Probabilités, modélisation et statistique

Chapitre 2 - Variables aléatoires

Raphaël Benerradi

Contenu pédagogique : Gwladys Toulemonde, Chloé Serre-Combe et Raphaël Benerradi

Polytech Montpellier - DevOps3 - Semestre 6

Année 2025-2026

Variable aléatoire

Définition : variable aléatoire

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable. Une **variable aléatoire** (v.a.) est une application $X : \Omega \to E$ mesurable, c'est-à-dire telle que pour tout $B \in \mathcal{E}$, l'ensemble $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\}$ appartient à la tribu $\mathcal{A}$.

Remarques :

- Souvent, une variable aléatoire est à valeurs réelles, mais ce n'est pas toujours le cas.
- Une façon plus intuitive de comprendre une variable aléatoire est de la voir comme une fonction qui associe à chaque issue de l'expérience aléatoire un résultat (par exemple un nombre).

Exemple de variable aléatoire (discrète)

- Expérience : on jette une pièce équilibrée trois fois.
  $\Omega = \{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF\}$
- Événement d'intérêt : "On a obtenu deux piles" :
  $B = \{PPF, PFP, FPP\}$.
- Variable aléatoire : "nombre de fois où on obtient pile"

$$\begin{aligned} X : \Omega &\to \mathbb{N} \\ \omega &\mapsto \text{nombre de fois où on obtient pile dans } \omega \end{aligned}$$

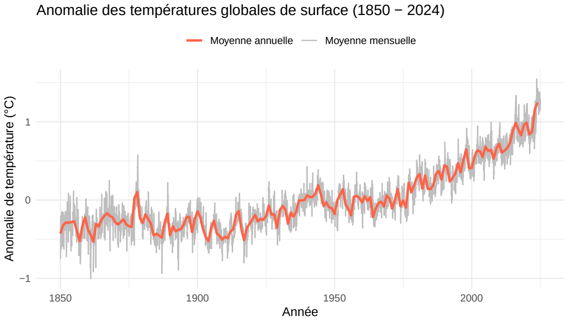
  Par exemple, $X(\{PPP\}) = 3$ et $X(\{FFP\}) = 1$.

- Événement d'intérêt réécrit via la v.a. :

$$B = \{X = 2\} = X^{-1}(\{2\}) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) = 2\} = \{PPF, PFP, FPP\}$$

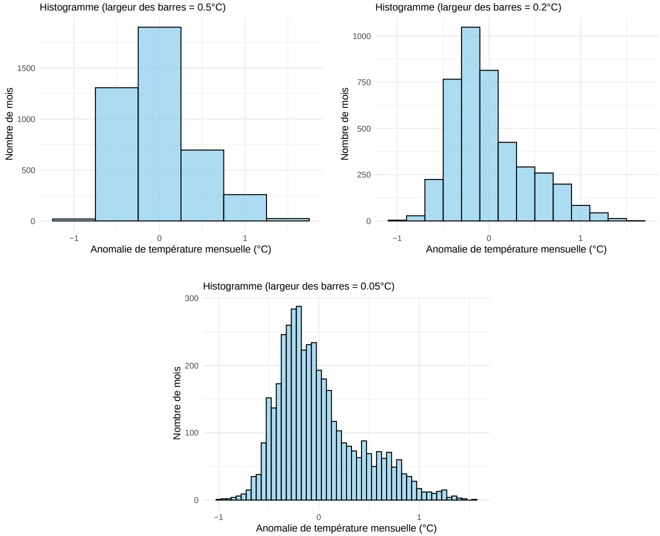
Exemple de variable aléatoire (réelle)

- Expérience : on mesure les anomalies de températures moyenne à la surface de la Terre (en °C). Ω est l'ensemble des mois observables.
- Variable aléatoire : $X : \Omega \to \mathbb{R}$, où $X(\omega)$ est la température observée dans le mois ω.



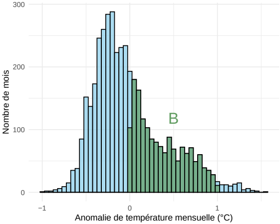
Source des données : Berkeley Earth, Global Monthly Averages (1850 Recent)

Exemple de variable aléatoire (réelle)



Exemple de variable aléatoire (réelle)

- Expérience : on mesure les anomalies de températures moyenne à la surface de la Terre (en řC). Ω est l'ensemble des mois observables.
- Variable aléatoire : $X : \Omega \to \mathbb{R}$, où $X(\omega)$ est la température observée dans le mois ω.
- Exemple d'événement : “L'anomalie de température est entre 0 et 1 řC” : $B = \{X \in [0, 1]\}$.
- Écriture via la v.a. : $B = \{X \in [0, 1]\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in [0, 1]\}$.



Remarque : En général, on notera $\{X = x\}$ pour $\{\omega \in \Omega | X(\omega) = x\}$, $\{X < a\}$ pour $\{\omega \in \Omega | X(\omega) < a\}$, $\{a < X \leq b\}$ pour $\{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq b\}$ et ainsi de suite.

Variables aléatoires discrète et réelle

Définition : variable aléatoire discrète

Une variable aléatoire X est dite **discrète** si elle est à valeurs dans un nombre fini ou infini dénombrable de valeurs, c'est-à-dire $X : \Omega \to E$ avec E au plus dénombrable.
On peut supposer sans perte de généralité que X est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Définition : variable aléatoire réelle

Une variable aléatoire X est dite **réelle** si elle est à valeurs dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition : loi de probabilité

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable. Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire. La **loi de probabilité** (ou loi) de la variable aléatoire X est la mesure de probabilité $\mathbb{P}_X$ sur $(E, \mathcal{E})$ définie par :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_X : \mathcal{E} &\longrightarrow [0,1] \\ B &\longmapsto \mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\}) \end{aligned}$$

Remarque : Moins formellement, c'est l'application qui donne la probabilité que le résultat obtenu par X soit dans B.

Propriété : Soit X une v.a. et $Y = g(X)$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_Y(B) = \mathbb{P}(Y \in B) &= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega | g(X(\omega)) \in B\}) \\ &= \mathbb{P}(X \in \{x \in E | g(x) \in B\}) \end{aligned}$$

Exemple : X tel que $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{4}$ et $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{2}$. Soit $Y = |X|$.

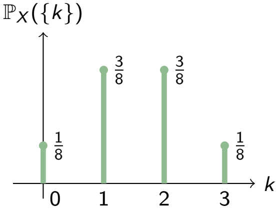
$\mathbb{P}_Y(\{1\}) = \mathbb{P}(|X| = 1) = \mathbb{P}(X \in \{-1, 1\}) = \mathbb{P}(X = -1) + \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Exemple de loi (discrète)

Sur l'exemple des trois lancés de pile ou face, avec X qui compte le nombre de piles, on a :

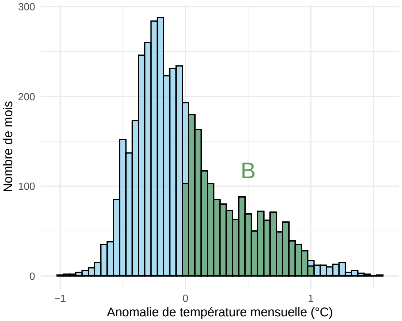
- $\Omega = \{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF\}$
- $X : \Omega \to [\![0, 3]\!]$ le nombre de piles

ω	$\mathbb{P}(\{\omega\})$	$X(\omega)$ *(noté k)*	$\mathbb{P}_X(\{k\})$
PPP	1/8	3	1/8
PPF	1/8		
PFP	1/8	2	3/8
FPP	1/8		
PFF	1/8		
FPF	1/8	1	3/8
FFP	1/8		
FFF	1/8	0	1/8



Exemple de loi (réelle)

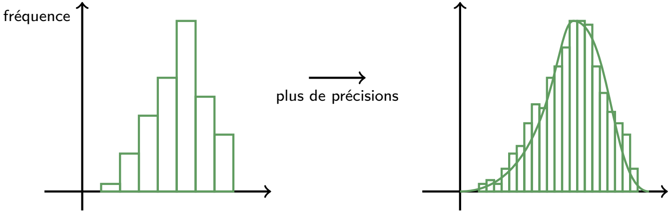
Sur l'exemple de la température moyenne à la surface de la Terre, avec $X : \Omega \to \mathbb{R}$ qui donne l'anomalie de température en řC.



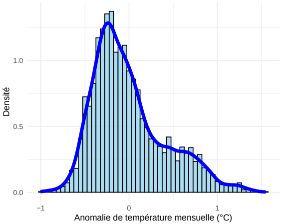
On sent bien que l'histogramme donne une bonne information sur la loi de X :

$$\mathbb{P}_X(B) \approx \frac{\text{aire des barres vertes}}{\text{aire totale des barres}}$$

De l'histogramme à la densité



Quand le nombre de données devient infiniment grand et la largeur des barres devient infiniment petites, l'histogramme se rapproche de la **densité de probabilité**.



Densité

Définition : densité

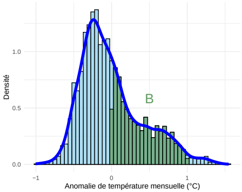
On dit qu'une variable aléatoire réelle $X : \Omega \to \mathbb{R}$ admet une **densité de probabilité** (ou densité), s'il existe une fonction $f_X : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ telle que :

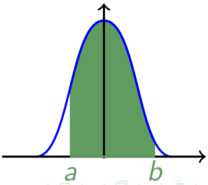
- $\int_{\mathbb{R}} f_X(x)dx < +\infty$
- pour tout intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$, on a $\mathbb{P}_X([a, b]) = \int_a^b f_X(x)dx$

f_X est appelée la **densité de probabilité** de X.

Remarques :

- $\int_{\mathbb{R}} f_X(x)dx = \mathbb{P}_X(\mathbb{R}) = 1$
- f_X est nulle en dehors du domaine d'arrivée de X.
- Une variable aléatoire discrète n'admet pas de densité.





Fonction de répartition

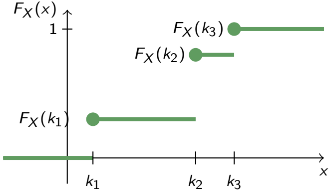
Définition : fonction de répartition

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire (réelle, éventuellement discrète). La **fonction de répartition** de X est la fonction $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ définie par :

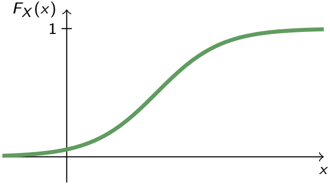
$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq x\}) = \mathbb{P}_X(]-\infty, x])$$

Exemples :

Fonction de répartition $F_X(x)$ (discrète)



Fonction de répartition $F_X(x)$ (continue)



Propriétés de la fonction de répartition

1. F_X est croissante.
2. F_X est continue à droite.
3. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.
4. $\mathbb{P}(a \leq X < b) = F_X(b) - F_X(a)$.

Variable aléatoire discrète

4. $F_X(x) = \sum_{k \leq x} \mathbb{P}(X = k)$
5. F_X est une fonction en escalier (constante par morceaux)
6. $\mathbb{P}(X = k) = F_X(k) - F_X(k-1)$

Variable aléatoire réelle

4. Si X est à densité, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$
5. Si X est à densité, F_X est continue
6. $\mathbb{P}(X = x) = F_X(x) - \lim_{t \to x^-} F_X(t)$
   Si X est à densité, alors $\mathbb{P}(X = x) = 0$
7. Si X est à densité, $f_X(x) = F'_X(x)$ en tout point où F_X est dérivable

Moments d'ordre r

Définition : moment d'ordre r (v.a. discrète)

Soit X une variable aléatoire discrète. Son **moment d'ordre** r est défini par :

$$\mathbb{E}[X^r] = \sum_{k \in \mathbb{N}} k^r \, \mathbb{P}(X = k)$$

Définition : moment d'ordre r (v.a. réelle)

Soit X une variable aléatoire réelle. Son **moment d'ordre** r est défini par :

$$\mathbb{E}[X^r] = \int_{\mathbb{R}} x^r \, f_X(x) \, dx$$

Remarque : On ne peut parler de moment d'ordre r que si la somme $\sum_{k \in \mathbb{N}} |k^r| \, \mathbb{P}(X = k)$ (respectivement l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} |x^r| \, f_X(x) \, dx$) est finie. Ce sera en général le cas dans le cadre de ce cours.

Exemple : La v.a. définie par $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = \frac{6}{\pi^2 k^2}$ n'admet pas de moment d'ordre 1.

En effet, on a bien $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{6}{\pi^2 k^2} = 1$, mais $\sum_{k \in \mathbb{N}} k \times \frac{6}{\pi^2 k^2} = \frac{6}{\pi^2} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k} = +\infty$.

Espérance

Définition : espérance

Soit X une variable aléatoire, l'**espérance** de X est le moment d'ordre 1 de X :

- Si X est discrète : $\mathbb{E}[X] = \sum_{k \in \mathbb{N}} k \, \mathbb{P}(X = k)$
- Si X est réelle : $\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x \, f_X(x) \, dx$

Remarque : L'espérance est la valeur moyenne que l'on peut espérer du résultat de X.

Propriétés : Soient X et Y deux variables aléatoires.

- Linéarité : $\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$
- Monotonie : Si $X \leq Y$, alors $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$
- Si X est constante égale à $c \in \mathbb{R}$ (i.e. $\forall \omega \in \Omega$, $X(\omega) = c$), alors $\mathbb{E}[X] = c$

Théorème de transfert

Théorème de transfert

Soit X une variable aléatoire et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.

- Si X est discrète et si $\sum_{k\in\mathbb{N}} |g(k)|\,\mathbb{P}(X = k) < +\infty$, alors

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{k\in\mathbb{N}} g(k)\,\mathbb{P}(X = k)$$

- Si X est réelle et si $\int_{\mathbb{R}} |g(x)|\, f_X(x)\, dx < +\infty$, alors

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x)\, f_X(x)\, dx$$

Exemple

- Expérience :
  La participation au jeu coûte 10.
  Le joueur mise m euros et lance 3 fois une pièce. Sa mise est doublé à chaque fois que le joueur obtient pile. S'il n'obtient aucune fois pile, il ne gagne rien.

  A partir de quelle mise m le jeu est-il favorable au joueur ?

Exemple

- Expérience : La participation au jeu coûte 10. Le joueur mise m euros et lance 3 fois une pièce. Sa mise est doublé à chaque fois que le joueur obtient pile. S'il n'obtient aucune fois pile, il ne gagne rien. *A partir de quelle mise m le jeu est-il favorable au joueur ?*
- Variables aléatoires :
  - $X : \Omega \to [\![0, 3]\!]$ le nombre de piles obtenues.
  - $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ le gain du joueur.
  - $Y = g(X)$ avec $g(x) = \begin{cases} -10 & \text{si } x = 0 \\ -10 + m \times 2^{x-1} & \text{si } x \in \{1, 2, 3\} \end{cases}$
- Espérance du gain :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[g(X)] &= \sum_{k=0}^{3} g(k)\,\mathbb{P}(X = k) \\ &= -10 \times \frac{1}{8} + (-10 + m) \times \frac{3}{8} + (-10 + 2m) \times \frac{3}{8} + (-10 + 4m) \times \frac{1}{8} \\ &= -10 + m\left(\frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 4 \times \frac{1}{8}\right) \\ &= -10 + \frac{13m}{4} \end{aligned}$$

- Réponse : $\mathbb{E}[Y] \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{40}{13} \approx 3.08$

Variance et écart-type

Définition : variance et écart-type

Soit X une variable aléatoire, qui admet un moment d'ordre 2 (i.e. $\mathbb{E}[X^2] < +\infty$). La **variance** de X est définie par :

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right]$$

L'**écart-type** de X est défini par : $\sigma_X = \sqrt{\mathbb{V}[X]}$.

Remarque :

- Variance et écart-type sont toujours positifs ou nuls.
- Ils mesurent la dispersion des valeurs prises par X autour de son espérance.

Propriétés : Soient X et Y deux variables aléatoires.

- $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$
- $\mathbb{V}[aX + b] = a^2\mathbb{V}[X]$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$.
- Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathbb{V}[X + Y] = \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y]$.

Variable aléatoire centrée réduite

Définitions : variable centréee réduite

Soit X une variable aléatoire, qui admet un moment d'ordre 1.

- X est dite **centrée** si $\mathbb{E}[X] = 0$.
- X est dite **réduite** si $\mathbb{V}[X] = 1$.

Remarque :
Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et d'écart-type σ.

- La variable $X - \mu$ est centrée.
- La variable $\frac{X}{\sigma}$ est réduite.
- La variable $\frac{X-\mu}{\sigma}$ est centrée réduite.

Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$

Définition : loi de Bernoulli

Soit $p \in [0,1]$. Une variable aléatoire X suit la **loi de Bernoulli de paramètre** p, notée $X \sim \mathcal{B}(p)$, si :

$$X : \Omega \to \{0,1\} \quad \text{, avec}$$

$$\mathbb{P}_X(1) = \mathbb{P}(X=1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_X(0) = \mathbb{P}(X=0) = 1-p$$

Remarque : La loi de Bernoulli permet de modéliser des expériences aléatoires à deux issues (succès/échec), comme le lancer d'une pièce de monnaie, ou le fait de voir un événement A se réaliser ou non.

Propriétés :

- $\mathbb{E}[X] = p$
- $\mathbb{E}[X^2] = p$
- $\mathbb{V}[X] = p(1-p)$

Loi uniforme discrète $\mathcal{U}(x_1, \ldots, x_n)$

Définition : loi uniforme discrète

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Une variable aléatoire X suit la **loi uniforme discrète sur** $\{x_1, \ldots, x_n\}$, notée $X \sim \mathcal{U}(x_1, \ldots, x_n)$, si :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_X : \{x_1, \ldots, x_n\} &\to [0, 1] \\ x &\mapsto \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Remarque : La loi uniforme permet de modéliser des expériences aléatoires à n issues possibles équiprobables, comme le lancer d'un dé à n faces.

Propriétés : Si pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a $x_i = i$, alors :

- $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)/2}{n} = \frac{n+1}{2}$
- $\mathbb{E}[X^2] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)/6}{n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{n^2-1}{12}$

Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

Définition : loi binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$. Une variable aléatoire X suit la **loi binomiale de paramètres n et p**, notée $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, si :

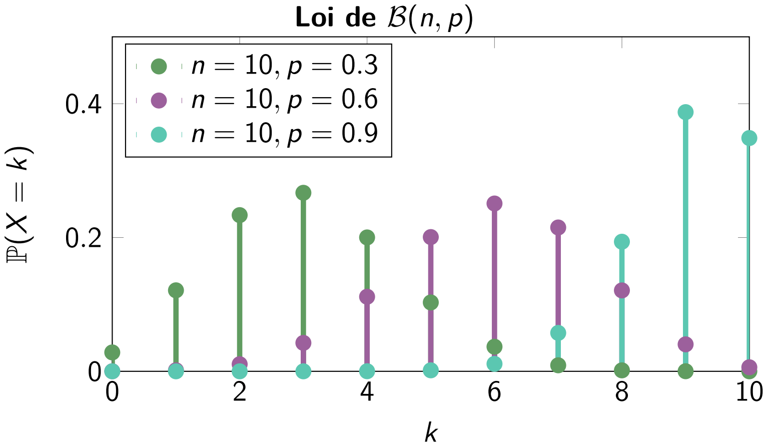
$$\begin{aligned}\mathbb{P}_X : \{0,1,\dots,n\} &\to [0,1] \\ k &\mapsto \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\end{aligned}$$

Remarque : La loi de binomiale permet de modéliser le nombre de succès dans n expériences aléatoires indépendantes de Bernoulli, chacune ayant une probabilité de succès p.

Propriétés :

- $\mathbb{E}[X] = np$
- $\mathbb{E}[X^2] = np + n(n-1)p^2$
- $\mathbb{V}[X] = np(1-p)$

Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$



Loi géométrique $\mathcal{G}(p)$

Définition : loi géométrique

Soit $p \in [0,1]$. Une variable aléatoire X suit la **loi géométrique de paramètre** p, notée $X \sim \mathcal{G}(p)$, si :

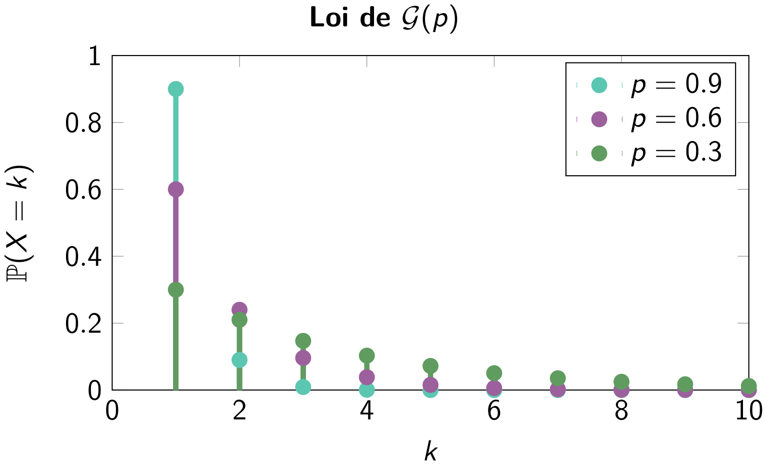
$$\begin{aligned} \mathbb{P}_X : \mathbb{N}^* &\to [0,1] \\ k &\mapsto p(1-p)^{k-1} \end{aligned}$$

Remarque : La loi géométrique permet de modéliser le nombre de tentatives pour obtenir un premier succès dans une suite d'expériences de Bernoulli indépendantes et de paramètre p.

Propriétés :

- $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}$
- $\mathbb{E}[X^2] = \frac{2-p}{p^2}$
- $\mathbb{V}[X] = \frac{1-p}{p^2}$

Loi géométrique $\mathcal{G}(p)$



Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

Définition : loi de Poisson

Soit $\lambda > 0$. Une variable aléatoire X suit la **loi de Poisson de paramètre** λ, notée $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, si :

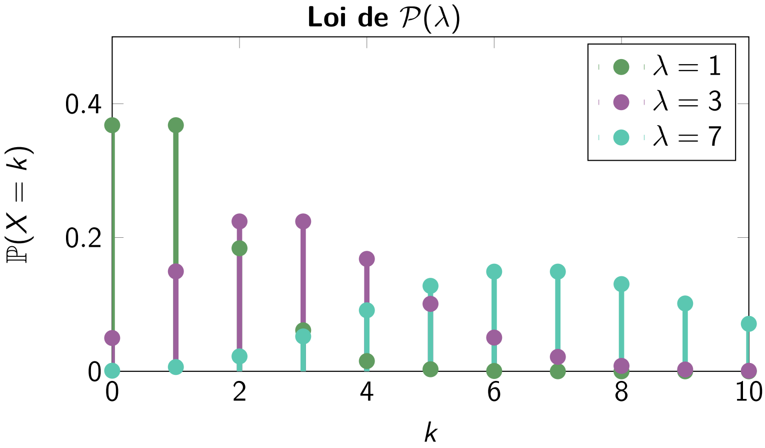
$$\begin{aligned} \mathbb{P}_X : \mathbb{N} &\to [0,1] \\ k &\mapsto \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \end{aligned}$$

Remarque : La loi de Poisson permet de modéliser des expériences aléatoires où l'on compte le nombre d'événements se produisant dans un intervalle fixe de temps ou d'espace, avec un taux moyen d'occurrence λ (par exemple, le nombre d'oiseaux observés pendant une durée donnée, le nombre de coquilles dans un cours, etc.).

Propriétés :

- $\mathbb{E}[X] = \lambda$
- $\mathbb{E}[X^2] = \lambda(1+\lambda)$
- $\mathbb{V}[X] = \lambda$

Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$



Loi uniforme $\mathcal{U}(a, b)$

Définition : loi uniforme

Soit $a < b$. Une variable aléatoire X suit la **loi uniforme sur l'intervalle** $[a, b]$, notée $X \sim \mathcal{U}(a, b)$, si :

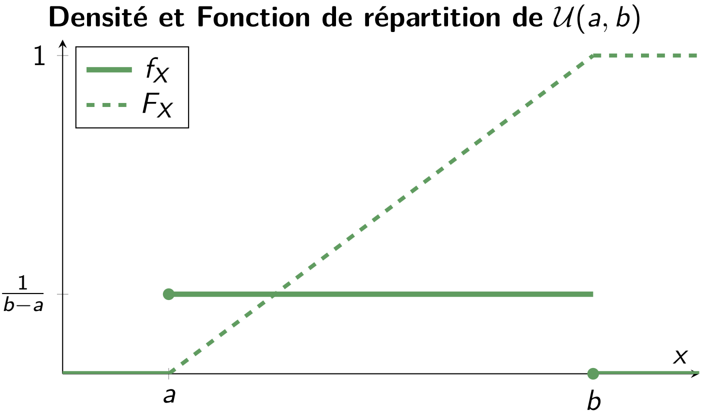
$$f_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$$
$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{si } x > b \end{cases}$$

Remarque : La loi uniforme permet de modéliser des expériences aléatoires où tous les résultats dans un intervalle donné sont également probables.

Propriétés :

- $\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}$
- $\mathbb{E}[X^2] = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$
- $\mathbb{V}[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$
- $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$

Loi uniforme $\mathcal{U}(a, b)$



Loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$

Définition : loi exponentielle

Soit $\lambda > 0$. Une variable aléatoire X suit la **loi exponentielle de paramètre** λ, notée $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, si :

$$\begin{aligned} f_X : \mathbb{R} &\to [0,1] \\ x &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

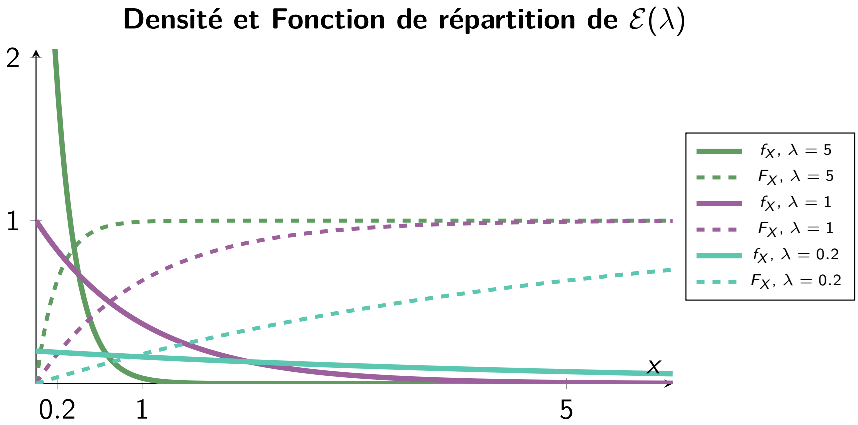
Remarque : La loi exponentielle permet de modéliser la durée de vie d'un phénomène *sans mémoire*, comme la durée de vie d'un produit, le temps avant l'arrivée d'une nouvelle personne dans une file d'attente, etc.

Propriétés :

- $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$
- $\mathbb{E}[X^2] = \frac{2}{\lambda^2}$
- $\mathbb{V}[X] = \frac{1}{\lambda^2}$

- $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$



Loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Définition : loi normale

Soit $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. Une variable aléatoire X suit la **loi normale** (ou gaussienne) **de moyenne** μ **et de variance** σ^2, notée $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, si :

$$f_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$$
$$x \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Remarque : La loi normale permet de modéliser des expériences aléatoires courantes, comme la taille des individus dans une population, les erreurs de mesure, etc.

Propriétés :

- $\mathbb{E}[X] = \mu$
- $\mathbb{E}[X^2] = \mu^2 + \sigma^2$
- $\mathbb{V}[X] = \sigma^2$

- F_X n'a pas d'expression analytique simple.
- Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $Y = aX + b \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.
- Si $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ avec $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$