Ph202

Chapitre 1 - Partie 1 : Introduction à la mécanique classique

E. Riedinger
Département des Sciences Physiques

Janvier 2020

Informations pratiques

Horaires

Cours en amphi : 18h (avec CC). Amphi J.
(sauf Lu 27/01 13h40 cours supplémentaire amphi F).
TD : 27h. Début TD semaine du 03/02. Salles, horaires sur https://edt.uvsq.fr
TP : 3x3h (bât. E 2ème étage). Début TP semaine du 16 mars.

Espace Ph202 sur ecampus : support de cours, etc.

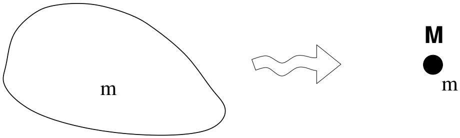
Évaluation

6 ECTS ($\rightarrow$ travail personnel !) ✷—
100% contrôle continu. **Note finale : TP 25% CC 75%**

Répartition notes de CC :

- 2CC en amphi fin mars / début avril + 15 mai (coeff 0,5+1)
- moyenne CC en TD

1. Mécanique classique du point matériel
1.1 Qu'est-ce qu'un point matériel ?



Modélisation

- Système réel étudié
- Représenté par un point M pourvu d'une masse m

Pour simplifier, tout un système est réduit à un seul point : mouvement propre, volume propre non pris en compte.
$\Longrightarrow$ Mouvement d'ensemble connu mais pas les mouvements de chaque point du système.

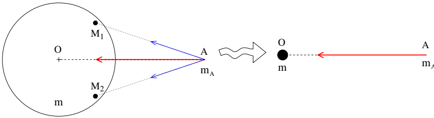
Justifications

Théorème du centre de masse (admis)

Système de masse m, barycentre G. Évolue globalement comme un point matériel G de masse m, soumis à la résultante de la totalité des forces extérieures

Théorème de Gauss (admis)

Astre sphérique de masse totale m, symétrie sphérique. Exerce une force gravitationnelle identique à celle exercée par le point matériel situé au centre et pourvu de la masse totale.



1.2 Qu'est-ce que la mécanique classique ?

Mécanique classique

Décrit le mouvement des objets macroscopiques lorsque leur vitesse est faible par rapport à celle de la lumière

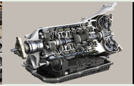
Limites

Mécanique relativiste — Mécanique quantique

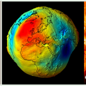
Différents domaines

Mécanique du point, du solide, des fluides, des milieux continus

Exemples

Etude et conception de mécanismes
Horlogerie — *Automobile*

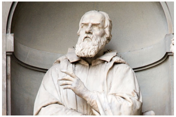


Gravimétrie

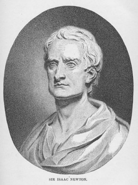
Mécanique céleste

1.3 Repères historiques

Galilée (1564–1642)

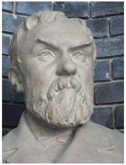


Newton(1643–1727)



Lagrange (1736–1813)

Poincaré (1854–1912)



Kepler (1571–1630)

Laplace (1749–1827)

1.4 Contenu du cours

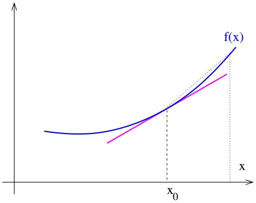
Sommaire

2. Calcul différentiel
2.1 Rappels sur dérivée et intégrale

Dérivée en x_0 de la fonction f

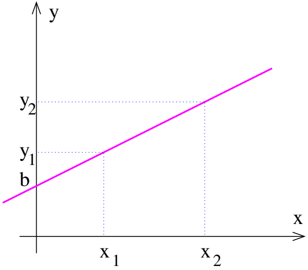
$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{dx \longrightarrow 0} \frac{f(x_0 + dx) - f(x_0)}{dx}$$

Dérivée : pente de la tangente
(limite de la pente d'une corde)
Graphiquement : tangente d'équation
$y = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$



Pente (et unités !)

Droite $y = ax + b$



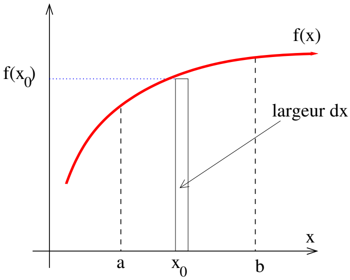
Pente $a = \frac{dy}{dx} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Unité de a : $\frac{\text{unité de y}}{\text{unité de x}}$

Exemple : y masse (en kg) et x volume (en m^3)

a en $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}$ (masse volumique !)

Intégrale

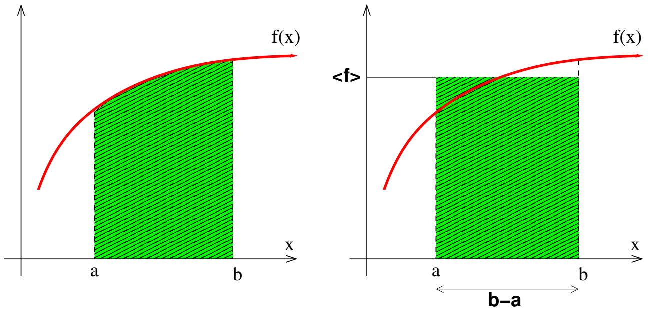


$f(x)\,dx$ aire du rectangle fin

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

représente l'aire entre la courbe et l'axe des x (au signe près)

Valeur moyenne



Égalité des aires : $\int_a^b f(x)\,dx = \langle f \rangle \times (b-a)$

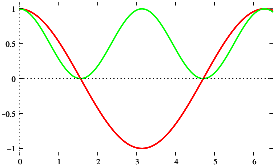
Valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a; b]$

$$\langle f \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$

Valeur moyenne

Exemple

Déterminer sur $[0;2\pi]$ les valeurs moyennes de $\langle \cos x \rangle$ et $\langle \cos^2 x \rangle$



$$\langle \cos x \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos x dx = \frac{1}{2\pi}\left[\sin x\right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\left\langle \cos^2 x \right\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right) dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x}{2}+\frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}$$

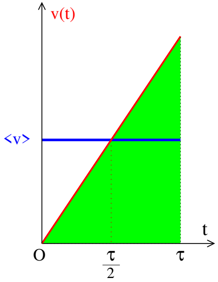
Valeur moyenne

Exemple 2

Déterminer la valeur moyenne $\langle v \rangle$ de la vitesse $v(t) = at$ (a constante, t variable) sur l'intervalle $[0; \tau]$.

$$\langle v \rangle = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau at\,dt = \frac{1}{\tau}\left[\frac{1}{2}at^2\right]_0^\tau = \frac{1}{2}a\tau$$

Résultat prévisible : fonction linéaire
Moyenne temporelle !



2.2 Différentielle d'une fonction

f fonction de plusieurs variables $f(x, y)$

Définition

$$df = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_y dx + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_x dy$$

$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_y$ notation utilisée pour la dérivée partielle de f par rapport à la variable x (y étant alors constant).

Cas d'une seule variable

$$df = f'(x)\, dx$$

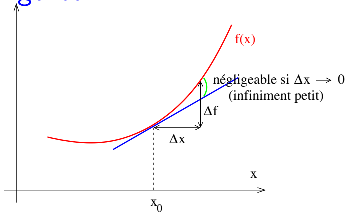
df et dx sont des quantités infinitésimales (infiniment petites)
Interprétation : $f'(x)$ représente un facteur d'impact

2.2 Différentielle d'une fonction

Cas d'une seule variable

$df = f'(x)\,dx$

Graphiquement : tangente



Δf bien approximé par df si Δx suffisamment petit

Conclusion :

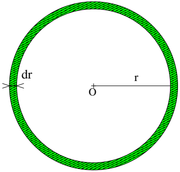
La différentielle d'une grandeur en est une quantité infinitésimale.
Elle peut représenter la variation infinitésimale de cette grandeur.
Elle permet une estimation approchée de petites variations.

Exemples

Exemple 1

Si S est la surface d'un disque de rayon r que représente dS ?

$S = \pi r^2$ donc $dS = 2\pi r dr$. représente une petite variation de surface : couronne hachurée en vert. Si on la découpe on obtient approx. un rectangle de côtés $2\pi r$ (périmètre) et dr.



Exemple 2

Retrouver l'expression de la surface S d'un disque de rayon R

$dS = 2\pi r dr$

On somme (intégration) toutes les aires infinitésimales des couronnes pour obtenir la surface totale :

$$S = \int_{r=0}^{r=R} dS = \int_0^R 2\pi r dr = 2\pi \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R = \pi R^2$$

Exemples

Exemple 3

Estimer l'écart entre $\sqrt{62}$ et $\sqrt{64}$ (sans calculatrice !)

$\sqrt{64} = 8$ sans approx.
Approx : 62 représente une variation petite par rapport à 64
On considère la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 64$ avec $dx = -2$
Alors ✷— $df = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$.
Numériquement $df = \frac{(-2)}{2\times\sqrt{64}} = \frac{-1}{8} = -0,125$
Conclusion : $\sqrt{62} \simeq 7,875$ résultat approché ! (comparer à 7,874008...)

Exemples

Exemple 4

Plein d'essence fait avec un volume de carburant $V = 50 \pm 1\,\mathrm{L}$ et un prix au litre $p = 1,40 \pm 0,02\,€/\mathrm{L}$.
Coût C du plein et incertitude ΔC ?

$C = pV$ donc $C = 70\,€$.
On connaît ΔV et Δp.
$d\left[\ln(C)\right] = d\left[\ln(p) + \ln(V)\right]$ càd $\frac{dC}{C} = \frac{dp}{p} + \frac{dV}{V}$
Passage aux incertitudes (relatives) : $\frac{\Delta C}{C} = \frac{\Delta p}{p} + \frac{\Delta V}{V}$
$\frac{\Delta C}{C} = \frac{0{,}02}{1{,}40} + \frac{1}{50} = 0,0143 + 0,02 = 0,0343$
Donc C connu à 3,4% près.
Conclusion $C = 70,0 \pm 2,4\,€$

2.3. Prolongement : développements limités

Au voisinage d'un point x_0

Développement limité d'une fonction f = polynôme représentant une bonne **approximation des variations de** f

$\dashrightarrow$ f remplacée par une autre fonction plus simple

Tangente = polynôme de degré 1 = approximation précédente
$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$

Pour raffiner on ajoute des termes en $x - x_0$ de puissance à chaque fois plus grande donc chacun négligeable au voisinage de x_0 par rapport au précédent

Formule de Taylor

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

Exemples

Exemple 1

Retrouver le résultat de l'exemple 3 du 2.2 avec un DL.

$\sqrt{62} = \sqrt{64 \times \left(1 - \frac{2}{64}\right)} = 8 \times \sqrt{1 - \frac{1}{32}}$

Comme $\frac{1}{32} \ll 1$ on utilise le DL de la fonction

$f\left(x\right) = \sqrt{1 - x} = \left(1 - x\right)^{\frac{1}{2}}$ à l'ordre 1 au voisinage de $x = 0$:

$\left(1 - x\right)^{\frac{1}{2}} \simeq 1 - \frac{x}{2}$

Donc $\sqrt{62} \simeq 8 \times \left(1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{32}\right) = 7,875$

Justification du DL ✷— : formule de Taylor :

$f\left(x\right) = f\left(0\right) + xf'\left(0\right)$ avec $f'\left(x\right) = -\frac{1}{2}\left(1 - x\right)^{-\frac{1}{2}}$

Exemples

Exemple 2

Approximation des petits angles $\sin x \simeq x$ (en rad)
Valable avec écart inférieur à 1% tant que x inférieur à ?

✷—DL au voisinage de $x = 0$ à l'ordre 3 de $\sin x$ (f^{n} impaire) :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6}$$

Terme supplémentaire $\frac{x^3}{6}$ doit être inférieur à 1% de x :

$$\frac{x^3}{6} \leq 0,01x$$

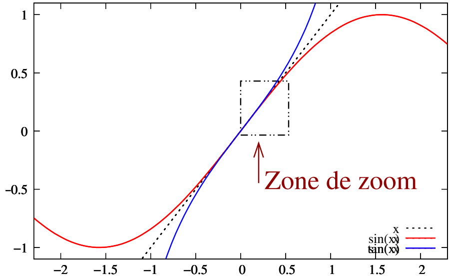
$$x^2 \leq 0,06$$

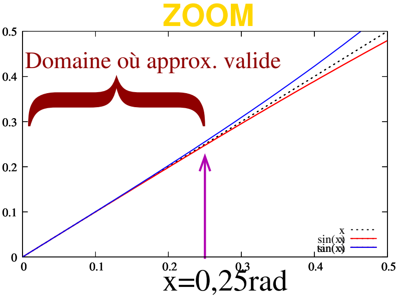
$$x \leq 0,245\,\text{rad}\ (x \leq 14^\circ)$$

Exemples

Exemple 2

Approximation des petits angles





Si $x \leq 0,25$ rad (14°) alors $\sin x = x$ et $\tan x = x$ à 1% et 2% près.

3. Équations différentielles

Résolution des équations différentielles rencontrées en mécanique

- équations différentielles linéaires à coefficients constants :
  méthode générale de résolution
  1er ordre : forme des solutions à connaître
  2ème ordre : cf chap. 5
- séparation des variables
- ou suivre l'énoncé

Utiliser les conditions initiales (**CI**)

déterminent en mécanique de manière unique la solution de l'équation différentielle

3.1 Équations différentielles linéaires à coefficients constants

`Variables notées z et t`

Équation du 1er ordre

Forme de référence : $\frac{dz}{dt} + az = b$ où a et b constants $z' + az = b$

Forme générale des solutions

$z(t) = Ke^{-at} + \frac{b}{a}$ où K constante déterminée par les CI

Exemple (Ph100)

Déterminer loi $i(t)$ vérifiant $L\frac{di}{dt} + Ri - E = 0$ sachant $i(0) = 0$

Forme de référence $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}$
Forme générale des solutions
$i(t) = \frac{E}{R} + Ke^{-\frac{R}{L}t}$

CI : $\frac{E}{R} + Ke^{-\frac{R}{L}0} = 0$ donc $K = -\frac{E}{R}$
Conclusion $i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$

3.2 Séparation des variables

À essayer si autre type d'éq. diff. (non linéaire)

Séparer les variables puis intégrer en fonction des CI

Exemple

La mise en équation de la vidange d'un réservoir conduit à l'équation (K constante, x hauteur d'eau) : $\frac{dx}{dt} = -K\sqrt{x}$

CI : à $t = 0$ on a $x = h$.

À quel instant t_0 le récipient est-il vide ?

Séparation $\frac{dx}{\sqrt{x}} = -Kdt$

Intégration (avec CI) $\int_h^0 \frac{dx}{\sqrt{x}} = -K \int_0^{t_0} dt$

Calcul $\left[2\sqrt{x}\right]_h^0 = -Kt_0$

Conclusion $t_0 = \frac{2\sqrt{h}}{K}$