Méthodes pour la Physique en licence

Des outils pour l'auto-correction

J. Scola

Département des Sciences Physiques
Université Paris-Saclay, UVSQ

MTMP100 – Méthodologie pour la Physique

Grandeur physique

Une *grandeur physique* est la propriété d'un phénomène, d'un corps ou d'une substance, que l'on peut exprimer quantitativement sous forme d'un nombre et d'une référence appelée unité. La mesure d'une grandeur physique X peut donc toujours s'écrire sous la forme :

$$X = x \cdot X_1$$

avec x un réel et X_1 l'unité choisie pour évaluer la *grandeur* X.

Mesurer une grandeur physique X revient donc à la comparer à une autre grandeur X_0, de même nature et prise arbitrairement comme unité.

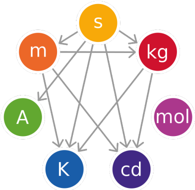
Quelques poids et mesures au XVIIIe siècle

villes	mesure de masse	équivalent en kg	mesure de volume	équivalent en litre
Paris & colonies	livre	0.4895	pinte	0.9313
	quintal	48.9506		
Bordeaux	livre	0.4895	pot	2.2648
	quintal	49.4400		
Marseille	livre	0.4084	pot	1.05073
	quintal	40.8431		
Londres	pound	0.4536	pint	0.4732
	hundredweigth	50.8023		
Lisbonne	árratel	0.4590	quartilhlo	0.3446
	quintal	58.7469		
Amsterdam	pond	0.4941	pint	0.6063
	centenaar	49.4094		
Curaçao	pond	0.4941	pint	0.6063
	centenaar	49.4094	gallon	3.7854
	libra	0.5313		
	quintal	53.1300		

Les équivalents métriques des poids et mesures du commerce colonial aux XVIIe et XVIIIe siècles, John J. McCusker, Outre-Mers. Revue d'histoire 224, pp. 349-365 (1974)

Grandeurs fondamentales

Harmonisation internationale depuis le XVIIIe siècle.
$\rightarrow$ Système International établi en 1960, redéfini en 2018.



Grandeur	Symbole de la grandeur	Unité (S.I.)	Symbole de l'unité
Longueur	L	mètre	m
Masse	M	kilogramme	kg
Temps	T	seconde	s
Intensité du courant électrique	I	ampère	A
Température	Θ	kelvin	K
Quantité de matière	N	mole	mol
Intensité lumineuse	J	candela	cd

Grandeurs physiques

Toute grandeur physique peut être exprimée en fonction des 7 grandeurs fondamentales.

$$[X] = L^a M^b T^c I^d \Theta^e N^f J^g,$$

où les exposants a, b, c, d, e, f, g sont des constantes réelles.

Règles à suivre

✘ Les deux membres d'une égalité doivent avoir la même dimension.
✘ La dimension d'un produit de grandeur est égale au produit des dimensions.
✘ Les termes d'une somme doivent avoir la même dimension.

Grandeurs pour l'optique

Exemples

- indice de réfraction (sans unité) :

$$
\begin{aligned}
n = \tfrac{c}{v} & \\
\Rightarrow [n] &= [c] \times [v] \\
&= LT^{-1} \times LT^{-1} \\
&= L^0 M^0 T^0 I^0 \Theta^0 N^0 J^0 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

- vergence (exprimée en dioptries) :

$$
\begin{aligned}
V = \tfrac{1}{f} \Rightarrow [V] &= \frac{1}{[f]} \\
&= L^{-1} M^0 T^0 I^0 \Theta^0 N^0 J^0 \\
&= L^{-1}
\end{aligned}
$$

UVSQ université PARIS-SACLAY UFR des Sciences CAMPUS DE VERSAILLES

Grandeurs pour la mécanique

Exemples

- vecteur position (dont la norme est exprimée en m) :

$$\begin{aligned}[\overrightarrow{OM}] &= \left[\|\overrightarrow{OM}\|\right] \\ &= L^1 M^0 T^0 I^0 \Theta^0 N^0 J^0 \\ &= L\end{aligned}$$

- vecteur vitesse (dont la norme est exprimée en m/s) :

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} \Rightarrow [\vec{v}] \begin{aligned}[t] &= \frac{\left[\mathrm{d}\overrightarrow{OM}\right]}{[\mathrm{d}t]} \\ &= L^1 M^0 T^{-1} I^0 \Theta^0 N^0 J^0 \\ &= LT^{-1}\end{aligned}$$

- vecteur accélération (dont la norme est exprimée en m/s^2) :

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2} \Rightarrow [\vec{a}] \begin{aligned}[t] &= \frac{[\mathrm{d}\vec{v}]}{[\mathrm{d}t]} \\ &= L^1 M^0 T^{-2} I^0 \Theta^0 N^0 J^0 \\ &= LT^{-2}\end{aligned}$$

Grandeurs pour la mécanique

Exemples

- vecteur force (dont la norme est exprimée en newtons) :

$$\begin{aligned} \vec{F} = m\vec{g} \Rightarrow [\vec{F}] &= [\|m\vec{g}\|] \\ &= L^1 M^1 T^{-2} I^0 \Theta^0 N^0 J^0 \\ &= LMT^{-2} \end{aligned}$$

- énergie (exprimée en joules) :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow [\mathcal{E}] &= \left[\frac{1}{2}mv^2\right] \\ &= 1M \times [v] \\ &= L^2 M^1 T^{-2} I^0 \Theta^0 N^0 J^0 \\ &= L^2 M^1 T^{-2} \end{aligned}$$

UVSQ université PARIS-SACLAY UFR des Sciences CAMPUS DE VERSAILLES

Exemple

- puissance (exprimée en watts) :

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v} \Rightarrow [\mathcal{P}] \begin{array}{cl} = & \left[\|\vec{F}\|\right] \times [\|\vec{v}\|] \\ = & LMT^{-2} \times LT^{-1} \\ = & L^2 M^1 T^{-3} I^0 \Theta^0 N^0 J^0 \\ = & L^2 M^1 T^{-3} \end{array}$$

Exercices d'application de l'analyse dimensionnelle

Exemples

1. L'équation horaire de la position d'un mobile soumis à l'accélération de la pesanteur g est exprimée sur une copie de la façon suivante :

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v0\sin(\theta t) + y0$$

Analysez la dimension de chacun des termes de l'équation pour détecter une erreur éventuelle.

2. La force d'attraction gravitationnelle qu'exerce un corps situé au point A et de masse m_A sur un corps situé au point B et de masse m_B s'exprime en fonction de la distance AB séparant les deux corps :

$$\overrightarrow{F}_{A\to B} = -\mathcal{G}\frac{m_A m_B}{AB^3}\overrightarrow{AB}$$

   - Quelle est la dimension de $\frac{\overrightarrow{AB}}{AB^3}$?
   - Déterminer la dimension de la constante gravitationnelle $\mathcal{G}$, puis son unité dans le système international.

Notation Scientifique

La valeur numérique d'une grandeur physique est un nombre décimal x qui doit être écrit dans la *notation scientifique*, suivi de l'unité :

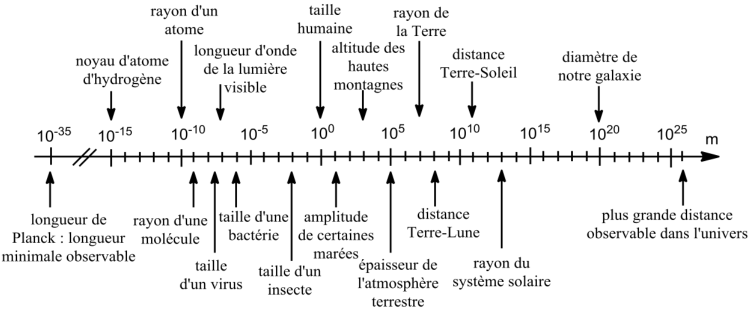
$$X = x \cdot X_1, \quad \text{avec} \quad x = \pm a \cdot 10^n$$

- a est un réel (la *mantisse* de x), $a \in [0; 1[$
- n est un entier relatif (l'*exposant* de x)

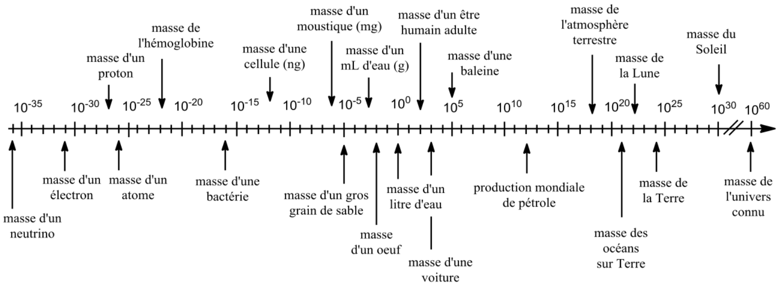
Cette notation hiérarchise l'information numérique :

- l'exposant n indique l'*ordre de grandeur* de x,
- la mantisse a permet de comparer deux grandeurs du même ordre de grandeur.

Ordre de grandeur des longueurs



Ordre de grandeur des masses



Notation des multiples de 10

Multiple	10^{-18}	10^{-15}	10^{-12}	10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}
Préfixe	atto	femto	pico	nano	micro	milli	centi	déci
Symbole	a	f	p	n	μ	m	c	d

Multiple	10^{1}	10^{2}	10^{3}	10^{6}	10^{9}	10^{12}	10^{15}	10^{18}
Préfixe	déca	hecto	kilo	méga	giga	téra	péta	exa
Symbole	da	h	k	M	G	T	P	E

Exemple

On considère deux corps de masse $m_1 = 61$ kg et $m_2 = 72$ kg à la surface de la Terre de masse $m_T = 5.992 \cdot 10^{24}$ kg. L'attraction gravitationnelle s'exerce entre m_T et m_1, entre m_T et m_2 et entre m_1 et m_2, soient trois forces dont on se propose de comparer les intensités. L'intensité de la force d'attraction gravitationnelle s'exprime (en newtons) :

$$\|\overrightarrow{F}_{A\to B}\| = \mathcal{G}\frac{m_A m_B}{AB^2}, \quad \mathcal{G} = 6.6742 \cdot 10^{-11}\mathrm{Nm}^2\mathrm{kg}^{-2}$$

On suppose les corps 1 et 2 distants de 1 m (distanciation physique oblige !) ; étant à la surface de la Terre, ils sont tous les deux séparés du centre de la Terre d'une distance égale au rayon de la Terre $R_T = 6371$ km.

Exemple

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{F}_{2\to1}\| &= 6.6742\cdot10^{-11}\,\frac{6.1\cdot10^{1}\times7.2\cdot10^{1}}{1^{2}}\\
&= (6.6742\times6.1\times7.2)\cdot10^{-11}\cdot10^{1}\cdot10^{1}\\
&= (6.6742\times6.1\times7.2)\cdot{\color{red}10^{-9}}\ \mathrm{N}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{F}_{T\to1}\| &= 6.6742\cdot10^{-11}\,\frac{6.1\cdot10^{1}\times5.992\cdot10^{24}}{(6.371\cdot10^{6})^{2}}\\
&= (6.6742\times\frac{6.1\times5.992}{6.371^{2}})\cdot10^{-11}\cdot\frac{10^{1}\cdot10^{24}}{(10^{6\times2})}\\
&= (6.6742\times\frac{6.1\times5.992}{6.371^{2}})\cdot{\color{red}10^{2}}\ \mathrm{N}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{F}_{T\to2}\| &= 6.6742\cdot10^{-11}\,\frac{7.2\cdot10^{1}\times5.992\cdot10^{24}}{(6.371\cdot10^{6})^{2}}\\
&= (6.6742\times\frac{7.2\times5.992}{6.371^{2}})\cdot10^{-11}\cdot\frac{10^{1}\cdot10^{24}}{(10^{6\times2})}\\
&= (6.6742\times\frac{7.2\times5.992}{6.371^{2}})\cdot{\color{red}10^{2}}\ \mathrm{N}
\end{aligned}$$

$$\|\overrightarrow{F}_{2\to1}\| \ll \|\overrightarrow{F}_{T\to1}\| \approx \|\overrightarrow{F}_{T\to2}\|$$

L'évaluation des parenthèses n'est pas nécessaire. Les ordres de grandeurs suffisent à établir que l'interaction gravitationnelle entre les corps 1 et 2 est négligeable devant celle qui s'exerce entre chacun d'entre eux et la Terre.

Pourquoi contrôler son résultat de calcul ?

- Pour ne pas écrire ou dire de choses fausses.
- Pour ne pas être contredit à tort.
- Pour passer à la question suivante en toute *confiance*.
- Pour se préparer à répondre à des questions auxquelles personne n'a encore de réponse. . .

Comment contrôler son résultat de calcul ?

1. Menez le calcul en expressions littérales, c'est-à-dire en ne remplaçant les symboles par leurs valeurs numériques qu'à la dernière ligne.
2. Cherchez une confirmation de l'expression littérale par une autre méthode :
   - l'expression finale est-elle homogène, c'est-à-dire les deux membres de l'équation finale ont-ils la même dimension ?
   - le sens de variation de la grandeur avec ses paramètres est-il correct ?
3. Réécrivez l'expression finale en remplaçant les symboles par leur valeur numérique en notation scientifique et dans l'unité du système international.
4. Calculez sans calculatrice l'ordre de grandeur du résultat final.
5. Faites le calcul à la calculatrice tel qu'il a été posé sur la copie.
6. Cherchez une confirmation du résultat de calcul par une autre méthode :
   - l'ordre de grandeur est-il cohérent ?
   - la valeur numérique peut-elle être comparée à une valeur connue (questions précédentes, énoncé, cours, . . .)
   - existe-t-il une méthode indépendante pour calculer la même grandeur ?

UVSQ université PARIS-SACLAY UFR des Sciences CAMPUS DE VERSAILLES

Comment contrôler son résultat de calcul ?

Exemple

Combien de molécules H_2O une bouteille de $V = 1.5$ litre contient-elle ? Données numériques :

- $V = 1.5 \text{ L} = 1.5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-3}$
- $\rho = 1.000 \text{ kg/L} = 1.000 \cdot 10^{3} \text{ kg/m}^{3}$
- $\mathcal{M}_{\mathrm{H_2O}} = 18 \text{ g /mol} = 18 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}$
- $\mathcal{N}_A = 6.02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Nombre de moles dans V :

$$n = \frac{\rho V}{\mathcal{M}_{\mathrm{H_2O}}}$$

Nombre de molécules dans n moles (et donc dans la bouteille) :

$$X = n\mathcal{N}_A$$

Expression littérale :

$$X = \frac{\rho V \mathcal{N}_A}{\mathcal{M}_{\mathrm{H_2O}}}$$

Comment contrôler son résultat de calcul ?

Exemple

Analyse dimensionnelle (vérification) :

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\rho V \mathcal{N}_A}{\mathcal{M}_{H_2O}}\right] &= [\rho]\cdot[V]\cdot[\mathcal{N}_A]\cdot[\mathcal{M}_{H_2O}]^{-1} \\
&= (ML^{-3})\cdot L^{-3}\cdot N^{-1}\cdot(MN^{-1})^{-1} \\
&= 1 \\
\left[\frac{\rho V \mathcal{N}_A}{\mathcal{M}_{H_2O}}\right] &= [X]
\end{aligned}$$

Ordre de grandeur (vérification) :

$$\begin{aligned}
X &= \frac{10^3 .5\cdot 10^{-3} .02\cdot 10^{23}}{1.8\cdot 10^{-2}} \\
&= \frac{1.5\times 6.02}{1.8}\cdot 10^3\cdot 10^{-3}\cdot 10^{23}\cdot 10^{+2} \\
&= \frac{1.5\times 6.02}{1.8}\cdot 10^{25}
\end{aligned}$$

Calcul machine :

$$X = 5.016667\cdot 10^{25}$$

Exemple

Confirmation par le calcul de de la masse m des X molécules d'eau : Données numériques :

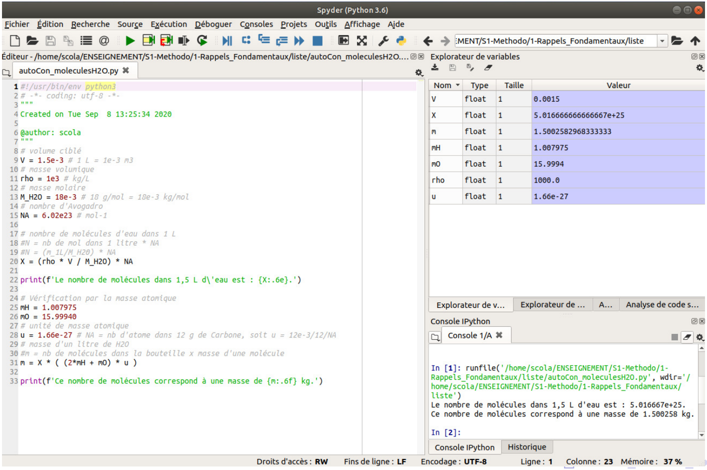
- masse atomique de l'hydrogène $m_H = 1.007978$
- masse atomique de l'oxygène $m_O = 15.99940$
- unité de masse atomique $u = 1.66 \cdot 10^{-27}$

$$\begin{aligned} m &= X(2m_H + m_O)u \\ &= 5.017 \cdot 10^{25} \times (2 \times 1.007978 + 15.99940) \times 1.66 \cdot 10^{-27} \\ &= 5.017 \times 1.66 \times (2 \times 1.007978 + 15.99940) \cdot 10^{25} \cdot 10^{-27} \\ &= 1.500258\,\text{kg}\ldots \end{aligned}$$

UVSQ université PARIS-SACLAY UFR des Sciences CAMPUS DE VERSAILLES

Si vous surmontez l'appréhension de la programmation. . .

- Octave (gratuit, libre, toute plateforme, simple d'installation mais limité)
- Python (dist. Anaconda), ci-dessous dans l'environnement Spyder (gratuit, libre, toute plateforme, standard, un peu moins simple à prendre en main mais les possibilités sont *illimitées*)



Représentation d'un résultat de calcul

Exemple

Combien de chiffres significatifs faut-il conserver ?

$X = 5.016667 \cdot 10^{25}$?
$X = 5.01667 \cdot 10^{25}$?
$X = 5.0167 \cdot 10^{25}$?
$X = 5.017 \cdot 10^{25}$?...

m $=$ 1.500258 kg ?
m $=$ 1.50026 kg ?
m $=$ 1.5003 kg ?
m $=$ 1.500 kg ?...

Règle à suivre

Conservez le même nombre de chiffres significatifs que la donnée numérique qui en comporte le moins.

Exemple

Ici, c'est la masse molaire qui est connue avec le moins de précision : 2 chiffres significatifs. La réponse est donc $X = 5.0 \cdot 10^{25}$ (et $m = 1.5$ kg).

Représentation d'un résultat de mesure

L'identification du nombre de chiffres significatifs d'un résultat de mesure s'effectue suivant la procédure suivante :

- identification de tous les chiffres disponibles

$$U = 1.123456789\,\mathrm{V}$$

- évaluation l'incertitude de la mesure

$$\Delta U = 2.2946802489 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{V}$$

- arrondi à la décimale supérieure de l'incertitude à 1 chiffre significatif

$$\Delta U = 3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{V}$$

- arrondi à la décimale la plus proche de la valeur mesurée en cohérence avec l'incertitude et l'unité

résultat de mesure :

$$U = 1.123 \pm 0.003\,\mathrm{V}$$

Représentation d'un résultat de mesure : applications 1/2

- Écrire les valeurs suivantes en notation scientifique
  1. 12345.67
  2. 12345
  3. 1000
  4. 12350
  5. 123450.0
- Indiquer le nombre de chiffres significatifs nécessaires et suffisants pour exprimer les quantités suivantes :
  1. $A = (1.123456789 \pm 0.0001) \cdot 10^5$
  2. $B = 112345.6789 \pm 10$
  3. $C = (1.234 \pm 0.1) \cdot 10^3$
  4. $D = 1234 \pm 100$
  5. $E = 1234 \pm 1$

UVSQ université PARIS-SACLAY UFR des Sciences CAMPUS DE VERSAILLES

Représentation d'un résultat de mesure : applications 2/2

Le tableau ci-dessous reproduit l'affichage de différents instruments de mesure ainsi que l'incertitude associée aux conditions de l'expérience.

Affichage	Incertitude de mesure
245.2165689	0.003
245.2165689	20
0.00345 k	0.01
2.3456	2
72.653457	0.2434

Dans chaque cas, exprimer le résultat de la mesure et discuter l'information recueillie.

Grandeurs scalaires, grandeurs vectorielle

Grandeur scalaire :

Grandeur physique représentée mathématiquement par un nombre.

Exemples

Les 7 grandeurs fondamentales, l'énergie, la puissance, la tension électrique, ...

Une seule valeur numérique ne suffit pas à décrire certaines grandeurs physiques.

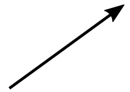
UVSQ université PARIS-SACLAY UFR des Sciences CAMPUS DE VERSAILLES

Grandeurs scalaires, grandeurs vectorielle

Grandeur vectorielle

Grandeur physique représentée par un vecteur. Un vecteur $\vec{v}$ est défini par

- une norme $||\vec{v}||$
- une droite directrice
- un sens



Exemples

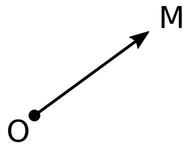
La vitesse, les forces, les flux, les champs (magnétiques, électriques, gravitationnels), l'aimantation, ...

Grandeurs scalaires, grandeur vectorielles

Vecteur position

Un vecteur position est un vecteur muni d'une origine. Il est défini par

- une origine fixe
- l'autre extrémité pointant vers un point mobile

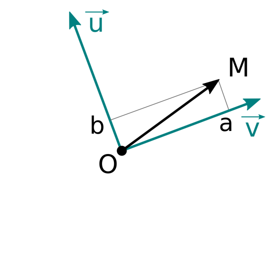


Repères de projection

La représentation mathématique d'un vecteur nécessite la définition d'un repère de projection.

On choisit généralement un repère orthonormée directe $(O, \vec{u}, \vec{v})$:

- O : origine du repère
- $\vec{u} \perp \vec{v}$
- $||\vec{u}|| = ||\vec{v}|| = 1$ ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits *unitaires*)
- l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vaut $+\pi/2$

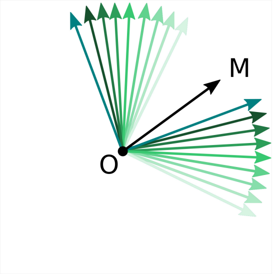


Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est entièrement décrit par ses *composantes* a et b dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

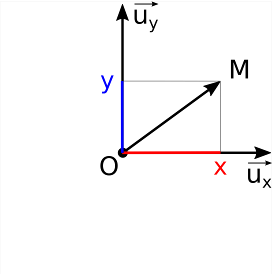
Remarque importante

- La composante a est la **projection orthogonale** de $\overrightarrow{OM}$ sur la direction de $\vec{u}$.
- La composante b est la **projection orthogonale** de $\overrightarrow{OM}$ sur la direction de $\vec{v}$.

Repères de projection



Il existe une infinité de repères de projection.
On choisit généralement le repère le plus commode pour faire les calculs.



Dans chaque repère l'expression du vecteur $\overrightarrow{OM}$ est unique :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{(\vec{u}_x, \vec{u}_y)}$$

Dans cette représentation, les *coordonnées* du point M coïncident avec les *composantes* du vecteur position $\overrightarrow{OM}$.

Produit scalaire de deux vecteurs

Soient deux vecteurs du plan

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}_{(\vec{u},\vec{v})}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}_{(\vec{u},\vec{v})},$$

le produit scalaire associe à ces deux vecteurs un scalaire (*i.e.* un réel) défini par

- *analytiquement* par
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$
- *géométriquement* par
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Propriétés

- le produit scalaire est *commutatif* : $\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v}$
- $\vec{u} \cdot \vec{0} = 0 \, \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \{\vec{u} = \vec{0}\}$ OU $\{\vec{v} = \vec{0}\}$ OU $\{\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux$\}$.

Norme d'un vecteur

Définition

La norme $\|\vec{u}\|$ d'un vecteur est définie par

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

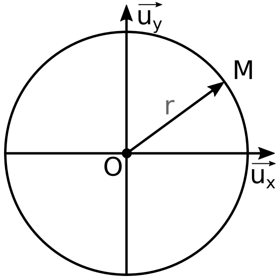
Si le vecteur $\vec{u}$ s'exprime $\vec{u} = u_1 \vec{u} + u_2 \vec{v}$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, alors

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} > 0$$

Géométriquement, la norme d'un vecteur $\overrightarrow{OM}$ coïncide avec la distance entre le point O et le point M.

Positionnement d'un point sur un cercle

Le point M est positionné sur le cercle de centre O et de rayon $r = OM$.

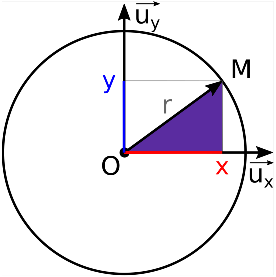


Positionnement sur le cercle

Définition du cercle

Le cercle de centre O et de rayon r est défini par l'ensemble des points situés à une distance r de O, c'est-à-dire les points dont les coordonnées (x, y) vérifient :

$$x^2 + y^2 = r^2$$



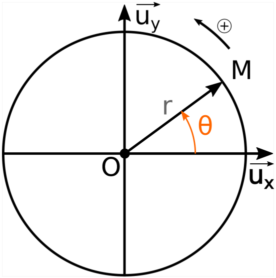
Côtés du triangle rectangle

- hypoténuse : r
- côté adjacent à O : x
- côté opposé à O : y

Positionnement sur le cercle

Positionnement angulaire

On distingue les différents points du cercle par l'angle θ que forme le rayon $[OM]$ avec l'axe horizontal.



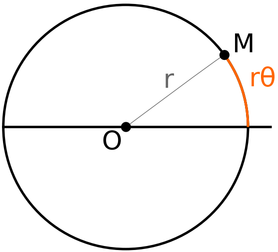
- Les angles sont
  - sont des grandeurs scalaires sans unités,
  - sont des grandeurs algébriques,
  - sont comptés positivement dans le sens trigonométrique,
  - s'expriment en radians (rad) dans le système international.
- 2π rad correspondent à un tour (ou un cycle) complet.
- Les radiants se convertissent en degrés d'angles :
- $1 \text{ rad} = \frac{180}{\pi}$ deg., $1 \text{ deg.} = \frac{\pi}{180}$ rad.

Positionnement sur le cercle

Longueur d'un arc de cercle

La longueur de l'arc intercepté par l'axe horizontal et le segment $[OM]$ vaut :

$$s = r\theta$$



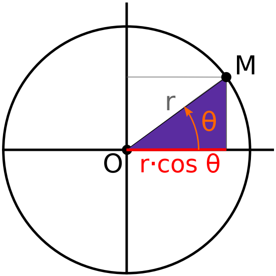
Exemple

Pour un cycle complet, $\theta = 2\pi$ et la longueur de l'arc correspondant vaut $s = 2\pi r$, c'est-à-dire le périmètre du cercle.

Projection orthogonale

Projection sur l'axe horizontal

La projection orthogonale du point M sur l'axe horizontal vaut $r\cos\theta$.

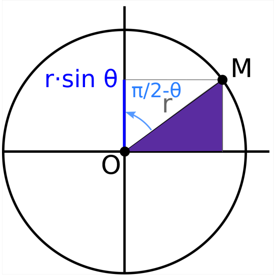


Projection orthogonale

Projection sur l'axe vertical

La projection orthogonale du point M sur l'axe vertical vaut $r \sin\theta$.

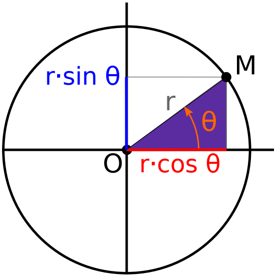
Rappel : $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta$



Projection orthogonale

Côtés du triangle rectangle

- hypoténuse : r
- côté adjacent : $r\cos\theta$
- côté opposé : $r\sin\theta$

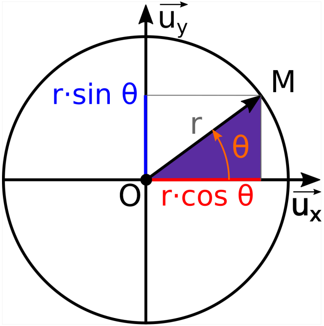


Valeurs numériques à mémoriser

θ	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
θ (rad.)	0.524	0.785	1.047	1.571	2.094	2.356	2.618	3.142	4.712	6.283
θ (deg.)	30	45	60	90	120	135	150	180	270	360
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
	0.866	0.707	0.500	0.000	-0.500	-0.707	-0.866	-1.000	-0.000	1.000
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
	0.500	0.707	0.866	1.000	0.866	0.707	0.500	0.000	-1.000	-0.000

Produit scalaire et projection orthogonale

On rappelle la définition *géométrique* du produit scalaire : $\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$



$$
\begin{aligned}
r \cdot \cos\theta &= ||\overrightarrow{OM}|| \cdot 1 \cdot \cos\theta \\
&= ||\overrightarrow{OM}|| \cdot ||\vec{u}_x|| \cdot \cos(\vec{u}_x, \overrightarrow{OM}) \\
&= \overrightarrow{OM} \cdot \vec{u}_x
\end{aligned}
$$

Soit

$$
\begin{cases}
r \cdot \cos\theta = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{u}_x = x \\
r \cdot \sin\theta = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{u}_y = y
\end{cases}
$$

Résultat important

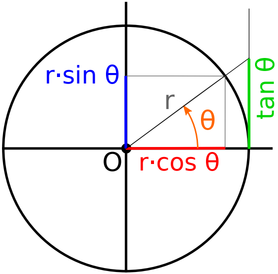
Le **produit scalaire** d'un vecteur $\overrightarrow{OM}$ et d'un vecteur unitaire représente la **projection orthogonale** de $\overrightarrow{OM}$ sur la direction du vecteur unitaire.

Fonction trigonométrique

Fonction tangeante

La tangeante de l'angle θ est définie par l'intersection de la droite (OM) avec une tangeante verticale du cercle.

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$



Cercle trigonométrique