la boucle en fonction du correcteur $K(z) = K = \text{constante}$.
- 10.6) Déterminer un correcteur $K(z)$ à partir de l'analyse fréquentielle. Pour cela, on utilise la méthode de Tustin, en posant $w = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$
- a) Tracer les courbes de Bode en fonction de $w = jv$.
- b) Proposer un correcteur du second ordre assurant un marge de phase de 40° environ.
- c) En déduire le correcteur $K(z)$.
- d) Tracer l'évolution temporelle des vitesses de rotation du moteur et de la charge lorsque l'entrée $e(t)$ est un échelon unitaire.

Exercice 11 : Bacs en série

Dans l'industrie chimique, on doit souvent réguler les débits (ou les niveaux) de fluides stockés dans des cuves ou bacs. Par exemple la figure suivante représente deux bacs communicants par la vanne de constante k_1 , de sections respectives S_1 et S_2 . Pour simplifier, on admet que le débit à travers une vanne est donné par $q_i = k_i \cdot (P_1 - P_2)$ où P_1 est la pression en amont de la vanne et P_2 celle en aval avec $P_1 > P_2$.

La régulation du débit de sortie $q_s(t)$ est équivalente à la régulation du niveau $h_2(t)$



- 1) Calculer la fonction de transfert : $\frac{H_2(p)}{Qe(p)}$.
- 2) Dans toute la suite, on admet que $\frac{H_2(p)}{Qe(p)} = \frac{1000}{(1+500p)(1+800p)}$ en unités SI.

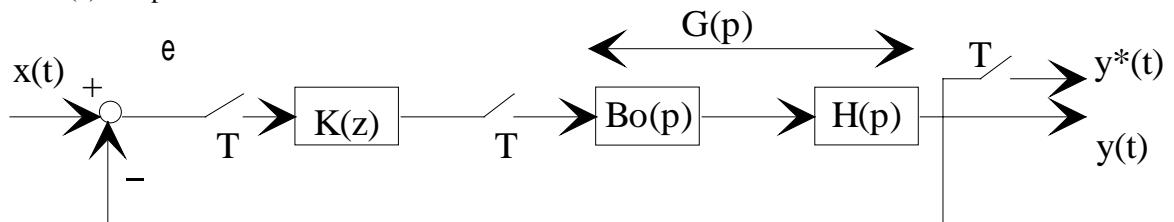
Pour effectuer une commande par calculateur, on utilise la période d'échantillonnage $T_{ech} = 120s$. Justifier ce choix.

- 3) Le calculateur est chargé de fixer le débit $Qe(kT)$. Ce débit est maintenu constant entre deux périodes d'échantillonnage. Calculer la fonction de transfert $\frac{H_2(z)}{Qe(z)}$.
- 4) On utilise un capteur pour le niveau H2 délivrant 1V pour une variation de 0.1m de niveau. On note $\mathbf{K}(z)$ la fonction de transfert du régulateur. Calculer la fonction de transfert $\frac{H_2(z)}{Hr(z)}$ où $Hr(z)$ désigne la consigne sur le niveau H2.
- 5) Étudier la stabilité du système bouclé lorsque le correcteur $K(z)$ est une constante.
- 6) Définir un correcteur PID en utilisant l'approche fréquentielle pour que le temps de réponse soit de l'ordre de 1800s.
 - Calculer les premières valeurs de la sortie H et de la commande Qe lorsque la consigne Hr varie en échelon de 0.1m. Commenter.

Exercice 12 : Suivi de ligne blanche

Pour améliorer la sécurité routière, les constructeurs d'automobiles ont développé plusieurs programmes de recherche. L'un d'entre eux concerne le "suivi de lignes blanches". Une caméra est chargée détecter la présence d'une ligne blanche située sur le bord droit de l'autoroute. Le programme de traitement d'image reconstitue la ligne si elle est pointillée ou prédit la courbure de la ligne si une bretelle de dégagement apparaît.

Le correcteur détermine l'orientation des roues en fonction de l'écart $r(t)-y(t)$ où $r(t)$ représente la consigne et $y(t)$ représentant la distance entre la ligne blanche et la voiture. Le but de cet exercice est de déterminer le correcteur $K(z)$ à implanter selon le schéma suivant.

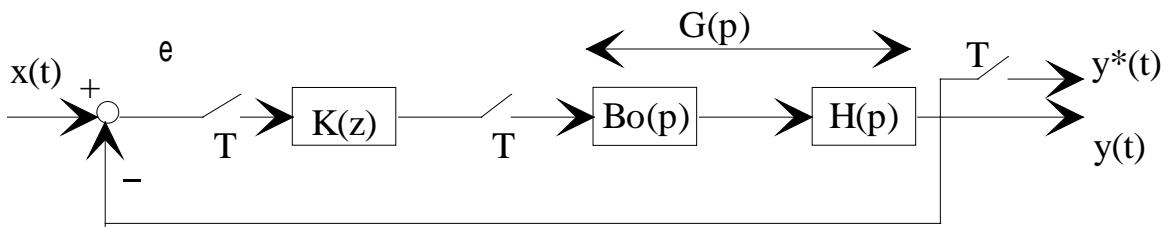


$$\text{On donne } H(p) = \frac{1}{p^2 \cdot (p+10)}, \text{ modèle valable pour des vitesses respectant la législation.}$$

- 1) Calculer $G(p)$ puis $G(z)$.
- 2) Choisir la période d'échantillonnage parmi : 10s, 1s 0.1, 0.05s 0.001s
- 3) On envisage d'utiliser un correcteur à avance de phase, pourquoi ? A quelle condition(s) le correcteur $K(z) = \frac{k \cdot (z-a)}{z-b}$ est-il à avance de phase ?
- 4) Dans toute la suite, on pose $a=1$, $b=0.1$, étudier la stabilité de la boucle en fonction de k .
- 5) Déterminer le gain k pour que la marge de phase soit de l'ordre de 40° .
- 6) Déterminer les premières valeurs de la sortie y lorsque l'entrée x est un échelon unitaire et que le gain du correcteur $k=316$.

Exercice 13 : Modèle d'avion

Un modèle très simplifié du comportement d'un avion en phase de décollage est donné par la fonction de transfert $H(p) = \frac{2}{p \cdot (1-p)} = \frac{y(p)}{v(p)}$ où $y(t)$ représente l'altitude de l'avion et $v(t)$ représente la commande des moteurs. L'asservissement numérique est réalisé selon la figure suivante :



$x(t)$ représente la consigne d'altitude et T la période d'échantillonnage.

1) Calculer $G(p)$ et $G(z)$.

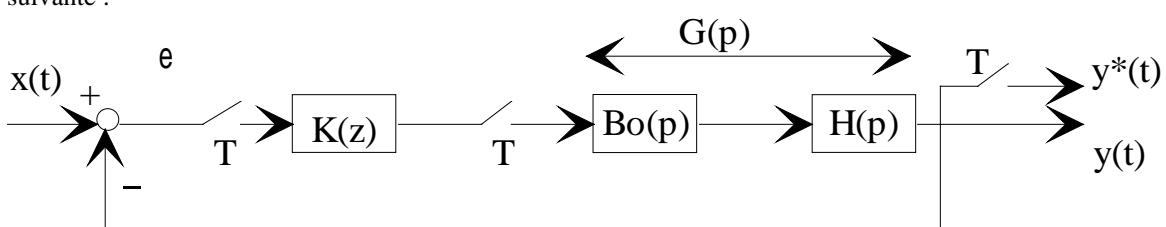
2) Choisir T parmi les valeurs suivantes : 10s 1s 0.5s 0.1s 0.05s 0.01s

3) Le correcteur $K(z)$ admet pour fonction de transfert : $K(z) = \frac{a \cdot z + b}{z + c} = \frac{u(z)}{\varepsilon(z)}$. Déterminer a b c pour que le système bouclé présente un temps de réponse de l'ordre de 2s.

4) On choisit $K(z) = \frac{a \cdot z + 3}{z + 0.7} = \frac{u(z)}{\varepsilon(z)}$, analyser la stabilité en fonction de a .

Exercice 14 : Ascenseur

En 1995, un ascenseur a atteint la vitesse de 45 km/h lors de l'ascension d'une tour de 70 étages située au japon. La fonction de transfert est : $H(p) = \frac{1}{p \cdot (p^2 + 2p + 5)} = \frac{y(p)}{v(p)}$ où $y(t)$ représente la position (verticale) de l'ascenseur et $v(t)$ la tension appliquée au moteur électrique. L'asservissement numérique est réalisé selon la figure suivante :



$x(t)$ représente la consigne d'altitude de l'ascenseur et T la période d'échantillonnage

1) Calculer $G(p)$ et $G(z)$.

2) Choisir T parmi les valeurs suivantes : 0.01s 0.1s 1s 10s et en déduire les valeurs numériques de $G(z)$

3) On désire qu'en boucle fermée le transfert continu soit de la forme : $\frac{y(p)}{x(p)} = \frac{9}{(p+3)^2}$. Commentez ce choix,

puis en déduire la fonction de transfert $\frac{y(z)}{x(z)} = M(z)$

4) Déterminer le correcteur $K(z)$ pour que le transfert en boucle fermée soit $M(z)$. Critiquez ce choix en analysant la stabilité du correcteur.

5) On choisit le transfert en boucle fermée : $M(z) = \frac{k(z+3.5427)}{(z-0.7408)^2}$. Donner la valeur de k , puis tracer la réponse indicielle de $M(z)$. En déduire le correcteur $K(z)$

6) Pour le correcteur obtenu à la question précédente :

a) Tracer les courbes de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte et des fonctions de sensibilité $S(z)$ et de sensibilité complémentaire $T(z)$ avec : $S(z) = \frac{1}{1 + K(z) \cdot G(z)}$ et $T(z) = \frac{K(z) \cdot G(z)}{1 + K(z) \cdot G(z)}$

b) Commentez les courbes de sensibilité,

c) Définir les marges de phase et de gain. Que pensez-vous de la robustesse du système bouclé?

7) Une perturbation additive agit en sortie de la boucle. On l'assimile à un échelon. Sans calculs, que pouvez vous dire du rejet de perturbation ?

Exercice 15 : Régulation de la température d'un habitacle de voiture :

Le but ici est de réguler la température d'un habitacle de voiture. Le processus de commande est décrit à la figure 1. Le bloc commande fournit deux tensions électriques : $u_f(t)$ qui alimente une résistance chauffante et $u_v(t)$ qui alimente un ventilateur soufflant de l'air froid. La température moyenne à l'intérieur de l'habitacle $T(t)$ (en degré) est mesurée par un capteur. La consigne de température est notée $T_0(t)$ (en degré). Le système possède donc deux entrées ($u_v(t)$ et $u_f(t)$) et une sortie ($T(t)$). Nous allons étudier chaque sous-système séparément.

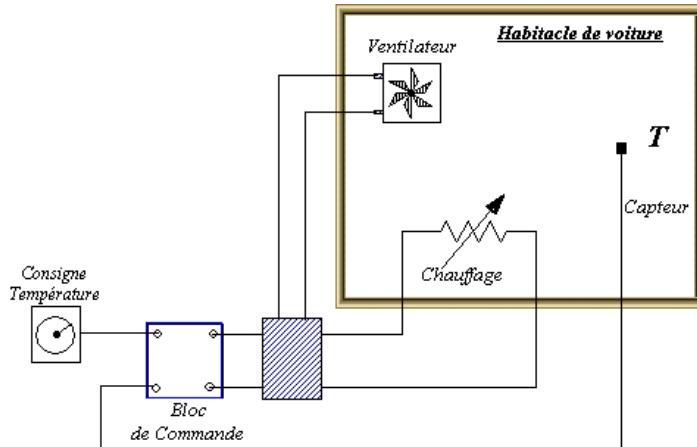


Figure 1
Partie I : Chauffage

On suppose dans un premier temps que la sortie ventilateur est débranchée et nous allons étudier le système de chauffage.

La fonction de transfert du processus discret est donnée par : $G_f(z) = \frac{1.9}{z - 0.9}$

Afin de réguler ce système nous proposons le schéma de commande suivant :

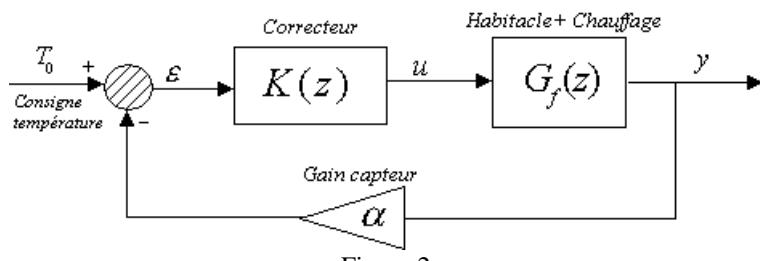


Figure 2

Le gain α représente le gain du capteur de température. La sortie $y(z) = T(z)$ température de l'habitacle.

Question 1 : Correcteur constant.

On suppose dans un premier temps que le correcteur est un simple gain K, i.e. $K(z) = K = cst$.

- Donner les conditions de stabilité (en boucle fermé), sur le choix du correcteur K en fonction du gain α . Commenter.

Question 2 : Correction par placement de pôles

Nous choisissons maintenant le correcteur suivant :

$$K(z) = \frac{cz + d}{z - 1}$$

- Commenter ce choix.
- Déterminer c et d (en fonction de α) sachant que la période d'échantillonnage, $Tech = 1s$ et que l'on désire qu'en boucle fermée le système ait pour temps de réponse $Tr = 10 s$.

c. **Partie II : Ventilation**

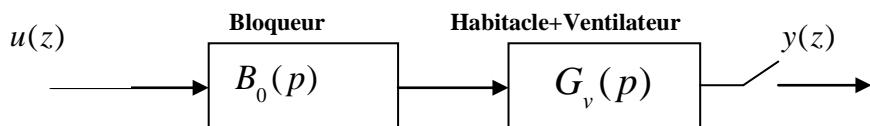
Nous étudions maintenant le système vis-à-vis de sa sortie ventilateur. Le système de chauffage étant supposé débranché.

Question 3 : Discréétisation

Une identification de ce sous-système à conduit au diagramme de Bode continu, $G_v(p)$ présenté à la figure 3. Afin de réaliser une implantation numérique et pour éviter les repliements de spectre, nous choisissons comme pulsation de Nyquist :

$$\omega_{nq} = 200 \text{ rad / s}$$

- En déduire la période d'échantillonnage. Justifier ce choix
- Calculer le gain statique et les marges de phase et de gain. Étudier la stabilité.

Question 4 :


Le processus discret est maintenant d'écrit par l'équation de récurrence suivante :

$$y(kT) = b_1 y((k-1)T) - b_0 y((k-2)T) + a_1 u((k-1)T) + a_0 u((k-2)T) + a_2 u(kT)$$

- Donner, en fonction des a_i et b_i , l'expression de la fonction de transfert $G_v(z) = \frac{y(z)}{u(z)}$.

Question 5 : Régulation

Afin de réguler la sortie, nous plaçons le système dans une boucle de régulation à retour unitaire où le correcteur discret est donné pour $Tech = 0.01 \text{ s}$, par :

$$K(z) = \frac{az + b}{z - c}$$

En utilisant une approche fréquentielle, nous avons retenu le correcteur $K(w)$ correspondant aux courbes de Bode en w de la figure 4.

- Justifier l'allure de ces courbes et commenter le choix de ce type de correcteur.
- Calculer a, b et c à partir du diagramme de Bode de la figure 4

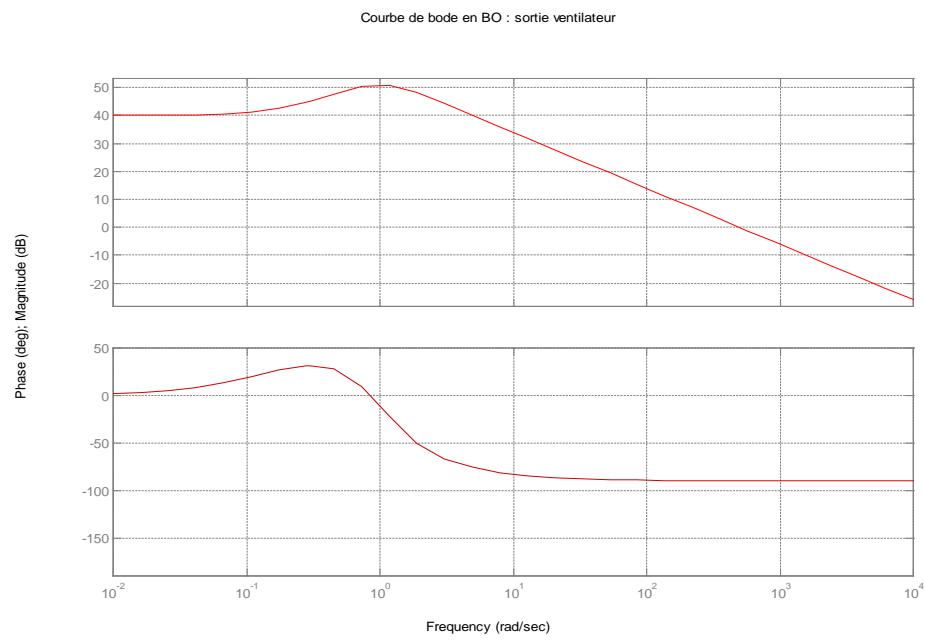
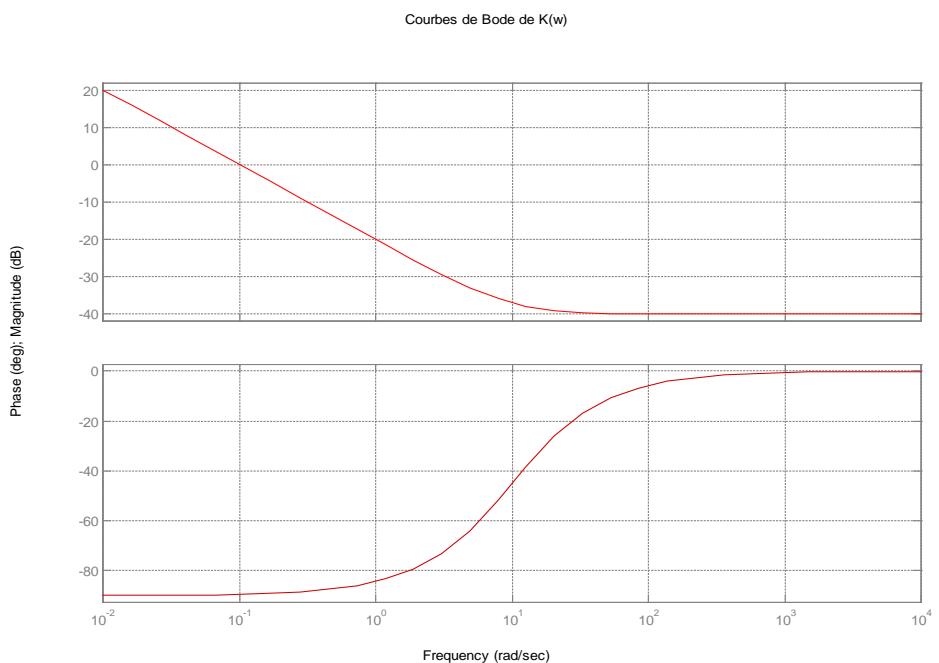


Figure 3



Partie II

CHAPITRE VI

Représentation d'Etat des Systèmes Échantillonnés.

1. INTRODUCTION.....	67
2. DISCRETISATION D'UN SYSTEME MIS SOUS FORME D'ETAT.....	68
3. OBTENTION D'UNE REPRESENTATION D'ETAT D'UN SYSTEME DISCRET A PARTIR DE SA FONCTION DE TRANSFERT.	71
4. COMMANDABILITE ET OBSERVABILITE D'UN SYSTEME DISCRET.	72

1. INTRODUCTION.

Tous comme les systèmes à temps continu, les systèmes à temps discret peuvent être représentés sous forme de représentation d'état. Les deux formalismes sont très voisins et les résultats du cas continu restent pour la plus part valables dans le cas discret.

Le but de ce cours est d'élaborer une commande par retour d'état avec observateur pour des systèmes échantillonnés. Ceci passe d'abord par l'obtention du système d'état discret.

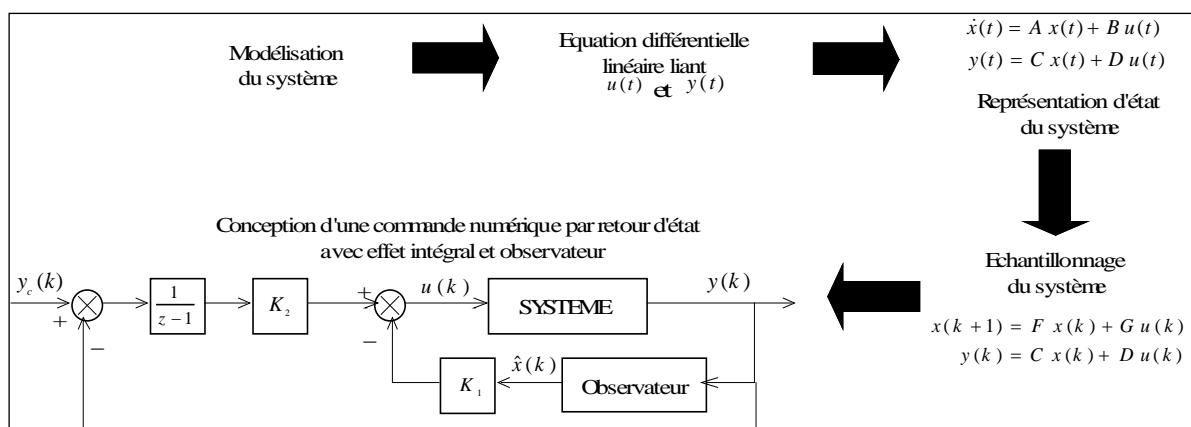


Figure 12 : Approche état de la commande numérique.

Nous allons, dans ce chapitre, donner les bases du formalisme associé à la représentation d'état des systèmes échantillonnés. En premier lieu, on indique comment calculer les matrices F et G de la figure 1.

2. VARIABLES D'ETAT EN TEMPS ECHANTILLONNEES

Dans la représentation d'état continu, le schéma fonctionnel d'un système comporte que des intégrateurs et des gains. Il est donc possible à partir de tels éléments, de construire n'importe quelle fonction de transfert. Dans le cas discret il est possible de décomposer un système en utilisant des gains et des opérateur dits de *décalage* (ou retard) de fonction de transfert z^{-1} . La figure suivante présente un exemple de système composé de tels éléments.

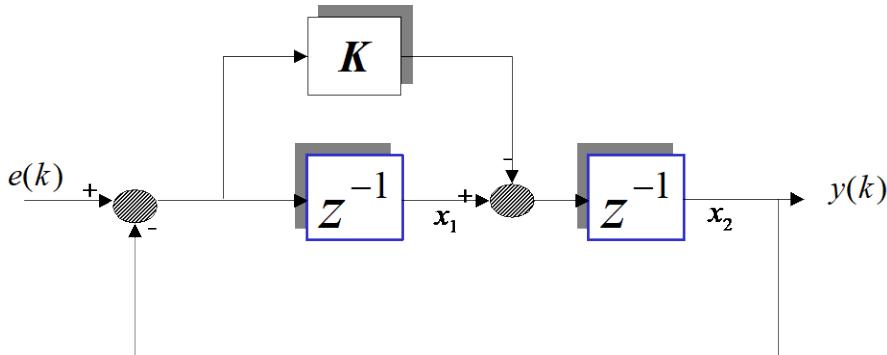


Figure 13 : Variables d'état en temps discret

Dans un tel modèle, on peut définir des variables d'état notées $x_i(k)$ et qui représente la valeur des signaux aux instants d'échantillonnage kT , T étant la période d'échantillonnage. L'équation

$$X_i(z) = z^{-1} X_j(z)$$

se traduit en représentation temporelle échantillonnée par

$$x_i(k) = x_j(k-1)$$

d'où la dénomination d'opérateur de décalage.

3. DISCRETISATION D'UN SYSTEME MIS SOUS FORME D'ETAT.

Considérons donc un système continu à m entrées et r sorties dont la représentation d'état est donnée par

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

avec $x \in R^n$, $u \in R^m$ et $y \in R^r$, A une matrice $n \times n$, B une matrice $n \times m$, C une matrice $r \times n$ et D une matrice $r \times m$. On désire alors calculer la représentation d'état échantillonnée de ce système selon le schéma classique de discréttisation de la figure 3,

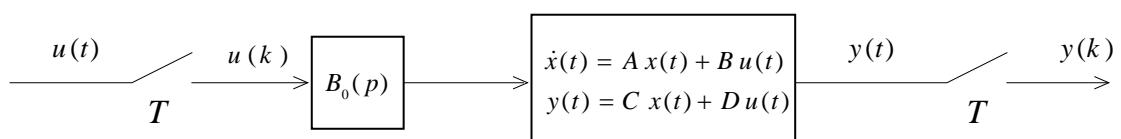


Figure 14 : Discréttisation d'un système sous forme d'état.

c'est-à-dire trouver les matrices F et G telles que

$$x[(k+1)T] = Fx(kT) + Gu(kT),$$

équation d'état du système échantillonné que l'on notera pour plus de commodité

$$x(k+1) = F x(k) + G u(k).$$

Pour cela, on sait que la solution $x(t)$ de l'équation différentielle d'état vectorielle

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t)$$

entre un instant initial t_1 et un instant final t_2 est donnée par

$$x(t_2) = \exp[A(t_2 - t_1)] \cdot x(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \exp[A(t_2 - \tau)] B u(\tau) d\tau.$$

Appliquons alors cette égalité entre les temps $t_1 = kT$ et $t_2 = (k+1)T$. Il vient

$$x[(k+1)T] = \exp[AT] \cdot x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} \exp[A((k+1)T - \tau)] B u(\tau) d\tau.$$

Or, que vaut l'entrée du système $u(\tau)$ sur l'intervalle d'intégration $[kT, (k+1)T]$? Étant donné qu'on utilise un bloqueur d'ordre zéro, on a

$$u(\tau) = u(kT) \quad \forall \tau \in [kT, (k+1)T].$$

En conséquence, on a

$$x(k+1) = \exp(AT) \cdot x(k) + \int_{kT}^{(k+1)T} \exp[A((k+1)T - \tau)] B u(k) d\tau = \exp(AT) \cdot x(k) + \int_{kT}^{(k+1)T} \exp[A((k+1)T - \tau)] d\tau \cdot B u(k)$$

puisque le terme $B u(k)$ ne dépend pas de la variable d'intégration τ . Effectuons alors le changement de variable d'intégration

$$\bar{\tau} = (k+1)T - \tau.$$

On a alors

$$\begin{aligned} d\bar{\tau} &= -d\tau & \text{et} & \tau = kT \Rightarrow \bar{\tau} = T \\ & & & \tau = (k+1)T \Rightarrow \bar{\tau} = 0, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que

$$x(k+1) = \exp(AT) \cdot x(k) - \int_T^0 \exp[A\bar{\tau}] d\bar{\tau} \cdot B u(k) = \exp(AT) \cdot x(k) + \int_0^T \exp[A\bar{\tau}] d\bar{\tau} \cdot B u(k).$$

On a donc obtenu

$$x(k+1) = F x(k) + G u(k)$$

avec

$$\boxed{\begin{aligned} F &= \exp(AT) \\ G &= \int_0^T \exp(A\tau) d\tau \cdot B \end{aligned}} \quad (1)$$

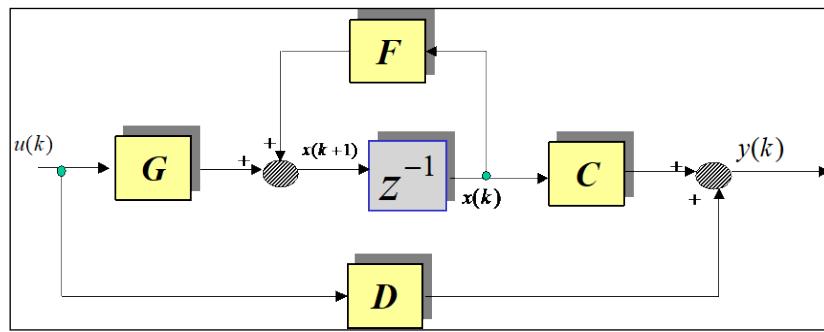
Quant aux matrices C et D de la représentation continue, elles sont identiques dans la représentation échantillonnée, puisque l'égalité

$$y(k) = C x(k) + G u(k)$$

est simplement l'égalité

$$y(t) = C x(t) + D u(t)$$

appliquée en $t = kT$.


 Figure 15 : *Représentation d'état discrète*

➤ **Exponentielle de matrice : une méthode de calcul.**

On peut montrer que l'on a

$$\exp(At) = L^{-1}[(pI - A)^{-1}]$$

Il faut donc dans un premier temps inverser la matrice $pI - A$, avant d'en prendre la transformée de Laplace inverse (en utilisant les tables). On obtient alors la matrice F en appliquant le résultat obtenu à $t = T$. Dès que la matrice A est d'ordre supérieur à 3, il n'est pas raisonnable d'effectuer ce calcul à la main.

➤ **Calcul de la matrice G .**

Les deux manières les plus simples d'effectuer ce calcul sont les suivantes :

- calcul direct de l'intégrale,
- si A est inversible, $G = A^{-1}(F - I)B$.

Tout comme pour le calcul de F , le calcul de G peut s'avérer très ardu. On recourt alors dans un cas comme dans l'autre à des moyens informatiques.

➤ **Calcul par Matlab** : la procédure est la suivante :

- Définition des matrices A , B , C et D de la représentation d'état continue.
 - Définition de la période d'échantillonnage T .
 - Définition du système continu :


```
sysc=ss(A,B,C,D).
```
 - Calcul du système échantillonné correspondant :


```
sysd=c2d(sysc,T,'zoh')
```

Lorsque la représentation d'état du système échantillonné a été calculée, la matrice de transfert du système est alors donnée par

$$G(z) = C(zI - F)^{-1}G + D \quad (2)$$

La matrice de transfert (ou la fonction de transfert lorsque le système est monovariable) d'un système échantillonné peut être ainsi obtenue de deux manières différentes à partir de la donnée de la fonction de transfert du système continu :

- *Calcul direct de $G(z)$ par $G(z) = Z[B_0(p)G(p)]$,*
- *Calcul d'une représentation d'état (A, B, C, D) associée à $G(p)$, calcul de la représentation d'état échantillonnée (F, G, C, D) grâce aux égalités (1), calcul de $G(z)$ par l'égalité (2).*

4. STABILITE

Définition :

Un système est asymptotiquement stable si pour des entrées nulles, écarté de son état d'équilibre, il revient à son état d'équilibre.

- **Critère dans cas continu :**

Un système décrit par une représentation d'état continue, est stable asymptotiquement si les valeurs propres de A (ou les pôles de la matrice de transfert) sont à partie réelle strictement négative, i.e. :
 $\text{Réel}(\text{valp}(A)) < 0$

- **Critère dans le cas discret :**

Un système décrit par une représentation d'état discrètes, est stable asymptotiquement si les valeurs propres de F (ou les pôles de la matrice de transfert) ont leur module strictement inférieur à 1, i.e. :

$$|\text{valp}(F)| < 1$$

5. OBTENTION D'UNE REPRESENTATION D'ETAT D'UN SYSTEME DISCRET A PARTIR DE SA FONCTION DE TRANSFERT.

A l'inverse, on peut écrire une représentation d'état (F, G, C, D) , que l'on appelle réalisation, à partir de la fonction de transfert $G(z)$ d'un système discret monovariable, ou de son équation récurrente. Il existe une infinité de réalisations associées à une fonction de transfert donnée. Les deux plus courantes sont la **forme canonique d'observabilité** et la **forme canonique de gouvernabilité**. Ces réalisations s'obtiennent exactement comme en continu. On donne donc simplement ici leur forme générale.

Soit donc le système discret (ou continu) de fonction de transfert

$$G(z) = \frac{b_{n-1}z^{n-1} + b_{n-2}z^{n-2} + \cdots + b_1z + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0} \quad \text{ou} \quad G(p) = \frac{b_{n-1}p^{n-1} + b_{n-2}p^{n-2} + \cdots + b_1p + b_0}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1p + a_0}$$

La forme canonique de gouvernabilité est alors donnée par

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [b_0 \ b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_{n-1}] \quad \text{et} \quad D = 0.$$

La forme canonique d'observabilité est quant à elle donnée par

$$F = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0] \quad \text{et} \quad D = 0.$$

Remarque : Dans le cas continu, la fonction de transfert est donnée par la forme générale suivante :

 Pour obtenir les formes canoniques d'observabilité et de gouvernabilité il suffit de remplacer dans les formules précédentes F par A et G par B , C restant inchangé.

6. GOUVERNABILITE ET OBSERVABILITE D'UN SYSTEME DISCRET.

Tout comme en continu, on introduit les notions de gouvernabilité et d'observabilité d'un système discret. Ces notions sont importantes. On sait en effet que, pour un système continu, l'existence d'une **commande par retour d'état** qui place les pôles du système en boucle fermée est associée à la propriété de gouvernabilité. De la même manière, on ne peut construire un **observateur d'état** qui converge avec la rapidité souhaitée que si le système est observable. Il en est de même pour un système discret. Il faut noter que s'il s'agit d'un système échantillonné, et que l'on a échantillonné assez finement, **le système échantillonné est gouvernable et observable si et seulement si le système continu l'est aussi**. S'il s'agit d'un système discret pur, il faut en revanche vérifier ces propriétés.

➤ Gouvernabilité.

Définition : Le système linéaire discret d'ordre n de représentation d'état

$$\begin{aligned} x(k+1) &= F x(k) + G u(k) \\ y(k) &= C x(k) + D u(k) \end{aligned}$$

est dit **gouvernable** si, pour tout point x_f de l'espace d'état, il existe un entier K et une séquence d'entrée $u(0), u(1), \dots, u(K-1)$ telle que si on l'applique au système à partir du point initial $x(0) = 0$, on a $x(K) = x_f$.

Critère de Kalman : Le système linéaire d'ordre n considéré est gouvernable si et seulement si

$$\text{rang} \left(\begin{bmatrix} G & FG & F^2G & \cdots & F^{n-1}G \end{bmatrix} \right) = n .$$

La matrice utilisée dans le critère s'appelle la **matrice de gouvernabilité**.

➤ Observabilité.

Définition : Le système linéaire discret d'ordre n de représentation d'état

$$\begin{aligned} x(k+1) &= F x(k) + G u(k) \\ y(k) &= C x(k) + D u(k) \end{aligned}$$

est dit **observable** s'il existe un entier K tel que la connaissance des sorties $y(0), y(1), \dots, y(K-1)$ du système soumis à une entrée nulle est suffisante pour déterminer l'état initial $x(0)$.

Critère de Kalman : Le système linéaire d'ordre n considéré est observable si et seulement si

$$\text{rang} \left(\begin{bmatrix} C \\ CF \\ CF^2 \\ \vdots \\ CF^{n-1} \end{bmatrix} \right) = n .$$

La matrice utilisée dans le critère s'appelle la **matrice d'observabilité**.

Remarque :

 Dans le cas continu, les critères de gouvernabilité et d'observabilité sont donnés en remplaçant dans les formules précédentes **F** par **A** et **G** par **B**, **C** restant inchangé.

Exercice d'application :

On considère un moteur à courant continu d'entrée u , de sortie y et d'équation de comportement

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = u(t).$$

1. *Donner une représentation d'état (A, B, C, D) de ce système.*
 2. *On décide d'échantillonner à la période $T = 0,5$ s. Calculer la représentation d'état (F, G, C, D) du système échantillonné.*
 3. *Analyser la gouvernabilité et l'observabilité du système.*
 4. *Calculer de deux manières différentes la fonction de transfert du système échantillonné.*
 5. *A partir de cette fonction de transfert, donner les représentations d'état canoniques de gouvernabilité et d'observabilité du système échantillonné.*
-

CHAPITRE VII

Commande par Retour d'Etat des Systèmes Monovariables.

1	INTRODUCTION.....	75
2	COMMANDE PAR RETOUR D'ETAT D'UN SYSTEME ECHANTILLONNE.	76
2.1	METHODE DE CALCUL	76
2.2	CALCUL DIRECTE : FORMULE DE BASS-GURA	78
3	PLACEMENT DES POLES EN BOUCLE FERMEE.....	80
3.1	UNE METHODE DE PLACEMENT DE POLES ROBUSTE : CAS CONTINU	80
3.2	UNE METHODE DE PLACEMENT DE POLES ROBUSTE : CAS DISCRET	82
3.3	PROGRAMMATION SUR MATLAB :.....	83
4	COMMANDE PAR RETOUR D'ETAT AVEC EFFET INTEGRAL D'UN SYSTEME ECHANTILLONNE... 84	84
4.1	PROBLEMATIQUE ET PREMIERE APPROCHE	84
4.2	COMMANDE CONTINUE PAR RETOUR D'ETAT AVEC EFFET INTEGRAL.....	85
4.3	COMMANDE NUMERIQUE PAR RETOUR D'ETAT AVEC EFFET INTEGRAL.....	87
5	OBSERVATEUR ET ESTIMATION D'ETAT D'UN SYSTEME ECHANTILLONNE	90
6	COMMANDE PAR RETOUR D'ETAT AVEC EFFET INTEGRAL ET OBSERVATEUR D'UN SYSTEME ECHANTILLONNE.	93

1. INTRODUCTION.

On ne considérera dans ce chapitre que des systèmes à une entrée et une sortie, dont l'équation d'état continue est donnée par :

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}(t) &= A \underline{x}(t) + B u(t) \\ y(t) &= C \underline{x}(t)\end{aligned},$$

et l'équation d'état discrète après échantillonnage à la période T par

$$\begin{aligned}\underline{x}(k+1) &= F \underline{x}(k) + G u(k) \\ y(k) &= C \underline{x}(k)\end{aligned}.$$

On a donc ici $\underline{x} \in R^n$, $u \in R$, $y \in R$, les matrices A et F sont carrées de dimension $n \times n$, B et G sont des matrices colonnes de dimension $n \times 1$, et C est une matrice ligne de même dimension($1 \times n$).

On concevra pour ces systèmes une commande par *retour d'état avec effet intégral et observateur*. Vous avez déjà étudié des lois de commande efficaces (ex. PID numérique) fondées sur la modélisation des systèmes par des fonctions transfert, mais l'approche par représentation d'état possède des propriétés de lisibilité intéressantes (séparation entre le retour d'état et l'observateur). En outre, cette approche permet de traiter, comme on l'a déjà mentionné, des problèmes de commande multivariable et de conditions initiales non nulles.

2. COMMANDE PAR RETOUR D'ETAT D'UN SYSTEME ECHANTILLONNE.

On suppose dans ce paragraphe que l'on a **accès à la mesure** des n coordonnées de l'état \underline{x} du système. C'est une hypothèse de travail, irréaliste dans la pratique (pour des raisons de coût essentiellement). On considère donc ici le système d'équation d'état

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}(t) &= A \underline{x}(t) + B u(t) \\ y(t) &= C \underline{x}(t)\end{aligned}$$

que l'on a échantillonné à la période T pour obtenir

$$\begin{aligned}\underline{x}(k+1) &= F \underline{x}(k) + G u(k) \\ y(k) &= C \underline{x}(k)\end{aligned}\tag{1}$$

avec

$$F = \exp(AT) \text{ et } G = \int_0^T \exp(A\tau) \cdot B \cdot d\tau.$$

Le but est alors de concevoir une **commande par retour d'état**

$$u(k) = -K \underline{x}(k) + y_c(k)\tag{2}$$

où K est une **matrice ligne à calculer**, et $y_c(k)$ la consigne sur la sortie. Cette commande correspond au schéma en boucle fermée de la figure 1.

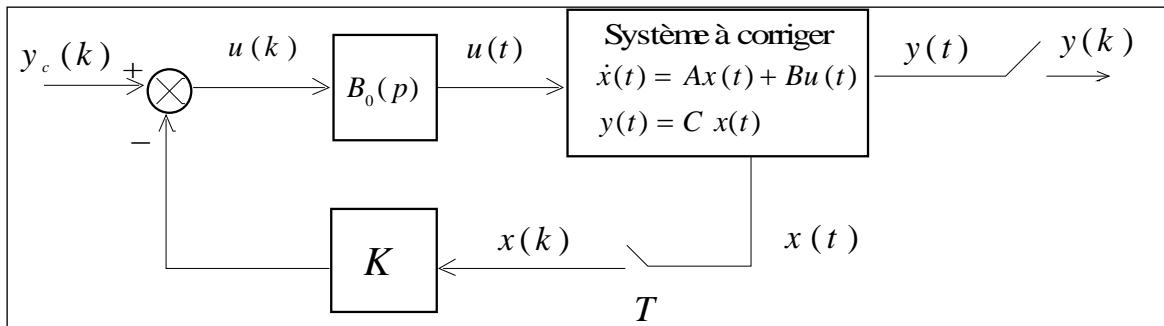


Figure 16 : *Commande numérique par retour d'état simple.*

a. Méthode de calcul

La commande par retour d'état étudiée ici est une **commande du type « à placement de pôles »**. En effet, l'application de la commande (2) au système (1) donne en boucle fermée

$$\begin{aligned}\underline{x}(k+1) &= (F - GK) \underline{x}(k) + G y_c(k) \\ y(k) &= C \underline{x}(k)\end{aligned}\tag{3}$$

et le problème est alors de calculer la matrice ligne K de retour d'état de manière à ce que la matrice de d'état $(F - GK)$ du système en boucle fermée possède des valeurs propres définies par le concepteur. On sait en effet que ces valeurs propres sont les **pôles du système en boucle fermée**. Supposons que l'on décide de placer ces pôles en

$$z_1, z_2, \dots, z_n.$$

Nous verrons plus tard comment choisir ces valeurs en fonction du système étudié.

On a le résultat suivant :

Théorème : Soit $F : n \times n$ et $G : n \times 1$ deux matrices. Soit z_1, z_2, \dots, z_n des nombres complexes quelconques. Il existe une matrice $K : 1 \times n$ telle que la matrice $F - GK$ ait pour valeurs propres ces nombres complexes si et seulement si la paire (F, G) est gouvernable.

Remarque : le placement des pôles au moyen d'une commande par retour d'état numérique nécessite donc que le système soit gouvernable. Si l'on a respecté la condition d'échantillonnage, cette propriété peut être vérifiée à partir de la représentation d'état continue du système.

La méthode pour calculer les coefficients de la matrice K à partir de la donnée des matrices d'état F et G de la représentation d'état échantillonné est alors la suivante :

Procédure de calcul d'un retour d'état numérique simple.

- Poser $K = [k_1 \ k_2 \ \dots \ k_n]$.
- Calcul de la matrice d'état en boucle fermée $(F - GK)$.
- Calcul du polynôme caractéristique du système en boucle fermée, soit

$$P_{BF}(z) = \det[zI - (F - GK)] = z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \dots + \alpha_1z + \alpha_0,$$

dont les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ dépendent des coefficients de retour d'état k_1, k_2, \dots, k_n .

- Calcul de $P_{BF}(z)$ à partir de ses racines z_1, z_2, \dots, z_n fixées par le concepteur, soit

$$P_{BF}(z) = (z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n) = z^n + \beta_{n-1}z^{n-1} + \dots + \beta_1z + \beta_0.$$

- Identification terme à terme des deux expressions du polynôme $P_{BF}(z)$, soit

$$\begin{aligned} \alpha_1(k_1, k_2, \dots, k_n) &= \beta_1 \\ \alpha_2(k_1, k_2, \dots, k_n) &= \beta_2 \\ &\vdots && \vdots \\ \alpha_n(k_1, k_2, \dots, k_n) &= \beta_n \end{aligned}$$

- Résolution de ce système de n équations à n inconnues et obtention des coefficients de K .

b. Calcul directe : formule de Bass-Gura

Nous allons ici reformuler la procédure de synthèse du retour d'état simple pour élaborer une méthode directe de calcul. C'est la méthode **Bass-Gura**.

Soit $\mathfrak{R}(F, G, C, 0)$ une représentation d'état discrète du système à compenser. La dynamique de ce système est fixée par le polynôme caractéristique $P_{BO}(z)$ et on souhaite qu'en boucle fermée cette dynamique soit définie par le polynôme caractéristique $P_{BF}(z)$ (polynôme construit à l'aide de la méthode de placement des pôles).

Le but est de trouver une expression permettant de calculer le gain K directement. Pour cela, reprenons polynôme $P_{BF}(z)$:

$$\begin{aligned} P_{BF}(z) &= \det\{zI - F + GK\} \\ &= \det(zI - F)\left[I + (zI - F)^{-1}GK\right] \\ &= \det(zI - F)\det\left[I + (zI - F)^{-1}GK\right] \\ &= P_{BO}(z)\det\left[I + (zI - F)^{-1}GK\right] \\ &= P_{BO}(z)\det\left[I + K(zI - F)^{-1}G\right] \quad \text{car } \det(AB) = \det(BA) \\ &= P_{BO}(z)\left[1 + K(zI - F)^{-1}G\right] \quad \text{car } \det(\text{scalaire}) \\ &= P_{BO}(z) + P_{BO}(z)K(zI - F)^{-1}G \end{aligned}$$

Il s'ensuit que,

$$P_{BF}(z) - P_{BO}(z) = P_{BO}(z)K(zI - F)^{-1}G$$

Maintenant les deux termes de cette égalité sont des polynômes en z et le gain K peut être obtenu en identifiant terme à terme des deux expressions des deux polynômes. Pour cela, on pose

$$\begin{aligned} P_{BO}(z) &= z^n + \sigma_1 z^{n-1} + \cdots + \sigma_{n-1} z + \sigma_n \\ P_{BF}(z) &= z^n + \beta_1 z^{n-1} + \cdots + \beta_{n-1} z + \beta_n \\ \underline{\sigma}^T &= [\sigma_1 \ \cdots \ \sigma_n] \quad \text{et} \quad \underline{\beta}^T = [\beta_1 \ \cdots \ \beta_n] \end{aligned}$$

et on utilise la relation suivante (algorithme de *Leverrier Souriou*) :

$$(zI - F)^{-1} = \frac{1}{P_{BO}(z)} \left[z^{n-1} I + z^{n-2} (F + \sigma_1 I) + z^{n-3} (F^2 + \sigma_1 F + \sigma_2 I) + \cdots \right]$$

Par conséquent en identifiant terme à terme nous avons :

$$\begin{array}{lcl} \beta_1 - \sigma_1 = KG \\ \beta_2 - \sigma_2 = KFG + K\sigma_1 G \\ \beta_3 - \sigma_3 = KF^2G + K\sigma_2 FG + K\sigma_1 G \\ \vdots = \vdots \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} \beta_1 - \sigma_1 \\ \beta_2 - \sigma_2 \\ \beta_3 - \sigma_3 \\ \vdots \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} G & FG & F^2G & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ \sigma_1 & 1 & 0 & \dots \\ \sigma_2 & \sigma_1 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 \end{bmatrix}^T$$

le gain K se déduit alors de l'expression suivante

$$\underline{\beta}^T - \underline{\sigma}^T = KG_v A_t^T$$

où G_v est la matrice de gouvernabilité A_t et la matrice de Toeplitz.

La méthode pour calculer les coefficients de la matrice de retour d'état K à partir de $P_{BO}(z)$ et $P_{BF}(z)$ est alors la suivante :

Procédure de calcul d'un retour d'état numérique : Formule de Bass-Gura.

- Poser $K = [k_1 \ k_2 \ \dots \ k_n]$.
- Construction de la matrice de Gouvernabilité :

$$G_v = \begin{bmatrix} G & FG & \dots & F^{n-1}G \end{bmatrix}$$

- Si le $\text{rang}(G_v) = n$ alors on calcul $[G_v]^{-1}$.
- Calcul du polynôme caractéristique en boucle ouverte :

$$P_{BO}(z) = \det[zI - F] = z^n + \sigma_1 z^{n-1} + \dots + \sigma_{n-1} z + \sigma_n$$

- Construction du polynôme caractéristique en boucle fermée (choix du concepteur), soit

$$P_{BF}(z) = z^n + \beta_1 z^{n-1} + \dots + \beta_{n-1} z + \beta_n,$$

- Construction des vecteurs suivants

$$\underline{\sigma}^T = [\sigma_1 \ \dots \ \sigma_n] \quad \text{et} \quad \underline{\beta}^T = [\beta_1 \ \dots \ \beta_n]$$

- Construction de la matrice de Toeplitz A_t définie par :

$$A_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \sigma_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \sigma_2 & \sigma_1 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 & 0 \\ \sigma_{n-1} & \dots & \dots & \sigma_1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcul de A_t^T et de $[A_t^T]^{-1}$.
- Calcul du gain de retour K :

$$K = [\underline{\beta}^T \ - \underline{\sigma}^T] [A_t^T]^{-1} (G_v)^{-1}$$

Exercice : Soit le système monovariable discret suivant :

$$F = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculer une commande par retour d'état sachant que la dynamique souhaitée en boucle fermée est donnée par le polynôme caractéristique suivant :

$$P_{BF}(z) = (z + 0.1)(z + 0.2)(z + 0.3)$$

Remarque : Dans le cas des systèmes continus, la commande par retour d'état s'obtient avec la même approche en remplaçant F par A et G par B .



3. PLACEMENT DES POLES EN BOUCLE FERMEE

a. Une méthode de placement de pôles robuste : cas continu

Maintenant que l'on sait calculer un retour d'état assurant un certain placement des pôles en boucle fermée, il nous faut décrire **comment choisir ces pôles**. Nous allons présenter dans un premier temps la méthode dans le cas continu puis dans un deuxième temps la transcrire au cas discret.

Les pôles de la boucle fermée sont les racines de $P_{BF}(p)$. Pour des raisons que l'on explicitera plus tard, on écrit ce polynôme comme le produit de deux polynômes $P_C(p)$ et $P_O(p)$, soit

$$P_{BF}(p) = P_C(p) \cdot P_O(p)$$

avec

$$d^\circ(P_C) = n \text{ et } d^\circ(P_O) = n.$$

De cette manière, on a bien $d^\circ(P_{BF}) = 2n$. Le polynôme $P_C(p)$ s'appelle le **polynôme de commande**, et le polynôme $P_O(p)$ le **polynôme d'observation**, par analogie avec la commande par retour d'état avec observateur étudiée au paragraphe 6 de ce chapitre.

Effectuer le placement des pôles en boucle fermée, c'est donc choisir les pôles de $P_C(p)$ et ceux de $P_O(p)$. Il y aura donc **un placement de pôles** pour $P_C(p)$, **et un autre** pour $P_O(p)$. Les pôles de ces polynômes se placent à partir des pôles de la fonction de transfert en boucle ouverte, c'est-à-dire à partir des racines du polynôme $P_{BO}(p)$, mais il faut pour cela respecter certaines règles.

Pour placer les pôles en boucle fermée, on se fonde sur une règle valable pour les systèmes stables en boucle ouverte ou à la limite de la stabilité:

La stabilité d'une commande sera d'autant plus robuste que les modes de la boucle fermée seront proches des modes naturels du système en boucle ouverte.

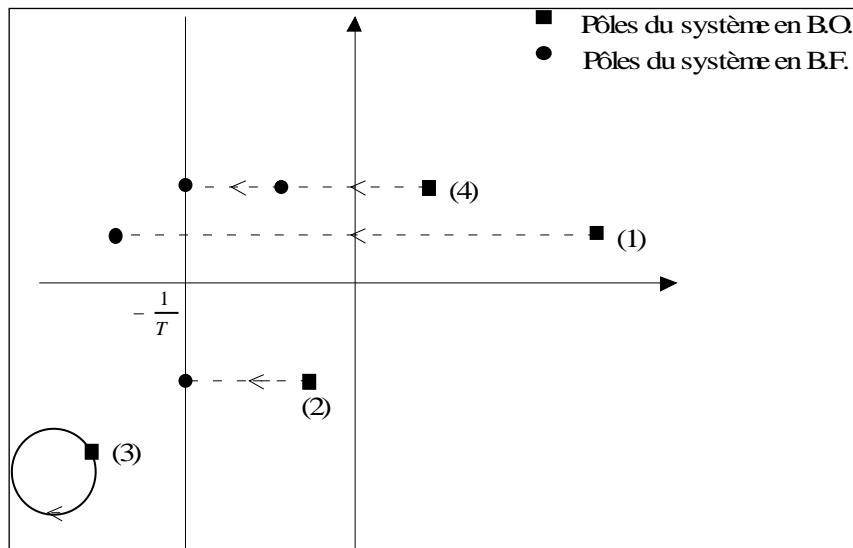
Il s'agit donc de réaliser un compromis entre les performances qui exigent des pôles suffisamment rapides et bien amortis et la robustesse paramétrique

Pour cela, on se donne un paramètre de synthèse, T , appelé **horizon** (qui peut être **horizon de commande** T_C lorsque l'on effectue le placement des pôles du polynôme de commande $P_C(p)$, ou **horizon d'observation** T_O lorsque l'on effectue le placement des pôles du polynôme d'observation $P_O(p)$). On en déduit alors les pôles en boucle fermée à partir des pôles en boucle ouverte en effectuant dans l'ordre les opérations suivantes :

- Les racines instables de $P_{BO}(p)$ sont remplacées par leurs symétriques par rapport à l'axe imaginaire (1).
- Les racines trop lentes (à droite de la verticale d'abscisse $-\omega = -\frac{1}{T}$) sont ramenées sur cette verticale (2).
- Les racines restantes demeurent inchangées (3).

Notons qu'ainsi une même racine peut subir deux transformations successives (4). La figure suivante illustre ces différents cas sur un exemple.





On applique donc ces règles deux fois pour trouver les pôles de $P_C(p)$ et de $P_O(p)$. Ainsi, les n pôles de $P_C(p)$ (puisque ce polynôme est de degré n) se placent à partir des n pôles de $P_{BO}(p)$ et *idem* pour les n pôles de $P_O(p)$.

Exemple : Considérons le système à corriger de fonction de transfert

$$G(p) = \frac{p+0.5}{p^3 - 2p - 4} = \frac{B(p)}{A(p)},$$

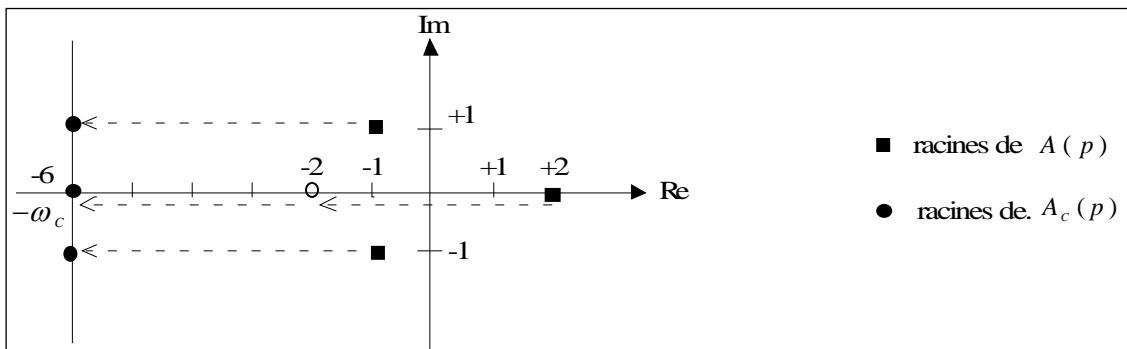
pour lequel on désire calculer une commande par retour d'état, avec un horizon de commande $T_C = 1/6$, et un horizon d'observation $T_O = 1/3$

On ne prétend pas que ce placement de pôles soit ici le plus astucieux. De toute façon, cela dépend essentiellement du cahier des charges, et le choix des deux horizons constitue en fait la principale difficulté que rencontre le concepteur, mais on désire simplement ici illustrer la technique du placement de pôles une fois les horizons fixés.

On peut facilement montrer que les racines de $P_{BO}(p)$ sont

$$+2, -1+j \text{ et } -1-j.$$

Plaçons alors les pôles de $P_C(p)$ à partir de ces racines. On a le schéma suivant :



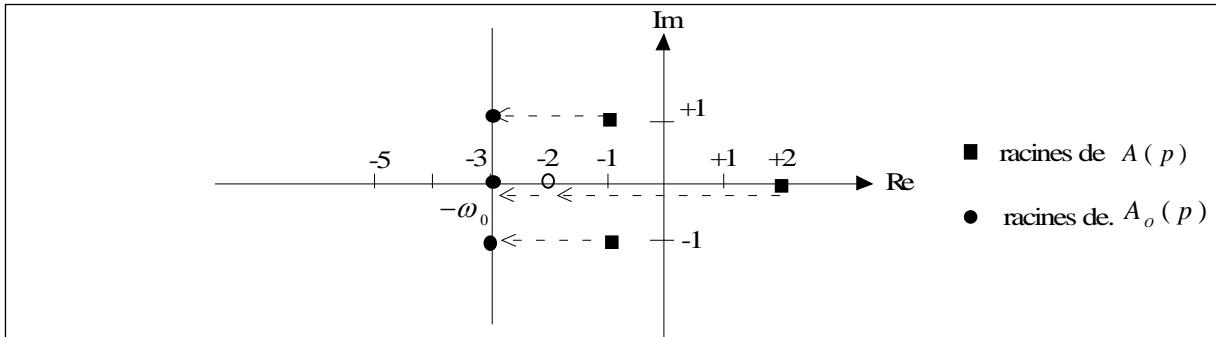
Les racines de $P_C(p)$ seront donc

$$-6, -6+j \text{ et } -6-j$$

et on aura

$$P_C(p) = (p+6)(p+6+j)(p+6-j) = p^3 + 18p^2 + 109p + 222$$

Plaçons maintenant les pôles de $P_O(p)$. On a le schéma suivant.



Les racines de $P_O(p)$ seront donc

$$-3, -3+j \text{ et } -3-j$$

et on aura

$$P_O(p) = (p+3)(p+3+j)(p+3-j) = p^3 + 9p^2 + 28p + 30.$$

Le polynôme caractéristique en boucle fermée est dans ce cas égal à

$$P_{BF}(p) = P_C(p) \cdot P_O(p) = p^6 + 27p^5 + 299p^4 + 1737p^3 + 5590p^2 + 9486p + 6660.$$

b. Une méthode de placement de pôles robuste : cas Discret

La transcription de cette méthode à un cadre discret est possible, mais les transformations géométriques associées à la transformée en z rendent celle-ci **impossible à appliquer**. On préfère alors repasser en continu pour y procéder au placement de pôles, avant de revenir en discret, un peu comme l'on fait pour la conception d'un correcteur numerique

Procédure de placement des pôles en discret.



- Calcul des valeurs propres de F : f_1, f_2, \dots, f_n , qui sont les pôles du système échantillonné en boucle ouverte.
- Conversion de ces pôles en continu : $f_1, f_2, \dots, f_n \rightarrow f_1^c, f_2^c, \dots, f_n^c$ grâce aux formules de passage $z = \exp(pT) = \alpha + i\beta \rightarrow p = a + ib$ avec

$$\begin{cases} a &= \frac{\ln(\alpha^2 + \beta^2)}{2T} \\ b &= \frac{1}{T} \arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \end{cases}.$$

- Placement des pôles en continu sur la base d'un horizon de commande T_C défini par l'utilisateur :

$$f_1^c, f_2^c, \dots, f_n^c \rightarrow z_1^c, z_2^c, \dots, z_n^c.$$

- Conversion des valeurs obtenues en discret : $z_1^c, z_2^c, \dots, z_n^c \rightarrow z_1, z_2, \dots, z_n$ grâce aux formules de passage

$$p = a + ib \rightarrow z = \exp(pT) = \alpha + i\beta \text{ avec}$$

$$\begin{cases} \alpha &= \exp(aT) \cdot \cos(bT) \\ \beta &= \exp(aT) \cdot \sin(bT) \end{cases}.$$

Remarque : Nous pouvons aussi utiliser les **filtres de Bessel** (cours B4, ENSEV) pour construire le polynôme désiré en boucle fermée. En effet, nous pouvons toujours calculer les pôles du système en boucle fermée en divisant ceux de Bessel par le temps de réponse désiré. Ce placement est correct mais pas forcément robuste. En fait, il peut constituer un bon moyen pour estimer les horizons à calculer.

c. Programmation avec Matlab :

Deux fonction permettent d'effectuer le calcul du retour d'état par placement de pôles :

- La fonction **acker** qui est limitée aux systèmes mono entrée mono sortie dont l'ordre est plutôt faible (inférieure à 5).
- La fonction **place** plus générale, convient également pour les systèmes à plusieurs entrée. Elle est numériquement meilleure.

Exercice : Considérons le système échantillonné (période d'échantillonnage $T = 0,1 \text{ s}$) de fonction de transfert

$$G(z) = \frac{z + 0,5}{z^2 + z + 0,5}$$

Calculer une commande numérique par retour d'état pour ce système. On travaillera à la partir de la forme canonique de gouvernabilité du système échantillonné, et on choisira l'horizon de commande de manière à obtenir un amortissement égal à $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Solution :

Pour avoir un amortissement de 0.7, il faut que la partie réelle soit égale à la partie imaginaire du pôle complexe conjugué :

La procédure Matlab pour calculer ce retour d'état est la suivante :

```
T = 0.1 ; wc = 20 ;
f = eig(F) ;
f1 = f(1) ; f2 = f(2) ;
f1c = log(f1)/T ; f2c = log(f2)/T ;
zc1 = -20+imag(f1c)*i ; zc2=-20-imag(f2c)*i ;
z1=exp(T*zc1) ; z2=exp(T*zc2) ;
z=[z1 ;z2] ;
K=acker(F,G,z) % Place les pôles et calcul le retour d'état.
```

$$\rightarrow K = [-0.4817 \quad -0.8086]$$

4. COMMANDE PAR RETOUR D'ETAT AVEC EFFET INTEGRAL D'UN SYSTEME ECHANTILLONNE

a. Problématique et première approche

Raisonnons un instant sur un système continu. Considérons le système régi par l'équation différentielle du second ordre

$$\ddot{y}(t) + a \dot{y}(t) + b y(t) = c u(t),$$

et choisissons pour vecteur d'état

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y} \quad \Rightarrow \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix},$$

ce qui conduit à la représentation d'état

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u.$$

Le retour d'état associé a la forme

$$u = -K \underline{x} + y_c = -[k_1 \quad k_2] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + y_c = -k_1 y - k_2 \dot{y} + y_c.$$

Il s'agit donc d'un régulateur Proportionnel – Dérivateur, qui ne comporte pas de terme intégral.

C'est le cas de toute commande par retour d'état simple (que ce soit en continu ou en discret, la nature de la commande importe peu). Revenons alors au système échantillonné pour lequel on a conçu au paragraphe 2 une commande par retour d'état simple. La fonction de transfert du système en boucle fermée, calculée à partir de la représentation d'état (3), est donnée par

$$H(z) = C[zI - (F - GK)]^{-1} G.$$

Le gain statique en boucle fermée, qui est égal à

$$GS = H(1) = C(I - F + GK)^{-1} G,$$

est donc en général différent de 1, ce qui entraîne une erreur statique lorsque l'on souhaite que la sortie du système $y(k)$ suive une consigne constante $y_c(k)$.

Une manière de résoudre ce problème consiste à ajouter un gain direct à la commande par retour d'état, soit

$$u(k) = -K \underline{x}(k) + L v(k),$$

où $L \in R$ est un scalaire.

La représentation d'état du système en boucle fermée est alors donnée par

$$\begin{aligned} \underline{x}(k+1) &= (F - GK) \underline{x}(k) + GL y_c(k) \\ y(k) &= C \underline{x}(k) \end{aligned}$$

et la fonction de transfert vaut alors

$$H(z) = C[zI - (F - GK)]^{-1} GL.$$

Il suffit alors de choisir

$$L = \frac{1}{C(I - F + GK)^{-1}G}$$

pour obtenir

$$GS = H(1) = 1.$$

Cette solution est à **bannir**, car la modélisation – identification d'un système physique comportant toujours des *incertitudes*, les matrices F et G sont en général différentes de ce que l'on pense et le système peut être soumis à d'éventuelles perturbations extérieures. En conséquence le gain statique en boucle fermée ne sera jamais égal à 1. Il faut pour cela concevoir une **commande par retour d'état avec effet intégral**. Notons qu'en outre on rejettéra alors les perturbations constantes.

Afin d'aborder dans les meilleures conditions l'application de cette commande à un système échantillonné, il est préférable d'étudier en premier lieu le cas continu.

b. Commande continue par retour d'état avec effet intégral

Considérons le système continu mis sous forme d'état

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}(t) &= A\underline{x}(t) + Bu(t) + d_1(t) \\ y(t) &= C\underline{x}(t) + d_2(t)\end{aligned}$$

où les signaux $d_1(t) = d_1$ et $d_2(t) = d_2$ sont des perturbations **constantes** d'entrée et de sortie du système. On veut alors asservir $y(t)$ à une consigne **constante** $y_c(t) = y_c$, et l'on définit l'erreur de consigne

$$e(t) = y(t) - y_c(t) = y(t) - y_c.$$

L'objectif est donc le suivant :

Garantir $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = y_c$ quelles que soient les constantes y_c , d_1 et d_2 .

Théorème : Soit le système continu précédemment défini. Il est possible de construire un retour d'état avec effet intégral tel que la sortie du système en boucle fermée suive n'importe quelle consigne constante en présence de perturbations constantes, si les conditions suivantes sont satisfaites :

i) la paire (A, B) est gouvernable,

$$\text{ii) } \text{rang} \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} = n+1.$$

• **Méthode de calcul de la commande** : on fait disparaître $d_1(t)$, $d_2(t)$ et $y_c(t)$ des équations d'état. Pour cela, comme ce sont des signaux constants, on dérive ces équations, et on obtient

$$\begin{aligned}\ddot{\underline{x}}(t) &= A\dot{\underline{x}}(t) + B\dot{u}(t) + \dot{d}_1(t) = A\dot{\underline{x}}(t) + B\dot{u}(t) \\ \dot{e}(t) &= \dot{y}(t) - \dot{y}_c(t) = C\dot{\underline{x}}(t)\end{aligned}.$$

On définit alors un nouvel état, que l'on appelle l'**état augmenté**, soit

$$X = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ e \end{bmatrix},$$

qui est de dimension $n+1$, une nouvelle commande $U = \dot{u}$, dérivée de la précédente. La nouvelle représentation d'état du système est alors

$$\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} \ddot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \dot{x}(t) + B \dot{u}(t) \\ C \dot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \dot{u}(t) = \bar{A} X(t) + \bar{B} U(t). \quad \text{Hand icon}$$

La conception d'une commande par retour d'état avec effet intégral pour le système initial consiste alors à réaliser une commande par retour d'état simple pour le système augmenté, c'est-à-dire

$$U(t) = -K X(t) = -[K_1 \ K_2] \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ e(t) \end{bmatrix},$$

où K_1 est une matrice ligne de dimension n et K_2 un scalaire.

- **Quel est l'effet de cette commande sur le système ?** En boucle fermée, on a donc

$$\dot{X}(t) = (\bar{A} - \bar{B}K)X(t).$$

Supposons alors avoir trouvé une matrice ligne K , de dimension $n+1$, telle que toutes les valeurs propres de la matrice d'état en boucle fermée $\bar{A} - \bar{B}K$ soient stables (c'est-à-dire à partie réelle strictement négative). On aurait, pour toute valeur initiale $X(0)$ du système augmenté,

$$X(t) = \exp[(\bar{A} - \bar{B}K)t]X(0) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0,$$

c'est-à-dire

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0,$$

soit finalement

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \underline{x}(t) = \text{cste} \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = y_c,$$

et ce quelles que soient les perturbations constantes $d_1(t)$ et $d_2(t)$. L'objectif de suivi de consigne et de rejet des perturbations que l'on s'était fixé est donc atteint.

- **Placement des pôles en boucle fermée :** il reste donc à placer les pôles du système en boucle fermée de manière adéquate. Puisqu'il s'agit ici de concevoir une commande par retour d'état simple pour le système augmenté, on placera les pôles en boucle fermée à partir des pôles de la matrice \bar{A} , de dimension $n+1$, qui vaut

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}.$$

On voit donc que

$$\text{vap}(\bar{A}) = \text{vap}(A) + \{0\}.$$

En conséquence, on définit comme d'habitude un horizon de commande T_C , et on place les pôles en boucle fermée sur la base de celui-ci en partant des n valeurs propres de la matrice A et de la valeur propre 0. Une fois ce placement de pôles effectué, on calcule les coefficients de K en identifiant les deux expressions du polynôme caractéristique en boucle fermée

$$P(\lambda) = \det[\lambda I - (\bar{A} - \bar{B}K)].$$

- **Forme de la commande obtenue :** le retour d'état avec effet intégral est donné par l'expression

$$U(t) = -K X(t) = -[K_1 \quad K_2] \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ e(t) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{u}(t) = -K_1 \dot{x}(t) - K_2 e(t)$$

$$\Rightarrow u(t) = -K_1 x(t) - K_2 \int_0^t e(\tau) d\tau + u(0).$$

Supposons $u(0) = 0$, on a finalement

$$u(t) = -K_1 \underline{x}(t) - K_2 \int_0^t [y(\tau) - y_c(\tau)] d\tau ,$$

ce qui correspond au schéma de commande

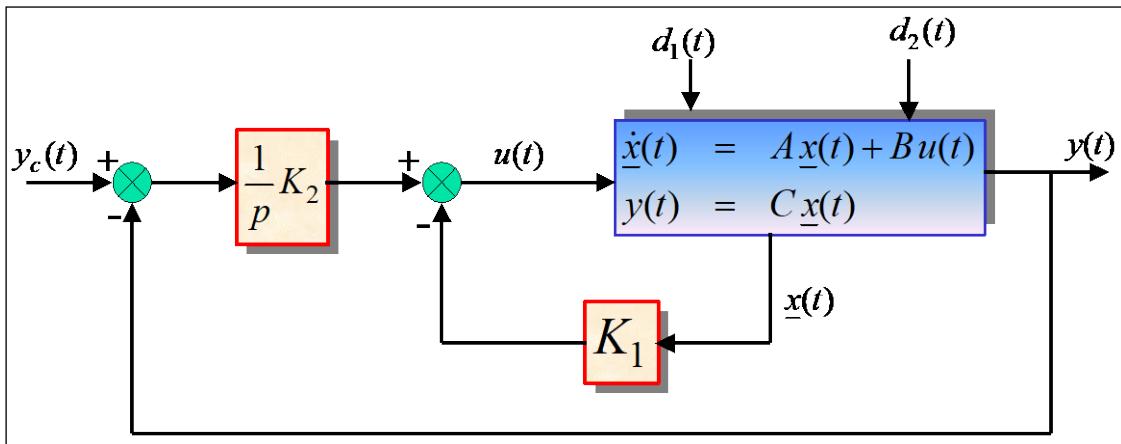


Figure 17 : commande continue par retour d'état avec effet intégral.

La chaîne directe contient bien un intégrateur, d'où l'effet intégral annoncé.

Exercice : Considérons le système continu décrit par l'équation différentielle

$$\ddot{y}(t) - 2\dot{y}(t) + y(t) = u(t) .$$

Donner la forme canonique d'observabilité de ce système. Calculer une commande par retour d'état avec effet intégral en choisissant un horizon de commande $T_C = 1$.

c. Commande numérique par retour d'état avec effet intégral

Nous allons maintenant appliquer cette technique à un contexte discret. Considérons pour cela le système discret mis sous forme d'état

$$\begin{aligned} x(k+1) &= F \underline{x}(k) + G u(k) + d_1(k) \\ y(k) &= C \underline{x}(k) + d_2(k) \end{aligned}$$

où les signaux discrets $d_1(k) = d_1$ et $d_2(k) = d_2$ sont comme en continu des perturbations **constantes** d'entrée et de sortie du système. On souhaite toujours asservir $y(k)$ à une consigne **constante** $y_c(k) = y_c$, et l'on définit alors l'erreur de consigne

$$e(k) = y(k) - y_c(k) = y(k) - y_c.$$

L'objectif est donc le suivant :

Garantir $\lim_{k \rightarrow +\infty} y(k) = y_c$ quelles que soient les constantes y_c , d_1 et d_2 .

Théorème : Soit le système discret précédemment défini. Il est possible de construire un retour d'état numérique avec effet intégral tel que la sortie du système en boucle fermée suive n'importe quelle consigne constante en présence de perturbations constantes, si les conditions suivantes sont satisfaites :

i) la paire (F, G) est gouvernable,

$$\text{ii) } \text{rang} \begin{bmatrix} I - F & -G \\ C & 0 \end{bmatrix} = n+1.$$

• **Méthode de calcul de la commande :** on fait disparaître $d_1(k)$, $d_2(k)$ et $y_c(k)$ des équations d'état. Pour cela, comme ce sont des signaux constants, on effectue des différences (qui sont l'équivalent discret de la dérivation continue), soit

$$\begin{aligned} \underline{x}(k+2) - \underline{x}(k+1) &= F \underline{x}(k+1) + G u(k+1) + d_1(k+1) - F \underline{x}(k) - G u(k) - d_1(k) \\ &= F(\underline{x}(k+1) - \underline{x}(k)) + G(u(k+1) - u(k)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e(k+1) - e(k) &= y(k+1) - y_c(k+1) - y(k) + y_c(k) \\ &= y(k+1) - y(k) \\ &= C(\underline{x}(k+1) - \underline{x}(k)) \end{aligned}$$

On définit là encore un **état augmenté**, soit

$$X(k) = \begin{bmatrix} \underline{x}(k+1) - \underline{x}(k) \\ e(k) \end{bmatrix},$$

qui est de dimension $n+1$, et une nouvelle commande $U(k) = u(k+1) - u(k)$ (équivalent discret de la commande dérivée du continu). La nouvelle représentation d'état du système est alors

$$X(k+1) = \begin{bmatrix} \underline{x}(k+2) - \underline{x}(k+1) \\ e(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & 0 \\ C & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{x}(k+1) - \underline{x}(k) \\ e(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix} \cdot (u(k+1) - u(k)).$$

$$\Rightarrow X(k+1) = \begin{bmatrix} F & 0 \\ C & I \end{bmatrix} \cdot X(k) + \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix} \cdot U(k) = \bar{F} X(k) + \bar{G} U(k).$$



La conception d'une commande numérique par retour d'état avec effet intégral pour le système initial revient de nouveau à réaliser une commande par retour d'état simple pour le système augmenté, c'est-à-dire

$$U(k) = -K X(k) = -[K_1 \quad K_2] \cdot \begin{bmatrix} \underline{x}(k+1) - \underline{x}(k) \\ e(k) \end{bmatrix},$$

où K_1 est une matrice ligne de dimension n et K_2 un scalaire.

- **Quel est l'effet de cette commande sur le système ?** En boucle fermée, on a donc

$$X(k+1) = (\bar{F} - \bar{G}K)X(k).$$

Supposons alors que nous ayons trouvé une matrice ligne K , de dimension $n+1$, telle que toutes les valeurs propres de la matrice de dérive en boucle fermée $\bar{F} - \bar{G}K$ soient stables (c'est-à-dire de module strictement inférieur à 1). On aurait, pour toute valeur initiale $X(0)$ du système augmenté,

$$X(k) = (\bar{F} - \bar{G}K)^k X(0) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0,$$

c'est-à-dire

$$\begin{bmatrix} \underline{x}(k+1) - \underline{x}(k) \\ e(k) \end{bmatrix} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0,$$

soit finalement

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \underline{x}(k) = cste \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} e(k) = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} y(k) = y_c,$$

et ce quelles que soient les perturbations constantes $d_1(k)$ et $d_2(k)$. L'objectif de suivi de consigne et de rejet des perturbations que l'on s'était fixé est donc une nouvelle fois atteint.

Exercice : Montrer que même si on admet une erreur de modélisation sur G ($G + \Delta G$, ΔG petit) on aura toujours

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} y(k) = y_c.$$

- **Placement des pôles en boucle fermée :** on utilise pour cela la procédure de placement de pôles décrite au paragraphe 2 (en repassant au continu), en l'appliquant au système augmenté, c'est-à-dire à la matrice \bar{F} , de dimension $n+1$, qui vaut

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} F & 0 \\ C & I \end{bmatrix},$$

pour laquelle on a

$$vap(\bar{F}) = vap(F) + \{1\}.$$

Une fois ce placement de pôles effectué, on calcule les coefficients de K en identifiant les deux expressions du polynôme caractéristique en boucle fermée

$$P(z) = \det[zI - (\bar{F} - \bar{G}K)].$$

- **Forme de la commande obtenue :** le retour d'état avec effet intégral est donné par l'expression

$$\begin{aligned} U(k) &= -K X(k) = -[K_1 \ K_2] \begin{bmatrix} \underline{x}(k+1) - \underline{x}(k) \\ e(k) \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow u(k+1) - u(k) = -K_1 (\underline{x}(k+1) - \underline{x}(k)) - K_2 e(k). \end{aligned}$$

Si l'on prend la transformée en z de cette dernière égalité, on obtient

$$(z-1)u(z) = -(z-1)K_1 \underline{x}(z) - K_2 e(z),$$

soit finalement

$$u(z) = -K_1 \underline{x}(z) - \frac{1}{z-1} K_2 e(z),$$

ce qui correspond au schéma de commande de la figure 3. Là encore, la chaîne directe contient bien un intégrateur.

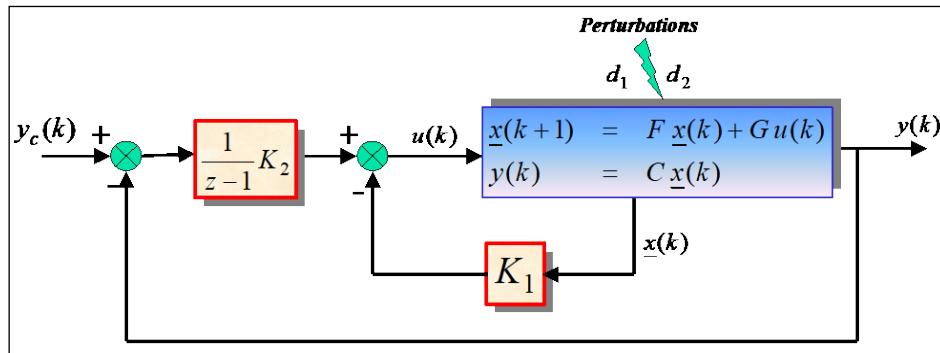


Figure 18 : commande numérique par retour d'état avec effet intégral.

Exercice : Considérons le système échantillonné à la période $T = 0,1$ s décrit par la fonction de transfert

$$G(z) = Z[B_0(p)G(p)] = \frac{z}{z^2 - z + 0,25}$$

où $G(p)$ est la fonction de transfert d'un système continu gouvernable et observable. Donner la forme canonique d'observabilité du système échantillonné. Calculer une commande numérique par retour d'état avec effet intégral en choisissant un horizon de commande $T_C = 1/10$.

5. OBSERVATEUR ET ESTIMATION D'ETAT D'UN SYSTEME ECHANTILLONNE

Le problème majeur de la commande par retour d'état est le suivant : la plupart du temps, on ne mesure pas toutes les composantes du vecteur d'état $\underline{x}(k)$. Il est donc impossible de s'en servir pour élaborer la commande. La solution consiste alors à construire une **estimée de l'état** $\hat{x}(k)$ telle que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \hat{x}(k) = \underline{x}(k),$$

avec une convergence plus ou moins rapide réglable par le concepteur. Au lieu d'appliquer la commande par retour d'état

$$u(k) = -K_c \underline{x}(k) + y_c(k),$$

on applique alors une commande « par retour d'estimée d'état »

$$u(k) = -K_c \hat{x}(k) + y_c(k)$$

que l'on nomme de manière plus élégante **commande par retour d'état avec observateur** (l'observateur est ce qui va permettre de construire l'estimée de l'état). On démontre que cette manière de procéder fonctionne parfaitement (théorie du principe de séparation).

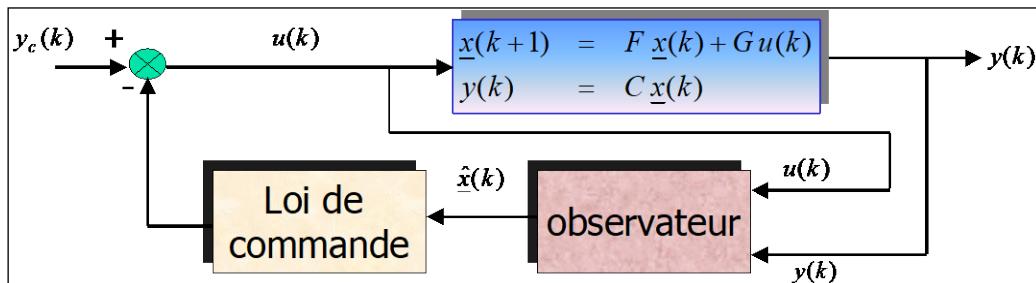


Figure 19 : Commande par retour d'état avec observateur

Considérons donc le système discret de représentation d'état

$$\begin{aligned}\underline{x}(k+1) &= F \underline{x}(k) + G u(k) \\ y(k) &= C \underline{x}(k)\end{aligned}.$$

L'observateur qui peut être associé à ce système est un système dynamique de structure



et d'équation d'état

$$\hat{x}(k+1) = F \hat{x}(k) + G u(k) + K_o (y(k) - C \hat{x}(k)).$$

On distingue dans cette équation deux termes principaux :

- ☞ une **copie de la dynamique** du système : $F \hat{x}(k) + G u(k)$,
- ☞ un **terme correctif** proportionnel à l'erreur commise sur les mesures en considérant $\hat{x}(k)$ au lieu de $\underline{x}(k)$: $K_o (y(k) - C \hat{x}(k))$.

La matrice colonne K_o , de dimension n , est le **gain de l'observateur**. La question principale est alors la suivante : comment régler ce gain ?

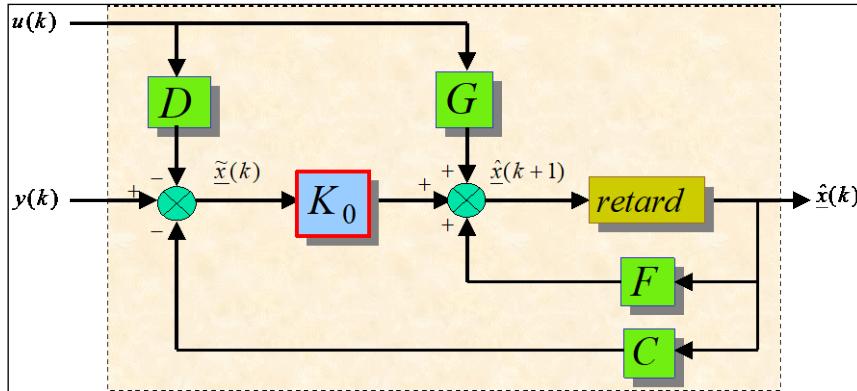


Figure 20 : Structure d'un observateur d'état.

• **Choix du gain K_o** :

Soit $\tilde{x}(k) = \underline{x}(k) - \hat{x}(k)$ l'**erreur d'estimation**. On aimerait faire en sorte que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \tilde{x}(k) = 0.$$

Pour cela, sachant que

$$\begin{aligned}\underline{x}(k+1) &= F \underline{x}(k) + G u(k) \\ \hat{x}(k+1) &= F \hat{x}(k) + G u(k) + K_o (y(k) - C \hat{x}(k))\end{aligned},$$

l'équation dynamique qui régit le comportement de l'erreur d'estimation est donnée par

$$\begin{aligned}\tilde{x}(k+1) &= \underline{x}(k+1) - \hat{x}(k+1) = F \underline{x}(k) + G u(k) - F \hat{x}(k) - G u(k) - K_o [y(k) - C \hat{x}(k)] \\ &= F [\underline{x}(k) - \hat{x}(k)] - K_o [C \underline{x}(k) - C \hat{x}(k)] \\ &= (F - K_o C) [\underline{x}(k) - \hat{x}(k)] \\ &= (F - K_o C) \tilde{x}(k)\end{aligned}$$

On choisit alors K_0 de manière à ce que toutes les valeurs propres de la matrice $F - K_0 C$ soient stables. On a alors

$$\tilde{x}(k) = (F - K_0 C)^k \cdot \tilde{x}(0) \Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} \tilde{x}(k) = 0,$$

et ce quelle que soit la valeur de $\tilde{x}(0) = \underline{x}(0) - \hat{x}(0)$, c'est-à-dire quelle que soit la façon dont on initialise l'observateur. On a alors le résultat suivant.

Théorème : Soient z_1, z_2, \dots, z_n n nombres complexes quelconques. Il existe K_0 telle que la matrice $F - K_0 C$ ait pour valeurs propres ces nombres complexes si et seulement si la paire (F, C) est observable.

En d'autres termes, on peut construire un **observateur**, c'est-à-dire un estimateur de l'état du système qui converge vers cet état si le système est **observable**.

Une question demeure cependant en suspens : associé à une commande par retour d'état, cet observateur conduit-il à un résultat satisfaisant ? En particulier, le système en boucle fermée est-il stable ?

• **Calcul de la commande générale :**

La commande est dans ce cas un système dynamique (figure 5) dont le comportement est régi par les équations

$$\begin{aligned}\hat{x}(k+1) &= F \hat{x}(k) + G u(k) + K_o (y(k) - C \hat{x}(k)) \\ u(k) &= -K_c \hat{x}(k) + y_c(k)\end{aligned}$$

où la matrice K_c de retour d'état a été calculée de manière à placer les valeurs propres de la matrice $F - GK_c$.

Quelle est alors la représentation d'état du système en boucle fermée ? On a tout d'abord

$$\begin{aligned}\underline{x}(k+1) &= F \underline{x}(k) + G u(k) \\ &= F \underline{x}(k) - GK_c \hat{x}(k) + G y_c(k) \\ &= F \underline{x}(k) - GK_c \underline{x}(k) + GK_c \underline{x}(k) - GK_c \hat{x}(k) + G y_c(k) \\ &= (F - GK_c) \underline{x}(k) + GK_c [\underline{x}(k) - \hat{x}(k)] + G y_c(k) \\ &= (F - GK_c) \underline{x}(k) + GK_c \tilde{x}(k) + G y_c(k)\end{aligned}$$

et l'on a en outre obtenu

$$\tilde{x}(k+1) = (F - K_0 C) \cdot \tilde{x}(k).$$

Le vecteur d'état du système en boucle fermée est de dimension $2n$, puisque la commande est dans ce cas dynamique et elle introduit les n coordonnées supplémentaires de $\hat{x}(k)$. Au lieu d'utiliser

$$\begin{bmatrix} \underline{x}(k) \\ \hat{x}(k) \end{bmatrix}$$

comme vecteur d'état, on préfère utiliser

$$\begin{bmatrix} \underline{x}(k) \\ \tilde{x}(k) \end{bmatrix}.$$

On a alors

$$\begin{bmatrix} \underline{x}(k+1) \\ \tilde{x}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F - GK_c & GK_c \\ 0 & F - K_0 C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{x}(k) \\ \tilde{x}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix} \cdot y_c(k).$$

La stabilité du système en boucle fermée dépend donc de la position des valeurs propres de la matrice

$$F_{BF} = \begin{bmatrix} F - GK_c & GK_c \\ 0 & F - K_0 C \end{bmatrix}$$

dans le plan complexe. Mais puisque

$$\{valeurs propres de F_{BF}\} = \{valeurs propres de F - GK_c\} + \{valeurs propres de F - K_0 C\},$$

le système en boucle fermée est stable, la matrice K_c ayant placé les valeurs propres de $F - GK_c$, et la matrice K_0 celles de $F - K_0 C$.

• Conclusion : Principe de séparation

Une commande par retour d'état avec observateur se construit de la manière suivante :

1. *On réalise un retour d'état en supposant l'état mesuré et on calcul une matrice K_c qui place les valeurs propres de $F - GK_c$ (placement de pôles en continu avec horizon de commande T_C à partir des valeurs propres discrètes de F).*
2. *On réalise ensuite, indépendamment de ce qui précède, l'observateur en calculant une matrice K_0 qui place les valeurs propres de $F - K_0 C$ (placement de pôles en continu avec horizon d'observation T_O à partir des valeurs propres discrètes de F).*



*Les matrices K_c et K_0 existent car le système est **gouvernable** et **observable**. Le fait que l'association de la commande par retour d'état et de l'observateur, conçus séparément, fonctionne, s'appelle **le principe de séparation**.*

Remarque : Dans le cas des systèmes continus, la commande par retour d'état s'obtient avec la même approche en remplaçant F par A et G par B

6. COMMANDE PAR RETOUR D'ETAT AVEC EFFET INTEGRAL ET OBSERVATEUR D'UN SYSTEME ECHANTILLONNE.

On considère maintenant un système dont les équations d'état sont affectées par des perturbations en entrée et en sortie, soit

$$\begin{aligned} \underline{x}(k+1) &= F \underline{x}(k) + G u(k) + d_1(k) \\ y(k) &= C \underline{x}(k) + d_2(k) \end{aligned},$$

pour lequel on ne dispose plus de la mesure de $x(k)$ afin d'élaborer la commande, mais simplement de la mesure de la sortie du système $y(k)$. L'objectif est bien sûr d'assurer

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} y(k) = y_c$$

pour n'importe quelle constante $y_c(k) = y_c$, et ce en présence de perturbations constantes $d_1(k)$ et $d_2(k)$.

On se souvient que lorsque l'on mesurait l'état du système à chaque instant d'échantillonnage, il suffisait d'appliquer la commande avec effet intégral donnée par l'équation récurrente

$$u(k+1) = u(k) - K_{c1} (x(k+1) - x(k)) - K_{c2} e(k)$$

où $e(k)$ est l'erreur de consigne définie par

$$e(k) = y(k) - y_c(k).$$

Si l'on veut maintenant introduire un observateur pour générer une estimée de $x(k)$, la commande qui vient naturellement à l'esprit est alors la suivante :

$$\begin{aligned}\hat{x}(k+1) &= F\hat{x}(k) + Gu(k) + K_0(y(k) - C\hat{x}(k)) \\ u(k+1) &= u(k) - K_{c1}(\hat{x}(k+1) - \hat{x}(k)) - K_{c2}e(k)\end{aligned}\quad (4)$$

dans laquelle K_{c1} , K_{c2} et K_0 ont été calculées pour placer les valeurs propres des matrices

$$\bar{F} - \bar{G}K = \begin{bmatrix} F - GK_{c1} & -GK_{c2} \\ C & I \end{bmatrix} \text{ et } F - K_0C.$$

Nous allons montrer que cette commande conduit bien en effet au résultat souhaité. Pour cela, on définit comme auparavant l'erreur d'estimation

$$\tilde{x}(k) = \underline{x}(k) - \hat{x}(k).$$

Comme dans le cas d'une commande numérique par retour d'état avec effet intégral, on effectue des différences afin de se débarrasser des signaux inconnus constants $y_c(k)$, $d_1(k)$ et $d_2(k)$. On a en premier lieu, concernant l'état du système lui-même,

$$\begin{aligned}\underline{x}(k+2) - \underline{x}(k+1) &= F\underline{x}(k+1) + Gu(k+1) + d_1(k+1) - F\underline{x}(k) - Gu(k) - d_1(k) \\ &= F(\underline{x}(k+1) - \underline{x}(k)) + G(u(k+1) - u(k))\end{aligned}.$$

De la même manière, pour l'erreur de consigne

$$\begin{aligned}e(k+1) - e(k) &= y(k+1) - y_c(k+1) - y(k) + y_c(k) \\ &= C\underline{x}(k+1) + d_2(k+1) - C\underline{x}(k) - d_2(k) \\ &= C(\underline{x}(k+1) - \underline{x}(k))\end{aligned}.$$

Enfin, pour l'erreur d'estimation

$$\begin{aligned}\tilde{x}(k+2) - \tilde{x}(k+1) &= \underline{x}(k+2) - \hat{x}(k+2) - \underline{x}(k+1) + \hat{x}(k+1) \\ &= F\underline{x}(k+1) + Gu(k+1) + d_1(k+1) - F\underline{x}(k+1) - Gu(k+1) - K_0(y(k+1) - C\hat{x}(k+1)) \\ &\quad - F\underline{x}(k) - Gu(k) - d_1(k) + F\hat{x}(k) + Gu(k) + K_0(y(k) - C\hat{x}(k)) \\ &= F(\underline{x}(k+1) - \hat{x}(k+1)) - F(\underline{x}(k) - \hat{x}(k)) - K_0C(\underline{x}(k+1) - \hat{x}(k+1)) \\ &\quad - K_0Cd_2(k+1) + K_0C(\underline{x}(k) - \hat{x}(k)) + K_0Cd_2(k) \\ &= F(\tilde{x}(k+1) - \hat{x}(k)) - K_0C(\hat{x}(k+1) - \tilde{x}(k)) \\ &= (F - K_0C)(\hat{x}(k+1) - \hat{x}(k))\end{aligned}$$

Sur cette base, et afin d'écrire une représentation d'état du système en boucle fermée, on choisit le vecteur d'état augmenté

$$X(k) = \begin{bmatrix} \underline{x}(k+1) - \underline{x}(k) \\ e(k) \\ \tilde{x}(k+1) - \tilde{x}(k) \end{bmatrix}.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
 X(k+1) &= \begin{bmatrix} \underline{x}(k+2) - \underline{x}(k+1) \\ e(k+1) \\ \tilde{x}(k+2) - \tilde{x}(k+1) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} F(\underline{x}(k+1) - \underline{x}(k)) + G(u(k+1) - u(k)) \\ C(\underline{x}(k+1) - \underline{x}(k)) + e(k) \\ (F - K_0 C)(\tilde{x}(k+1) - \tilde{x}(k)) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} F & 0 & 0 \\ C & I & 0 \\ 0 & 0 & F - K_0 C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{x}(k+1) - \underline{x}(k) \\ e(k) \\ \tilde{x}(k+1) - \tilde{x}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot (u(k+1) - u(k)) \\
 &= \begin{bmatrix} F & 0 & 0 \\ C & I & 0 \\ 0 & 0 & F - K_0 C \end{bmatrix} \cdot X(k) + \begin{bmatrix} G \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot (u(k+1) - u(k))
 \end{aligned}$$

Or, d'après (4), on a

$$\begin{aligned}
 u(k+1) - u(k) &= -K_{c1}(\hat{x}(k+1) - \hat{x}(k)) - K_{c2}e(k) \\
 &= -K_{c1}(\underline{x}(k+1) - \tilde{x}(k+1) - \underline{x}(k) + \tilde{x}(k)) - K_{c2}e(k) \\
 &= -K_{c1}(\underline{x}(k+1) - \underline{x}(k)) + K_{c1}(\tilde{x}(k+1) - \tilde{x}(k)) - K_{c2}e(k) \\
 &= [-K_{c1} \quad -K_{c2} \quad K_{c1}] \cdot \begin{bmatrix} \underline{x}(k+1) - \underline{x}(k) \\ e(k) \\ \tilde{x}(k+1) - \tilde{x}(k) \end{bmatrix} \\
 &= [-K_{c1} \quad -K_{c2} \quad K_{c1}] \cdot X(k)
 \end{aligned}$$

En conséquence, la représentation d'état du système en boucle fermée devient

$$\begin{aligned}
 X(k+1) &= \begin{bmatrix} F & 0 & 0 \\ C & I & 0 \\ 0 & 0 & F - K_0 C \end{bmatrix} \cdot X(k) + \begin{bmatrix} G \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot (u(k+1) - u(k)) \\
 &= \begin{bmatrix} F & 0 & 0 \\ C & I & 0 \\ 0 & 0 & F - K_0 C \end{bmatrix} \cdot X(k) + \begin{bmatrix} G \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [-K_{c1} \quad -K_{c2} \quad K_{c1}] \cdot X(k) \\
 &= \begin{bmatrix} F - GK_{c1} & -GK_{c2} & GK_{c1} \\ C & I & 0 \\ 0 & 0 & F - K_0 C \end{bmatrix} \cdot X(k) \\
 &= F_{BF} X(k)
 \end{aligned}$$

Or, la matrice de dérive F_{BF} du système en boucle fermée étant triangulaire supérieure par blocs, on a

$$\{\text{valeurs propres de } F_{BF}\} = \left\{ \text{valeurs propres de } \begin{bmatrix} F - GK_{c1} & -GK_{c2} \\ 0 & I \end{bmatrix} \right\} + \{\text{valeurs propres de } F - K_0 C\}$$

Comme K_{c1} , K_{c2} et K_0 ont justement été calculées pour placer les valeurs propres de ces deux matrices, toutes leurs valeurs propres sont stables. Il en est donc de même pour les valeurs propres de F_{BF} . On a donc

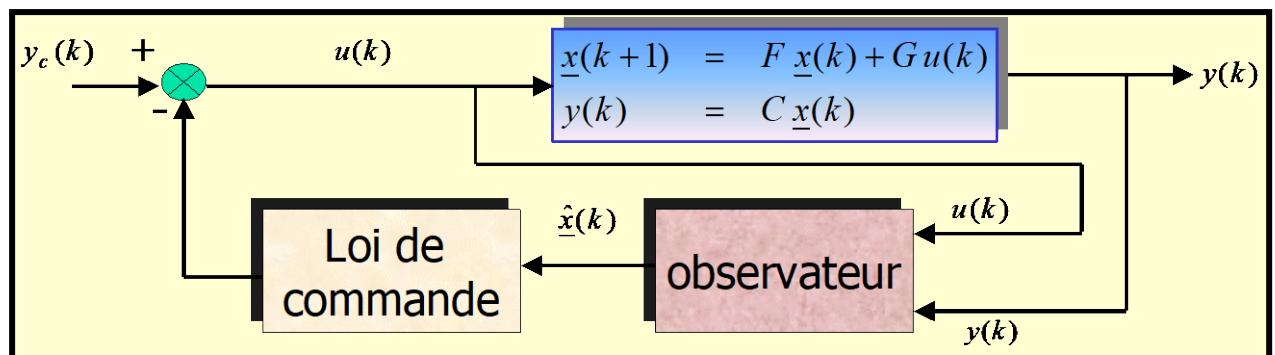
$$X(k) = F_{BF}^k \cdot X(0) \Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} X(k) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{k \rightarrow +\infty} (\underline{x}(k+1) - \underline{x}(k)) = 0 \\ \lim_{k \rightarrow +\infty} e(k) = 0 \\ \lim_{k \rightarrow +\infty} (\tilde{\underline{x}}(k+1) - \tilde{\underline{x}}(k)) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{k \rightarrow +\infty} \underline{x}(k) = cste \\ \lim_{k \rightarrow +\infty} e(k) = 0 \\ \lim_{k \rightarrow +\infty} \tilde{\underline{x}}(k) = cste \end{cases} .$$

Ces résultats sont valables quels que soient les signaux discrets constants $y_c(k)$, $d_1(k)$ et $d_2(k)$. La convergence qui nous intéresse est celle de l'erreur de consigne $e(k)$, puisque l'on a alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} y(k) = y_c$.

Notons que l'estimateur ne converge pas vers $x(k)$, puisque $\lim_{k \rightarrow +\infty} \hat{x}(k) = x(k) + cste$, c'est-à-dire que l'on estime l'état du système à une constante près (on a réalisé en fait un estimateur de la dérivée de l'état). Mais ceci n'a aucune importance, car ce qui nous intéressait ici, c'est la poursuite d'une consigne constante sans erreur statique, et ce en présence de perturbations constantes. Pour ce problème, la commande par retour d'état avec effet intégral et observateur propose une solution parfaitement satisfaisante.

Partie II :

Exercices et Problèmes



RAPPELS MATHEMATIQUES.

Exercice 1.:

Calculer le Rang des matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Exercice 2.:

Calculer $\exp(At)$ des matrices suivantes (utiliser deux méthodes différentes) :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 3. :

Soit la matrice d'état suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- *Montrer que cette matrice n'est pas diagonalisable*
- *Donner la forme de Jordan de A*
- *Calculer $\exp(At)$*

Exercice 4.:

Soit le système décrit par le système d'état continu suivant :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} \end{aligned}$$

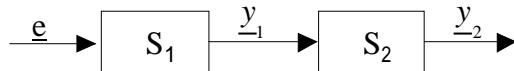
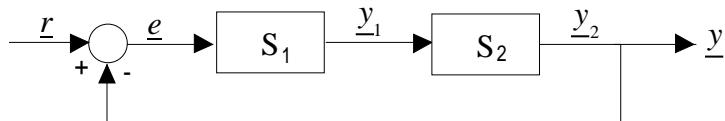
- *Calculer les valeurs / vecteurs propres de la matrice d'état A.*
- *En effectuant le changement de base adéquat, donner la représentation d'état diagonale du système précédent.*

EXERCICES D'APPLICATIONS

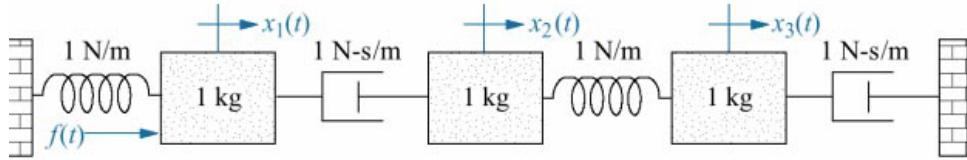
Exercice 5.:

Soient deux systèmes S_1 et S_2 de représentation d'état respectives $\{A_1, B_1, C_1, D_1\}$ et $\{A_2, B_2, C_2, D_2\}$:

1. En supposant les dimensions compatibles, donner la représentation d'état du système décrit par la Fig. 1a.
2. En supposant que $\dim(\underline{e}) = \dim(\underline{y}_2) = \dim(\underline{e}) \neq \dim(\underline{y}_1)$, donner la représentation d'état du système décrit par la Fig. 1b.


Fig. 1a

Fig. 1b
Exercice 6. : SYST. MECANIQUE.

Soit le système mécanique de translation représenté par la figure suivante :



- Q.1.** Sachant que l'entrée est la force $f(t)$ et la sortie est le déplacement $x_3(t)$, donner la représentation d'état continue de ce système :

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t)$$

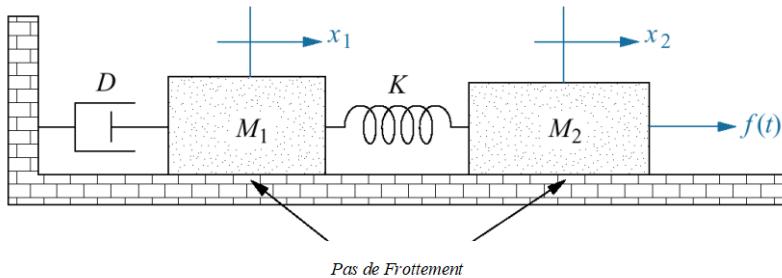
$$y(t) = Cz(t)$$

On prendra comme vecteur d'état :

$$\underline{z} = [x_1 \quad \dot{x}_1 \quad x_2 \quad \dot{x}_2 \quad x_3 \quad \dot{x}_3]^T$$

Exercice 7. : SYST. MECANIQUE.

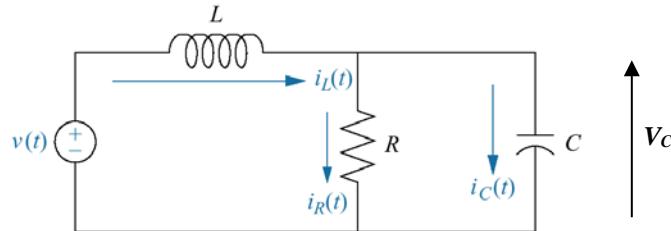
Soit le système mécanique de translation représenté par la figure suivante :



- Donner la représentation d'état de ce système. L'entrée étant la force $f(t)$ et la sortie la position de la masse M_1 .

Exercice 8. : SYST. ÉLECTRIQUE.

Soit le circuit électrique décrit par la figure suivante :

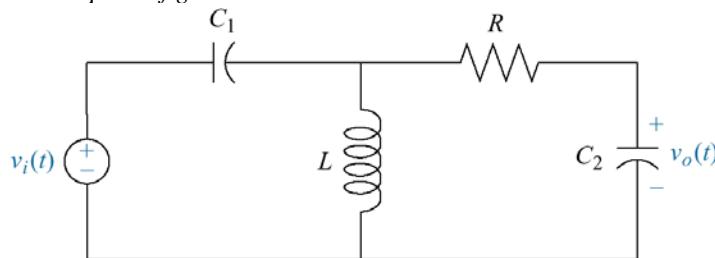


- Donner la représentation d'état continue, si la sortie est le courant dans la résistance et l'entrée la tension $v(t)$.
On prendra comme vecteur d'état

$$\underline{x} = [V_C \quad i_L]^T$$

Exercice 9. : SYST. ÉLECTRIQUE.

Soit le circuit électrique décrit par la figure suivante :



- Donner la représentation d'état ce circuit si l'entrée est $v_i(t)$ et la sortie $v_o(t)$.

Exercice 10. : STABILITÉ.

Q1. Étudier la stabilité des systèmes continus suivants :

$$S1 : \begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \\ -10 & -5 & -2 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}(t) \end{cases}, \quad S2 : \begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -10 & 0 & -2 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \underline{x}(t) \end{cases}$$

$$S3 : \begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -5K & -2-K \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}(t) \end{cases} \text{ Pour } S3 \text{ les conditions seront données en fonction de } K.$$

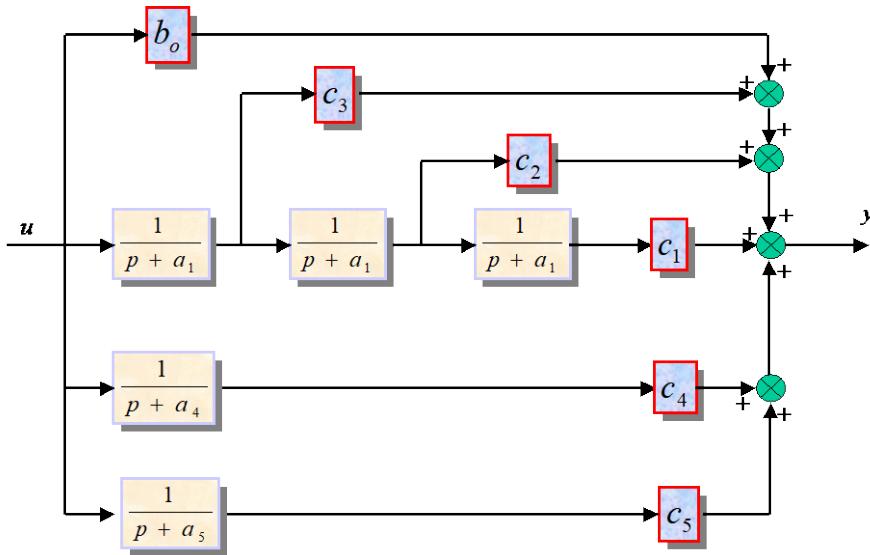
Q2. Calculer la réponse à un échelon des deux premiers systèmes

Exercice 11. : OBSERVABILITÉ ET GOUVERNABILITÉ

Étudier l'observabilité et la comandabilité des représentations d'état continues suivantes :

$$\bullet A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -0.4 \\ 1 & -1.3 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_1 = 0.$$

$$\bullet A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad D_2 = 0.$$

Exercice 12. : FORME CANONIQUE.


- Donner la représentation d'état continue de ce système sous forme canonique.

Exercice 13. :

Soit le système décrit par la représentation d'état échantillonné $\mathcal{R}_1(F_1, G_1, C_1, 0)$ suivante :

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ v(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/\alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma & -1/\alpha_2 & 0 & -1/\alpha_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ v(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [0 \ 0 \ 1 \ 0] \underline{x}(k)$$

α_1, α_2 et σ sont des constantes avec α_1, α_2 non nuls.

Q.1. Étudier l'observabilité de ce système en fonction de α_1, α_2 et σ .

Q.2. On considère maintenant que la composante $v(k)$ de $\underline{x}(k)$ est une deuxième entrée du système.

- Donner la nouvelle représentation d'état $\mathcal{R}_2(F_2, G_2, C_2, 0)$.
- Calculer les fonctions de transfert $H_u(z)|_{v=0}$ et $H_v(z)|_{u=0}$.
- Étudier séparément pour chaque entrée la gouvernabilité de cette nouvelle représentation. Commenter.

Exercice 14.:

Soit le processus décrit par la représentation d'état continue $\mathcal{R}(A, B, C, D)$ suivante :

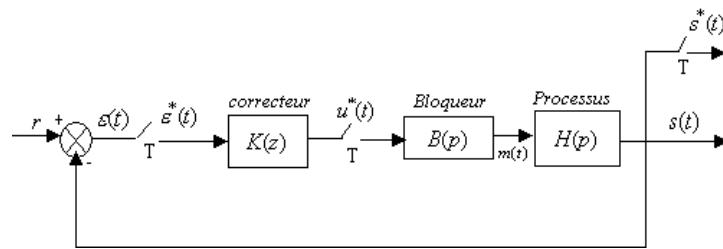
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

Q.1. On choisit comme période d'échantillonage $T = 0.4 \text{ s}$. Justifier ce choix.

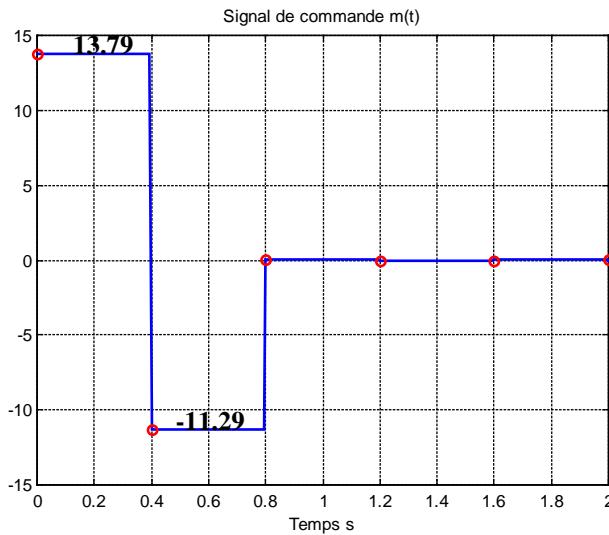
Q.2. Montrer que les matrices F et G du système échantillonné sont données par :

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0.3625 \\ 0 & 0.8187 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0.0749 \\ 0.3625 \end{bmatrix}.$$

Q.3. Afin de réguler le système un correcteur discret $K(z)$ à été implanté (voir figure ci-dessous).



Pour une consigne r en échelon, le signal $m(t)$ après blocage est donné à la figure suivante :



- Calculer les quatre premiers échantillons du signal de sortie $s(k)$.
- Quelle est la particularité de ce processus ? Quel est le type de ce correcteur ?

Exercice 15. :

Soit le processus décrit par la représentation d'état continue $\mathcal{R}(A_x, B_x, C_x, 0)$ suivante :

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -7 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}(t)\end{aligned}$$

Q.1. Calculer la fonction de transfert $H_x(p)$ associée à ce système.

Q.2. En effectuant un changement de base, on transforme ce système en un nouveau système de variable d'état \underline{z} . $\underline{z}(t)$ est fonction du vecteur d'état original $\underline{x}(t)$. Il est donné par :

$$\underline{z}(t) = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} z_1 = 2x_1 \\ z_2 = 3x_1 + 2x_2 \\ z_3 = x_1 + 4x_2 + 5x_3 \end{cases}$$

- Donner la nouvelle représentation d'état $\mathcal{R}(A_z, B_z, C_z, 0)$.
- Calculer la fonction de transfert $H_z(p)$ associée à ce nouveau système. Commenter.

Exercice 16. :

Soit le processus décrit par la représentation d'état discrète $\mathcal{R}(F, G, C, 0)$ suivante :

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0.4 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0.08 \\ 0.3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

Le vecteur d'état, $\underline{x}(t)$, est constitué par la sortie et sa dérivé et la période d'échantillonnage est de $Tech = 0.4s$.

Q.1. Étudier la stabilité.

Q.2. A l'instant initial $\underline{x}(0) = [1 \ 10]^T$, calculer les 2 premiers échantillons du signal de sortie quand l'entrée est une Rampe de pente 1.

Exercice 17.: REPONSE D'UN SYSTEME D'ETAT CONTINU

Soit le système d'état continue suivant :

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & -0.5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}(k) + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [1 \ 0] \underline{x}(t)\end{aligned}$$

- Calculer la matrice de transition
- En considérant que l'état initial est $\underline{x}(0) = [1 \ -3]^T$, calculer la réponse $y(t)$ à une entrée nulle.
- On considère maintenant que l'état initial est nul, calculer et tracer la réponse à un échelon unitaire.

Exercice 18.:

Soit le système d'état continue suivant :

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \underline{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [1 \ 0] \underline{x}(t)\end{aligned}$$

- On considère des conditions initiales nulles. Calculer la réponse à une entrée échelon (unitaire).

Exercice 19.:

On considère le système d'écrit par la représentation d'état continue $\mathcal{R}(A, B, C, 0)$ suivante :

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [1 \ 0] \underline{x}(t)\end{aligned}$$

On choisit une loi de commande par retour d'état de la forme $u(t) = \underline{k}^T \cdot \underline{x}(t) + l.r(t)$, $r(t)$ étant la consigne.

Q.1. Écrire la représentation d'état du système en boucle fermée $\mathcal{R}(A_{BF}, B_{BF}, C_{BF}, 0)$.

Q.2. Calculer \underline{k}^T et l qui assurent une erreur statique nulle et un polynôme caractéristique en boucle fermée équivalent à :

$$Pol_Cara = \det(\lambda \cdot I - A_{BF}) = \lambda^2 + 16\lambda + 183$$

N.B. On pourra utiliser pour le calcul de \underline{k}^T une approche simple, fondée sur l'identification terme à terme.

Exercice 20. : Commande par retour d'état avec observateur

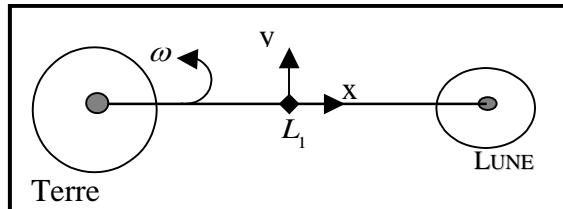
On considère un système dont l'équation différentielle entrée-sortie s'écrit

$$\ddot{y}(t) + \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + y(t) = 2u(t)$$

- Proposer un vecteur d'état et écrire la représentation d'état du système correspondante.
- Analyser la stabilité de ce système.
- Calculer sa fonction de transfert de deux manières différentes.
- Analyser la gouvernabilité du système.
- On suppose mesure tout l'état. Calculer une commande par retour d'état qui place les pôles en -2 . Calculer alors la fonction de transfert du système en boucle fermée, ainsi que son gain statique.
- Afin de supprimer l'erreur statique, calculer une commande par retour d'état avec effet intégral qui place les pôles en -2 .
- On ne mesure maintenant que la sortie du système. Analyser l'observabilité du système.
- Calculer un observateur d'état qui place les pôles de la dynamique d'estimation en -1 .
- Donner la forme générale de la commande par retour d'état avec effet intégral de la question 6. Associée à l'observateur de la question 8.

Exercice 21 :

Sur une ligne reliant le centre de la terre au centre de la lune, il existe un point, L_1 où l'attraction de la terre sur un satellite en orbite est exactement équivalente à la somme de l'attraction de la lune et de la force centrifuge. Nous allons étudier le comportement du satellite en ce point et le corriger (via un moteur de propulsion) à l'aide d'une commande par retour d'état.



Les équations dynamiques pour de petites variations en position autour du point L_1 sont données par :

$$\begin{aligned}\ddot{x} + 2\omega \dot{y} + 9\omega^2 x &= 0 \\ \ddot{y} + 2\omega \dot{x} + 4\omega^2 y &= u\end{aligned}$$

avec : x = position radiale , y = position azimutale , $u = F/m\omega^2$, F = force de propulsion dans la direction y , m = masse du satellite et ω = constante positive (rad / jour) .

Q.1. Donner la représentation d'état continue de ce système en prenant comme vecteur d'état :

$$\underline{y} = [x, \dot{x}, y, \dot{y}]^T .$$

Q.2. Étudier la stabilité de ce système en fonction de ω .

Q.3. On choisit une loi de commande par retour d'état continu de la forme :

$$u = \underline{k}^T \underline{y} = k_1 x + k_2 \dot{x} + k_3 y + k_4 \dot{y} .$$

Q.4. On donne $\omega = 1$. Calculer, en utilisant la formule de Bass-Gura, le vecteur d'état \underline{k}^T qui assure en boucle fermée les 4 pôles suivants :

$$p_1 = -3 , \quad p_2 = -4 , \quad p_3 = -3(-1+j) , \quad p_4 = -3(-1-j)$$

Problème 1: Modélisation d'un Mélangeur

On considère le mélangeur de la Fig. 1 formé par un bac de section S et alimenté par deux fluides de concentration C_1 et C_2 . Les débits d'entrée sont dénotés Q_1 et Q_2 , le débit de sortie Q_s , la concentration et le niveau du fluide à l'intérieur du mélangeur C et H .

Le but est de pouvoir disposer d'un volume constant et d'un mélange de concentration désirée. Pour modéliser le processus on fait les hypothèses suivantes

- Le débit Q_s de sortie du fluide est régi par la loi suivante : $Q_s = \alpha\sqrt{H}$ où α est une constante à déterminer.
- Le mélange des fluides d'entrée est instantané.

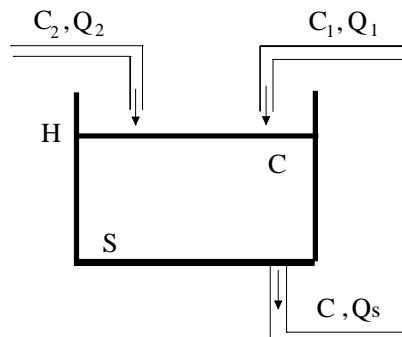


Fig.1

I. Modélisation :

- I.1. Ecrire les équations de la matière. Montrer que le modèle obtenu est un modèle non linéaire.
 I.2. On désire linéariser ce modèle en considérant des petites variations autour du régime nominal.

On adopte les notations suivantes :

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_{10} + q_1 & H &= H_0 + h \\ Q_2 &= Q_{20} + q_2 & C &= C_0 + c \end{aligned}$$

Donner la représentation d'état du système de la forme :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= A\underline{x} + B\underline{u} \\ \underline{y} &= \tilde{C}\underline{x} \end{aligned}$$

Les vecteurs d'état et de commandes sont respectivement :

$$\underline{x} = [h \quad c]^T \quad \text{et} \quad \underline{u} = [q_1 \quad q_2]^T,$$

et on admet que le vecteur d'état constitue la sortie du système.

- I.3.** Application numérique :

$$Q_{10} = 15 \text{ l/s} \quad Q_{20} = 5 \text{ l/s} \quad C_1 = 1 \text{ mole/l} \quad C_2 = 2 \text{ mole/l} \quad H_0 = 1 \text{ m}$$

- I.4.** Calculer la matrice de transfert continu $R(p)$. Identifier les constantes de temps du système.

II. Discréétisation :

On désire commander le mélangeur à l'aide d'un calculateur numérique :

- II.1.** Proposer une valeur de la période d'échantillonnage T_e .

- II.2.** Donner une représentation d'état du système échantilloné pour $T_e = 10 \text{ s}$:

$$\begin{aligned} \underline{x}(k+1) &= F\underline{x}(k) + G\underline{u}(k) \\ \underline{y}(k) &= \tilde{C}\underline{x}(k) \end{aligned}$$

- II.3.** Le système est-il gouvernable ? est-il observable si on ne mesure qu'une seule composante de $\underline{x}(k)$?

- II.4.** Calculer la matrice de transfert $R(z)$ du système échantilloné par deux méthodes différentes.

III. Analyse en boucle ouverte :

- III.1.** Le système est-il stable ?

- III.2.** Déterminer la réponse indicelle du système échantilloné à l'entrée q_1 .

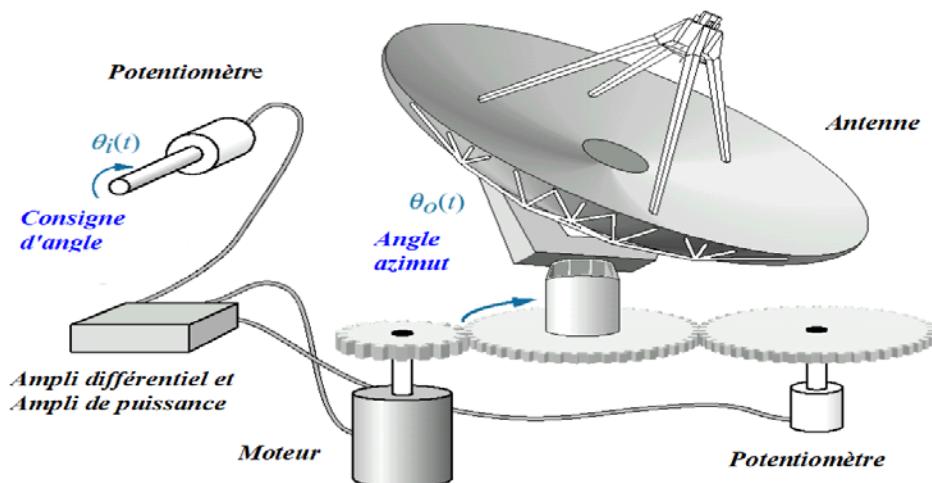
Problème 2: Asservissement d'une antenne radioélectrique


Figure 21 : Antenne et son dispositif de régulation analogique

PRESENTATION :

Afin d'asservir en position (azimut) l'antenne radioélectrique, un premier dispositif a été réalisé. Ce dispositif analogique est décrit à la figure 1. La consigne est un déplacement angulaire ($\theta_i(t)$). Le potentiomètre convertit la consigne d'angle en tension. De la même façon, l'angle azimut mesuré en sortie ($\theta_0(t)$) est converti en tension par un autre potentiomètre. L'ampli de puissance amplifie le signal d'erreur ($\varepsilon = \theta_i - \theta_0$) fourni par l'amplificateur différentiel avant d'attaquer le système formé par l'antenne et son moteur.

La commande analogique proposée permet d'annuler l'erreur statique. En effet, à l'aide de l'amplificateur, le moteur continuera de fonctionner tandis que le signal d'erreur n'est pas nul. Cependant, avec ce dispositif nous ne pouvons pas ajuster les performances de la boucle de régulation (dépassemement, temps de réponse, robustesse, saturation sur l'actionneur, ...). De plus, l'antenne peut être assujettie à des perturbations (climatique, mécanique) qui risque d'altérer le fonctionnement du dispositif.

Pour résoudre ces problèmes, nous proposons d'élaborer, sous un formalisme d'état, une commande dynamique numérique permettant de garantir un bon rejet de perturbation et une erreur statique nulle.

Pour ce faire, nous allons étudier dans un premier temps le dispositif analogique existant (modélisation, stabilité) puis dans un deuxième temps discréteriser le système avant d'élaborer la commande numérique.

N.B. : LES PARTIES I ET II SONT INDEPENDANTES

I. Analyse en boucle ouverte :

Le schéma fonctionnel du dispositif est décrit à la Figure 2.

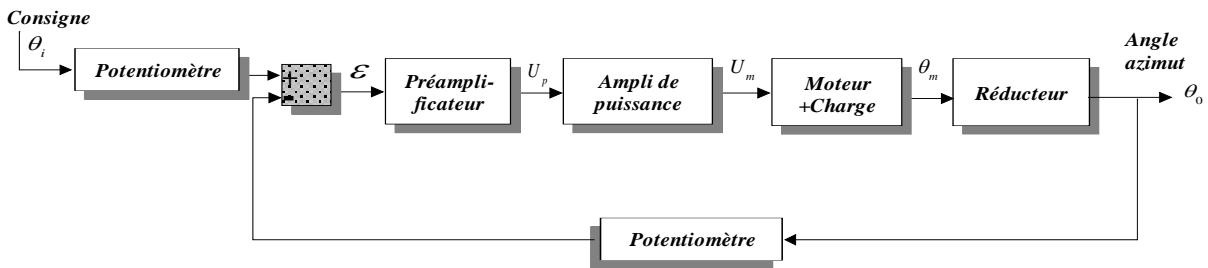


Figure 22 : **Boucle de régulation analogique**

- Modélisation : Nous cherchons à modéliser le système sous forme de système d'état. Les équations qui régissent le comportement des différents sous-systèmes sont données ci-dessous :

$$\begin{aligned}
 &\text{AMPLIFICATEUR :} & \dot{U}_m(t) = K_a U_p(t) - \beta U_m(t) . \\
 &\text{MOTEUR :} & \ddot{\theta}_m(t) = K_m U_m(t) - \alpha \dot{\theta}_m(t) . \\
 &\text{PREAMPLIFICATEUR :} & \text{GAIN } K : \quad U_p(t) = K \cdot \varepsilon(t) . \\
 &\text{POTENTIOMETRE :} & \text{GAIN } K_p . \\
 &\text{REDUCTEUR :} & \text{GAIN } N : \quad \theta_0 = n \cdot \theta_m
 \end{aligned}$$

Les constantes α et K_m dépendent : des inerties et des frottements de l'ensemble moteur/antenne ramenées sur l'arbre moteur et des différents composants du moteur.

Q1.1. Sachant que nous avons choisi comme vecteur d'état $\underline{x} = [\theta_m \quad \dot{\theta}_m \quad U_m]^T$, donner la représentation d'état continue du système en boucle ouverte. L'entrée est le signal d'erreur ε et la sortie l'angle azimut θ_0 .

Q1.2 A partir de cette représentation d'état, donner l'expression du gain statique en fonction des matrices A, B et C. Quelle est sa valeur ? Commenter.

- Étude en boucle fermée : Nous allons étudier dans cette partie l'influence du gain, K , du préamplificateur sur le système bouclé. Les valeurs numériques des différents paramètres sont données dans le tableau suivant:

$K_a = 100$	$\beta = 100$	$K_m = 2$
$K_p = 0.3$	$\alpha = 2$	$n = 0.1$

Q1.3. Donner en fonction du gain K , la représentation d'état du système en boucle fermée $\mathfrak{R}(A_{BF}, B_{BF}, C_{BF}, 0)$. On considérera le même vecteur d'état que précédemment. L'entrée est maintenant la consigne angulaire $\theta_i(t)$ et la sortie est l'angle azimut $\theta_0(t)$.

Q1.4. Étudier en fonction du gain K la stabilité du système d'état en boucle fermée.

II. COMMANDE NUMERIQUE.

Dans cette partie Nous allons maintenant élaborer une loi de commande numérique permettant d'asservir la position azimut tout en rejetant d'éventuelle perturbation extérieure.

Le système analogique précédent est simplifié (voir Figure 3) : Les gains des potentiomètres et des préamplificateurs sont supposés intégrés au microprocesseur. De plus, comme l'amplificateur de puissance admet un pôle qui est très éloigné de celui du moteur (donc sa dynamique peut être simplifiée), nous le représentons maintenant par un gain pur équivalent à son propre gain statique ($G = 1$).

Le système discret en boucle ouverte est alors décrit par la Figure 3.

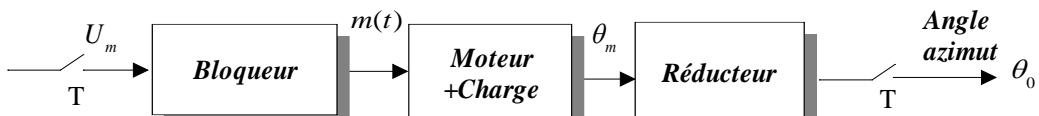


Figure 23 : Processus échantillonnable

La période d'échantillonnage est fixée à $T = 0.1\text{s}$.

Q2.1. La représentation d'état continue entre l'entrée $m(t)$ et la sortie $\theta_0(t)$ est donnée par :

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2 \end{bmatrix} m(t) \\ y(t) &= [1 \quad 0] \underline{x}(t)\end{aligned}$$

Le vecteur d'état s'écrit $\underline{x} = [\theta_0 \quad \dot{\theta}_0]^T$.

- Donner la représentation d'état discrète $\mathfrak{R}(F, G, C, 0)$ de ce processus.
- Analyser la stabilité, la commandabilité et l'observabilité du système discret. (Une précision de 4 chiffres est nécessaire).

Q2.2. Discuter, sans calculer, du choix du vecteur d'état précédent ($\underline{x} = [\theta_0 \quad \dot{\theta}_0]^T$) et de son utilisation dans l'élaboration d'une loi de commande par retour d'état discrète.

Q2.3. L'antenne est, dans certains cas, soumise à des perturbations extérieures. L'équation d'état discrète s'écrit alors :

$$\begin{aligned}\underline{x}(k+1) &= F\underline{x}(k) + B.U_m(k) + d(k) \\ y(k) &= C.\underline{x}(k)\end{aligned}$$

où $d(k)$ représente l'entrée perturbatrice non mesurable.

On suppose que la consigne est un *Échelon unitaire*, $d(k)$ une perturbation constante et que le vecteur d'état est mesurable. On souhaite réaliser une commande par retour d'état avec effet intégrale :

- Discuter de la pertinence de ce choix et des conditions de son application.
- Calculer une loi de commande par retour d'état avec effet intégral qui correspond à un horizon de commande égale à $\omega_c = 2$.

Problème 3: Robot PUMA

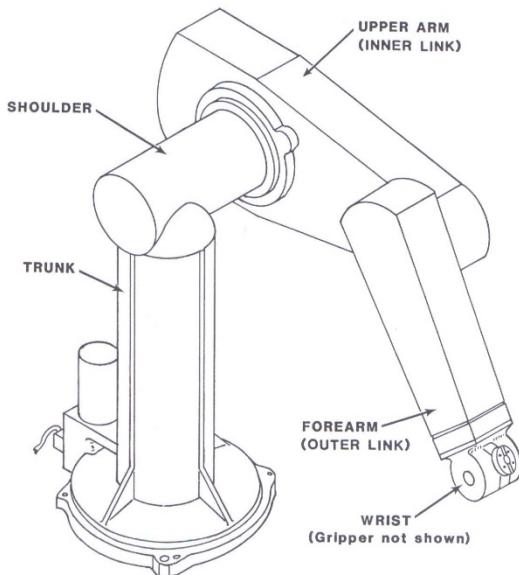
I. PRESENTATION GENERALE ET MODELISATION.


Figure 1 : Robot PUMA

Présentation :

Le PUMA (Programmable Universal Machine for Assembly) a été originellement conçu par Vic Schienman et financé par General Motors et The Massachusetts Institute of Technology au milieu des années 70, et est produit actuellement par Staubli, (société Suisse de robotique). Le robot PUMA 500 est un robot six axes. Il est composé de deux parties: le robot ou bras manipulateur et son ordinateur de commande.

Le bras manipulateur comporte six axes de rotation, chacun commandé par un servomoteur à courant continu. Chaque partie du bras manipulateur est connectée aux autres par une articulation. Le bras manipulateur, qui contient plusieurs servomoteurs et réducteurs est décrit à la figure 1.

La rotation de chaque articulation du bras manipulateur est assurée par un servomoteur à courant continu et à aimant permanent, par l'intermédiaire d'un réducteur. Chaque moteur est associé à un codeur incrémental et à un potentiomètre, ainsi qu'à un réducteur de rapport 116/1. Le bon fonctionnement du PUMA nécessite un asservissement de la position et de la vitesse de rotation de chaque articulation du robot.

Les changements de position de chaque articulation sont fournis par les codeurs, alors que les vitesses de rotation sont calculées par l'ordinateur du robot. Les servomoteurs pour les trois axes principaux (axes 1, 2 et 3) sont équipés de freins électromagnétiques. Ces freins sont actifs lorsque l'alimentation de ces moteurs est coupée, et maintiennent donc le bras du robot en position fixe. Toutes les informations venant et allant vers les différentiels actionneurs du robot sont traitées par le contrôleur qui calcule en temps réel les commandes.

Dans sa configuration standard, le robot PUMA ne peut être utilisé que pour effectuer des tâches simples seulement. Par exemple, ce robot est très répandu dans l'industrie pour effectuer des tâches d'assemblage, dans lesquelles les pièces à assembler ne sont pas fragiles, et où les tolérances d'assemblage ne sont pas très précises. Le robot PUMA est aussi souvent utilisé pour des opérations de soudure et de stockage. Donc, en règle générale, le champ d'utilisation de ce robot comprend des tâches de manutention répétitives et sans interaction de l'environnement extérieur.

Modélisation et commande par découplage :

La modélisation du robot manipulateur par les équations de Lagrange conduit au *modèle dynamique inverse* suivant :

$$D(\underline{q})\ddot{\underline{q}}(t) + C(\underline{q}, \dot{\underline{q}})\dot{\underline{q}}(t) + g(\underline{q}) + F\underline{q}(t) = \underline{u}(t)$$

où \underline{q} : vecteur des coordonnées articulaires, \underline{g} : vecteur de gravité, \underline{u} : entrée formée des couples appliqués aux articulations, D : matrice des termes inertIELS, C : matrice des termes de Coriolis, F : frottement visqueux.

En supposant dans un premier temps que les actionneurs fournissent un couple instantané, noté $\underline{u}(p) = V_a(p)$ ($V_a(p)$ étant la tension électrique alimentant l'actionneur). La commande par découplage, (commande dans l'espace articulaire) est alors donnée par :

$$u(t) = v_a(t) = D(\underline{q})e(t) + C(\underline{q}, \dot{\underline{q}})\dot{\underline{q}}(t) + g(\underline{q}) + F\underline{q}(t)$$

où $e(t)$ représente la nouvelle entrée et D , C , g sont des expressions non linéaires en fonction des variables aléatoires et leur dérivées.

En incorporant cette commande dans le modèle dynamique inverse nous obtenons l'équivalence suivante :

$$\ddot{\underline{q}}(t) = e(t)$$

Cette commande présente l'avantage de rendre linéaire le lien entre les différents q_i et e_i mais nécessite l'adjonction de régulateurs supplémentaires pour assurer les performances désirées.

Influence de l'actionneur :

Nous allons maintenant tenir compte de la dynamique de l'actionneur (moteur) et l'introduire dans le modèle précédent.

Notons K_r le rapport de réduction entre l'angle de rotation du moteur et celui du bras. Il est alors facile de montrer que l'inertie du bras ramenée sur l'axe du moteur doit être divisée par K_r^2 et que le couple en sortie du réducteur est multiplié par K_r .

En considérant comme variable articulaire $q = \theta_r = \frac{\theta}{K_r}$ angle de rotation du robot et en faisant l'hypothèse que la constante de temps électrique est négligeable devant la constante de temps mécanique, la commande de robot se ramène à la structure suivante :

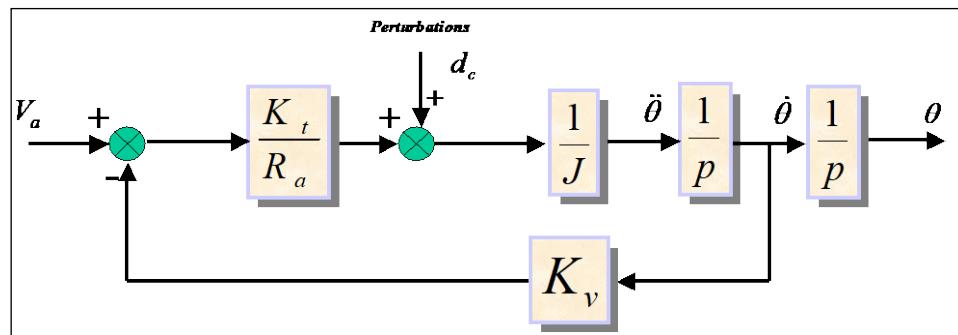


Figure 2 : Structure avec commande par découplage

avec :

- θ : Angle de rotation du moteur
- J : Inertie ramenée sur l'axe moteur
- K_v : Frottement visqueux du moteur
- K_t : Constante de couple du moteur

R_a : Résistance électrique de l'inducteur

d_c : Couple perturbateur considéré constant.

II. COMMANDE EN POSITION ET EN FORCE

Les deux parties sont indépendantes.

II.1. Commande en position

Le but de cette première étude est de compléter cette structure en élaborant un régulateur qui permettra de garantir le cahier de charge suivant : pas d'erreur statique, un bon rejet de perturbation et temps de réponse suffisamment rapide.

Q.1.1 A partir de la figure 1, donner la représentation d'état continue de cette structure.

Q.1.2. On décide d'élaborer une commande par retour d'état avec effet intégral afin d'asservir l'angle θ .

$$V_a(p) = -K_1 \underline{x}(p) + \frac{1}{p} K_2 (\theta_e(p) - \theta(p))$$

avec θ_e l'angle de consigne et \underline{x} le vecteur d'état choisi.

- 1) En partant de la structure précédente donner le schéma bloc en boucle fermée.
- 2) Donner la représentation d'état en boucle fermée.
- 3) Calculer la fonction de transfert entre la sortie et l'entrée perturbation. Analyser le régime statique ?.
- 4) Donner les conditions nécessaires (matériel et théorique) pour la réalisation de ce type de commande.

II.2. Commande en force avec boucle de position :

Le but de cette deuxième étude et d'élaborer un correcteur permettant de réguler de façon précise la force de contact.

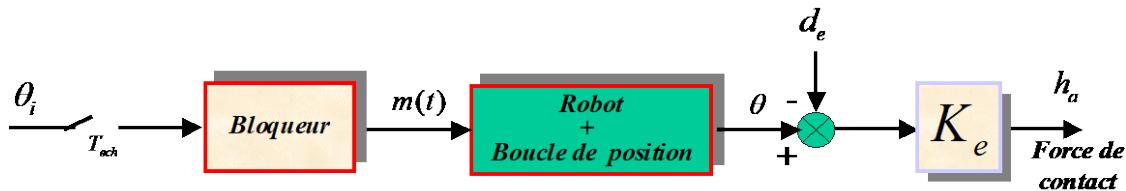


Figure 24 : Système discret et capteur de force

En suppose maintenant que le robot PUMA est instrumenté par un capteur de force qui fournit un retour d'effort à l'opérateur.

On admet qu'une première boucle de position a été réalisée avec un correcteur par retour d'état avec effet intégral. Le nouveau système d'état discret intégrant cette boucle est donné par :

$$\begin{aligned} \underline{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 1 & 0.0988 & 0.0041 \\ 0 & 0.9671 & 0.0742 \\ 0 & -0.5936 & 0.5219 \end{bmatrix} \underline{x}(k) + \begin{bmatrix} 0.0001 \\ 0.0041 \\ 0.0742 \end{bmatrix} \theta_i(k) \\ \theta(k) &= [1 \ 0 \ 0] \underline{x}(k) \end{aligned}$$

La période d'échantillonnage est donné par $Tech = 0.1 s$.

Pour réguler la force de contact on introduit la raideur de l'environnement K_e et une perturbation constante, d_e , qui représente la position de l'environnement. Nous proposons d'utiliser une commande par retour d'état avec effet intégral et observateur

Q.2.1. Étudier la stabilité de ce système en boucle ouverte.

Q.2.2. Donner la représentation d'état en boucle ouverte entre l'entrée θ_i et la sortie h_a .

Q.2.3. Calculer une loi de commande par retour d'état avec *effet intégral et observateur* pour un horizon de commande $\omega_c = 3$, et un horizon d'observation $\omega_o = 4$, sachant que $K_e = 0.5$.

Problème 4: Asservissement d'un bicoptère

On considère une maquette d'un bicoptère représentée à la Figure 1.

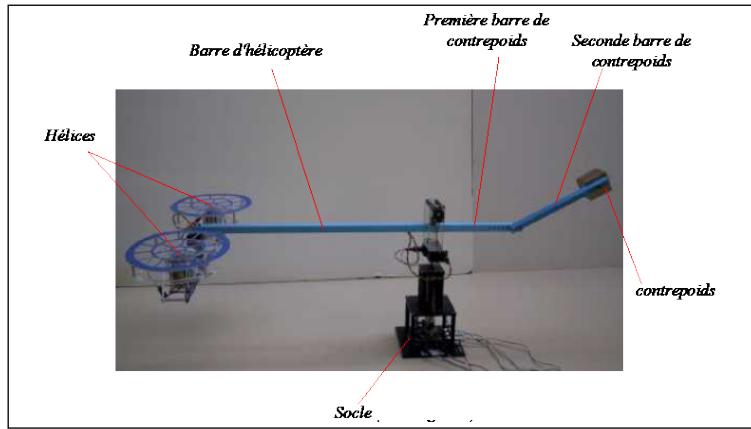


Figure 25 : Maquette du bicoptère

Dans le cadre de cette étude, on ne s'intéresse qu'au mouvement d'élévation du bicoptère autour d'un axe perpendiculaire au plan de représentation de la maquette. La position de l'hélicoptère sera repérée à l'aide de l'angle ε , appelé angle d'élévation (voir Figure 2). On notera \vec{F} la somme des forces produites par chacune des hélices, et on considérera qu'il s'agit là de la commande du système.

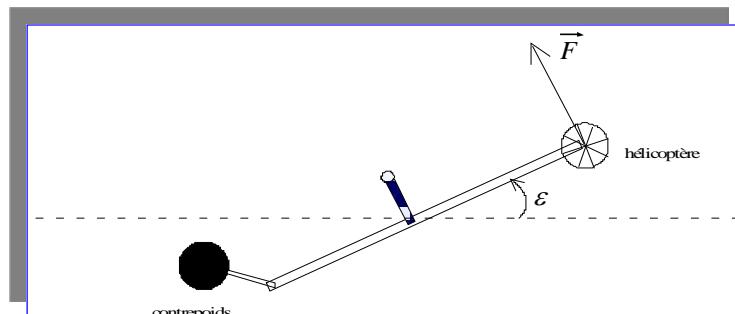


Figure 26 : Élévation

Une modélisation grossière de celui-ci a conduit à l'équation différentielle suivante :

$$J \frac{d^2 \varepsilon(t)}{dt^2} = L(F(t) - F_0) - K \varepsilon(t) \quad (1)$$

où F_0 est la force à produire par les hélices pour maintenir l'hélicoptère en équilibre dans une position horizontale correspondant à un angle d'élévation $\varepsilon = 0$. On donne :

$$L = 0,5 \text{ m} \quad K = 3,6 \text{ Nm/rad} \quad J = 0,1 \text{ kg.m}^2.$$

En posant alors

$$\Delta F(t) = F(t) - F_0,$$

on obtient pour nouvelle équation de comportement

$$J \frac{d^2 \varepsilon(t)}{dt^2} = L \cdot \Delta F(t) - K \cdot \varepsilon(t)$$

(2)

Les entrée et sortie du système seront alors

$$u(t) = \Delta F(t) \text{ et } y(t) = \varepsilon(t).$$

Première partie : Modélisation du système

Q.1.1 On désire obtenir une représentation d'état du système

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A x(t) + B u(t) \\ y(t) &= C x(t)\end{aligned}$$

- On choisit comme vecteur d'état $x^T = [y \quad \dot{y}]^T$. Donner les matrices A , B et C de la représentation d'état associée.
- A partir de cette représentation, calculer le gain statique en boucle ouverte.

Q.1.2 On souhaite réaliser une commande numérique par retour d'état.

- On choisit la période d'échantillonnage $T_{ech} = 0,1$ s. Discuter ce choix.
- Calculer les matrices F et G de la représentation d'état du système échantillonné :

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= F x_k + G u_k \\ y_k &= C x_k\end{aligned}$$

- Étudier la stabilité, ouverabilité et l'observabilité du système.

Q.1.3 En supposant que le vecteur d'état initial discret est donné par :

$$x^T(0) = [1 \quad 0]^T$$

- Calculer les 2 premiers échantillons en boucle ouverte pour une entrée en rampe de pente deux.

Deuxième partie : Commande numérique par retour d'état.

On veut calculer une commande par retour d'état avec effet intégral :

$$u_{k+1} = u_k - K_1(x_{k+1} - x_k) - K_2 e_k$$

Afin de simplifier les calculs, on prendra

$$F = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,1 \\ -3,4 & 0,8 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0]$$

Q.2.1. Donner les matrices d'état \bar{F} et \bar{G} du système augmenté.

Q.2.2. On décide de placer tous les pôles du système discret en 0,5 :

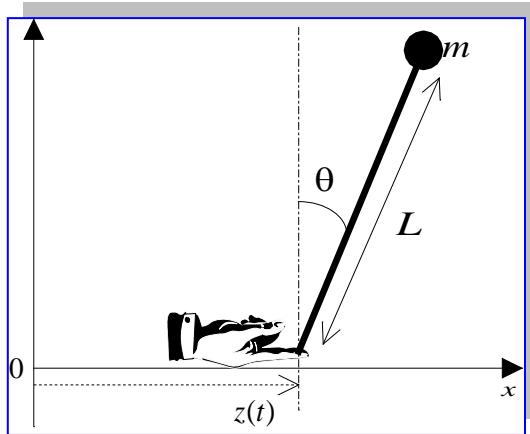
- Justifier ce choix.
- Calculer les matrices K_1 et K_2 à appliquer.

Q.2.4. Calculer la fonction de transfert en boucle fermée. Donner le gain statique. Commenter

Q.2.4. Donner le schéma et les conditions d'implémentation de cette commande ? Justifier.

Problème 5 : Asservissement d'un système instable

Présentation du problème : On considère l'acte de tenir en équilibre une tige au bout du doigt. La situation est décrite à la figure suivante.



La tige est de longueur L et de masse m . Son extrémité inférieure se déplace selon l'axe des x , suivant l'accélération fournie par la main. On suppose que l'angle θ que fait la tige avec la verticale est petit. Dans ces conditions, le comportement du système est décrit par l'équation différentielle

$$\frac{d^2 z(t)}{dt^2} = -L \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + g \theta(t). \quad (1)$$

On pose comme entrée du système (ou commande) l'accélération fournie par la main, soit

$$u(t) = \frac{d^2 z(t)}{dt^2}. \quad (2)$$

D'autre part, puisque but est de trouver une commande permettant de stabiliser la tige, on choisit pour sortie du système

$$y(t) = \theta(t). \quad (3)$$

C'est aussi la seule mesure dont on dispose.

Q1. On choisit pour vecteur d'état

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix}.$$

A partir des relations (1)-(3) décrivant le comportement entrée – sortie du système, calculer les matrices A , B , C et D de la représentation d'état continue associée :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

A.N. $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ et $L = 1 \text{ m}$.

Q2. Ce système est-il stable ? Commandable ? Observable ? (les réponses doivent être justifiées).

Q3. On décide de le discréteriser à la période d'échantillonnage $T = 0.3$ s. Calculer les matrices F et G de la représentation d'état discrète

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= Fx_k + Bu_k \\y_k &= Cx_k + Du_k\end{aligned}$$

qui en résulte.

Q4. On suppose dans un premier temps que l'on peut mesurer tout l'état et on décide alors de faire une commande numérique par retour d'état avec effet intégral. Calculer les matrices K_1 et K_2 de la commande

$$u(z) = -K_1 \cdot x(z) - \frac{K_2}{z-1} \cdot [y(z) - y_c(z)]$$

correspondant à l'horizon de commande $T_c = 1/6$. Vous suivrez pour cela la procédure habituelle présentée en cours.

Q5. En fait, on ne mesure que y . On peut alors dans ce cas utiliser un observateur. Rappeler sa structure. Vous savez alors que la dynamique de l'erreur d'estimation est donnée par

$$\tilde{x}_{k+1} = (F - K_o C) \tilde{x}_k$$

Calculer le gain d'observateur

$$K_o = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

qui permet de placer les pôles de cette dynamique en 0.5.

Annexe 1

Table 1

Transformées en z de signaux échantillonnés à la période T.

<i>Fonction du temps :</i> $x(t), t \geq 0$.	<i>Transformée de Laplace</i> $X(p)$	<i>Transformée en z :</i> $X(z)$
$\delta(t)$ (impulsion de Dirac)	1	1
$\delta(t-T)$	$\exp(-Tp)$	z^{-1}
$x(t-T)$	$\exp(-Tp) \cdot X(p)$	$z^{-1} \cdot X(z)$
$u(t)$ (échelon)	$\frac{1}{p}$	$\frac{z}{z-1}$
t	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$\exp(-at)$	$\frac{1}{p+a}$	$\frac{z}{z-\exp(-aT)}$
$t \cdot \exp(-at)$	$\frac{1}{(p+a)^2}$	$\frac{T \cdot z \cdot \exp(-aT)}{[z-\exp(-aT)]^2}$
$1-\exp(-at)$	$\frac{a}{p(p+a)}$	$\frac{[1-\exp(-aT)] \cdot z}{(z-1) \cdot [z-\exp(-aT)]}$
$1-(1+at)\exp(-at)$	$\frac{a^2}{p(p+a)^2}$	$\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-\exp(-aT)} - \frac{a \cdot T \cdot \exp(-aT) \cdot z}{[z-\exp(-aT)]^2}$
$t - \frac{1-\exp(-at)}{a}$	$\frac{a}{p^2(p+a)}$	$\frac{T \cdot z}{(z-1)^2} - \frac{[1-\exp(-aT)] \cdot z}{a \cdot (z-1) \cdot [z-\exp(-aT)]}$
$\exp(-at)-\exp(-bt)$	$\frac{b-a}{(p+a)(p+b)}$	$\frac{z}{z-\exp(-aT)} - \frac{z}{z-\exp(-bT)}$
$(c-a)\exp(-at)-(c-b)\exp(-bt)$	$\frac{(b-a)(p+c)}{(p+a)(p+b)}$	$\frac{(c-a) \cdot z}{z-\exp(-aT)} - \frac{(c-b) \cdot z}{z-\exp(-bT)}$

Fonction du temps : $x(t)$, $t \geq 0$.	Transformée de Laplace $X(p)$	Transformée en z : $X(z)$
$1 + \frac{b}{a-b} \exp(-at) - \frac{a}{a-b} \exp(-bt)$	$\frac{a.b}{p(p+a)(p+b)}$	$\frac{z}{z-1} + \frac{b.z}{(a-b).[z-\exp(-aT)]} - \frac{a.z}{(a-b).[z-\exp(-bT)]}$
$c + \frac{b(c-a)}{a-b} \exp(-at) - \frac{a(b-c)}{a-b} \exp(-bt)$	$\frac{a.b.(p+c)}{p(p+a)(p+b)}$	$\frac{c.z}{z-1} + \frac{b.(c-a).z}{(a-b).[z-\exp(-aT)]} - \frac{a.(b-c).z}{(a-b).[z-\exp(-bT)]}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\frac{\sin(\omega T).z}{z^2 - 2 \cos(\omega T).z + 1}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\frac{z.[z - \cos(\omega T)]}{z^2 - 2 \cos(\omega T).z + 1}$
$1 - \cos(\omega t)$	$\frac{\omega^2}{p(p^2 + \omega^2)}$	$\frac{z}{z-1} - \frac{z.[z - \cos(\omega T)]}{z^2 - 2 \cos(\omega T).z + 1}$
$\exp(-at). \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$	$\frac{\sin(\omega T). \exp(-aT).z}{z^2 - 2 \cos(\omega T). \exp(-aT).z + \exp(-2aT)}$
$\exp(-at). \cos(\omega t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$	$\frac{[z - \cos(\omega T). \exp(-aT)].z}{z^2 - 2 \cos(\omega T). \exp(-aT).z + \exp(-2aT)}$
$1 - \exp(-at) \frac{\cos(\omega t + \varphi)}{\cos(\varphi)}$	$\frac{a^2 + \omega^2}{p.[(p+a)^2 + \omega^2]}$	$\frac{z}{z-1} - \frac{\left[z - \frac{\cos(\omega T + \varphi)}{\cos(\varphi)}. \exp(-aT) \right].z}{z^2 - 2 \cos(\omega T). \exp(-aT).z + \exp(-2aT)}$ <p style="text-align: center;">avec $\varphi = \arctan\left(-\frac{a}{\omega}\right)$</p>
$b - b \cdot \exp(-at) \frac{\cos(\omega t + \theta)}{\cos(\theta)}$	$\frac{(a^2 + \omega^2).(p+b)}{p.[(p+a)^2 + \omega^2]}$	$\frac{b.z}{z-1} - \frac{b.z \cdot \left[z - \frac{\cos(\omega T + \theta)}{\cos(\theta)}. \exp(-aT) \right]}{z^2 - 2 \cos(\omega T). \exp(-aT).z + \exp(-2aT)}$ <p style="text-align: center;">avec $\theta = \arctan\left(\frac{a^2 + \omega^2 - a.b}{b.\omega}\right)$</p>

Table 2
Transformées en z des processus usuels munis d'un bloqueur d'ordre zéro.

$G(p)$	$\bar{G}(z) = Z[B_0(p)G(p)]$
$\frac{K}{p}$	$\frac{K \cdot T}{z - 1}$
$\frac{K}{1 + \tau p}$	$K \frac{1 - z_0}{z - z_0}$ avec $z_0 = \exp\left(-\frac{T}{\tau}\right)$
$\frac{K}{p \cdot (1 + \tau p)}$	$K \frac{[T - \tau(1 - z_0)].z - T.z_0 + \tau.(1 - z_0)}{z^2 - (1 + z_0).z + z_0}$ avec $z_0 = \exp\left(-\frac{T}{\tau}\right)$
$\frac{K}{(1 + \tau p)^2}$	$K \left[\frac{1 - z_0}{z - z_0} - \frac{T.z_0 . (z - 1)}{\tau.(z - z_0)^2} \right]$ avec $z_0 = \exp\left(-\frac{T}{\tau}\right)$
$\frac{K}{(1 + \tau_1 p).(1 + \tau_2 p)}$	$K \left[1 + \frac{\tau_1 \cdot \tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \left(-\frac{1}{\tau_2} \frac{z - 1}{z - a_1} + \frac{1}{\tau_1} \frac{z - 1}{z - a_2} \right) \right]$ avec $a_1 = \exp\left(-\frac{T}{\tau_1}\right)$ et $a_2 = \exp\left(-\frac{T}{\tau_2}\right)$
$\frac{K}{1 + 2 \frac{\xi}{\omega_n} p + \frac{p^2}{\omega_n^2}}$	$K \cdot K_1 \frac{z - z_0}{(z - z_1)(z - z_1^*)}$ avec $z_1 = \rho \exp(j\theta)$, $z_1^* = \rho \exp(-j\theta)$ où $\rho = \exp(-\xi \omega_n T)$, $\theta = T \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$ $K_1 = 1 - \rho \left[\frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\theta) + \cos(\theta) \right]$ $z_0 = -\frac{\rho^2 + \rho \left(\frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\theta) - \cos(\theta) \right)}{K_1}$

Annexe 2

Choix de la période d'échantillonnage

Théorème de Shannon :

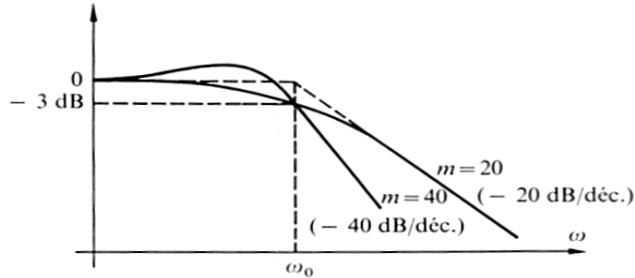
Pour pouvoir reconstituer un signal continu à partir d'un train d'échantillonnage de période

$$T, il faut que la pulsation d'échantillonnage \omega_T = \frac{2\pi}{T} \geq 2\omega_{\max}.$$

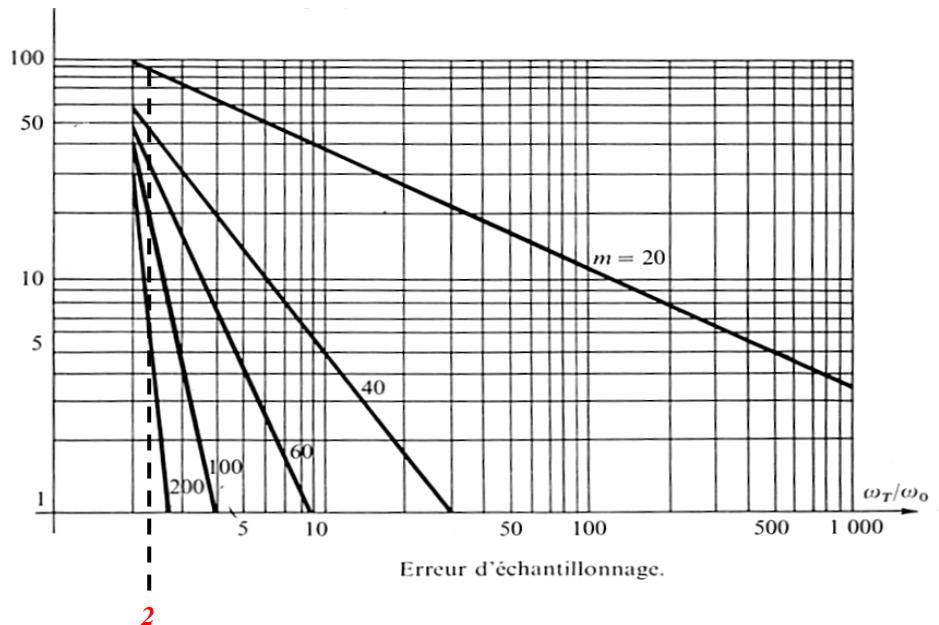
Problème : Ce théorème suppose que le signal incident a un *spectre limité en fréquence*, ce qui n'est pas le cas de la plupart des signaux que l'on rencontre pratiquement.

Approche : On caractérise un système :

1. Par sa pulsation de coupure ω_0 définie comme *la pulsation pour laquelle le module a baissé de n dB par rapport à la valeur statique ($\omega \rightarrow 0$)*.
En générale, n = 3 Bande passante à -3 dB.
2. Par la *rapidité de décroissement de sa courbe d'amplitude* :
 $-m \text{ dB/décade}$, $m = 20, 40, 60 \dots$



On utilise le graphique suivant :



Choix de la période d'échantillonnage

Exemple : Pulsation de coupure à -3dB , $\omega_0 = 10\text{rd/s}$.

➤ **Système de deuxième ordre :**

Soit un système dont le gain chute de -40 dB/dec à partir de ω_0 :

- Un échantillonnage à 100rd/s ($\omega_T = 10 \cdot \omega_0$) donne une erreur de **5%**.
- Si l'on tolère une erreur de **1%** il faut alors échantillonner à 300rd/s ($\omega_T = 30 \cdot \omega_0$).
- Si maintenant on prend une pulsation de coupure ω_b à **-6dB** ($\omega_b \approx 2 \cdot \omega_0$) et on considère que $\omega_T = 10 \cdot \omega_b$ alors le rapport $\frac{\omega_T}{\omega_0} = 20$, ce qui donne une erreur d'échantillonnage de **2%**.

➤ **Système de premier ordre :**

Soit un système dont le gain chute de -20 dB/déc . à partir de ω_0 :

- Un échantillonnage à 100rd/s ($\omega_T = 10 \cdot \omega_0$) donne une erreur de **40%**.
- Si maintenant on prend une pulsation de coupure ω_b à **-12dB** ($\omega_b \approx 6 \cdot \omega_0$) et on considère que $\omega_T = 10 \cdot \omega_b$ alors le rapport $\frac{\omega_T}{\omega_0} = 60$ ce qui donne une erreur d'échantillonnage $\approx 11\%$

