
MASTER SAR : IDENTIFICATION & ESTIMATION D'ETAT
EXERCICES & PROBLEMES

N. MECHBAL

Exercice 1 : Estimation par moindres carrés récursives (MCR)

Soit le système décrit par le modèle discret suivant :

$$y(k) = ay(k-1) + bu(k) + v(k) \quad \text{avec } v(k) \sim \mathcal{N}(0,1)$$

où $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ est une densité de probabilité gaussienne de moyenne m et de variance σ^2 et a et b deux paramètres inconnus qu'on souhaite identifier. On suppose que l'entrée $u(k)$ et la sortie $y(k)$ sont disponibles et dont les deux premières valeurs sont données par :

k	0	1
$u(k)$	0	2
$y(k)$	2	5

Les paramètres inconnus a et b sont deux variables aléatoires ayant pour fonction de densité de probabilité (ddp), $p_a(a) = p_b(b)$, une loi uniforme sur l'intervalle $[0, 2]$. On souhaite ici appliquer l'algorithme d'estimation par moindres carrés récursifs pour les identifier. Pour cela, on pose $\underline{\theta} = [a \quad b]^T$ et on suppose que toutes les variables aléatoires sont mutuellement indépendantes.

Q1.1. En se basant sur l'algorithme des MCR :

- Réécrire le système sous la forme adéquat pour une estimation par MCR
- On souhaite initialiser l'algorithme en partant des valeurs moyennes des deux paramètres, $(\hat{\underline{\theta}}(0) = [E(a) \quad E(b)]^T)$. Calculer alors la valeur du vecteur initial $\hat{\underline{\theta}}(0)$ et montrer que la variance

$$\text{initiale } P(0) = \text{Var}(\underline{\theta}(0)) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Q1.2. Calculer $\hat{\underline{\theta}}(1)$ et $P(1)$.

Exercice 2 : Filtre de Kalman Etendu

Soit le système d'état scalaire discret suivant :

$$\begin{cases} q(k) = aq(k-1) + v(k) & \text{avec } v(k) \sim \mathcal{N}(0,1) \\ y(k) = q(k) + \omega(k) & \text{avec } \omega(k) \sim \mathcal{N}(0,2) \end{cases}$$

où $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ est une densité de probabilité normale de moyenne m et de variance σ^2 , a un paramètre constant inconnu et $y(k)$ la mesure. Le paramètre a est une variable aléatoire uniformément distribuée sur l'intervalle $[-1, 1]$. La valeur initiale de l'état $q(0)$ est uniformément distribuée sur l'intervalle $[1, 2]$.

Les variables aléatoires $a, q(0), v(k)$ et $\omega(k)$ sont mutuellement indépendantes.

On souhaite élaborer un filtre de Kalman étendu (FKE) pour estimer l'état q et le paramètre inconnu a .

Q2.1. Écrire les équations du filtre FKE. On notera $\underline{x}(k)$ son vecteur état.

Q2.2. On donne :

$$\hat{\underline{x}}(0) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P(0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

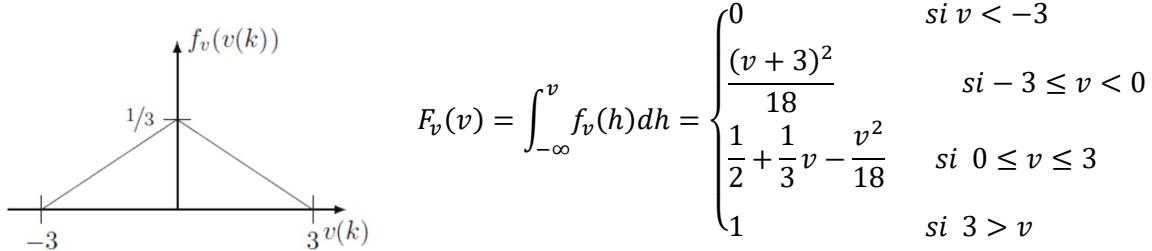
Calculer $\hat{\underline{x}}(1/0)$ et de la variance associée $P(1/0)$.

Exercice 3 : Filtrage particulière

Soit le système d'état scalaire discret suivant :

$$\begin{cases} x(k) = (x(k-1))^3 + u_c(k) + v(k) \\ y(k) = x(k) + \omega(k) \end{cases}$$

où $u(k)$ est le signal de commande supposé connu, $\omega(k)$ un bruit gaussien de moyenne nulle et de variance 1 et $v(k)$ un signal aléatoire ayant la densité de probabilité $f_v(v(k))$ et la fonction de répartition $F_v(v)$ suivantes :



On suppose que le nombre de particules $N_p = 2$ et que les variables aléatoires sont toutes mutuellement indépendantes.

Q3.1. La première étape d'initialisation de l'algorithme du filtrage particulière, a produit deux particules, $x^1(0) = 1$ et $x^2(0) = -1$ et on considère que le signal de commande $u_c(1) = 2$. Montrer que les états *a priori* obtenus après propagation dans le modèle, sont donnés par :

$$x^1(1) = \frac{9}{2} \text{ et } x^2(1) = 1.$$

Pour effectuer ce calcul, un générateur de nombres aléatoires uniforme sur $[0, 1]$ a généré deux *v.a.* relatives aux deux particules. Ainsi, pour le calcul de $x^1(1)$ le générateur a produit la *v.a.* $u^1 = \frac{7}{8}$ et pour $x^2(1)$ la *v.a.* $u^2 = \frac{1}{2}$. On s'aidera ici du complément fourni ci-dessous pour calculer les $v^{1,2}(1)$.

Q3.1. On suppose maintenant qu'à l'instant $k = 3$, une normalisation des poids des particules, $w_{k=3}^{1,2}$, a été réalisée et qu'à l'instant $k = 4$ on a obtenu les états *a priori* $x^1(4) = -2$ et $x^2(4) = -\frac{5}{2}$ ainsi que la mesure $y(4) = -3$. Calculer les poids $w_{k=4}^{1,2}$ associé à ces deux états *a priori* $x^1(4)$ et $x^2(4)$.

Complément : Génération d'une variable aléatoire (*v.a.*) avec une ddp arbitraire

La plupart des bibliothèques mathématiques ont des fonctions qui permettent de générer une distribution uniforme $f_u(u)$ sur l'intervalle $[0, 1]$ comme la fonction *rand* de Matlab :

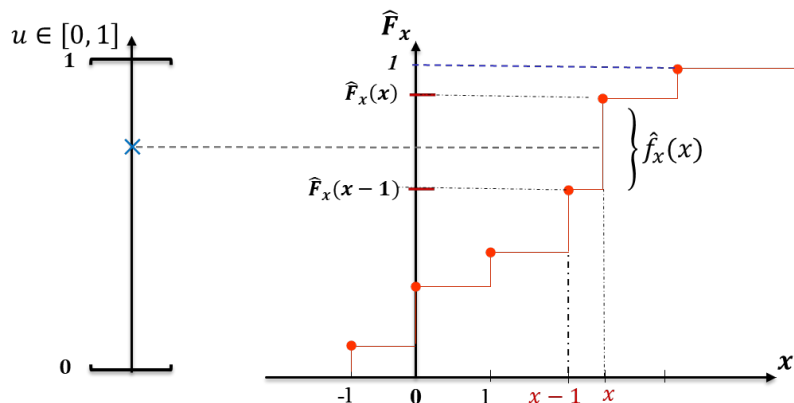
$$f_u(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si on souhaite maintenant générer une *v.a.* discrète avec une densité de probabilité (*ddp*) arbitraire, on peut le faire en inférant à partir de cette ddp uniforme (voir la figure ci-dessous):

Procédure : Soit une ddp désiré $\hat{f}_x(x)$ associé à la *v.a.* x ,

- On calcule la fonction de répartition (*cumulative distribution function, cdf*, en anglais) $\hat{F}_x(x) = \sum_{\bar{x}=-\infty}^x \hat{f}_x(\bar{x})$ (en continu $\hat{F}_x(x) = \int_{-\infty}^x f_x(\bar{x})d\bar{x}$)
- On génère la *v.a.* u de la distribution uniforme $f_u(u)$
- On calcule la valeur de la *v.a.* x tel que $\hat{F}_x(x-1) < u \leq \hat{F}_x(x)$

Il est alors démontré que la *v.a.* x est une variable aléatoire ayant une ddp $f_x(x) = \hat{f}_x(x)$.



Exercice 4 : Filtrage particulière

Un dispositif de mesure présente un modèle non linéaire où le signal de sortie $y(k)$ est donné par l'expression suivante (les notations : $x(k)$ et x_k sont équivalentes) :

$$y(k) = x^2(k) + \omega(k)$$

avec $\omega(k)$ est un bruit de mesure aléatoire ayant pour densité de probabilité $p_\omega(\omega(k))$ la fonction suivante :

$$p_\omega(\omega(k)) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\omega(k) & \text{si } \omega(k) \in [-2, 0] \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\omega(k) & \text{si } \omega(k) \in [0, +2] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

On se propose ici d'utiliser un filtre particulière pour estimer l'état non observé $x(k)$.

Q4.1 :

➤ Justifier le choix de ce type d'estimateur pour traiter notre problème

Q4.2 :

On suppose, qu'à l'instant k les particules $x_k^{(i)}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ sont données par les valeurs suivantes : $-2, -1, 0, 1$ et 2 et que le capteur fournit la mesure suivante $y(k) = 1$.

➤ Calculer les poids d'importance $w_k^{(i)}$ (avant normalisation) associés à chaque particule $x_k^{(i)}$ sachant qu'à l'instant $k - 1$ tous les poids ont été initialisés à la valeurs $\frac{4}{5}$.

Contexte pour les exercices 5 à 7 : Dans un procédé de fabrication robotisé, un paramètre constant θ est estimée à l'aide de mesures à deux échelles différentes. Ces mesures z_1 et z_2 du paramètre à l'échelle 1 et à l'échelle 2, respectivement, sont entachées par des erreurs de mesure aléatoires, indépendantes et additives ω_1 et ω_2 , à savoir :

$$\begin{cases} z_1(k) = \theta + \omega_1(k) \\ z_2(k) = \theta + \omega_2(k) \end{cases} \quad (1)$$

On souhaite estimer ce paramètre en utilisant différents estimateurs.

Exercice 5 : Estimateur non biaisé à variance minimal

On considère que le phénomène est décrit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \theta(k+1) = \theta(k) \\ \underline{z}(k) = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = C\theta(k) + \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \theta(k) + \underline{\omega}(k) \end{cases} \quad \text{avec } \underline{\omega}(k) \sim \mathcal{N}(0, R) \quad (2)$$

où $\underline{z}(k)$ représente le vecteur mesure et $\underline{\omega}(k)$ le vecteur d'erreur représenté par un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de matrice de covariance R :

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

On souhaite dans un premier temps élaborer un estimateur $\hat{\theta}$ dans la structure soit la suivante :

$$\hat{\theta}^{MVU}(k) = a_1 z_1(k) + a_2 z_2(k)$$

Q5.1. Déterminer la valeur des paramètres a_1 et a_2 de telle sorte que cet estimateur soit non biaisé et à variance minimale.

Q5.2. Calculer la variance de l'estimateur. Comparer la solution à variance minimale obtenue aux cas où seule une mesure serait utilisée.

Exercice 6 : Filtre de Kalman

On souhaite estimer θ à l'aide d'un filtre de Kalman.

Q6.1. En utilisant le modèle donné par le système (2) :

- Écrire les équations du filtre de Kalman.
- Calculer le gain de Kalman sous forme littérale et donner l'expression de l'estimé $\hat{\theta}_{k/k}^{FK}$

Q6.2. Que peut-on dire de la variance de l'estimateur en régime permanent $P_{\infty} = P_{k/k} = P_{k+1/k+1}$?

Q6.3. Comparer l'approche de l'exercice 1 ($\hat{\theta}^{MVU}$) et celle obtenue par le filtre de Kalman ($\hat{\theta}^{FK}$). Expliquer les différences et montrer l'intérêt de chaque solution.

Exercice 7 : Estimateur du maximum de vraisemblance

Reprenant le système (1) et considérant le cas où θ peut prendre des valeurs positives $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ correspondant aux unités de quantification du paramètre. Les erreurs sont dans ce cas, modélisées comme des variables aléatoires indépendantes discrètes à valeurs entières munies des fonctions de densité de probabilité (ddp) discrètes $P_{\omega_1}(\omega_1)$ et $P_{\omega_2}(\omega_2)$ données par la Fig.1 :

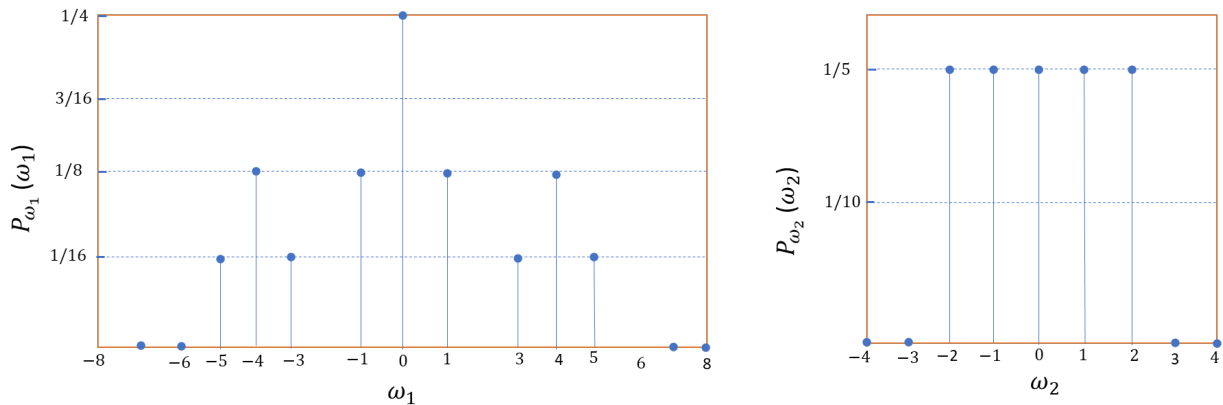


Fig. 1

Q7.1. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}^{ML}$ de θ pour les mesures suivantes : $z_1 = 8, z_2 = 11$.

Une campagne d'essai a permis d'estimer la densité de probabilité discrète associée au paramètre θ . Cette ddp *a priori*, est donnée par la Fig. 2. :

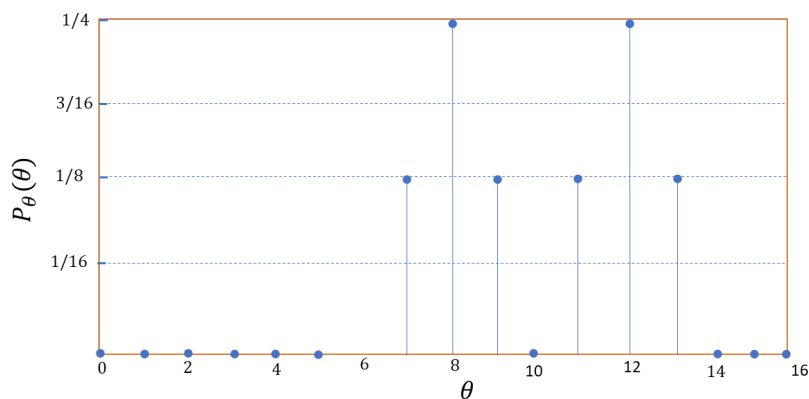


Fig. 2

Q3.2. Calculer l'estimateur du maximum *a posteriori* $\hat{\theta}^{MAP}$ de θ , en tenant compte de $P_{\theta}(\theta)$ et pour les mesures : $z_1 = 8, z_2 = 11$. Commenter par rapport à $\hat{\theta}^{ML}$.

Exercice 8 : Estimateur d'état - Steady-State Kalman Filter

Soit le système d'état scalaire décrit par le modèle discret suivant :

$$\begin{cases} x(k) = x(k-1) + \zeta(k-1) & \text{avec } \zeta(k) \sim \mathcal{N}(0, 1) \\ y(k) = x(k) + \omega(k) & \text{avec } \omega(k) \sim \mathcal{N}(0, 6) \end{cases} \text{ et } x(0) \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (1)$$

où $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ est une densité de probabilité gaussienne de moyenne m et de variance σ^2 . Les variables aléatoires $x(0)$, $v(k)$ et $\omega(k)$ sont mutuellement indépendantes. On souhaite élaborer une estimation de l'état, $\hat{x}(k)$, en utilisant un *Filtre de Kalman en régime permanent* (SSKF).

Q8.1. On note $P_\infty = P_{k-1/k-1} = P_{k/k}$ la variance en régime permanent. Montré que le gain du filtre de Kalman en régime permanent vaut : $K_\infty = \frac{1}{3}$. Donner dans ce cas l'expression de $\hat{x}(k/k)$.

Afin de tester la robustesse par rapport aux erreurs de modélisation de ce filtre, on considère, maintenant, que le filtre est toujours calculé sur la base du système d'état précédent (1), mais que système réel est décrit par le modèle d'état incertain suivant :

$$\begin{cases} x_v(k) = (1 + \delta)x_v(k-1) + \zeta(k-1) & \text{avec } \zeta(k) \sim \mathcal{N}(0, 1) \\ y(k) = x_v(k) + \omega(k) & \text{avec } \omega(k) \sim \mathcal{N}(0, 6) \end{cases}$$

où $x_v(k)$ représente le "vrai" état du système réel et $\delta \in \mathbb{R}$ une constante. Soit $\tilde{x}(k)$, l'erreur d'estimation définie par l'expression suivante :

$$\tilde{x}(k/k) = x_v(k) - \hat{x}(k/k)$$

Q8.2. Donner l'expression de $\tilde{x}(k+1/k+1)$. Application numérique $\delta = -\frac{1}{2}$ et $K_\infty = \frac{1}{3}$.

Q8.3. Montrer que le système d'état global ayant pour vecteur d'état : $X(k) = \begin{bmatrix} x_v(k) \\ \tilde{x}(k/k) \end{bmatrix}$ s'écrit :

$$X(k+1) = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} X(k) + G \begin{bmatrix} \zeta(k) \\ \omega(k+1) \end{bmatrix}$$

où G est une matrice de commande constante à déterminer.

Q8.4. Montrer que pour ces valeurs de δ et K_∞ , le système global reste stable et donc que l'erreur d'estimation ne diverge pas.

PROBLEMES

PROBLEME 1

La robotique aérienne connaît depuis plusieurs années un engouement considérable tant chez des constructeurs privés que dans les laboratoires de recherche. Cet intérêt est motivé par les récentes avancées technologiques qui rendent possible la conception de systèmes performants dotés de réelles capacités de navigation autonome, à des coûts non prohibitifs. Aujourd'hui, les principales limitations que rencontrent les chercheurs sont d'une part liée à la difficulté de maîtriser l'appareil en présence de turbulences atmosphériques et d'autre part à la complexité du problème de navigation nécessitant la perception d'un environnement souvent contraint et évolutif, en particulier dans le cas de vols à basse altitude. Les applications sont nombreuses. Elles concernent en premier lieu les domaines de la sécurité (surveillance de l'espace aérien, du tracé urbain et interurbain), la gestion des risques naturels (surveillance de l'activité des volcans), la protection de l'environnement, la gestion des grandes infrastructures, l'agriculture (détection et traitement des cultures) et la prise de vue aérienne dans la production de films. Toutes ces missions nécessitent un contrôle performant de l'appareil et par conséquent des informations précises sur son état absolu et/ou relatif à son environnement.

C'est dans ce contexte que des équipes de chercheurs et industriels se sont lancées dans le développement de mini-drones autonomes de type hélicoptères. Pour ces types de drones, la propulsion est assurée par un rotor principal et la compensation du couple ainsi généré est réalisée grâce au rotor anticouple situé à l'arrière de la machine. Le rotor principal permet la montée et la descente ainsi que la translation (avant/arrière et latérale). Le rotor de queue permet le contrôle en lacet de l'appareil (mouvement de rotation autour de l'axe du rotor principal). Pour répondre aux différentes missions de vol autonome, l'hélicoptère est muni de plusieurs capteurs et d'un système de commande embarqué.



Exercice 1 : Calibration de capteur

Le drone est équipé d'un télémètre à ultrasons permettant de mesurer sa distance par rapport au sol. Ce capteur est bruité et l'objectif de cet exercice est d'estimer l'espérance mathématique et la covariance de ces bruits de mesure. Les mesures fournies par ce capteur sont bruitées. On suppose que lorsque le robot se situe à la distance d d'un obstacle, la mesure fournie par ce capteur est la réalisation d'une variable aléatoire x_i de densité de probabilité :

$$f_{x_i}(x_i) = \frac{x_i}{d^2} \exp\left(-\frac{x_i}{d}\right)$$

On considère, dans cet exercice, que le robot est immobile et qu'il se situe à la distance d d'un obstacle. On souhaite estimer cette distance d . Pour cela, on effectue, à l'aide du capteur proximétrique, N mesures indépendantes : x_1, x_2, \dots, x_N :

Q1.1. Montrer que l'espérance mathématique de x_i est : $E\{x_i\} = 2d$.

On admettra que la variance de x_i est $E\{(x_i - 2d)^2\} = 2d^2$.

Q1.2. Comment varie la précision du capteur en fonction de la distance à l'obstacle ?

Q1.3. On considère un estimateur de la forme

$$\hat{d} = a \sum_{i=1}^N x_i$$

où a est une constante.

- Déterminer a de façon à ce que l'estimateur \hat{d} soit non biaisé.
- Calculer la covariance de cet estimateur. Quelle est sa covariance asymptotique ?

Q1.4. Montrer que

$$\ln\left(f_{X|d}(X|d)\right) = -2N \ln(d) + \left(\sum_{i=1}^N \ln(x_i)\right) - \frac{1}{d} \left(\sum_{i=1}^N x_i\right)$$

où on note $X = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_N]^T$.

Q1.5. En déduire l'estimateur par maximum de vraisemblance.

Q1.6. Existe-t-il un meilleur estimateur de d ?

Exercice 2: Fusion de données

On souhaite estimer la position $r_k \in \mathbb{R}^3$, la vitesse $v_k \in \mathbb{R}^3$ et l'orientation du drone par rapport à un repère fixe situé au sol. L'orientation est décrite par les quaternions $q_k \in \mathbb{R}^4$. On souhaite donc estimer le vecteur

$$x_k = \begin{bmatrix} r_k \\ v_k \\ q_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{10}$$

Précisons que la période d'échantillonnage considérée est $T_e = 0.1$ seconde.

Afin d'estimer x_k , on dispose des capteurs décrits ci-dessous. Tous ces capteurs sont bruités. Ces bruits de mesures sont gaussiens, d'espérance nulle et de covariance connue.

- Une centrale inertielle montée sur le drone fournit, à la période T_e le vecteur :

$$u_k = U_k + \omega_{uk} \in \mathbb{R}^6$$

où le vecteur U_k regroupe l'accélération et la vitesse du robot, exprimées dans le repère lié au robot et où ω_{uk} représente les bruits de mesure. La covariance de ces bruits est

$$E\{\omega_{uk}\omega_{uk}^T\} = R_u$$

- La centrale est également équipée de magnétomètres à partir desquels nous pouvons obtenir une mesure, à la période T_e de l'orientation du drone :

$$y_{ck} = q_k + \omega_{ck}$$

La covariance de ces bruits de mesure est $E\{\omega_{ck}\omega_{ck}^T\} = R_c$.

- Un télémètre à ultrasons fournit, à la période T_e , l'altitude de le drone par rapport au sol :

$$y_{tk} = [0 \quad 0 \quad 1] r_k + \omega_{tk}$$

La covariance de ces bruits de mesure est $E\{\omega_{tk}^2\} = R_t$.

- Un GPS, fournit, à la période $T_{eGPS} = 10T_e$, la position du robot:

$$y_{gk} = r_k + \omega_{gk}$$

La covariance de ces bruits de mesure est $E\{\omega_{ek}\omega_{ek}^T\} = R_e$.

On a obtenu une représentation d'état à temps discret où l'équation d'état est de la forme :

$$x_{k+1} = f(x_k, U_k) + \zeta_k$$

où $\zeta_k \in \mathbb{R}^{10}$ sont des bruits d'espérance nulle et de covariance $E\{\zeta_k \zeta_k^T\} = Q$.

On met, tout d'abord, en œuvre un filtre de Kalman étendu (FKE) afin d'estimer x_k .

Dans le filtre de Kalman étendu mis en œuvre, la prédiction du vecteur d'état est calculée de la façon suivante :

$$\hat{x}_{k+1|k} = f(\hat{x}_{k|k}, u_k)$$

Avec la covariance de l'erreur de prédiction qui est donnée par :

$$P_{k+1|k} = E\{(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k})(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k})^T\} = F_k P_{k|k} F_k^T + G_k R_u G_k^T + Q$$

$$\text{où } F_k = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{(x, u) = (\hat{x}_{k|k}, u_k)} \quad \text{et} \quad G_k = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right|_{(x, u) = (\hat{x}_{k|k}, u_k)}$$

Q2.1 La figure 1, ci-dessous, représente l'évolution de la première composante diagonale de $P_{k|k}$ fournie par le FKE au cours du temps.

Expliquez la forme en "dents de scie" obtenue.

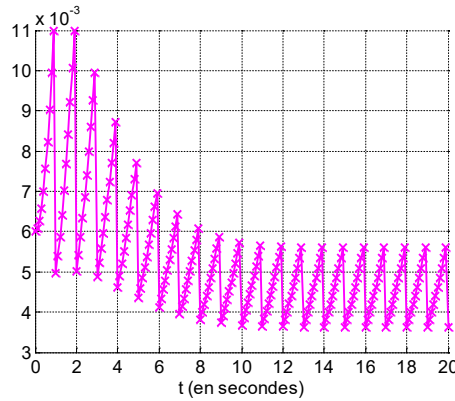


Figure 1 : évolution de la première composante diagonale de $P_{k|k}$

Q2.2 On effectue 500 simulations de Monte-Carlo afin d'évaluer le filtre de Kalman étendu. Les résultats obtenus pour la troisième composante du vecteur d'état sont présentés ci-après :

- Figure 2 : moyenne empirique de l'erreur d'estimation de la troisième composante du vecteur d'état, minimum et maximum de l'erreur d'estimation sur les 500 simulations de Monte-Carlo, pour la troisième composante du vecteur d'état.

- Figure 3 : Tracé de $\bar{P}_{k|k}^F(3,3)$, troisième composante diagonale de $\bar{P}_{k|k}^F$ et tracé de $\bar{P}_{k|k}^{Réelle}(3,3)$, troisième composante diagonale de $\bar{P}_{k|k}^{Réelle}$. On note $\bar{P}_{k|k}^F$ la moyenne sur les 500 simulations de Monte-Carlo des covariances de l'erreur d'estimation fournies par le filtre. On note $\bar{P}_{k|k}^{Réelle}$ la covariance empirique de l'erreur d'estimation réelle.

Les résultats obtenus pour les autres composantes du vecteur d'état sont similaires. Le comportement du filtre est-il satisfaisant ?

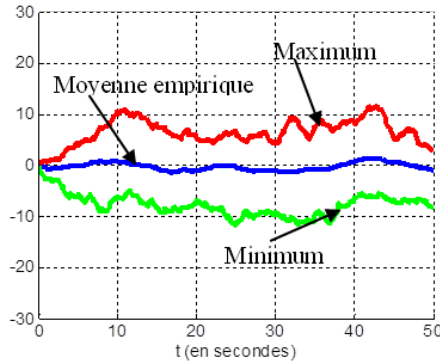


Figure 2 : Erreur d'estimation

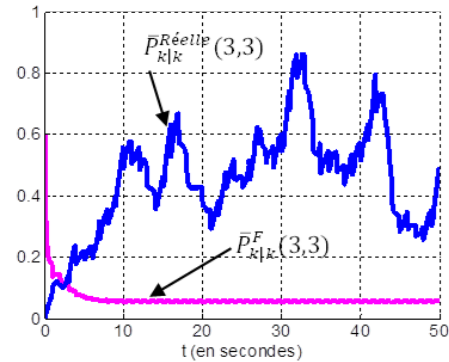


Figure 3 : Covariance de l'erreur d'estimation

Q2.3 Les simulations de la question précédente ont été effectuées avec $Q = 0.001 I_{10}$ où I_{10} est la matrice identité de dimension 10. On effectue une nouvelle série de 500 simulations de Monte-Carlo avec $Q = 0.01 I_{10}$. La figure 4 représente la valeur moyenne de l'une des composantes du gain de Kalman, K_k , sur l'ensemble des 500 simulations de Monte-Carlo.

Expliquez les différences observées pour les deux valeurs de Q .

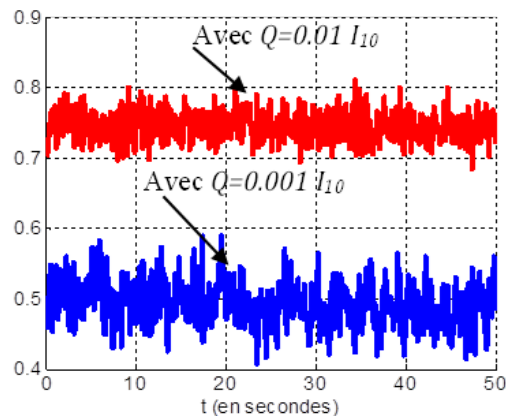


Figure 4 : moyenne d'une composante de K_k

Q2.4 On met en œuvre un filtre de Kalman Unscented et on effectue 500 simulations de Monte-Carlo. Les figures 5 et 6, ci-après, présentent les résultats obtenus avec ce filtre de Kalman *Unscented* (UKF) ainsi que les résultats obtenus avec le filtre de Kalman étendu (FKE). Ces figures concernent la troisième composante du vecteur d'état. On obtient des comportements similaires avec les autres composantes. Comparer les résultats obtenus avec l'UKF et ceux obtenus avec le FKE.

Quel filtre choisiriez-vous ?

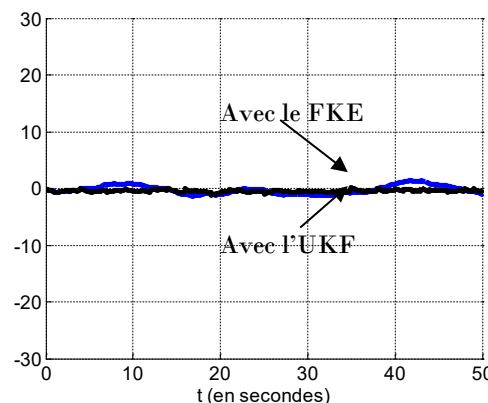


Figure 5 : moyenne empirique de l'erreur d'estimation de la troisième composante du vecteur d'état

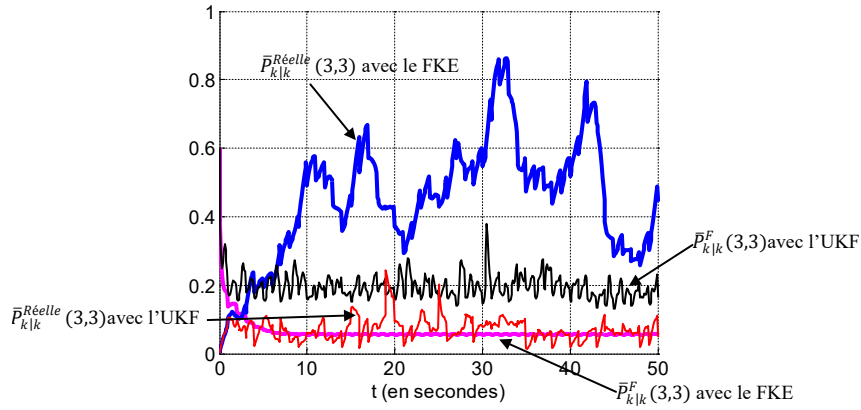


Figure 6 : Covariance de l'erreur d'estimation

PROBLEME 2

Le but de cette étude est l'étude et la surveillance du bon fonctionnement d'un radiotélescope.



Fig. 3 : Antenne radar

Afin d'asservir en position un radiotélescope, un premier dispositif a été réalisé. Ce dispositif analogique est décrit à la Fig.1. La consigne est un déplacement angulaire ($\theta_i(t)$). Le potentiomètre convertit la consigne d'angle en tension. De la même façon, l'angle azimut mesuré en sortie ($\theta_0(t)$) est converti en tension par un autre potentiomètre. L'amplificateur de puissance amplifie le signal d'erreur ($\theta_i - \theta_0$) avant d'attaquer le système formé par l'antenne et son moteur.

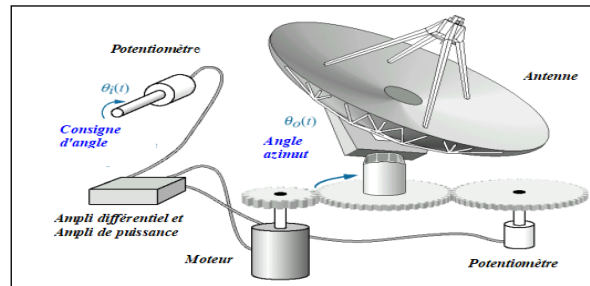


Fig. 4 : Antenne et son dispositif de régulation analogique

La commande analogique proposée permet d'annuler l'erreur statique. En effet, à l'aide de l'amplificateur, le moteur continuera de fonctionner tant que le signal d'erreur n'est pas nul. Cependant, avec ce dispositif nous ne pouvons pas ajuster les performances de la boucle de régulation (dépassement, temps de réponse, robustesse, saturation de l'actionneur, ...) et rejeter efficacement les différentes perturbations (thermique, mécanique). De plus, ce dispositif est assujéti à plusieurs défauts et pannes. Ce qui nécessite des dispositifs matériels et une présence humaine continue afin d'assurer le bon fonctionnement de l'antenne.

Pour résoudre ces problèmes, une commande numérique tolérante aux défauts a été élaborée. Le nouveau dispositif comprend une commande numérique robuste et une procédure de surveillance basée sur des approches analytiques.

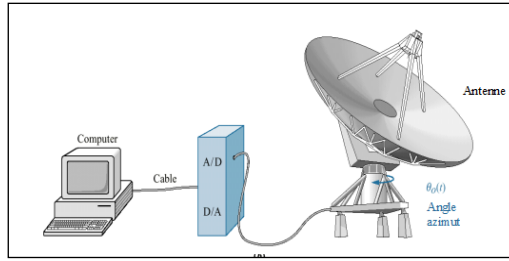


Fig. 5 : Antenne et son dispositif de régulation numérique

Nous nous intéressons, ici, à un problème d'estimation et à un problème de filtrage au moyen de mesures effectuées à l'aide de ce radiotélescope. Les deux exercices ci-après sont indépendants.

Exercice 1 : Estimation

Le radiotélescope considéré permet de mesurer la distance qui le sépare d'un objet (planète, sonde spatiale,...). On souhaite, dans cet exercice, évaluer les performances de ce radiotélescope i.e. caractériser les erreurs commises lors des mesures de distance. Pour cela, on considère N planètes dont les distances respectives par rapport au radiotélescope, d_1, d_2, \dots, d_N sont connues. On note respectivement y_1, y_2, \dots, y_N les mesures de ces distances effectuées par le radiotélescope. On cherche à caractériser statistiquement l'erreur de mesure :

$$b_k = |y_k - d_k|.$$

On sait que b_k est la réalisation d'une variable aléatoire \mathbf{b} uniformément répartie entre 0 et θ où θ est inconnu. On souhaite donc estimer θ . On considère que les échantillons b_k sont indépendants.

Loi uniforme : On rappelle que la densité de probabilité d'une variable aléatoire \mathbf{b} suivant une loi uniforme sur $[0; \theta]$ est :

$$p_{\mathbf{b}}(b) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & \text{si } b \in [0; \theta] \\ 0 & \text{si } b \notin [0; \theta] \end{cases}$$

son espérance mathématique et sa variance sont respectivement :

$$E\{\mathbf{b}\} = \frac{\theta}{2} \text{ et } \text{Cov}\{\mathbf{b}\} = E\left\{\left(\mathbf{b} - \frac{\theta}{2}\right)^2\right\} = \frac{\theta^2}{12}$$

1.1 On considère l'estimateur $\hat{\theta}_a = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N |y_k - d_k|$ ($|\cdot|$ valeur absolue)

1.1.a. Cet estimateur est-il biaisé?

1.1.b. Calculer la covariance de cet estimateur. Calculer sa covariance asymptotique.

1.2 On note \underline{b}^N , le vecteur $\underline{b}^N = \begin{bmatrix} |y_1 - d_1| \\ \vdots \\ |y_N - d_N| \end{bmatrix}$.

➤ Montrer que la densité de probabilité de \underline{b}^N conditionnée sur θ est :

$$p_{\mathbf{b}^N|\theta}(\underline{b}^N|\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^N} & \text{si } \theta \geq \max(b_k) \\ 0 & \text{si } \theta < \max(b_k) \end{cases}$$

1.3 En déduire que l'estimé de maximum de vraisemblance est $\hat{\theta}_b = \max(b_k)$.

Exercice 2 : Filtre de Kalman

On considère une sonde spatiale animée d'un mouvement de translation à vitesse constante v selon un axe $(O; \vec{x})$. On notera $d(t)$ la position de la sonde sur cet axe.

Le radiotélescope est maintenant placé en O et dirigé vers la sonde. Il mesure ainsi la position $d(t)$ à intervalles de temps réguliers T_e .

On souhaite estimer la position et la vitesse de la sonde spatiale à l'aide des mesures fournies par le radiotélescope.

2.1 Montrer que le système considéré peut être modélisé par la représentation d'état discrète :

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= \begin{bmatrix} 1 & T_e \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_k + \zeta_k \\ y_k &= [1 \quad 0] x_k + \omega_k\end{aligned}$$

où $x_k = \begin{bmatrix} d_k \\ v_k \end{bmatrix}$ est l'état du système, ζ_k et ω_k sont respectivement les bruits de dynamique et les bruits de mesure.

On suppose que les bruits de dynamique et les bruits de mesure sont blancs, gaussiens, de moyenne nulle et de covariance

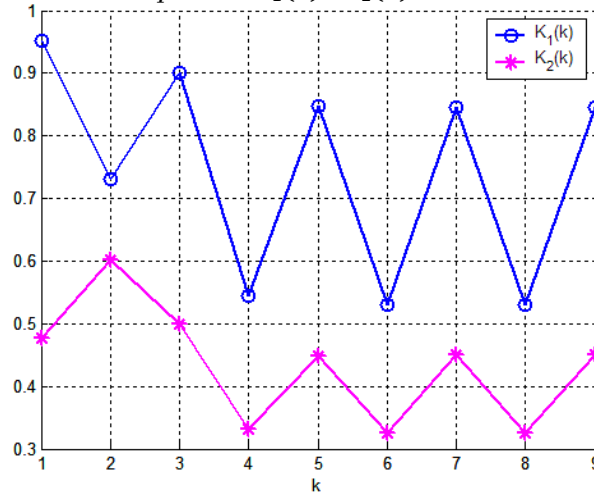
$$E\{\zeta_k \zeta_k^T\} = Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad E\{\omega_k^2\} = R_k = 2 + (-1)^k$$

En réalité, afin de disposer de mesures y_k à intervalles de temps T_e suffisamment faibles, on utilise deux radiotélescopes. On considère que les mesures y_k , pour k impair, sont fournies par le "radiotélescope numéro1" et que les mesures y_k , pour k pair, sont fournies par le "radiotélescope numéro2".

Dans la suite de cet exercice, on prendra $T_e = 1$ s.

- On met en œuvre un Filtre de Kalman que l'on initialise avec les valeurs : $\hat{x}_{0|0} = x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $P_{0|0} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$. On suppose que la première mesure est égale à $y_1 = 3$.
➤ Déterminer le premier estimé de l'état $\hat{x}_{1|1}$ ainsi que $P_{1|1}$.
- D'après la valeur de $P_{1|1}$, déterminée à la question précédente, évaluez la précision de l'estimé $\hat{x}_{1|1}$. On souhaite, dans cette question, que vous indiquiez une probabilité concernant l'amplitude de l'erreur d'estimation de chaque composante du vecteur d'état.
- La matrice R_k a été choisie de la forme $R_k = 2 + (-1)^k$. Interpréter physiquement ce choix. Lequel des deux radiotélescopes utilisés est-il le plus précis ?
- On note $K_1(k)$ et $K_2(k)$ les deux composantes du gain du filtre de Kalman K_k i.e. $K_k = \begin{bmatrix} K_1(k) \\ K_2(k) \end{bmatrix}$. La figure ci-après représente l'évolution de $K_1(k)$ et de $K_2(k)$ en fonction de

k. Expliquer le comportement des deux composantes $K_1(k)$ et $K_2(k)$.

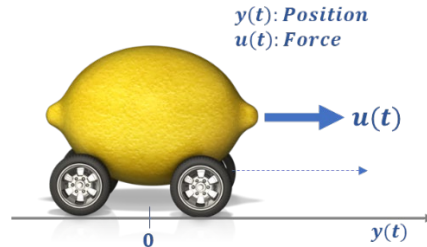


- En supposant que l'ordre de grandeur des variables que l'on cherche à estimer est le même que précédemment, et que l'on initialise, à présent la matrice $P_{0|0}$ avec la valeur $P_{0|0} = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$, expliquer la signification d'une telle initialisation.

EXERCICES DE SIMULATION SOUS MATLAB (OU OCTAVE)

Exo.M1. Filtre de Kalman

Soit un objet se déplaçant selon une ligne droite et soumis à une force extérieure, $u(t)$, pour sa propulsion.



Afin d'estimer sa position, $y(t)$ et sa vitesse, $v(t)$, on considère le modèle simple suivant :

$$\begin{aligned}\dot{v}(t) &= u(t) \\ \dot{y}(t) &= v(t)\end{aligned}$$

On suppose aussi que la force d'entrée est un signal constant entre deux échantillons, mais entaché d'un bruit aléatoire discret et gaussien $\xi(k) \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$, et que la position mesurée, y_m est elle aussi bruitée par le signal gaussien $\omega(k) \sim \mathcal{N}(0, R)$, soit :

$$\begin{aligned}u(t) &= u(k) + \xi(k) \quad \text{pour } kT_e \leq t < (k+1)T_e \\ y_m(k) &= y(k) + \omega(k)\end{aligned}$$

On montre que la discrétisation de ce modèle pour $T_e = 1s$ conduit à :

$$\begin{aligned}v(k+1) &= v(k) + u(k) + \xi_v(k) \\ y(k+1) &= y(k) + v(k) + 0.5u(k) + 0.5\xi_v(k)\end{aligned}$$

Q1. Montrer que le système d'état discret est donné par :

$$\begin{aligned}\underline{x}(k+1) &= F\underline{x}(k) + G u(k) + \underline{\xi}(k) \quad \text{avec } \underline{\xi}(k) \sim \mathcal{N}(0, Q) \\ y_m(k) &= C\underline{x}(k) + \omega(k)\end{aligned}$$

où

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0] \quad \text{et} \quad Q = \sigma \begin{bmatrix} 0.25 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

Q2. Simuler le système suivant

Q3. Mettre en œuvre sous Matlab (ou Octave) un FK et donner l'état estimé $\hat{\underline{x}}(k)$ (position et vitesse).

Q4. Montrer que la variance en régime permanent P_∞ converge vers une matrice constante.

Q5. Évaluer votre estimateur en utilisant les simulations de Monte-Carlo et tracer la distribution de l'erreur d'estimation.

Exo M2. EKF and UKF

On souhaite estimer l'état du système modélisé par la représentation d'état non linéaire à temps continu suivante

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 u + \beta \\ -\alpha x_2^2 + u x_2 \end{bmatrix} + \zeta(t) \\ y(t) = C \underline{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \omega(t) \end{cases}$$

où $\underline{x} = [x_1 \quad x_2]^T$ est un vecteur d'état, y la mesure, u la commande, $\alpha = 4$ et $\beta = 1$.

L'objectif de ce travail est d'estimer l'état du système considéré et d'évaluer l'estimateur mis en œuvre en simulation.

Dans un premier temps, on linéarise le système autour d'un point d'équilibre et on mettra en œuvre un filtre de Kalman (FK). Dans un second temps, afin d'obtenir un meilleur estimé de l'état, on mettra en œuvre un filtre de Kalman étendu (EKF) en se basant sur les équations d'état non linéaires puis un filtre UKF. On évaluera les performances de ces filtres EKF et UKF à l'aide de simulations de Monte-Carlo.

Afin de faciliter l'implémentation et le "**debuggage**", il est préférable de simuler le système réel jusqu'au temps final choisi, puis d'effectuer le filtrage. La simulation du système réel est effectuée en lançant l'exécution des fichiers simulink mentionnés précédemment, à l'aide de la commande **sim**.

Les paramètres du système réel sont stockés dans une structure *ParamReels* et ceux utilisés pour le filtrage sont stockés dans la structure *ParamFilt*. Ceci permet éventuellement de tester la robustesse du filtre en choisissant des paramètres différents pour simuler le système réel et pour le filtrage.

Q1. Linearization

1. Déterminer un état d'équilibre $\underline{x}_e = [x_{1e} \quad x_{2e}]^T$ pour une entrée \underline{u}_e
2. Linéariser le système autour de ce point d'équilibre (développement limité)
$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}_l = A \underline{x}_l + B \underline{u}_l + \zeta(t) \\ y_l = C \underline{x}_l + \omega(t) \end{cases} \quad \text{avec } \underline{x}_l = \underline{x} - \underline{x}_e, \underline{u}_l = \underline{u} - \underline{u}_e \text{ and } y_l = y - x_{1e}$$

Q2. Simulations

1. Créer un fichier Matlab (*.m) avec tous les paramètres "réels"
2. Créer une fonction Matlab (*.m) qui calcule les matrices A, B linéarisées
3. Créer deux fichiers Simulink (*.mdl) qui simulent les systèmes non linéaires et linéaires non bruités (les bruits seront ajoutés dans Matlab)
4. Pour la simulation linéaire, nous utiliserons les données suivantes

$$u(t) = \begin{cases} u_e & \text{if } t < 4s \\ u_e + 1 & \text{if } t \geq 4s \end{cases}$$

Pour la discrétisation on considèrera comme période d'échantillonnage $T_e = 0.1$ s.

L'état initial est : $\underline{x}(0) = [4 \quad x_{2e}]^T$

Q3. Kalman filter

1. Créer un programme principal pour calculer le filtre de Kalman qui :
 - Simule et trace la sortie et les états du système linéaire dans ses premières cellules
 - Programmer l'algorithme de Kalman
 - Évaluer ses performances
2. Évaluer le filtre lors de la simulation avec le système non linéaire

Q4. Extended Kalman filter (EKF)

1. Créer un programme principal pour EKF permettant de :
 - Simuler et tracer la sortie et les états du système non linéaire
 - Calculer le système discret non linéaire en l'intégrant numériquement entre (vous pouvez utiliser par

- exemple la fonction `ode45.m`)
2. Pour calculer la valeur des matrices linéarisées F et G , vous devez utiliser la solution analytique évaluée au point d'équilibre considéré
 - Programmer l'algorithme EKF
 - Évaluer ses performances à l'aide des simulations de Monte-Carlo
 - Évaluer le filtre lorsqu'il est simulé avec différentes valeurs initiales et covariances.

Q5. Unscented Kalman Filter (UKF)

1. Créer un programme principal pour l'UKF permettant de :
 - Simuler et tracer la sortie et les états du système non linéaire
 - Programmer l'algorithme UKF (utiliser `Chol.m` pour la racine carrée d'une matrice)
 - Évaluer ses performances
 - Évaluer le filtre lorsqu'il est simulé avec différentes valeurs initiales et covariances.
 - Évaluer les performances de ces deux filtres à l'aide de simulations de Monte-Carlo
2. Nous allons également tester la robustesse en utilisant des paramètres de "filtrage" différents des paramètres "réels".
3. Comparer les performances avec le filtre EKF