Chapitre 5

Oscillateur harmonique

« Nous ne deviendrons mathématiciens, même en connaissant par cœur toutes les démonstrations des autres, si notre esprit n'est pas en même temps capable de résoudre n'importe quel problème. (...) dans ce cas, en effet, ce ne sont point des sciences que nous aurons apprises, semble-t-il, mais de l'histoire. »
R. Descartes, *in* Règles pour la direction de l'esprit, III.

5.1 Oscillateur non amorti

5.1.1 Exemple type : l'oscillateur élastique

On considère le mouvement d'une masse supposée ponctuelle repérée par le point M, pendue à un ressort vertical de raideur k et de longueur au repos ℓ_0. Le système constitué de la masse est soumis à deux forces verticales : le poids $\overrightarrow{P}$ et la tension de rappel élastique du ressort $\overrightarrow{T}$. On néglige les forces de frottement. Toutes les forces sont orientées suivant l'axe vertical $\vec{u}_z$, dirigé vers le bas. En se plaçant dans le référentiel terrestre supposé galiléen, le principe fondamental de la dynamique (PFD) s'écrit $\overrightarrow{P} + \overrightarrow{T} = m\overrightarrow{a}$.

À l'équilibre ($\ddot{z} = 0$), le mobile se trouve à l'origine du repère ($z = 0$) et le poids du mobile conduit à un allongement $\Delta\ell$ du ressort, de sorte que le PFD donne la relation

$$mg - k\Delta\ell = 0$$

En utilisant cette relation, le PFD se réécrit pour tout z

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

On retrouve l'équation du pendule élastique horizontal : c'est une équation différentielle linéaire du deuxième ordre, sans second membre.

L'équation (5.1.1) fait intervenir une pulsation caractéristique, appelée *pulsation propre* de l'oscillateur.

5.1.2 Mouvement d'un oscillateur

Il sera démontré dans ce qui suit que l'équation (5.1.1) admet des solutions de la forme

$$z(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t \Leftrightarrow z(t) = C\cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Les deux notations sont complètement équivalente et l'on passe de l'une à l'autre en posant :

$$\begin{cases} C &= A^2 + B^2 \\ \tan\varphi &= \dfrac{B}{A}. \end{cases}$$

DÉFINITION :
Un système dont l'état peut être décrit par une variable x vérifiant $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ est appelé *oscillateur harmonique*.

5.2 Oscillateur amorti

5.2.1 Équation du mouvement

On considère maintenant un ressort horizontal auquel est attaché un mobile de masse m qui glisse sans frottement solide sur un support horizontal. Le mobile est soumis à la force de frottement fluide $\overrightarrow{f} = -\alpha\vec{v}$ ($\alpha > 0$). Le nouveau bilan de force exprimé dans le repère $(O;\vec{u}_x,\vec{u}_z)$, où O est la position du mobile à l'équilibre (ressort au repos) est

$$\overrightarrow{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}, \overrightarrow{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ R_n \end{pmatrix}, \overrightarrow{T} = \begin{pmatrix} -kx \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{f} = \begin{pmatrix} -\alpha\dot{x} \\ 0 \end{pmatrix},$$

La projection du PFD suivant $\vec{u}_x$ donne la nouvelle équation du mouvement :

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Cette équation admet des solutions de la forme $x(t) = e^{r_i t}$ où r_i est une racine du polynôme caractéristique :

$$r^2 + \frac{\alpha}{m}r + \frac{k}{m} = 0 \tag{5.1}$$

Il convient de distinguer trois cas suivant le signe du discriminant $\Delta = \frac{\alpha^2}{m^2} - 4\frac{k}{m}$:

- $\Delta < 0$
- $\Delta = 0$
- $\Delta > 0$

Chacun de ces trois cas correspond à un régime du mouvement et lui est associée une forme spécifique de solution.

5.2.2 Amortissement faible ($\Delta < 0$)

Expression de la solution

Les solutions du polynôme caractéristique (5.1) sont $r_{1,2} = -\frac{\alpha}{2m} \pm i\omega$, avec $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\alpha^2}{4m^2}}$. Les solutions $x(t)$ de l'équation du mouvement (5.2.1) s'écrivent donc comme combinaisons linéaires de $x_1 = e^{r_1 t}$ et $x_2 = e^{r_2 t}$:

$$\begin{aligned} \exists A', B' \in \mathbb{C},\ x(t) &= A' e^{r_1 t} + B' e^{r_2 t} \\ &= e^{-\frac{\alpha}{2m}t}\left(A' e^{i\omega t} + B' e^{-i\omega t}\right) \\ &= e^{-\frac{\alpha}{2m}t}\left(A' \cos\omega t + iA' \sin\omega t + B' \cos\omega t - iB' \sin\omega t\right). \end{aligned}$$

L'équation admet donc une infinité de solutions dans $\mathbb{C}$. Or, le problème physique n'admet que des solutions réelles. Cela impose une condition de plus sur les constances complexes A' et B' :

$$x(t) \in \mathcal{R} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} A' + B' & \in & \mathbb{R} \\ iA' + iB' & \in & \mathbb{R} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{I}m(A') + \mathcal{I}m(B') & = & 0 \\ \mathcal{R}e(A') - \mathcal{R}e(B') & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow B' = (A')^*$$

En conséquence, en posant $A = 2\mathcal{R}e(A')$ et $B = 2\mathcal{I}m(B')$, la solution de (5.2.1) devient

$$x(t) = e^{-\frac{\alpha}{2m}t}\left(A\cos\omega t + B\sin\omega t\right), \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Étude du mouvement

Fixons arbitrairement les conditions initiales :

$$x(0) = x_m$$

$$\dot{x}(0) = 0.$$

La solution de (5.2.1) vérifiant ces conditions initiales s'écrit

$$x(t) = x_m e^{-\frac{\alpha}{2m}t}\left(\cos\omega t + \frac{\alpha}{2m\omega}\sin\omega t\right)$$

Cette fonction n'est plus une solution périodique, car $x(t+2\pi/\omega) \neq x(t)$, mais il reste possible de définir une *pseudo-période* :

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\alpha^2}{4m^2}} < \omega_0$$

Il est clair que si le frottement tend à disparaître, la pseudo-pulsation tend vers la pulsation propre de l'oscillateur libre. À l'inverse, si α augmente, la pseudo-pulsation tend vers 0 (pseudo-période infinie).

La limite est atteinte lorsque le coefficient de frottement fluide prend la valeur critique $\alpha_c = \sqrt{4m^2\omega_0^2}$; on parle alors de régime critique. Ce régime sera traité dans la sous section 5.2.4.

Étude énergétique de l'oscillateur amorti

L'énergie mécanique du système s'écrit à une constante près

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

L'évolution temporelle de E_m est donnée par sa dérivée par rapport au temps :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{2}\left(2m\ddot{x}\dot{x} + 2k\dot{x}x\right) \\
&= (m\ddot{x} + kx)\dot{x} \\
&= -\alpha\dot{x}^2 \quad \text{d'après (5.2.1)} \\
&= \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{v} \\
&= \mathscr{P}(t), \quad \text{par définition}
\end{aligned}$$

L'énergie mécanique n'est pas constante : le système n'est donc pas mécaniquement isolé. La variation d'énergie mécanique est négative : le système perd de l'énergie. La puissance est dissipée par la force de frottement fluide.

Par ailleurs, on peut s'intéresser à la variation de l'énergie pour un déplacement élémentaire $\mathrm{d}x$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{2}\left(2\dot{x}\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}x} + 2kx\right) \\
&= m\dot{x}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}x\mathrm{d}t} + kx \\
&= m\ddot{x} + kx \\
&= -\alpha\dot{x}.
\end{aligned}$$

Autrement dit la variation $\mathrm{d}E_m$ de l'énergie potentielle pour un déplacement $\mathrm{d}x$ est égale à $\overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}x\vec{u}_x$ le travail de la force de frottement sur ce déplacement.

5.2.3 Amortissement fort : régime apériodique ($\Delta > 0$)

Les solutions du polynôme caractéristique (5.1) sont $r_{1,2} = -\frac{\alpha}{2m} \pm \omega$, avec $\omega = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4m^2} - \omega_0^2}$. Les solutions $x(t)$ de l'équation du mouvement (5.2.1) s'écrivent donc comme combinaisons linéaires de $x_1 = e^{r_1 t}$ et $x_2 = e^{r_2 t}$:

$$\begin{aligned}
\exists A', B' \in \mathbb{C},\, x(t) &= A'e^{r_1 t} + B'e^{r_2 t} \\
&= e^{-\frac{\alpha}{2m}t}\left(A'e^{\omega t} + B'e^{-\omega t}\right) \\
&= e^{-\frac{\alpha}{2m}t}\left((A'+B')\frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2} + (A'-B')\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2}\right) \\
&= e^{-\frac{\alpha}{2m}t}\left(A\cosh\omega t + B\sinh\omega t\right).
\end{aligned}$$

Les constantes A et B sont déterminées par les conditions initiales sur x et sur $\dot{x}$.

5.2.4 Régime critique ($\Delta = 0$)

La condition $\Delta = 0$ implique $\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m} = \frac{\alpha^2}{4m^2}$. Le polynôme caractéristique (5.1) admet une racine double $r_1 = r_2 = -\omega_0$. On ne dispose pas cette fois de deux solutions indépendantes, et on ne peut donc pas procéder comme précédemment pour connaître la forme générale de la solution de (5.2.1).

En tenant compte du fait que $\Delta = 0 \Rightarrow \frac{\alpha}{m} = 2\omega_0$, on réécrit l'équation du mouvement (5.2.1) :

$$(\ddot{x} + \omega_0\dot{x}) + \omega_0(\dot{x} + \omega_0 x) = 0 \tag{5.2}$$

et l'on introduit la fonction

$$Y(t) = \dot{x}(t) + \omega_0 x(t). \tag{5.3}$$

L'équation (5.2) s'exprime alors en fonction de Y :

$$\dot{Y} + \omega_0 Y = 0.$$

Il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre sans second membre dont les solutions ont la forme $Y(t) = Ae^{-\omega_0 t}$, $A \in \mathbb{R}$. Grâce à cette expression explicite de Y, il est possible de calculer $x(t)$ en résolvant l'équation différentielle du premier ordre avec second membre (5.3) qui se réécrit :

$$\dot{x} + \omega_0 x = Ae^{-\omega_0 t},\, A \in \mathbb{R} \tag{5.4}$$

L'équation (5.4) admet des solutions de la forme $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ où $x_h(t) = Ce^{-\omega_0 t}$, $C \in \mathbb{R}$ est la solution homogène (de l'équation sans second membre) et $x_p(t) = A \times te^{-\omega_0 t}$, $A \in \mathbb{R}$ est la solution particulière au second membre est obtenue par variation de la constante. Finalement, toutes les solutions de l'équation (5.2.1) s'expriment

$$x(t) = (At + C)e^{-\omega_0 t},\, A, C \in \mathbb{R}$$

À titre de comparaison, différents régimes apériodiques sont présentés dans la figure 5.1.

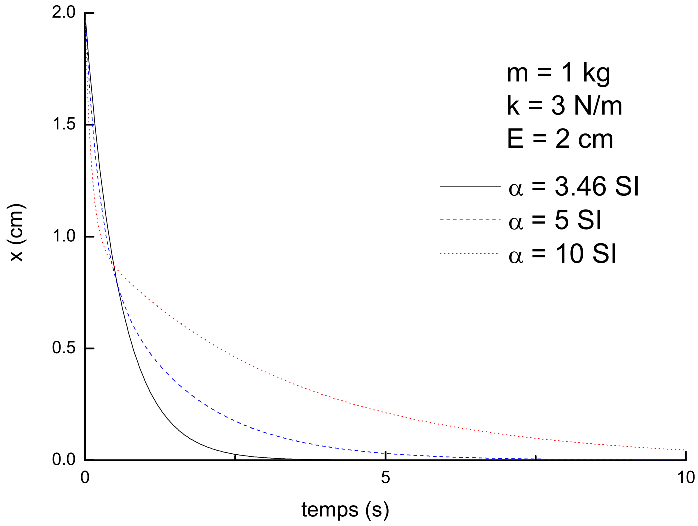


FIGURE 5.1 – Illustration des différents régimes apériodiques.

5.3 Oscillateur forcé

5.3.1 Position du problème

On considère un ressort de raideur k et de longueur au repos ℓ_0. Un mobile de masse m (assimilable à une masse ponctuelle) glissant sans frottement solide est attaché à l'extrémité du ressort. On étudie le mouvement de ce mobile dont la position est repérée sur l'axe du mouvement par $x(t)$. On se place dans un *référentiel galiléen* dans lequel le principe fondamental de la dynamique s'applique. Le système est soumis à son poids et la réaction normale du support (pas de frottement solide) qui sont verticales et se compensent. S'appliquent également une force de frottement fluide $\overrightarrow{f} = -\alpha\dot{x}\vec{u}_x$ et la tension de rappel élastique du ressort $\overrightarrow{T} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_x$.

Expression de la longueur du ressort La longueur du ressort est comptée à partir de sa base P qui est animée d'un mouvement $\overline{O'P} = X(t)$ imposé par un générateur mécanique. La longueur algébrique du ressort s'écrit :

$$\ell = \overline{PM}$$

Lorsque le générateur est éteint ($X(t) = 0, \forall t$), et que le système est à l'équilibre, le mobile se trouve à l'origine du repère d'étude et la longueur du ressort s'exprime

$$P \equiv O', M \equiv O \Longrightarrow \ell \equiv \overline{PM} = \overline{O'O} \equiv \ell_0.$$

Lorsque le générateur est éteint mais que le mobile oscille, le ressort subit un allongement algébrique δ_ℓ :

$$P \equiv O' \Longrightarrow \ell \equiv \overline{PM} = \overline{O'O} + \overline{OM}.$$

Lorsque le générateur est en fonction, la longueur du ressort est déterminée par

$$\ell \equiv \overline{PM} = \overline{PO'} + \overline{O'O} + \overline{OM} \equiv -X(t) + \ell_0 + x(t)$$

On en déduit l'expression générale de la tension de rappel élastique du ressort :

$$\overrightarrow{T} \equiv -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_x = -k\left[x(t) - X(t)\right]\vec{u}_x$$

Finalement l'équation du mouvement est donnée par le PFD projeté sur l'axe de $\vec{u}_x$:

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = kX \tag{5.5}$$

Cette équation fait apparaître la force excitatrice $\overrightarrow{F_e} = kX(t)\vec{u}_x$. On admettra que le choix de l'excitation sinusoïdale ne fait pas perdre de généralité au raisonnement.

5.3.2 Résolution de l'équation du mouvement pour une excitation sinusoïdale

On associe à l'excitation $X(t)$ une grandeur complexe $\underline{X}$:

$$X(t) = E\cos\omega t \longrightarrow \underline{X} = E(\cos\omega t + i\sin\omega t) \equiv Ee^{i\omega t}$$

On définit de même le complexe $\underline{x}$, qui vérifie l'équation

$$m\ddot{\underline{x}} + \alpha\dot{\underline{x}} + k\underline{x} = k\underline{X}. \tag{5.6}$$

qui peut s'écrire encore

$$\begin{aligned} m\mathfrak{Re}(\ddot{\underline{x}}) + \alpha\mathfrak{Re}(\dot{\underline{x}}) + k\mathfrak{Re}(\underline{x}) &= k\mathfrak{Re}(\underline{X}) \\ m\mathfrak{Im}(\ddot{\underline{x}}) + \alpha\mathfrak{Im}(\dot{\underline{x}}) + k\mathfrak{Im}(\underline{x}) &= k\mathfrak{Im}(\underline{X}). \end{aligned}$$

On voit donc immédiatement que le mouvement est décrit par $x(t) = \Re e(\underline{x})$. Comme pour l'excitation, on a ainsi associé à la réponse du système $x(t)$une grandeur complexe $\underline{x}$:

$$x(t) = E\cos(\omega t + \varphi) \longrightarrow \underline{X} = E\left[\cos(\omega t + \varphi) + i\sin(\omega t + \varphi)\right] \equiv Ee^{i(\omega t+\varphi)}$$

où l'on identifie φ comme le déphasage de la réponse par rapport à l'excitation.

En remarquant que $\dot{\underline{x}} = i\omega\underline{x}$ et $\ddot{\underline{x}} = (i\omega)^2\underline{x}$, on réécrit l'équation (5.6)

$$-m\omega^2\underline{x} + i\alpha\omega\underline{x} + k\underline{x} = k\underline{X}, \tag{5.7}$$

dont la solution est

$$\underline{x} = \frac{k\underline{X}}{k - m\omega^2 + i\alpha\omega},$$

c'est-à-dire en utilisant la représentation exponentielle

$$\underline{x} = ae^{i(\omega t+\varphi)}, \text{ avec } \begin{cases} a(\omega) &= \dfrac{kE}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \alpha^2\omega^2}}, \\ \\ \varphi &\equiv \operatorname{Arg}(\underline{x}) - \operatorname{Arg}(\underline{X}) = \arctan\left(-\dfrac{\omega\alpha}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\right) \end{cases}$$

5.3.3 Résonance de vitesse

De même qu'on a associé à la position $x(t)$ une expression complexe $\underline{x} = ae^{j(\omega t+\varphi)}$, $(a \in \mathbb{R})$, on peut associer à la vitesse $v(t)$ son expression complexe :

$$\begin{aligned} \underline{v} &= \frac{\mathrm{d}\underline{x}}{\mathrm{d}t} \\ &= j\omega \times ae^{j(\omega t+\varphi)} \\ &= j\omega\underline{x} \end{aligned}$$

Puisque $\underline{x}$ vérifie l'équation (5.7), $\underline{v}$ vérifie l'équation

$$j\omega m\underline{v} + \alpha\underline{v} + \frac{1}{j\omega}k\underline{v} = k\underline{X},$$

dont la solution est obtenue directement

$$\underline{v} = \frac{k\underline{X}}{\alpha + j\left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)}$$

Pour la suite, on pose

$$\underline{v} = Ve^{j(\omega t+\phi)} \Rightarrow \begin{cases} V &= |\underline{v}| \\ \\ \phi &= \operatorname{Arg}(\underline{v}) - \operatorname{Arg}(\underline{X}) \end{cases}$$

respectivement le module de la vitesse complexe et le déphasage de la vitesse par rapport à l'excitation.

5.3.4 "Résonance" d'amplitude

Nous avons dans la sous-section 5.3.2 vu que l'expression complexe de la solution de l'équation de l'oscillateur forcé s'écrit

$$\underline{x} = ae^{i(\omega t+\varphi)}, \text{ avec } \begin{cases} a(\omega) &= \dfrac{kE}{\sqrt{m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2+\alpha^2\omega^2}}, \\ \\ \varphi &\equiv \mathrm{Arg}(\underline{x}) - \mathrm{Arg}(\underline{X}) = \arctan\left(-\dfrac{\omega\alpha}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\right) \end{cases}$$

Étude de l'amplitude

Lorsque ω tend vers zéro, l'amplitude tend vers $a(0) = E$.

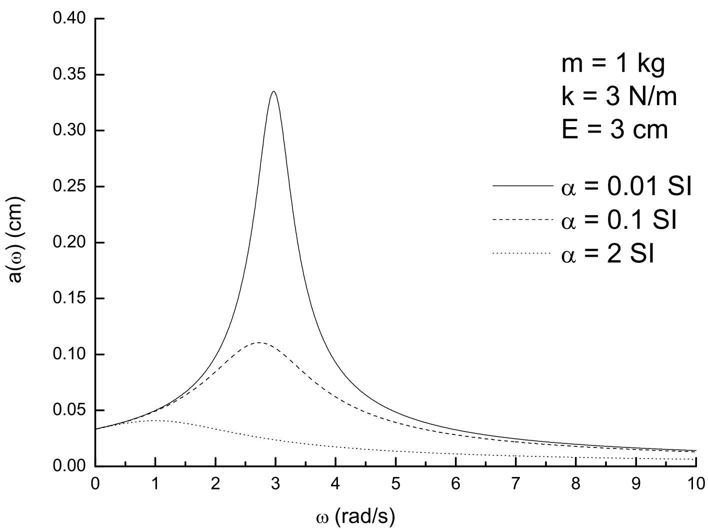
Lorsque ω tend vers $+\infty$, l'amplitude tend vers 0 par les valeur positives.

La dérivée de a s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\omega} = \frac{2kE\left[\alpha^2\omega - 2m^2\omega(\omega_0^2-\omega^2)\right]}{\left(m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2+\alpha^2\omega^2\right)^{-3/2}}$$

et s'annule pour $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\alpha^2}{2m^2}}$. L'amplitude étant définie positive, et ayant une limite nulle, cet extrémum ne peut être qu'un maximum.

Ce maximum est voisin de la pulsation propre de l'oscillateur – d'autant plus que les frottements sont faibles – mais à la différence de la résonance de vitesse, il dépend également de α. Pour un même oscillateur, la pulsation pour laquelle se produit le maximum d'amplitude varie suivant un paramètre extérieur à l'oscillateur lui-même. Il ne s'agit donc pas d'un phénomène de résonance à proprement parler.


m = 1 kg
k = 3 N/m
E = 3 cm
α = 0.01 SI
α = 0.1 SI
α = 2 SI
a(ω) (cm)
ω (rad/s)
0.40
0.35
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10