Méthodologie mathématique

Luc Robbiano

avec la collaboration de Maëlle Nodet

Table des matières

Chapitre 1

Logique et raisonnements

Contents

La logique permet formaliser les raisonnements et de s'assurer que ces raisonnements sont justes.

1. Propositions et connecteurs logiques

Une proposition est une affirmation qui peut être "Vraie" ou "Fausse". On appelle la *valeur logique* d'une proposition cette valeur "Vraie" ou "Fausse".

(1) P_1 : Patrick porte une robe rouge.

(2) P_2 : $x \geq 2$.

On note V ou 1 pour Vrai, et F ou 0 pour Faux.

1.1. Connecteurs logiques. Un connecteur logique associe à une ou plusieurs propositions une valeur logique en fonction de la ou des valeurs logiques que prennent les propositions en entrées.

On exprime cela dans un *tableau de vérité*.

Les exemples suivants sont à connaitre.

1.1.1. *Connecteur* Non. Le connecteur *Non* est défini de la façon suivante.

P	non P
V	F
F	V

On lit le tableau de gauche à droite. Si P est Vraie alors non P est Fausse, si P est Fausse alors non P est Vraie. On dit aussi que non P est la négation de la proposition P.

Sur les exemples données ci-dessus on a

(1) non P_1 : Patrick ne porte pas une robe rouge.

(2) non P_2 : $x < 2$.

1.1.2. *Connecteur* Et. Le connecteur *et* est défini de la façon suivante.

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Ici "P et Q" est Vraie si et seulement si P est Vraie et Q est Vraie.

1.1.3. *Connecteur* Ou. Le connecteur *ou* est défini de la façon suivante.

P	Q	P ou Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Il faut faire attention que le "ou" mathématique n'est pas tout à fait le "ou" français qui ne distingue pas le "ou" inclusif du "ou" exclusif. Dans l'expression "fromage ou dessert" on comprend que c'est l'un ou l'autre mais pas les deux. Mais à la douane, on doit avoir "son passeport ou sa carte d'identité". Dans ce dernier cas on ne risque rien si on a les deux.

1.1.4. *Connecteur* $\Rightarrow$. Le connecteur *implique* noté $\Rightarrow$, est défini de la façon suivante.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Ce tableau de vérité ne semble pas très naturel mais sur un exemple significatif on peut voir que c'est ce qu'on attend de l'implication. Soit l'exemple suivant,

$$x \geq 10 \Rightarrow x \geq 5.$$

Cette implication semble naturellement vraie et on va voir que les trois cas où la proposition $P \Rightarrow Q$ est notée Vraie sur le tableau de vérité peuvent se produire.

- Prenons $x = 15$. On a $x \geq 10$ est vraie et $x \geq 5$ est vraie, comme sur la première ligne du tableau de vérité.
- Prenons $x = 7$. On a $x \geq 10$ est fausse et $x \geq 5$ est vraie comme sur la troisième ligne du tableau de vérité.
- Prenons $x = 3$. On a $x \geq 10$ est fausse et $x \geq 5$ est fausse comme sur la quatrième ligne du tableau de vérité.

1.1.5. *Connecteur* $\Leftrightarrow$. Le connecteur *équivalent* noté $\Leftrightarrow$, est défini de la façon suivante.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Le connecteur $\Leftrightarrow$ peut se récrire

$$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow \big((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow P)\big)$$

REMARQUE 1.1. L'implication et l'équivalence ont une grande importance en mathématique. En général les résultats, par exemple les théorèmes, contiennent une implication ou une équivalence. Ils ont la structure suivante.

Sous certaines hypothèses

alors (c'est à dire implique)

on a les conclusions.

On peut aussi avoir la structure suivante.

Certaines hypothèses

équivalentes

à d'autres hypothèses

1.2. Propriétés. On a les propriétés suivantes.

(1) $\big(\text{ non } (\text{ non } P)\big) \Leftrightarrow P$

(2) $\big(\text{ non } (P \text{ et } Q)\big) \Leftrightarrow \big((\text{ non } P) \text{ ou } (\text{ non } Q)\big)$

(3) $\big(\text{ non } (P \text{ ou } Q)\big) \Leftrightarrow \big((\text{ non } P) \text{ et } (\text{ non } Q)\big)$

Vérifier les propriétés (2) et (3) ci-dessus dans le tableau de vérité suivant.

P	Q	P et Q	P ou Q	non P	non Q	(non P) et (non Q)	(non P) ou (non Q)
V	V						
V	F						
F	V						
F	F						

Dans un tableau logique, deux propositions sont équivalentes si les deux colonnes ont une succession de "V" et de "F" identique. Dans le tableau ci-dessus la troisième colonne "P et Q" est exactement l'opposée de la dernière colonne "(non P) ou (non Q)" ce qui démontre la propriété (2). De même pour les colonnes "P ou Q" et "(non P) et (non Q)".

1.2.1. *Propriétés des connecteurs "ou" et "et".* Les connecteurs "ou" et "et" sont *commutatifs*, *associatifs* et ils se *distribuent* l'un sur l'autre. On a les propriétés suivantes pour P, Q et R trois propriétés.

(1) $(P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ ou } P)$
(2) $(P \text{ et } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ et } P)$
(3) $\big(P \text{ et } (Q \text{ et } R)\big) \Leftrightarrow \big((P \text{ et } Q) \text{ et } R\big)$
(4) $\big(P \text{ ou } (Q \text{ ou } R)\big) \Leftrightarrow \big((P \text{ ou } Q) \text{ ou } R\big)$
(5) $\big(P \text{ et } (Q \text{ ou } R)\big) \Leftrightarrow \big((P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)\big)$
(6) $\big(P \text{ ou } (Q \text{ et } R)\big) \Leftrightarrow \big((P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)\big)$

Les propriétés (1) et (2) sont les propriétés de *commutativité*, les propriétés (3) et (4) *d'associativité* et les propriétés (5) et (6) sont les propriétés de *distributivité.*

1.2.2. *Contraposée.* On appelle la *contraposée* de la proposition $P \Rightarrow Q$ la proposition $(\text{ non } Q) \Rightarrow (\text{ non } P)$. En fait on a le résultat suivant

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \big((\text{ non } Q) \Rightarrow (\text{ non } P)\big).$$

Sur l'exemple significatif donné plus haut on a

$$x \geq 10 \Rightarrow x \geq 5,$$

et la contraposée est

$$x < 5 \Rightarrow x < 10.$$

Vérifier l'équivalence de $P \Rightarrow Q$ avec sa contraposée en complétant le tableau de vérité suivant.

P	Q	non Q	non P	$P \Rightarrow Q$	$(\text{ non } Q) \Rightarrow (\text{ non } P)$
V	V				
V	F				
F	V				
F	F				

Remarque 1.2. La contraposée d'un proposition est souvent utilisée dans un raisonnement mathématique. Suivant les situations il est parfois plus facile de démontrer "$P \Rightarrow Q$" et quelque fois "$(\text{ non } Q) \Rightarrow (\text{ non } P)$". De même si on sait que "$P \Rightarrow Q$" est Vraie, il peut être utile de déduire "$(\text{ non } P)$" si on sait que Q est Fausse.

1.2.3. *Négation de $\Rightarrow$.* La négation de l'implication est tout sauf intuitive. Cette propriété est pourtant bien utile si on veut démontrer qu'une implication $P \Rightarrow Q$ est fausse.

(1) $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \big((\text{ non } P) \text{ ou } Q\big)$
(2) $\big(\text{ non } (P \Rightarrow Q)\big) \Leftrightarrow \big(P \text{ et } (\text{ non } Q)\big)$

La propriétés (2) se déduit de (1) en appliquant les règles de calcul de négation du connecteur " ou ".

La négation de l'implication peut se voir de la façon suivante, le seul cas où l'implication $P \Rightarrow Q$ est fausse est si on a P mais on n'a pas Q, c'est-à-dire P et (non Q). Vérifier la propriété ci-dessus en complétant le tableau de vérité suivant.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	non $(P \Rightarrow Q)$	non Q	P et non Q
V	V				
V	F				
F	V				
F	F				

1.2.4. *Négation de* $\Leftrightarrow$. La négation de $\Leftrightarrow$ ne doit pas être retenue par cœur mais on doit savoir la retrouver. On a

$$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow \big((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow P)\big),$$

d'où

$$\begin{aligned} \text{non } (P \Leftrightarrow Q) &\Leftrightarrow \text{ non } \big((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow P)\big) \\ &\Leftrightarrow (\text{ non } (P \Rightarrow Q)) \text{ ou } \text{ non } (Q \Rightarrow P) \\ &\Leftrightarrow (P \text{ et } \text{ non } Q) \text{ ou } (Q \text{ et } \text{ non } P). \end{aligned}$$

1.3. Démonstration.

1.3.1. *Démonstration par l'absurde.* La démonstration par l'absurde consiste à démontrer que

$$(\text{ non } P) \Rightarrow Q,$$

et si Q est une proposition "Fausse" alors P est "Vraie".

Formellement on peut l'écrire

$$\Big(\big((\text{ non } P) \Rightarrow Q\big) \text{ et } (\text{ non } Q)\Big) \Rightarrow P,$$

Un exemple est donné par le principe des tiroirs[1]. Si vous avez n chaussettes à répartir dans m tiroirs et $n > m$ alors un tiroir doit contenir au moins deux chaussettes. En effet si on suppose que chaque tiroir a au plus une chaussette, le nombre de tiroir doit être supérieur ou égal au nombre de chaussettes, c'est-à-dire $m \geq n$. Ce qui est contradictoire avec $n > m$.

1. Voir le principe des tiroirs sur Wikipédia

2. Quantificateurs

On a vu plus haut que des propositions peuvent dépendre de paramètres, comme "$x \geq 10$". Cette proposition n'est pas très précisément énoncée car on ne dit pas qui est "x". On a prudemment fait semblant de penser que x était un réel ou un entier. Cela n'avait pas d'importance pour l'usage qu'on voulait en faire. En général il est nécessaire de préciser dans quel ensemble se trouve x. En effet certaine proposition peuvent changer de valeur logique si on change l'ensemble ou les ensembles des paramètres. Prenons un exemple

$$(x > 4) \Rightarrow (x \geq 5)$$

est Vraie si x est un entier, mais est Fausse si x est un réel.

Si une proposition dépend de x on notera P_x ou $P(x)$. Si la proposition dépend de plusieurs paramètres x, y et z, on notera $P_{x,y,z}$ ou $P(x, y, z)$.

2.1. Définition. Quand une proposition dépend d'un ou plusieurs paramètres, la valeur logique dépend naturellement de la valeur des paramètres. Mais, il y a pire, elle dépend aussi si on demande que la proposition soit vraie pour tout un groupe de paramètres ou au contraire pour un des paramètres du groupe.

Pour préciser cela, nous introduisons deux *quantificateurs*, le quantificateur *d'existence*, noté $\exists$, et se lit "il existe" et le quantificateur *universel*, noté $\forall$, se lit "pour tout" ou "quel que soit". Ainsi la proposition

$$\exists x \in A, P(x),$$

se lit "il existe un élément x dans l'ensemble A tel que $P(x)$". Cette proposition est "Vraie" si on peut trouver un élément x dans l'ensemble A tel que $P(x)$ soit "Vraie".

Sur un exemple cela sera plus clair,

$$\exists x \in \mathbb{N}, x \geq 5,$$

se lit "il existe un entier positif plus supérieur ou égal à 5". Remarquons que cette proposition est Vraie.

La proposition

$$\forall x \in A, P(x),$$

se lit "Pour tout élément x dans l'ensemble A on a $P(x)$". Cette proposition est vraie si quel que soit l'élément x dans l'ensemble A la proposition $P(x)$ est toujours "Vraie".

Sur un exemple cela sera plus clair,

$$\forall x \in \mathbb{N}, x \geq 5,$$

se lit "tout entier positif est supérieur ou égal à 5". Remarquons que cette proposition est Fausse.

On remarque sur ce simple exemple que le fait de changer de quantificateur peut changer, et en général change, la valeur logique de la proposition.

Remarquons aussi que la traduction d'une proposition écrite en français comme "tout entier positif est supérieur ou égal à 5" en proposition mathématique "$\forall x \in \mathbb{N}, x \geq 5$," peut poser problème car le "x" est seulement implicite dans la phrase en français. Une traduction littérale de la proposition "$\forall x \in \mathbb{N}, x \geq 5$," serait "pour tout entier positif x, x est supérieur ou égal à 5" ce qui donne une phrase correcte mais moins naturelle.

2.2. Négation des quantificateurs. Il ne s'agit pas ici de nier l'existence des quantificateurs mais de nier une proposition contenant différents types de quantificateurs.

2.2.1. *Négation de l'appartenance.* Commençons par le cas le plus simple, soit "$P(x) : x \in A$". La négation de $P(x)$ est donnée par

$$\text{non } P(x) \Leftrightarrow x \notin A.$$

Le contraire de "x est un élément de A" est "x n'est pas un élément de A". Cela semble naturel mais il ne faut pas confondre avec les négations qu'on va voir dans les deux paragraphes suivants.

Par exemple

$$\text{non } (x \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow x \notin \mathbb{N}$$
$$\text{non } (x \geq 5) \Leftrightarrow (x < 5).$$

La deuxième ligne doit se comprendre comme

$$\text{non } (x \in \{y \in \mathbb{R},\ y \geq 5\}) \Leftrightarrow (x \notin \{y \in \mathbb{R},\ y \geq 5\}) \Leftrightarrow (x \in \{y \in \mathbb{R},\ y < 5\}).$$

Ici on a précisé que $x \in \mathbb{R}$ mais on aurait pu prendre x dans un autre ensemble, $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$, par exemple.

2.2.2. *Négation de l'existence.* Soit $P(x)$ une proposition qui dépend de x, et soit la proposition "$P : \exists x \in A, P(x)$". La négation de P est donnée par

$$\text{non } P \Leftrightarrow (\forall x \in A,\ \text{non } P(x)).$$

Le contraire de "il existe un élément x de A tel que $P(x)$" est "pour tout élément x de A, on n'a pas $P(x)$".

Par exemple

$$\text{non } (\exists x \in \mathbb{N}, x \geq 5) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{N}, x < 5).$$

Bien sûr la proposition "$\forall x \in \mathbb{N}, x < 5$" est Fausse car si on prend $x = 1234893$ on a $x \geq 5$ et $x \in \mathbb{N}$, donc la proposition "$\exists x \in \mathbb{N}, x \geq 5$" est Vraie. Nous laissons le soin à l'étudiant de trouver un élément x plus simple mais par exemple $x = 11/2$ ne convient pas car ce $x \notin \mathbb{N}$.

2.2.3. *Négation de l'universel.* Soit $P(x)$ une proposition qui dépend de x, et soit la proposition "$P : \forall x \in A, P(x)$". La négation de P est donnée par

$$\text{non } P \Leftrightarrow (\exists x \in A,\ \text{non } P(x)).$$

La négation de la proposition "pour tout élément x de A tel qu'on a $P(x)$" est "il existe un élément x de A, tel qu'on n'a pas $P(x)$". On peut se rendre compte que ce qu'on vient de voir se déduit du paragraphe précédent et des règles qu'on a vu sur le connecteur "non".

$$\text{non } (\forall x \in \mathbb{N}, x \geq 5) \Leftrightarrow (\exists x \in \mathbb{N}, x < 5).$$

Ici la proposition "$\exists x \in \mathbb{N}, x < 5$" est Vraie, par exemple $x = 3 \in \mathbb{N}$ convient.

Remarque 1.3. Il est important de noter qu'on a

$$\begin{aligned}
&\text{non } (x \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow (x \notin \mathbb{N})\\
&\text{non } (\exists x \in \mathbb{N}, x \geq 5) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{N}, x < 5)\\
&\text{non } (\forall x \in \mathbb{N}, x \geq 5) \Leftrightarrow (\exists x \in \mathbb{N}, x < 5).
\end{aligned}$$

On insiste sur le fait que sur les deuxième et troisième lignes on a toujours "$x \in \mathbb{N}$" contrairement à ce qu'on a sur la première ligne.

2.3. Suite de quantificateurs. On a très fréquemment des propositions qui contiennent une suite alternée de quantificateurs d'existences et universels [2]. Un exemple typique est la définition de la continuité d'une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en un point $x_0 \in \mathbb{R}$, qui est donnée par

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{1}$$

2.3.1. *C'est un jeu.* Une telle suite de quantificateurs a une interprétation en théorie des jeux, jeux où le hasard n'intervient pas comme aux échecs, aux dames, au go, etc.

Prenons un exemple à 4 quantificateurs pour simplifier et $P(x, y, z, t)$ est une proposition dépendant de 4 paramètres

$$\exists x, \forall y, \exists z, \forall t, P(x, y, z, t),$$

ici le premier joueur gagne si la proposition est "Vraie" et on peut lire la phrase de la façon suivante, "le premier joueur a un coup x, tel que pour tout coup y du deuxième joueur, le premier joueur a un coup z gagnant quel que soit le coup suivant t du deuxième joueur".

L'exemple suivant où on inverse l'ordre des quantificateurs,

$$\forall x, \exists y, \forall z, \exists t, P(x, y, z, t),$$

le deuxième joueur gagne si la proposition est Vraie. On peut lire la phrase de la façon suivante, "quel que soit le coup x du premier joueur, le deuxième joueur a un coup y tel que quel que soit le deuxième coup z du premier joueur, le deuxième joueur a un coup gagnant t".

En mathématique comme pour un jeu, tous les coups ne sont pas permis il faudrait plutôt écrire la phrase mathématique de la façon suivante

$$\forall x \in A, \exists y \in B_x, \forall z \in C_{x,y}, \exists t \in D_{x,y,z}, P(x, y, z, t),$$

où A, B_x $C_{x,y}$ $D_{x,y,z}$ sont des ensembles qui dépendent en général des coups précédemment joués.

2. En général on considère que s'il y a une alternance de plus de 4 quantificateurs ça devient incompréhensible même pour un mathématicien professionnel.

2.3.2. *Exemples d'application.* Reprenons l'exemple de la continuité (1), on peut lire la phrase ainsi, si l'application f est continue en x_0, "pour tout choix de $\varepsilon > 0$ du premier joueur, le deuxième joueur à un choix $\delta > 0$, tel que pour tout choix de $x \in \mathbb{R}$ du premier joueur, l'implication est Vraie, si le premier joueur a bêtement choisi un x qui ne vérifie pas $|x - x_0| < \delta$ alors l'implication est Vraie, s'il a choisi un x qui vérifie $|x - x_0| < \delta$ alors $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Il est assez facile de vérifier que le premier joueur a intérêt de choisir un ε aussi petit que possible pour mettre le deuxième joueur en difficulté. Le deuxième joueur doit choisir un δ d'autant plus petit que ε l'est.

La négation de la proposition (1) est d'un grand intérêt si on veut démontrer qu'une application f n'est pas continue en x_0. Il suffit d'appliquer les règles vues plus haut. On rappelle que $\big(\text{ non } (P \Rightarrow Q)\big) \Leftrightarrow (P \text{ et } \text{ non } Q)$. On obtient donc que f n'est pas continue en x_0 si et seulement si

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \delta \text{ et } |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

Ici le premier joueur a un bon coup $\varepsilon > 0$, tel que pour tout choix $\delta > 0$ di deuxième joueur, le premier joueur à un choix de $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $|x - x_0| < \delta$ et $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. Le choix de x du premier joueur va dépendre de δ, car le premier joueur ne peut pas prendre $x = x_0$.

Remarque 1.4. Cet exemple illustre le type de raisonnements qu'on est amené à faire pour démontrer qu'une propriété n'est pas vérifiée, dans l'exemple ci-dessus la continuité. Pour démontrer qu'une propriété est fausse on démontre que sa négation est vraie. Toutes les propriétés qu'on a vues sont très utiles pour réaliser cela.

Chapitre 2

Ensembles et applications

Contents

1. Les ensembles

Dans le chapitre précédent nous avons déjà un peu parlé et utilisé le langage des ensembles. Il est en effet difficile de faire quoi que ce soit en mathématique sans utiliser la notion d'ensemble.

Nous n'allons pas faire une théorie formelle des ensembles pour plusieurs raisons, c'est quand même bien compliqué et nous n'en aurons pas besoin de sitôt. Par contre il est très utile de connaitre le langage de la théorie des ensembles. Néanmoins il reste qu'il y a des pièges, traquenards et autres chausse-trappes [1]. Pour les éviter, il suffit de n'appliquer que quelques règles [2] à des "collections" d'objets qui sont connus et reconnus comme des ensembles. Pour faire simple, toute collection finie d'objets est un ensemble, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}$, sont les ensembles de base que nous considérerons. Un ensemble E contient des *éléments* et si a est un élément de E, on note

$$a \in E.$$

Il faut remarquer qu'il existe un ensemble très particulier, celui qui ne contient aucun élément, on l'appelle *l'ensemble vide* et on le note $\emptyset$.

1. Un exemple de "collection" qui n'est pas un ensemble est la "collection" de tous les ensembles, appelé d'une façon volontairement erronée "l'ensemble de tous les ensembles". Voir le paradoxe de Russell. Pour éviter ce paradoxe si E est un ensemble la proposition $E \in E$ est toujours Fausse.

2. Pour être rigoureux il faudrait plutôt parler "d'axiomes" mais "règles" est plus informel, ce qui est le but modeste de ce cours

1.1. Parties d'un ensemble. Un ensemble E contient des éléments et une "collection" de certains de ces éléments est toujours un ensemble. Une telle "collection" notée A est appelé *sous-ensemble* de E et on note

$$A \subset E,$$

phrase mathématique qu'on lit "A est inclus dans E".

On introduit l'ensemble des parties de E [3] que l'on note $\mathcal{P}(E)$. On peut bien sûr ré-itérer le procédé et $\mathcal{P}\big(\mathcal{P}(E)\big)$, $\mathcal{P}\Big(\mathcal{P}\big(\mathcal{P}(E)\big)\Big)$, etc. sont des ensembles.

1.1.1. *Opérations sur les ensembles.* Dans $\mathcal{P}(E)$, on définit plusieurs opérations pour $A \subset E$ et $B \subset E$:

La *réunion* de A et B que l'on note, $A \cup B$ est définie par

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A) \text{ ou } (x \in B),$$

et on lit "A union B".

L'intersection de A et B que l'on note, $A \cap B$ est définie par

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A) \text{ et } (x \in B),$$

et on lit "A inter B".

Le *complémentaire* [4] de A, que l'on note $\complement_E A$ ou plus simplement $\complement A$ si l'ensemble de référence E est fixé, est défini par

$$x \in \complement_E A \Leftrightarrow (x \notin A) \text{ et } (x \in E),$$

se lit "le complémentaire de A dans E" ou plus simplement "le complémentaire de A".

Voir la figure 1 pour une représentation des ensembles $A \cup B$, $A \cap B$ et $\complement A$. Donnons quelques exemples dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
&[1,4] \cup [3,5] = [1,5], \quad [1,4[\cup[3,5] = [1,5], \quad [1,4[\cup[3,5[= [1,5[,\\
&[1,4] \cap [3,5] = [3,4], \quad [1,4[\cap[3,5] = [3,4[, \quad [1,4[\cap[3,5[= [3,4[,\\
&\complement[1,4] =]-\infty,1[\cup]4,+\infty[, \quad \complement]1,4] =]-\infty,1]\cup]4,+\infty[.
\end{aligned}$$

3. Cette "collection" des parties de E est donc un ensemble.

4. D'autres notations sont utilisées pour le complémentaire comme A^C, ${}^C A$, $\overline{A}$, $E \setminus A$. Les trois premieres ont le défaut de ne pas permettre de noter l'ensemble de référence E si nécessaire. La quatrième est une alternative plus intuitive à la notation $\complement_E A$. Tester les autres notations sur les exemples donnés dans la suite de ce cours et vous verrez que la notation $\complement$ n'est pas la plus désagréable.

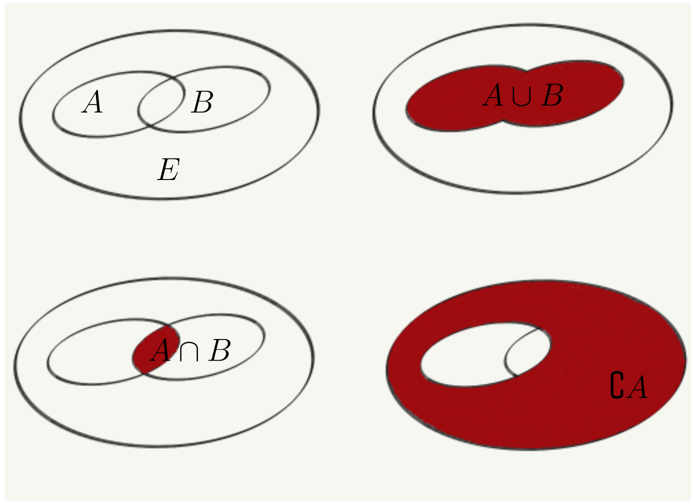

FIGURE 1. En haut à gauche on a la définition des ensembles E, A et B, puis de haut en bas et de gauche à droite, on a en rouge $A \cup B$, $A \cap B$ et $\complement A$.

1.1.2. *Propriétés.* Au vu des définitions précédentes, $\cup$, $\cap$ et $\complement$ sont intimement liés à respectivement "ou", "et", "non". On déduit de ce lien les propriétés algébriques suivantes (voir paragraphe 1.2).

$$\begin{aligned}
&\complement\complement A = A\\
&\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B\\
&\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B
\end{aligned}$$

et du paragraphe 1.2.1

$$\begin{aligned}
&A \cup B = B \cup A\\
&A \cap B = B \cap A\\
&A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C\\
&A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C\\
&A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)\\
&A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).
\end{aligned}$$

La réunion et l'intersection entre ensemble sont des propriétés commutatives, et l'intersection se distribue sur la réunion, de même la réunion se distribue sur l'intersection.

Propriétés entre la réunion, l'intersection de l'inclusion. On a

$$\begin{aligned}
&A \subset C \text{ et } B \subset C \Rightarrow A \cup B \subset C\\
&A \subset B \text{ et } A \subset C \Rightarrow A \subset B \cap C.
\end{aligned}$$

1.1.3. *Égalité entre ensembles.* La démonstration que deux ensembles sont égaux peut se révéler délicate. Il est souvent plus simple d'utiliser la propriété suivante

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B) \text{ et } (B \subset A).$$

Comme pour la réunion et l'intersection, l'inclusion est relié à l'implication, en effet on a

$$A \subset B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Donnons un exemple, démontrons que $[1,4] \cup [3,5] = [1,5]$.

$$\text{On a } [1,4] \subset [1,5] \text{ et } [3,5] \subset [1,5] \text{ donc } [1,4] \cup [3,5] \subset [1,5].$$

Démontrons maintenant l'inclusion $[1,5] \subset [1,4] \cup [3,5]$.

$$\begin{aligned}
&\text{Soit } x \in [1,5] \Rightarrow 1 \leq x \leq 5 \text{ alors}\\
&\text{si on a } 1 \leq x \leq 4 \text{ alors } x \in [1,4], \text{ si on a } 4 < x \leq 5 \text{ alors } x \in [3,5]\\
&\text{donc } x \in [1,4] \text{ ou } x \in [3,5] \Rightarrow x \in [1,4] \cup [3,5]\\
&\text{on a donc } [1,5] \subset [1,4] \cup [3,5].
\end{aligned}$$

Remarque 2.1. C'est une faute grave qui révèle une grande incompréhension de celui ou celle qui la fait d'écrire entre deux ensembles A et B, "$A \Leftrightarrow B$" ou entre deux propositions P et Q, "$P = Q$". De même il ne faut pas confondre $\Rightarrow$ et $\subset$. Dire qu'il y a un lien ne veut pas dire que c'est du pareil au même.

1.2. Autres opérations. On a vu dans la partie précédente une façon de construire un ensemble à partir d'un ensemble, c'est-à-dire une partie d'un ensemble est un ensemble. Dans cette partie on va voir deux autres façons.

1.2.1. *Produits d'ensembles.* Soit deux ensembles E_1 et E_2, on définit $E_1 \times E_2$ de la façon suivante.

$$z \in E_1 \times E_2 \leftrightarrow (\exists x \in E_1 \text{ et } \exists y \in E_2,\ z = (x,y)).$$

À partir de cette définition on peut construire pour des ensembles $E_1, \dots, E_n$,

$$E_1 \times E_2 \times E_3 = (E_1 \times E_2) \times E_3,$$

et plus généralement

$$E_1 \times \cdots \times E_n = (E_1 \times \cdots \times E_{n-1}) \times E_n.$$

On peut ainsi construire $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, etc. Plus généralement, on note pour un ensemble E, $E^2 = E \times E$, $E^3 = E \times E \times E$, etc.

1.2.2. *Ensemble d'applications.* Soit deux ensembles E et F. On dit que f est une *application* de E dans F, notée $f : E \to F$, si pour tout élément x de E on lui associe un unique élément de y de F. On note $y = f(x)$. L'ensemble E est appelé ensemble de *départ* de l'application f. L'ensemble F est appelé ensemble *d'arrivée* de l'application f. L'élément y de F est appelé *image* de x et x est un *antécédent* de y. On note $x \mapsto y = f(x)$. En général un élément de l'ensemble d'arrivée peut avoir plusieurs antécédents, mais il peut aussi n'avoir aucun antécédent. On a construit un nouvel ensemble qui est l'ensemble des applications de E dans F. On note cet ensemble F^E. Par exemple $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ est l'ensemble des suites infinies

$$(x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots) \text{ où } x_n \in \mathbb{R},\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ est l'application } \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ n \mapsto x_n.$$

Non verrons plus bas des opérations et des définitions sur les applications (voir partie 2).

1.3. Matériel supplémentaire. Ici nous donnons quelques éléments qui ne font pas partie du cours mais qui peuvent servir.

1.3.1. *Relations.* Soit E_1 et E_2 deux ensembles (éventuellement $E_1 = E_2$). Soit A une partie de $E_1 \times E_2$. On dit que $x \in E_1$ est en relation avec $y \in E_2$, et on note

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (x, y) \in A.$$

Par exemple une application $f : E_1 \to E_2$ est une relation. On pose

$$A = \{(x, y) \in E_1 \times E_2,\ y = f(x)\},$$

pour une application cet ensemble A est appelé le *graphe* de f.

Sur $\mathbb{R}$, $\leq,\ <,\ \geq,\ >$ sont des relations. Par exemple l'ensemble $A \subset \mathbb{R}^2$ associé à $\leq$ est $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leq y\}$.[5]

1.3.2. *Relations d'équivalence.* Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation sur E, on dit que $\mathcal{R}$ est une *relation d'équivalence* si elle vérifie les trois propriétés suivantes,

(1) $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$ (propriété de *réflexivité*)

(2) $\forall x \in E$ et $\forall y \in E, (x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x)$ (propriété de *symétrie*)

(3) $\forall x \in E, \forall y \in E$ et $\forall z \in E, (x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z)$ (propriété de *transitivité*)

Un exemple sur $\mathbb{N}^2$ on définit $\mathcal{R}$ de la façon suivante

$$(p, q)\mathcal{R}(n, m) \Leftrightarrow p + m = q + n.$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

5. Ici on considère que nous connaissons "$\leq$" a priori et on "calcule" l'ensemble "A" associé.

1.3.3. *Relations d'ordre.* Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation sur E, on dit que $\mathcal{R}$ est une *relation d'ordre* si elle vérifie les trois propriétés suivantes,

(1) $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$ (propriété de *réflexivité*)

(2) $\forall x \in E$ et $\forall y \in E, (x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$ (propriété *d'antisymétrie*)

(3) $\forall x \in E, \forall y \in E$ et $\forall z \in E, (x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z)$ (propriété de *transitivité*)

On dit aussi qu'une relation d'ordre est une *relation d'ordre total* si de plus on a

$$\forall x \in E \text{ et } \forall y \in E, (x\mathcal{R}y \text{ ou } y\mathcal{R}x)$$

Par exemple on peut vérifier que sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, les relations $\leq$ et $\geq$ sont des relations d'ordre total.

Un autre exemple important est le suivant. Soit E un ensemble, sur $\mathcal{P}(E)$ la relation $\subset$ est une relation d'ordre, mais cette relation n'est pas totale [6].

2. Applications

2.1. Propriétés des applications. Dans la suite de cette partie on se placera dans le cadre suivant, soit des ensembles E et F et une application $f : E \to F$.

2.1.1. *Injection.* On dit qu'une application f est une *injection* ou f est *injective* si elle vérifie,

$$\forall x \in E, \forall y \in E, (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y).$$

Par exemple

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(n) = n + 2$$

est une injection, en effet si $f(n) = f(p) \Rightarrow n + 2 = p + 2 \Rightarrow n = p$.

Quand on définit une application par une formule, la propriété d'injectivité peut dépendre de l'ensemble E sur lequel on définit l'application. Par exemple $f(x) = x^2$.

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(n) = n^2$ est une application injective,

$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N},\ f(n) = n^2$ n'est pas une application injective $(f(-2) = f(2))$.

2.1.2. *Surjection.* On dit qu'une application f est une *surjection* ou f est *surjective* si elle vérifie,

$$\forall y \in F, \exists x \in E,\ f(x) = y.$$

Dans la pratique il s'agit souvent de résoudre une équation, on se donne $y \in F$ et on cherche $x \in E$ vérifiant $f(x) = y$.

Comme pour l'injectivité, quand on définit f par une formule, la propriété de surjectivité dépend des ensembles E et F, par exemple

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(n) = n + 2,$ n'est pas surjective car 1 n'a pas d'antécédent.

$f : \mathbb{N} \to \{n \in \mathbb{N},\ n \geq 2\}, f(n) = n + 2,$ est surjective.

6. Sauf si E est un singleton, c'est-à-dire un ensemble à un seul élément, ou l'ensemble vide. Accordons nous sur le fait que ce ne sont pas les cas d'ensembles les plus intéressants.

2.1.3. *Bijection.* On dit que f est une *bijection* ou f est bijective si et seulement si f est injective et surjective.

Quand f est une bijection on peut définir *l'application réciproque* [7], (la terminologie sera justifiée plus loin voir 2.2.2) qu'on note f^{-1} qu'on appelle aussi *l'application inverse*. Elle est définie de la façon suivante

$$f^{-1} : F \to E, f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y.$$

Dans tous les cas, qu'on l'appelle réciproque ou inverse, il ne faut pas confondre f^{-1} avec $1/f$, d'une part $1/f$ n'a pas de sens en général sauf si l'ensemble d'arrivée F est un ensemble de nombres, et d'autre part $1/f$ est toujours une application de E dans F si F est un ensemble de nombres. En fait $1/f(x)$ est l'inverse de $f(x)$ mais f^{-1} est l'application réciproque ou l'application inverse de f. Pour lever l'ambiguïté il vaut mieux utiliser la terminologie "application réciproque" pour f^{-1} et parler de l'inverse de $f(x)$ pour $1/f(x)$. En général le contexte permet de distinguer f^{-1} de $1/f$ [8].

Donnons un exemple, soit $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[,\ f(x) = e^x$. L'application f est une bijection et son application réciproque est l'application $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$. On a bien

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in]0, +\infty[,\ (e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y).$$

Attention si on considère e^x comme application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ alors ce n'est pas une bijection, en effet elle n'est pas surjective. Cette application n'admet donc pas d'application réciproque.

2.1.4. *Image.* On appelle *l'image* de f ou *l'image directe* de f, que l'on note $f(E)$ [9], l'ensemble des éléments de F qui ont un antécédent, c'est-à-dire

$$y \in f(E) \Leftrightarrow \exists x \in E,\ f(x) = y.$$

Par exemple $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$, on a $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$.

Un intérêt est qu'on peut toujours transformer une application en application surjective. En effet si $f : E \to F$ alors $g : E \to f(E), \forall x \in E, g(x) = f(x)$ est une application surjective. En général on ne prend pas de gants et on continue de noter g par la lettre f. Il faut néanmoins garder en tête qu'il ne s'agit pas de la même application. Une application étant déterminée par les ensembles E et F et par le lien qu'on définit entre chaque élément de E et un élément de F.

Par extension de la définition si $A \subset E$, on note

$$f(A) = \{y \in F,\ \exists x \in A, f(x) = y\}.$$

En fait si $A \subset E$ on peut définir une nouvelle application qu'on appelle la *restriction* de f à A, que l'on note $f_{|A}$ et qui est définie par

$$\forall x \in A, f_{|A}(x) = f(x).$$

7. L'application réciproque est l'inverse de la composition que nous verrons au paragraphe 2.2

8. Il est vrai aussi que pour $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, on utilise habituellement sans précaution particulière aussi bien la notation $1/a$ ou a^{-1}.

9. Il y a aussi d'autres notations qui dépendent du contexte, par exemple on peut noter l'image $\mathrm{Im}(f)$ en algèbre linéaire.

Il s'agit d'une autre application car $f_{|A} : A \to F$ alors que $f : E \to F$. Ici les deux applications n'ont pas le même ensemble de départ.

2.1.5. *Image réciproque.* Soit $A \subset F$, on appelle *l'image réciproque* de A que l'on note $f^{-1}(A)$ le sous-ensemble de E des éléments dont l'image est dans A. C'est-à-dire

$$f^{-1}(A) = \{x \in E,\ f(x) \in A\}.$$

Dans la pratique l'image réciproque est plus facile à déterminer que l'image. C'est un principe[10] général que l'image réciproque se comporte bien vis à vis de tout un tas de propriétés alors que l'image admet des pathologies.

Remarque 2.2. Attention f^{-1} n'a de sens que si f est une bijection mais $f^{-1}(A)$ où $A \subset F$ a toujours un sens que f soit une bijection ou une application quelconque. Mais il n'y a pas l'ambiguïté car si f est une bijection, $f^{-1}(A)$ peut être vu comme soit l'image réciproque de A par f, soit comme l'image directe de A par f^{-1} et ces deux ensembles sont les mêmes quand f est une bijection.

2.2. Composition et propriétés. Dans cette partie nous considérerons trois ensembles $E,\ F$ et G et deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

2.2.1. *Définition.* On définit la *composition* entre f et g que l'on note $g \circ f : E \to G$ de la façon suivante,

$$\forall x \in E,\ g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Cette définition est cohérente car $f(x)$ est un élément de F et à tout élément y de F, $g(y)$ est bien défini, en particulier si on prend $y = f(x)$.

2.2.2. *Propriétés.* Si $f : E \to F$ est une bijection alors $f^{-1} : F \to E$ est aussi une bijection et on a

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_E \text{ et } f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_F,$$

où Id_E est *l'application identité* de E et est définie par $\forall x \in E,\ \mathrm{Id}_E(x) = x$, de même $\forall y \in F,\ \mathrm{Id}_F(y) = y$.

Si $A \subset G$ alors $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$.

De même si $B \subset E$ alors $g \circ f(B) = f(g(B))$.

Si f et g sont des bijections alors $g \circ f$ est aussi une bijection et

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} : G \to E.$$

Associativité. Si H est un ensemble et $h : G \to H$ alors

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Par contre la commutativité n'est pas vraie, d'une part en général l'expression n'a pas de sens, et d'autre part même quand les expressions ont un sens il est exceptionnel que $g \circ f$ soit égal à $f \circ g$.

10. On appelle un principe un "théorème" faux mais qui est très souvent vérifié et qui nous permet de nous guider dans le dédale des propriétés vraies des fausses.

Élément neutre. On a

$$\mathrm{Id}_F \circ f = f \text{ et } g \circ \mathrm{Id}_E = g.$$

En particulier l'ensemble des bijections de $E \to E$ est un groupe [11].

11. La notion de groupe ne fait pas partie du cours, la propriété n'est juste donnée pour votre culture générale.

Chapitre 3

Nombres complexes

Contents

1. Définitions

La façon la plus simple d'introduire les *nombres complexes* est de définir une quantité qu'on note i et qui vérifie $i^2 = -1$ [1]. Tout nombre complexe s'écrit comme combinaison linéaire [2] de deux nombres sous la forme $x + iy$, on appelle cette forme *forme cartésienne* d'un nombre complexe. On note l'ensemble des nombres complexes par $\mathbb{C}$. En fait $\mathbb{C}$ est comme $\mathbb{R}^2$, car tout nombre complexe est uniquement déterminé par deux nombres réels. Si un nombre complexe s'écrit $x + i0$ on le note simplement x et on le considère comme un nombre réel. En ce sens $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Si un nombre complexe s'écrit $0 + iy$ on le note simplement iy et 0 is $y = 0$. Un nombre complexe de la forme iy est appelé *imaginaire pur*.

1.1. Addition de nombres complexes. La règle de calcul pour l'addition est la suivante $(x+iy)+(a+ib) = (x+a)+i(y+b)$. Toutes les propriétés de l'addition dans $\mathbb{R}$ sont aussi vérifiées dans $\mathbb{C}$. Plus précisément on,

(1) $\forall z \in \mathbb{C}, z + 0 = 0 + z = z$ (0 est l'élément neutre)

(2) $\forall z \in \mathbb{C}, \forall z' \in \mathbb{C}, z + z' = z' + z$ (commutativité)

(3) $\forall z \in \mathbb{C}, \forall z' \in \mathbb{C}, \forall z'' \in \mathbb{C}, (z + z') + z'' = z + (z' + z'')$ (associativité)

---

1. En physique ce nombre i est souvent noté j. Pour simplifier en mathématique la quantité j est utilisé pour une autre valeur. Désolé...

2. La notion de combinaison linéaire sera vue en détail au second semestre mais on peut supposer que vous en avez une idée intuitive de ce que c'est.

(4) $\forall z \in \mathbb{C}, \exists z' \in \mathbb{C},\ z + z' = 0$ si $z = x + iy$ alors $z' = -x + i(-y)$ on note cette quantité $-z = -x - iy$

La quantité $-z = -x - iy$ est appelée *l'opposée* de z.

1.2. Le produit de nombres complexes. Le produit de deux nombres complexes est donné par la table de multiplication suivante

$\times$	1	i
1	1	i
i	i	-1

On a $(x + iy) \times (a + ib) = (xa - yb) + i(xb + ya)$, en fait on écrit comme pour les réels $(x+iy)(a+ib)$. Comme l'addition le produit de deux nombres complexes vérifie toutes les propriétés que vérifie le produit des nombres réels. On a

(1) $\forall z \in \mathbb{C}, z.1 = 1.z = z$ (1 est l'élément neutre)

(2) $\forall z \in \mathbb{C}, \forall z' \in \mathbb{C}, zz' = z'z$ (commutativité)

(3) $\forall z \in \mathbb{C}, \forall z' \in \mathbb{C}, \forall z'' \in \mathbb{C}, (zz')z'' = z(z'z'')$ (associativité)

(4) $\forall z \in \mathbb{C}, \forall z' \in \mathbb{C}, \forall z'' \in \mathbb{C}, z(z' + z'') = zz' + zz''$ (distributivité)

Un nombre complexe non nul admet aussi un inverse pour la multiplication mais nous verrons cela plus loin (voir 1.3.1).

1.3. Conjugaison, module. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ on définit le *conjugué* de z que l'on note $\bar{z}$ par

$$\bar{z} = x - iy.$$

Le conjugué vérifie deux propriétés de compatibilité avec la somme et le produit, $\forall z \in \mathbb{C}, \forall z \in \mathbb{C}$,

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$$
$$\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'.$$

La première propriété se vérifie facilement. Pour la deuxième, on pose $z = x + iy$ et $z' = a + ib$. On a

$$zz' = (xa - yb) + i(xb + ya) \text{ et } \bar{z}\bar{z}' = (x - iy)(a - ib) = (xa - yb) + i(-xb - ya),$$

ce qui donne le résultat.

On a $z\bar{z} = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$ et $z\bar{z} \geq 0$. On définit le *module* de z par

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Il est facile de vérifier que

$$\bar{\bar{z}} = z \text{ et } |\bar{z}| = |z|.$$

Le module vérifie les propriétés suivantes[3].

(1) $\forall z \in \mathbb{C}, |z| = 0 \Rightarrow z = 0$

(2) $\forall z \in \mathbb{C}, \forall z' \in \mathbb{C}, |zz'| = |z||z'|$

3. Une expression qui vérifie les trois propriétés données est appelée une *norme*. Cela est juste donné pour votre culture générale.

(3) $\forall z \in \mathbb{C}, \forall z' \in \mathbb{C}, |z + z'| \leq |z| + |z'|$.

Le module défini sur $\mathbb{C}$ se comporte exactement comme la valeur absolue définie sur $\mathbb{R}$. Ce n'est donc pas un hasard si on le note exactement de la même façon.

Si $z = x + iy$, on a $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ et $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$. On note

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \text{ et } \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}),$$

ce qu'on appelle respectivement *partie réelle* et *partie imaginaire* de z. On a donc $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$.

1.3.1. *Inverse.* À l'aide du conjugué d'un nombre complexe on peut calculer l'inverse. On a, au moins formellement, si $z \neq 0$,

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2},$$

en multipliant le numérateur et le dénominateur par $\bar{z}$. On vérifie que

$$z\frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{z\bar{z}}{|z|^2} = 1.$$

Si on note $z = x + iy$, on a

$$\frac{1}{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

En reprenant la formule

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2},$$

on en déduit que

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{|\bar{z}|}{|z|^2} = \frac{1}{|z|}.$$

On vérifie aussi sur une des formules ci-dessus que le conjugué de l'inverse est l'inverse du conjugué, c'est-à-dire

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}.$$

1.4. Structure de $\mathbb{C}$. Avec toutes les propriétés vues plus haut $\mathbb{C}$ muni de l'addition et de la multiplication est un corps commutatif. Il est muni du module. La question est qu'elle est la différence de $\mathbb{C}$ avec $\mathbb{R}$ du point de vue de sa structure ? Il n'y en a pas du point de vue algébrique mais il n'y a pas de relation d'ordre sur $\mathbb{C}$ compatible avec l'addition et la multiplication. C'est la différence essentielle et quand on a besoin de faire des inégalités il est crucial d'utiliser le module.

2. Écriture d'un nombre complexe sous forme polaire

Tout nombre complexe non nul peut s'écrire de la façon suivante,

$$z = |z|\frac{z}{|z|},$$

et on remarque que

$$\left|\frac{z}{|z|}\right| = 1.$$

C'est-à-dire que $\frac{z}{|z|}$ est un nombre complexe de module 1. Si on identifie $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ et qu'on note $\frac{z}{|z|} = a + ib$, $(a,b) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2=1\}$. C'est le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1 de $\mathbb{R}^2$. Il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos\theta$ et $b = \sin\theta$. Nous admettrons qu'on peut aussi écrire sans contradiction

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}.$$

Le résultat est le suivant, tout nombre complexe non nul peut s'écrire de la forme

$$z = re^{i\theta},\ \text{où } r > 0 \text{ et } \theta \in \mathbb{R}.$$

On admettra également qu'on a la formule

$$e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}.$$

Remarquons que cette formule est compatible avec la conjugaison. En effet on a

$$\overline{e^{i\theta}} = \overline{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = e^{-i\theta},$$

et $e^{i\theta}e^{-i\theta} = e^{i(\theta-\theta} = 1$. En en déduit que si $z = re^{i\theta}$ alors $\bar{z} = re^{-i\theta}$.

Si r est uniquement déterminé par z, en effet $r = |z|$, θ n'est déterminé que modulo 2π. On appelle θ, *l'argument* de z.

L'écriture d'un nombre complexe sous la forme polaire a des avantages et des inconvénients. Par exemple il n'est pas aisé de calculer la somme de deux nombres complexes écrits en polaire,

$$re^{i\theta} + r'e^{i\theta'} = (r\cos\theta + r'\cos\theta') + i(r\sin\theta + r'\sin\theta') = r''e^{i\theta''}.$$

On peut calculer facilement $r'' = \sqrt{r^2 + r'^2 + 2rr'\cos(\theta-\theta')}$ mais on a

$$\cos\theta'' = \frac{r\cos\theta + r'\cos\theta'}{\sqrt{r^2 + r'^2 + 2rr'\cos(\theta-\theta')}} \text{ et } \sin\theta'' = \frac{r\sin\theta + r'\sin\theta'}{\sqrt{r^2 + r'^2 + 2rr'\cos(\theta-\theta')}}.$$

Clairement il est difficile de déterminer θ''.

Par contre le produit de deux nombres complexes s'exprime très bien en polaire. On a

$$(re^{i\theta})(r'e^{i\theta'}) = rr'e^{i(\theta+\theta')}.$$

En particulier le produit d'un nombre complexe z avec un nombre complexe $e^{i\theta}$ qui est de module 1 s'interprète géométriquement comme une rotation d'angle θ de z.

3. Résolution d'équations

3.1. Racine carrée d'un nombre complexe. Soit $a \in \mathbb{C}$, l'objectif est de trouver les solutions de l'équation

$$z^2 = a.$$

Deux cas se présentent, soit a est mis sous forme polaire, soit a est sous forme cartésienne. Nous allons traiter les deux cas.

3.1.1. *Cas de la forme polaire.* Ceci est le cas le plus simple, si $a = re^{i\theta}$ on a deux solutions

$$z_1 = \sqrt{r}e^{i\theta/2} \text{ et } z_2 = \sqrt{r}e^{i(\pi+\theta/2)} = -\sqrt{r}e^{i\theta/2}$$

3.1.2. *Cas de la forme cartésienne.* Si $a = \alpha + i\beta$, on cherche $z = x + iy$ où x et y sont des réels. On a

$$z^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy,$$

qu'on identifie à $a = \alpha + i\beta$. On obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 - y^2 = \alpha \\ 2xy = \beta \end{array} \right. \tag{2}$$

Ce n'est pas très agréable à résoudre et il y a une astuce[4] consistant à remarquer que si

$$z^2 = a \Rightarrow |z|^2 = |a|.$$

Or $|z|^2 = x^2 + y^2$ et $|a| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. En reprenant une partie du système (2), on obtient le système

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 - y^2 = \alpha \\ x^2 + y^2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \end{array} \right.$$

On détermine facilement $x^2 = \frac{1}{2}(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2})$ et $y^2 = \frac{1}{2}(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2})$. Ceci ne détermine pas complètement x et y, il faut choisir les signes de x et y de sorte que le signe de xy soit le même que le signe de β pour que la deuxième équation de (2) soit vérifiée. Évidemment il ne s'agit pas d'apprendre par cœur la forme de x^2 et y^2, mais il faut connaitre la démarche à suivre.

3.2. Résolution d'une équation du second degré. La démarche pour résoudre une équation du second degré à coefficients dans $\mathbb{C}$ est exactement la même que pour résoudre une équation de second degré à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Soit $a \in \mathbb{C},\ b \in \mathbb{C},\ c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$, on cherche z vérifiant

$$az^2 + bz + c = 0.$$

On écrit

$$az^2 + bz + c = a\Big(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\Big) = a\bigg(\Big(z + \frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\bigg) \tag{3}$$

4. Bien sûr, on n'est pas censé ignorer cette astuce

On note $\Delta = b^2 - 4ac$ où Δ est appelé le *discriminant* associé à l'équation du second degré. Soit $\delta \in \mathbb{C}$, tel que $\delta^2 = \Delta$ (voir la partie 3.1 pour calculer δ à partir de Δ), on peut de (3) écrire

$$az^2 + bz + c = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\delta^2}{4a^2}\right) = a\left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a}\right).$$

On obtient ainsi les deux racines

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}.$$

Si on interprète δ comme la racine de Δ [5], on retrouve la forme des racines d'un polynôme du second degré à coefficients réels quand le discriminant est positif ou nul.

La forme générale des racines est assez compliquée mais il y a des quantités qu'il est facile à calculer à partir des coefficients. En effet si on écrit

$$az^2 + bz + c = a\left(z - z_1\right)\left(z - z_2\right) = az^2 - a(z_1 + z_2)z + az_1z_2.$$

En identifiant on a

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a} \\[2ex] z_1 z_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Traditionnellement on note $S = z_1 + z_2$ la *somme des racines* et $P = z_1 z_2$ le *produit des racines*.

5. Il ne faut pas utiliser la notation $\sqrt{\ }$ pour un nombre complexe, en tout cas pas avant la troisième année de licence, et encore avec parcimonie.

Index

Notations