Probabilités, modélisation et statistique

Chapitre 4 - Convergence des variables aléatoires

Raphaël Benerradi

Contenu pédagogique : Gwladys Toulemonde, Chloé Serre-Combe et Raphaël Benerradi

Polytech Montpellier - DevOps3 - Semestre 6

Année 2025-2026

Convergence L^2

Définition : convergence L^2 (ou en moyenne quadratique)

On dit qu'une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge en norme L^2** (ou **en moyenne quadratique**) vers une variable aléatoire X si :

$$\mathbb{E}\left[(X_n - X)^2\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Dans ce cas, on note $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} X$.

Si on veut réécrire dans le détail cette définition :

$\forall\epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N,$

$$\sum_i (x_{n,i} - x_i)^2 \, \mathbb{P}(X_n = x_{n,i}) < \epsilon \quad \text{si } X_n, X \text{ discrètes}$$

$$\int_{\mathbb{R}} (x_n - x)^2 \, f_{X_n}(x_n) \, dx < \epsilon \quad \text{si } X_n, X \text{ continues}$$

Convergence en probabilité

Définition : convergence en probabilité

On dit qu'une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge en probabilité** vers une variable aléatoire X si :

$$\forall\epsilon > 0, \quad \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Dans ce cas, on note $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$.

Si on veut réécrire dans le détail cette définition :

$\forall\epsilon > 0, \forall\delta > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N,$

$$\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) < \delta$$

Convergence en loi

Définition : convergence en loi

On dit qu'une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge en loi** vers une variable aléatoire X si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{X_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_X(x)$$

Dans ce cas, on note $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X$.

En particulier, cette définition est équivalente aux propositions suivantes :

- Si X_n et X sont discrètes : $\forall i \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = i) = \mathbb{P}(X = i)$.
- Si X_n et X admettent une densité : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to\infty} f_{X_n}(x) = f_X(x)$.

Lien entre les convergences

Convergence L^2 $\Longrightarrow$ Convergence en probabilité $\Longrightarrow$ Convergence en loi

Remarque : Les réciproques sont fausses en général.

- Convergence en probabilité $\not\Rightarrow$ Convergence L^2
  - Considérer $Y \sim \mathcal{U}(0,1)$ et la suite $X_n = \sqrt{n}\,\mathbb{1}_{\{Y \leq \frac{1}{n}\}}$.
- Convergence en loi $\not\Rightarrow$ Convergence en probabilité
  - Considérer $X \sim \mathcal{B}(1/2)$ et la suite $X_n = 1 - X$.

Inégalités classiques

Inégalité de Markov (un de ses corollaires)

Soient X une variable aléatoire et g une fonction croissante positive définie sur $X(\Omega)$. Alors, pour tout $\epsilon \in X(\Omega)$ tel que $g(\epsilon) > 0$:

$$\mathbb{P}(X \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[g(X)]}{g(\epsilon)}$$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2. Alors, pour tout $\epsilon > 0$:

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{V}[X]}{\epsilon^2}$$

Ces inégalités sont utiles pour contrôler des quantités aléatoires. Elles permettent notamment de prouver la loi des grands nombres.

Loi des grands nombres

Théorème : loi (faible) des grands nombres

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, admettant une espérance μ. Alors :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to\infty]{P} \mu$$

i.e. la moyenne empirique converge en probabilité vers l'espérance.

Si de plus, les X_i admettent une variance finie, alors on a même convergence L^2 :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} \mu$$

Théorème central limite

Théorème : théorème central limite

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, admettant une espérance μ et une variance $\sigma^2 > 0$. Notons $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ la moyenne empirique. Alors :

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

i.e. pour n grand, la dispersion des moyennes empiriques autour de μ est de l'ordre de $\sigma/\sqrt{n}$ avec une distribution normale.