Licence de mathématiques.
Méthodologie mathématique.
Année 2020/2021.

Université Versailles-Saint Quentin

Feuille 1

Exercice 1.

On considère la relation $\mathcal{R}$, dont le tableau de vérité est le suivant.

P	Q	$P\,\mathcal{R}\,Q$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

1) Calculer le tableau de vérité de $(P\,\mathcal{R}\,Q)\ \mathcal{R}\ (P\,\mathcal{R}\,Q)$ et identifier cette relation avec un connecteur classique.

2) Calculer le tableau de vérité de $(P\,\mathcal{R}\,P)\ \mathcal{R}\ (Q\,\mathcal{R}\,Q)]$ et identifier cette relation avec un connecteur classique.

Exercice 2.

On considère la relation $\mathcal{R}$, dont le tableau de vérité est le suivant.

P	Q	$P\,\mathcal{R}\,Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

1) Calculer le tableau de vérité de $P\,\mathcal{R}\,(P\,\mathcal{R}\,Q)$ et identifié cette relation avec un connecteur classique.

2) Calculer le tableau de vérité de [(non P) $\mathcal{R}$(non Q)] et identifier cette relation avec un connecteur classique.

Exercice 3.

Lorsque cela a un sens, placer le connecteur $\Rightarrow$ ou $\Leftrightarrow$ (ou $\Leftarrow$) entre les phrases mathématiques suivantes. Donner un contre-exemple lorsque une des deux implications est fausse.

a) $0 \leq x \leq y \qquad x^2 \leq y^2$
b) $0 \leq x \leq y \qquad \sqrt{x} \leq \sqrt{y}$
c) $x \leq y \qquad \sqrt{x} \leq \sqrt{y}$
d) $x \leq y \qquad \dfrac{1}{x} \geq \dfrac{1}{y}$

Exercice 4. *Un peu de français...*

1) Donner la négation de chacune des phrases suivantes :

1. "Tous les étudiants de MT100 viennent en bus ou à pieds."
2. "Il existe un étudiant de MT100 qui aura une moyenne inférieure ou égale à 14/20."

2) Donner la contraposée de chacune des phrases suivantes :

1. "Si je suis étudiant à l'UVSQ, alors je suis excellent en mathématiques."
2. "Je prends un abonnement au théatre si le programme me plait et si le tarif est raisonnable". On pourra d'abord traduire la phrase sous la forme d'une proposition mathématique à l'aide des propositions suivantes :
   P "le programme me plaît", Q "le tarif est raisonnable", R " Je prends un abonnement".
3. "J'aurai 20/20 de moyenne en MT100 si je travaille ou si je suis un génie".

Quantificateurs

Exercice 5.

Soit $n \geq 1$ un entier. On se donne $n+1$ réels $x_0, .., x_n$ de $[0;1]$ vérifiant $0 \leq x_0 \leq .. \leq x_n \leq 1$. On désire montrer par l'absurde que au moins deux de ces réels sont à une distance plus petite ou égale à $1/n$.

— Ecrire à l'aide des quantificateurs et des valeurs $x_{i+1} - x_i$ la propriété à démontrer. Puis en donner sa négation.

— Rédiger une démonstration par l'absurde de cette propriété.

Exercice 6.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. Donner la négation des propositions suivantes et en donner la signification.

a) $\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I,\ f(x) = C$

b) $\forall x \in I,\ (f(x) = 0 \implies x = 0)$

c) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I,\ f(x) = y$

d) $\forall x, y \in I,\ (f(x) = f(y) \implies x = y)$

Écrire la négation de la proposition suivante. Dire, en le justifiant, laquelle des deux est vraie.

a) $\exists x \in \mathbb{N}, x^2 > 4$	b) $\forall x \in \mathbb{N}, x^2 > 4$
c) $\forall x \in \mathbb{R}, (x = \lvert x \rvert \text{ ou } x = -\lvert x \rvert)$	d) $(\forall x \in \mathbb{R}, x = \lvert x \rvert)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R}, x = -\lvert x \rvert)$
e) $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, y > x^2$	f) $\exists y \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N},\ y > x^2$
g) $\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N}, y > x^2$	h) $\forall y \in \mathbb{N},\ \exists x \in \mathbb{N}, y > x^2$

Exercice 7.

Écrire la négation de la proposition suivante. Dire, en le justifiant, laquelle des deux est vraie.

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x \geq y \Rightarrow |x| \geq |y|$.
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x \geq y \Rightarrow |x| \geq |y|$.
3. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x \geq y \Rightarrow |x| \geq |y|$.
4. $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x \geq y \Rightarrow |x| \geq |y|$.

Exercice 8.

Soient f et g deux fonctions définies sur l'ensemble E à valeurs dans F $(E, F \subset \mathbb{R})$.

1) Donner une écriture mathématique, à l'aide de quantificateurs, des phrases suivantes :
- La fonction f ne s'annule jamais.
- Les fonctions f et g ne sont pas égales.
- la fonction f est croissante sur E.
- La fonction g n'est pas strictement décroissante sur E.
- La fonction f est bornée.
- On dit que f est bijective de E sur F si tout élément de F admet un unique antécédent par f.
- Le réel y appartenant à F n'a pas d'antécédent par f.

2) Que signifie la phrase suivante : $(\forall x \in E), (f(x) = 0 \Rightarrow x = 0)$.
Donner des exemples de fonctions f qui vérifient cette propriété.

Exercice 9.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. Énoncer en langage courant les assertions suivantes écrites à l'aide de quantificateurs. Peut-on trouver une fonction qui satisfait cette assertion ? Qui ne la satisfait pas ?

1) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}, f(x) < f(y)$.

2) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists T \in \mathbb{R},\ f(x) = f(x+T)$.

3) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists T \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = f(x+T)$.

4) $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ y = f(x)$.

Exercice 10. *En rapport direct avec le MA100...*

1. (a) Dans cette question, $a \in \mathbb{R}$ et $L \in \mathbb{R}$ sont fixés et f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles. Rappeler la définition de $\lim_{x \to a} f(x) = L$ avec les quantificateurs et "l'epsilon". En déduire une proposition exprimant le fait que f ne tend pas vers L lorsque x tend vers a.

   (b) Même question pour $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
2. Soit f une fonction dérivable sur I intervalle de $\mathbb{R}$. On sait que si $f'(x) > 0$ sur I alors f est strictement croissante sur I. Ecrire cette dernière phrase à l'aide de quantificateurs et du symbole $\Longrightarrow$. Donner la contraposée de cette implication.

Exercices supplémentaires

Exercice 11.

On considère la relation $\mathcal{R}$, dont le tableau de vérité est le suivant.

P	Q	$P \mathcal{R} Q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

1) Calculer le tableau de vérité de $(P \mathcal{R} Q) \mathcal{R} (P \mathcal{R} Q)$ et identifier cette relation avec un connecteur classique.

2) Calculer le tableau de vérité de $(P \mathcal{R} P) \mathcal{R} (Q \mathcal{R} Q)$ et identifier cette relation avec un connecteur classique.

Exercice 12.

On considère la relation $\mathcal{R}$, dont le tableau de vérité est le suivant.

P	Q	$P \mathcal{R} Q$
V	V	F
V	F	F
F	V	V
F	F	F

1) Calculer le tableau de vérité de $(P \mathcal{R} Q) \mathcal{R} Q$ et identifier cette relation avec un connecteur logique classique, c'est-à-dire "et", "ou", "non", " $\Rightarrow$", "$\Leftarrow$", "$\Leftrightarrow$".

2) Calculer le tableau de vérité de $P \mathcal{R} (P \mathcal{R} Q)$ et exprimer cette relation à l'aide des connecteurs logiques classiques.

Exercice 13.

Nier les assertions suivantes et dire quelle est des deux l'assertion qui est vraie.

1) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{Z}, y - x^2 > 0.$

2) $\exists y \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, y - x^2 > 0.$

3) $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq x^2 \Rightarrow x \leq 1.$

4) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (|x - y| \leq \eta \Rightarrow |x^2 - y^2| \leq \varepsilon).$

Exercice 14.

Nier les assertions suivantes et dire quelle est des deux l'assertion qui est vraie.

1) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{Z}, y^2 - x > 0.$

2) $\exists y \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, y^2 - x > 0.$

3) $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq x^2 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1.$

4) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (|x - y| \leq \eta \Rightarrow |3x - 3y| \leq \varepsilon).$

Licence de mathématiques. Université Versailles-Saint Quentin
Méthodologie mathématique.
Année 2020/2021.

Feuille 2

Exercice 1.

Soit E un ensemble. Soit A, B et C trois parties de E. Simplifier les expressions

$$A \cap (\complement A \cup B); \qquad A \cup (\complement A \cap B), \qquad A \cap (\complement A \cup B) \cap (\complement A \cup \complement B \cup \complement C)$$

Exercice 2.

Soit E un ensemble. Dans les questions ci-dessous, A, B, C désignent des sous-ensembles d'un ensemble E.

1. Simplifier l'expression suivante $(A \cap \complement B) \cup (A \cap B)$.
2. Montrer que $A \cap B \cap \complement C = A \cap B \cap \complement(A \cap B \cap C)$.
3. Montrer que $\complement(\complement B \cup \complement C) = B \cap C$. Simplifier $(A \cap \complement C) \cup (A \cap \complement B) \cup (A \cap B \cap C)$.

Exercice 3.

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. Démontrer :

1. $(A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C) \Rightarrow B \subset C$. Que dire de plus ?
2. On suppose que $A \cup B = B \cap C$. Montrer que $A \subset B \subset C$.
3. Si $A \subset B \subset C$ a-t-on $A \cup B = B \cap C$?
4. Démontrer que, si $A \cap B = A \cup B$, alors $A = B$.

Exercice 4.

1. Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 4x - y = 1\}$ et $B = \{(t+1, 4t+3) \in \mathbb{R}^2,\ t \in \mathbb{R}\}$. Montrer que $A = B$.
2. Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x - 3y = -1\}$ et $B = \{(3t+1, 2t+1) \in \mathbb{R}^2,\ t \in \mathbb{R}\}$. Montrer que $A = B$.

Exercice 5.

Dans chaque cas, décrire les parties de $\mathbb{R}$ (la plus grande possible) dans laquelle évolue x pour que la proposition soit vraie.

1. "$(x > 0$ et $x < 1)$ ou $x = 0$",
2. "$x > 3$ et $x < 5$ et $x \neq 4$",
3. Plus difficile : "$x \geq 0 \implies x \geq 2$".
4. Plus difficile : "$x \geq 2 \implies x \geq 0$".

Exercice 6.

Montrer que chacun des ensembles suivants est un intervalle (éventuellement vide ou réduit à un point) que l'on spécifiera :

$$I_1 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[3; 3 + \frac{1}{n^2}\right[, \; I_2 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[-2 - \frac{1}{n}; 4 + n^2\right[, \; I_3 = \bigcup_{n=3}^{+\infty} \left[1 + \frac{1}{n}; n\right[.$$

Exercice 7. *Ensemble de définitions, image directe, image réciproque*

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f de variable réelle x définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$. Même question pour g avec $g(x) = \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x-1}$.

2) Déterminer l'image directe de $[-1; 3[$ par la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

3) Déterminer l'image réciproque de $[-2, 9]$ par la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

Exercice 8. *union, intersection, image directe, image réciproque*

Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \to F$ une application.

1. Montrer que
$$\forall A,\, A' \in \mathcal{P}(E),\; f(A \cup A') = f(A) \cup f(A') \text{ et } f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A').$$
Donner un exemple d'application pour laquelle la dernière inclusion est stricte.
2. Montrer que
$$\forall B,\, B' \in \mathcal{P}(F),\; f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B') \text{ et } f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B').$$

Exercice 9. *Exemples d'applications injectives, surjectives ou bijectives*

1. Rappeler les définitions de bijection, surjection et injection.
2. La fonction $f : I \to J$ définie par $f(x) = x^2$ est-elle une injection, surjection ou bijection dans les cas suivants : $I = \mathbb{R}$ et $J = \mathbb{R}$; $I = \mathbb{R}^+$ et $J = \mathbb{R}^+$; $I = \mathbb{R}^+$ et $J = \mathbb{R}$; $I = \mathbb{R}^-$ et $J = \mathbb{R}^+$?
3. Même question avec $f(n) = n+2$, $I = \mathbb{N}$ et $J = \mathbb{N}$; $I = \mathbb{Z}$ et $J = \mathbb{Z}$; Pour $I = \mathbb{N}$, quel ensemble J faut-il (et suffit-il de...) considérer pour que $f : I \to J$ soit une bijection ?

Exercice 10.

Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n + 1$.

2) $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto n + 1$.

3) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$.

Exercice 11.

Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n+4$.

2) $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto n+4$.

3) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (x+2y, 2x-y)$.

Exercice 12.

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n^2$.

1) L'application f est-elle injective ?

2) Montrer que l'application f n'est pas surjective. Trouver un ensemble $A \subset \mathbb{N}$ tel que $g : \mathbb{N} \to A,\ n \mapsto n^2$ est surjective.

3) L'application g est-elle bijective ?

Exercice 13.

1) Soit $n, q \in \mathbb{N}$ vérifiant $n > q > 0$, montrer que $n - q < nq$.

2) Soit $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}$ définie par $f(p,q) = p + \frac{1}{q}$. L'application f est-elle injective ? Surjective ?

Exercice 14. *Plus difficile*

Soit $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^*$ définie par $f(n,p) = 2^n(2p+1)$. Montrer que f est une bijection.

Exercice 15. *Composition de fonctions, injectivité et surjectivité*

Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications. Montrer que :

1. $g \circ f$ injective $\implies$ f injective
2. $g \circ f$ surjective $\implies$ g surjective.
3. A-t-on : $g \circ f$ injective $\implies$ g injective ? Proposer une hypothèse supplémentaire à imposer à f afin que l'implication devienne vraie.

Exercice 16.

Soit $f(x) = \frac{x}{1+x}$.

1. Calculer $f \circ f(x)$ et $f \circ f \circ f(x)$.
2. Trouver une formule pour $f \circ f \circ \cdots \circ f(x)$ (où le symbole f apparaît n fois), et démontrer cette formule par récurrence.

Exercice 17.

Soient f et g les deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f(x) = 3x+1$ et $g(x) = x^2 - 1$.

1. Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$.
2. Dans les exemples suivants, pour $j = 1, 2, 3$ déterminer deux fonctions u_j et v_j telles que $h_j = u_j \circ v_j$ où $h_1(x) = \sqrt{3x-1}$, $h_2(x) = \sin(x+2)$ et $h_3(x) = \dfrac{1}{x+7}$.

Exercice 18.

Soient f et g les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par $f(x) = 2x$ et

$$g(x) = \begin{cases} x/2 \text{ si } x \text{ est pair} \\ 0 \text{ si } x \text{ est impair} \end{cases}$$

1. Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$.
2. f et g sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?
3. Mêmes questions pour $g \circ f$ et $f \circ g$.

Exercice 19.

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ définie par $f(x) = \dfrac{e^x + 2}{e^{-x}}$

1. Démontrer que f est bijective.
2. Calculer f^{-1}.

Exercice 20.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x/(1 + x^2)$.

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
3. Montrer que la restriction $g : [-1, 1] \to [-1, 1]$, $g(x) = f(x)$ est une bijection.

Exercices supplémentaires

Exercice 21.

Soit

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 5x + 6y = 1\}$$
$$B = \{(6t - 1, -5t + 1) \in \mathbb{R}^2, \quad \text{où } t \in \mathbb{R}\}$$

1) Montrer que $A \subset B$.

2) Montrer que $B \subset A$. Que peut-on en conclure ?

Exercice 22.

Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n + 1$.

2) $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto n + 1$.

3) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$.

Exercice 23.

On rappelle que $\complement A$ désigne l'ensemble complémentaire de A.
Soit $I = [1, 3]$ et $J =]2, 4]$.

Écrire sous forme d'intervalles les ensembles suivant, $I \cap J$, $I \cup J$, $\complement I \cap J$ et $I \cap \complement J$. On justifiera les réponses.

Feuille 3

Exercice 1.

1) Calculer $(1+i)^2$, puis $(1+i)^7$.

2) En déduire

$$1-\binom{7}{2}+\binom{7}{4}-\binom{7}{6} \text{ et } \binom{7}{1}-\binom{7}{3}+\binom{7}{5}-1.$$

3) Calculer $(1+i)^4$, puis $\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^8$.

Exercice 2.

Calculer la forme cartésienne de

1)

$$\frac{1+i}{1-i}, \quad \frac{3+i}{2+3i}, \quad \frac{i-7}{3+7i}, \quad \frac{2+i}{3-i}, \quad \frac{i-7}{3+i}, \quad \frac{3-i}{2+i}, \quad \frac{1-i}{1+i}.$$

2)

$$\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}+\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}+i-1.$$

Exercice 3.

Calculer $S=\sum_{k=0}^{2020} i^k = 1+i+i^2+\cdots+i^{2020}$.

Exercice 4.

Résoudre l'équation $|z-i|=|z+i|$.

Exercice 5.

Trouver $z \in \mathbb{C}$ tel que $(z-2)(\bar{z}+i) \in \mathbb{R}$.

Exercice 6.

Soit z un nombre complex de module 1 mais $z \neq 1$.

Montrer que $\dfrac{1+z}{1-z}$ est imaginaire pur.

Exercice 7.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes

$$\begin{cases} 3iz + z' = 8 + i \\ 2z - iz' = 1 - i \end{cases} \qquad \begin{cases} (1+i)z + iz' = 2 - i \\ (2-i)z + (3-i)z' = 5 + 3i \end{cases}$$

Exercice 8.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes

$$\begin{cases} 2z - z' = i \\ -2z + 3iz' = -17 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3z + z' = 1 - 7i \\ iz + 2z' = 11i \end{cases}$$

Exercice 9.

Résoudre $4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0$.

Exercice 10.

Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants

$$z_1 = \sqrt{3} + i, \quad z_2 = 2i - z_1, \quad z_3 = 2i + z_1, \quad z_4 = \frac{z_3}{z_2}, \quad z_5 = \frac{1}{1 + i\tan\alpha}$$

Exercice 11.

On écrit $z = \cos x + i \sin x$.

1) Montrer que $\cos x = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ et $\sin x = \dfrac{1}{2i}\left(z - \dfrac{1}{z}\right)$.

2) Montrer que $\cos nx = \dfrac{1}{2}\left(z^n + \dfrac{1}{z^n}\right)$ et $\sin nx = \dfrac{1}{2i}\left(z^n - \dfrac{1}{z^n}\right)$.

3) Utiliser les formules ci-dessus pour linéariser

$$\cos^3 x, \quad \sin^3 x, \quad \cos^4 x, \quad \sin^4 x, \quad \cos^4 x \sin x, \quad \sin^2 x \cos^3 x, \quad \cos x \sin^4 x, \quad \cos^4 x \sin^3 x.$$

Exercice 12.

Calculer les racines carrées des nombres complexes $3 + 4i$ et $8 - 6i$.

Exercice 13.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

1. $z^2 - (3 + 2i)z + 5 + i = 0$.
2. $z^2 - 2iz - i\sqrt{3} = 0$.
3. $2z^2 - (20 + 9i)z + 50 = 0$.
4. $iz^2 + (1 - 5i)z + 6i - 2 = 0$.
5. $(4 + 3i)z^2 - (2i - 4)z + 2 - i = 0$.

Exercice 14.

Résoudre

$$\left|\frac{z-12}{z-8i}\right| = \frac{5}{3}.$$

Pour cela poser

$$Z = \frac{z-12}{z-8i},$$

et exprimer z en fonction de Z.

Exercice 15.

Soit $\theta \in]-\pi, \pi[$.

1) Montrer que $e^{i\theta} \neq -1$.

On pose $z = \dfrac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}$.

2) En calculant $\bar{z}$, montrer que z est imaginaire pur.

3) Montrer que $z = -i\tan(\theta/2)$.

Exercice 16.

1) Mettre $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$ sous la forme $re^{i\theta}$.

2) En déduire la valeur de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

Exercices supplémentaires

Exercice 17.

Le but de l'exercice est de résoudre $z = p\bar{z}+q$ où p et z sont des nombres complexes donnés.

1) On suppose que $|p| \neq 1$. Trouver l'unique z vérifiant l'équation.

2) On suppose que $|p| = 1$. Montrer que si $p\bar{q}+q \neq 0$ alors l'équation n'admet pas de solutions.

3) On suppose que $|p| = 1$ et $p\bar{q}+q = 0$. Montrer que si $q \neq 0$, les solutions s'écrivent $z = q/2 + iqt$, où $t \in \mathbb{R}$.

4) On suppose que $|p| = 1$, $p\bar{q}+q = 0$ et $q = 0$. Trouver toutes les solutions de l'équation $z = p\bar{z}$

Exercice 18.

Soit z et z' deux nombres complexes de module 1.

1) Montrer que $\dfrac{z+z'}{1+zz'}$ est un réel.

2) En écrivant $z = e^{i\theta}$ et $z' = e^{i\alpha}$ où θ et α sont des réels, calculer le module de $\dfrac{z+z'}{1+zz'}$.

Exercice 19.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $\omega = e^{2i\pi/p}$ et $\omega_j = \omega^j$ pour $j = 1, \ldots, p$.

1) Montrer que $\omega_j^p = 1$.

2) Montrer que $\omega_j \neq 1$ pour $j = 1, \ldots, p-1$. En déduire que les ω_j sont deux à deux distincts.

On admet que $z^p - 1 = \prod_{j=1}^{p}(z - \omega_j)$.

3) Montrer que l'on a aussi $z^p - 1 = -\prod_{j=1}^{p}(1 - \omega_j z)$.

Exercice 20.

Soit z_1, z_2 et z_3 des nombres complexes de module 1.
Montrer que $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3|$.

Exercice 21. *La méthode de Viete*

La méthode de Viete pour résoudre les équations de troisième degré de la forme

$$z^3 + pz + q = 0,$$

consiste à rechercher z sous la forme $z = y - \dfrac{p}{2y}$.

Trouver les solutions de $z^3 - 15z - 4 = 0$ en faisant le changement d'inconnue de la méthode de Viete. C'est-à-dire en posant $z = y + \dfrac{15}{2y}$.

Exercice 22.

Soit z et z' deux nombres complexes. On suppose que $|z + z'| = |z - z'|$.

En supposant $z \neq 0$, montrer qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $z' = izt$.

Exercice 23.

Soit $N_1 = p_1^2 + q_1^2$ et $N_2 = p_2^2 + q_2^2$ où $p_1, q_1, p_2, q_2 \in \mathbb{N}$.

En écrivant $z_k = p_k + iq_k$ pour $k = 1, 2$, montrer que $N_1 N_2 = p_3^2 + q_3^2$ où $p_3, q_3 \in \mathbb{N}$, et on précisera la valeur de p_3, q_3 en fonction de p_1, q_1, p_2, q_2.