Université de Versailles Saint Quentin en Yvelines
MA202

Feuille de TD 2 : calculs d'intégrales

Exercice 1. Calculer les intégrales suivantes :

$$a)I_1 = \int_1^2 \left(x^2 + \frac{3}{x^2}\right) dx, \quad b)I_2 = \int_1^2 (2 - 4e^{3x})\, dx, \quad c)I_3 = \int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+5}\, dx,$$
$$d)I_4 = \int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\, dx, \quad e)I_5 = \int_0^1 (2x+3)\sqrt{x^2+3x+4}\, dx, \quad f)I_6 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx.$$

Exercice 2. Déterminer une primitive sur I des fonctions suivantes définies par :

$$a)\ f(x) = xe^{x^2},\ I = \mathbb{R} \qquad b)\ g(x) = \frac{x^2}{1+x^3},\ I =]-1, +\infty[$$
$$c)\ h(x) = \frac{\ln x}{x},\ I =]0, +\infty[\qquad d)\ i(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},\ I = \mathbb{R}$$
$$e)\ j(x) = \frac{1}{x \ln x},\ I =]0, +\infty[\qquad f)\ k(x) = \tan x,\ I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Exercice 3. À l'aide d'intégrations par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$a)I_1 = \int_1^e \ln x\, dx \quad , \qquad b)I_2 = \int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\, dx, \qquad c)I_3 = \int_e^{2e} x^2 \ln x\, dx,$$
$$d)I_4 = \int_{-1}^0 (-2x+1)e^{-x}\, dx, \quad e)I_5 = \int_1^e (\ln x)^2\, dx, \qquad f)I_6 = \int_0^1 \arctan x\, dx,$$
$$g)I_7 = \int_0^{\pi/2} e^x \cos x\, dx, \qquad h)I_8 = \int_0^1 \ln(1+x^2)\, dx, \quad i)I_9 = \int_1^e (x^2+x+2)\ln(x)\, dx.$$

Exercice 4. A l'aide d'un changement de variables adéquat,

1. calculer les intégrales suivantes,

$$a)\ \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}} \quad b)\ \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x + x(\ln x)^2}\, dx \quad c)\ \int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x+1}\, dx \quad d)\ \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^4 x}\, dx$$

2. calculer les primitives suivantes sur I

$$a)\ \int^t \frac{\sin x \cos x}{1-\cos x}\, dx,\ I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\qquad b)\ \int^t \frac{dx}{\cos x},\ I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$
$$c)\ \int^t \sqrt{e^x - 1}\, dx,\ I = \mathbb{R} \text{ (indication : poser } u = \sqrt{e^x-1}\text{)}.$$

Exercice 5. Décomposer chacune des fractions rationnelles suivantes en éléments simples dans $\mathbb{R}$ pour en déduire une primitive :

$$\begin{aligned} q_1(x) &= \frac{1}{x^2+x-1}, \quad q_2(x) = \frac{x^2}{(x-2)(x-3)}, \quad q_3(x) = \frac{2x-1}{(x-1)^2 x}, \quad q_4(x) = \frac{x^7+1}{x^2-1}, \\ q_5(x) &= \frac{5x^2-2x+3}{(x^2+1)(x-1)}, \quad q_6(x) = \frac{2x+1}{(x-2)^2(x-1)}, \quad q_7(x) = \frac{1}{x^2+2x+3}, \\ q_8(x) &= \frac{x^2+1}{x(x-1)(x^2-2x+4)}. \end{aligned}$$

Exercice 6. Calculer les primitives (on précisera leurs intervalles de définition) ou intégrales suivantes, en réfléchissant préalablement à l'outil (voire les outils) le plus adapté pour chaque calcul :

$$\begin{array}{llll} a)\ \displaystyle\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}\,dx & b)\ \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx & c)\ \displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan x}{(x+1)^2}\,dx & d)\ \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+\sin x\cos x} \\ e)\ \displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x+1}} & f)\ \displaystyle\int^x \frac{x+1}{x^2-x+1}\,dx & g)\ \displaystyle\int_0^{1/2} \arcsin x\,dx & h)\ \displaystyle\int^x \frac{dx}{1+x^3} \end{array}$$

Exercice 7. Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\cos^4 t\,dt, \quad J_2 = \int_0^{\pi} \sin t\cos^2 t\,dt, \\ J_3 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t\cos^3 t\,dt, \quad J_4 = \int_0^{\pi} \sin^2 t\cos^2 t\,dt. \end{aligned}$$

Exercice 8. Exercice de l'examen de juin 2013.

1. Soit la fonction rationnelle
$$q(x) = \frac{2x^3+8x^2+8x+3}{(x^2+3x+3)(x-1)(x+2)}.$$
   (a) Déterminer la décomposition de q en éléments simples.
   (b) Calculer alors une primitive Q de q sur $]-2;1[$.
2. Soit
$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\cos(t)(2\sin^3(t)-8\cos^2(t)+8\sin(t)+11)}{(-\cos^2(t)+3\sin(t)+4)(\sin(t)-1)(\sin(t)+2)}dt$$
   A l'aide d'un changement de variable et de la question précédente, calculer la valeur exacte de I.

Exercice 9. Formule de Wallis
Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt.$$

1. Établir une relation de récurrence entre I_{n+2} et I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer les valeurs de I_0 et de I_1. En déduire I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Comparer les réels I_n, I_{n+1} et I_{n+2}. À l'aide de la question précdente en déduire la convergence de la suite $\left(\dfrac{I_{n+1}}{I_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^2 4^2 6^2 ... (2p)^2}{3^2 5^2 ... (2p-1)^2 (2p+1)} = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Montrer que si f est paire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_0^a f(t)\,dt$ pour tout $a > 0$.
2. Montrer que si f est impaire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0$ pour tout $a > 0$.
3. Montrer que si f est ω-périodique ($\omega > 0$), alors $\displaystyle\int_a^{a+\omega} f(t)\,dt = \int_0^{\omega} f(t)\,dt$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.
4. Montrer que si f est impaire et ω-périodique ($\omega > 0$), alors $\displaystyle\int_0^{\omega} f(t)\,dt = 0$.

Exercice 11. On considère la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ si $x \neq 0$ et $h(0) = 1$.

1. Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}$.
2. On considère la fonction $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\Phi(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt.$$

   Montrer que Φ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée de Φ pour tout x de $\mathbb{R}$.
3. On considère la fonction $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\Psi(x) = \int_0^1 \frac{\sin(tx)}{t}\,dt.$$

   Montrer que Ψ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée de Ψ pour tout x de $\mathbb{R}$.