Ph202

Chapitre 4 : Puissance, travail, énergie

E. Riedinger
Département des Sciences Physiques

Mars 2020

1. Définitions
1.1 Puissance d'une force

Système de vitesse $\vec{v}$ soumis à force $\vec{F}$

Puissance d'une force

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Puissance "instantanée" (càd à l'instant t considéré)

Unité : le Watt (W)

$\mathcal{P} > 0$ force motrice

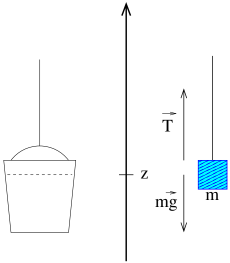
$\mathcal{P} < 0$ force résistante

$\mathcal{P} = 0$ si $\vec{F} \perp \vec{v}$

1.1 Puissance d'une force

Exemple 1

Montée à vitesse constante $v_1 = +1,0\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ d'un seau rempli d'eau ($\mathcal{R}$ terrestre : galiléen) modélisé par point matériel (masse $m = 75\,\mathrm{kg}$) soumis au poids ($g = 9,8\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$) et à une traction. Calculer les puissances des forces sur le seau.



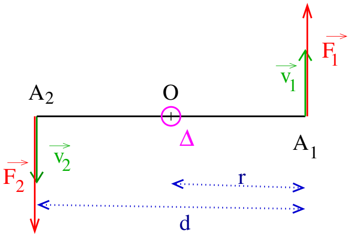
$$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a} = \vec{0} \text{ donc } T = mg$$
$$\vec{T}\cdot\vec{v} + m\vec{g}\cdot\vec{v} = 0$$
$$\mathcal{P}\left(\vec{T}\right) + \mathcal{P}\left(m\vec{g}\right) = 0$$
$$\mathcal{P}\left(m\vec{g}\right) = -mgv_1 = -735\,\mathrm{W}$$
$$\mathcal{P}\left(\vec{T}\right) = Tv_1 = +735\,\mathrm{W}$$

Chevaux vapeur : $1\,\mathrm{hp} = 746\,\mathrm{W}$, $1\,\mathrm{ch} = 735,5\,\mathrm{W}$

1.1 Puissance d'une force

Exemple 2 : Puissance d'un couple

Tige (système indéformable) tournant autour d'un axe Δ ($\perp$ figure). A_1 et A_2 deux points de la tige symétriques / Δ.
$\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ deux forces symétriques (somme nulle et points d'application différents) s'exerçant en A_1 et A_2 $\perp$tige, formant un couple Γ (moment de deux forces symétriques). Calculer la puissance de ces forces.



Rotation $v_1 = v_2 = r\omega$

Couple $\Gamma = F_1 r + F_2 r = 2F_1 r = F_1 d$

Puissance $\mathcal{P}(\Gamma) = \mathcal{P}\left(\overrightarrow{F_1}\right) + \mathcal{P}\left(\overrightarrow{F_2}\right)$

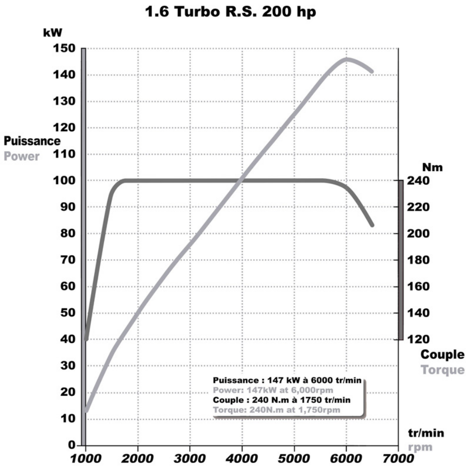
$\mathcal{P}(\Gamma) = \overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{F_2} \cdot \overrightarrow{v_2}$

$\mathcal{P}(\Gamma) = F_1 r\omega + F_2 r\omega = F_1 d\omega$

Donc $\mathcal{P}(\Gamma) = \Gamma\omega$

1.1 Puissance d'une force

Exemple 2 : Puissance d'un couple



Moteur d'automobile :

À $f = 5000\,\mathrm{tr/min}$

on a $\omega = 2\pi f = 2\pi \times \frac{5000}{60}$

$\omega = 523,6\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$

et $\Gamma = 240\,\mathrm{Nm}$

Alors $\mathcal{P} = \Gamma\omega = 523,6 \times 240$

$\mathcal{P} = 125,7\,\mathrm{kW}$

(ou $\frac{125700}{735} = 171\,\mathrm{ch}$)

1.2 Travail d'une force

Travail d'une force $\overrightarrow{F}$ sur un chemin AB

$$W_{AB}\left(\overrightarrow{F}\right) = \int_A^B \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{OM}$$

Travail élémentaire : $dW = \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{OM}\,(= \mathcal{P}dt)$

Propriétés (←Chap.1)

Travail $W\left(\overrightarrow{F}\right)$: circulation de $\overrightarrow{F}$ sur chemin menant de A à B : dépend du chemin suivi.

$W\left(\overrightarrow{F}\right)$ en Joules (J)

Le travail est un échange d'énergie entre deux systèmes

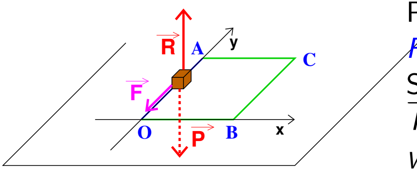
$W > 0$ pour force motrice, $W < 0$ pour force résistante

NB : Pour toute force $\perp$ au déplacement : W et $\mathcal{P}$ nuls

1.2 Travail d'une force

Exemple

Point matériel ($m = 20\,\mathrm{kg}$) tiré de O à A (distance $L = 4\,\mathrm{m}$) sur plan horizontal. $\overrightarrow{F}$ frottement de glissement $\mu = 0,5$. Calculer $W\left(\overrightarrow{F}\right)$ sur chemins OA puis OBCA.



Pas de mouvement vertical donc $R = P$

$F = \mu R = \mu mg$ (loi Coulomb)

Sur OA :

$\overrightarrow{F} = -F\overrightarrow{u_y}$ et $d\overrightarrow{OM} = dy\overrightarrow{u_y}$

$W\left(\overrightarrow{F}\right) = \int_O^A \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{OM} = -\int_O^A F dy$

$W\left(\overrightarrow{F}\right) = -F \times OA = -\mu mgL = -400\,\mathrm{J}$

De même sur $OBCA$ (=dépend du chemin !)

$W\left(\overrightarrow{F}\right) = \int_O^B \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{OM} + \int_B^C \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{OM} + \int_C^A \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{OM}$

$W\left(\overrightarrow{F}\right) = -3\mu mgL = -1200\,\mathrm{J}$

2. Théorèmes
2.1 Théorème de la puissance cinétique

Point matériel (m) soumis à résultante de forces extérieures $\overrightarrow{F}$ ($\mathcal{R}$ galiléen)

$$m\overrightarrow{a} = \sum \overrightarrow{F_{ext}} = \overrightarrow{F}$$

$$m\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v}$$

Remarque : $\overrightarrow{v}^2 = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} = v^2$

$$\frac{d\left(\frac{1}{2}m\overrightarrow{v}^2\right)}{dt} = m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} \cdot \overrightarrow{v} = m\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{v}$$

Théorème de la puissance cinétique (TPC)

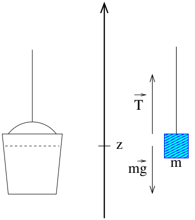
$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \mathcal{P}\left(\overrightarrow{F}\right)$$

Dans $\mathcal{R}$ galiléen la puissance de la résultante des forces extérieures est égale à la dérivée temporelle de l'énergie cinétique.

2.1 Théorème de la puissance cinétique

Exemple

Montée d'un seau rempli d'eau ($\mathcal{R}$ terrestre : galiléen) modélisé par point matériel (masse $m = 10\,\mathrm{kg}$) soumis au poids ($g = 10\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$) et à une traction constante ($T = 110\,\mathrm{N}$) sans vitesse initiale. Vérifier le théorème de la puissance cinétique à l'instant $\tau = 2\,\mathrm{s}$.



TPC à vérifier : $\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \mathcal{P}\left(m\vec{g}\right) + \mathcal{P}\left(\vec{T}\right)$

Accélération $m\vec{a} = \vec{T} + m\vec{g}$ Proj : $ma_z = T - mg$

$a_z = \frac{T}{m} - g = \frac{110}{10} - 10 = +1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ constante !

Vitesse (avec CI) : $v_z = a_z t$ (à $t = \tau$: $v = 2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$)

$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv_z^2 = \frac{1}{2}m\left(a_z t\right)^2$ $\qquad \frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = ma_z^2 t$

AN en τ : $\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = 10 \times 1^2 \times 2 = 20\,\mathrm{W}$

$\mathcal{P}\left(m\vec{g}\right) = -mgv = 10 \times (-10) \times 2 = -200\,\mathrm{W}$

$\mathcal{P}\left(\vec{T}\right) = +Tv = 110 \times 2 = +220\,\mathrm{W}$

2.2 Théorème de l'énergie cinétique

Point matériel (m) soumis à résultante de forces extérieures $\overrightarrow{F}$ ($\mathcal{R}$ galiléen)

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \mathcal{P}$$

Donc $d\mathcal{E}_c = \mathcal{P}dt = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v}dt = \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{OM}$

Théorème de l'énergie cinétique (forme différentielle) $d\mathcal{E}_c = dW\left(\overrightarrow{F}\right)$

Intégration sur chemin entre point de départ A et point d'arrivée B :

$\int_A^B d\mathcal{E}_c = \int_A^B dW\left(\overrightarrow{F}\right)$

Théorème de l'énergie cinétique (TEC)

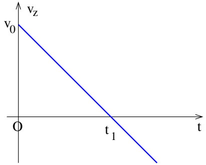
$\mathcal{E}_c(B) - \mathcal{E}_c(A) = W_{AB}\left(\overrightarrow{F}\right)$

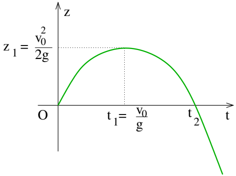
Dans $\mathcal{R}$ galiléen la différence d'énergie cinétique entre le point d'arrivée et le point de départ est égale au travail de la résultante des forces extérieures sur le chemin menant du départ à l'arrivée.

2.2 Théorème de l'énergie cinétique

Exemple 1

Point matériel (m) lancé vers le haut avec v_0. Vérifier le TEC entre le point A (départ à $z=0$) et B (sommet de la trajectoire).





$a_z = -g$ donc $v_z(t) = -gt + v_0$

Vitesse s'annule (sommet) pour $t_1 = \frac{v_0}{g}$

Position $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$

Sommet en $z_1 = z(t_1) = -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + v_0\frac{v_0}{g} = \frac{v_0^2}{2g}$

Énergie cinétique : $\mathcal{E}_c(B) - \mathcal{E}_c(A) = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2$

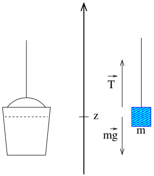
Travail $W_{AB}\left(m\overrightarrow{g}\right) = -\int_A^B mgdz = -mg(z_1 - z_0)$

Donc $W_{AB}\left(m\overrightarrow{g}\right) = -mg\left(\frac{v_0^2}{2g} - 0\right) = -\frac{1}{2}mv_0^2$ Identique (et <0 !).

2.2 Théorème de l'énergie cinétique

Exemple 2

Montée d'un seau (initialement immobile) rempli d'eau
Modélisé par point matériel (masse $m = 10\,\mathrm{kg}$) soumis au poids ($g = 10\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$) et à une traction ($T = 110\,\mathrm{N}$). Déterminer la distance d parcourue et vérifier le TEC entre l'instant initial en A et l'instant final (à $\tau = 2\,\mathrm{s}$) en B



$v_z = a_z t$ donc $z(t) = \frac{1}{2} a_z t^2$

donc pour $t = \tau$ on a $z = d = \frac{1}{2} a_z \tau^2 = \frac{1}{2} \times 1 \times 2^2 = 2\,\mathrm{m}$

$W_{AB}(m\vec{g}) = -mg(z_B - z_A) = -mgd = -10\times 10\times 2 = -200\,\mathrm{J}$

$W_{AB}(\vec{T}) = \int_A^B T_z dz = T_z(z_B - z_A) = T_z d = 110 \times 2 = 220\,\mathrm{J}$

$\Delta\mathcal{E}_c = \mathcal{E}_c(B) - \mathcal{E}_c(A) = \frac{1}{2} m v_1^2 - 0 = \frac{1}{2} \times 10 \times 2^2 = 20\,\mathrm{J}$

$\Delta\mathcal{E}_c = W_{AB}(\vec{T}) + W_{AB}(m\vec{g})$

3. Forces conservatives
3.1 Énergie potentielle

Dans le cas général le travail W_{AB} d'une force $\overrightarrow{F}$ entre A et B dépend du chemin suivi. Sauf (cf. chap1) si $\overrightarrow{F}$ est un gradient.

On pose $\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\mathcal{E}_p$ où $\mathcal{E}_p$ énergie potentielle.

Une telle force est appelée force conservative. NB : signe !

Travail d'une force conservative entre A et B

$$W_{AB}\left(\overrightarrow{F}\right) = \int_A^B \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{OM} = \int_A^B -\overrightarrow{\text{grad}}\mathcal{E}_p \cdot d\overrightarrow{OM} = -\int_A^B d\mathcal{E}_p$$

$$W_{AB}\left(\overrightarrow{F}\right) = \mathcal{E}_p(A) - \mathcal{E}_p(B)$$

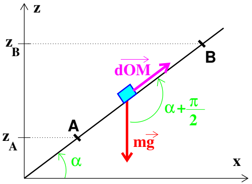
indépendant du chemin suivi

$\mathcal{E}_p$ est bien une énergie car (déf. du gradient) $\overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{OM} = -d\mathcal{E}_p$!

3.1 Énergie potentielle

Exemple

Travail du poids entre A et B.



$$W_{AB}\left(m\overrightarrow{g}\right) = \int_A^B m\overrightarrow{g}\cdot d\overrightarrow{OM}$$
$$W_{AB}\left(m\overrightarrow{g}\right) = \int_A^B mgdOM\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$W_{AB}\left(m\overrightarrow{g}\right) = -mg\sin\alpha\int_A^B dOM$$
$$W_{AB}\left(m\overrightarrow{g}\right) = -mg\sin\alpha AB$$
$$W_{AB}\left(m\overrightarrow{g}\right) = -mg\left(z_B - z_A\right)$$

À remplacer par méthode directe :

$$W_{AB}\left(m\overrightarrow{g}\right) = \mathcal{E}_p\left(A\right) - \mathcal{E}_p\left(B\right) = mgz_A - mgz_B$$

Énergie potentielle de pesanteur

$\mathcal{E}_p = mgz + K$ (avec axe des z vers le haut)

car $m\overrightarrow{g} = -mg\overrightarrow{u_z} = -\overrightarrow{\text{grad}}\left(mgz+K\right)$

3.1 Énergie potentielle

Force conservative : $\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\mathcal{E}_p$

Cas général : identifier si $\overrightarrow{F}$ est un gradient (méthode Chap.1)

Remarques

- $\mathcal{E}_p$ définie à une constante près ($\rightarrow$ choix d'une référence).
- Une force centrale ($\rightarrow$ on travaille en cylindriques car le mouvement est plan cf. chap3), de la forme $\overrightarrow{F} = \phi(r)\,\overrightarrow{u_r}$ est conservative ($\phi(r)$ fonction de r) :
  $\overrightarrow{\text{grad}}\mathcal{E}_p = \frac{d\mathcal{E}_p}{dr}\overrightarrow{u_r} = -\phi(r)\,\overrightarrow{u_r}$ donc $\mathcal{E}_p = -\int \phi(r)\,dr = -\Phi(r)$

Exemples d'énergies potentielles associées à des forces usuelles

- Force de rappel élastique :
  $\overrightarrow{F} = -kr\overrightarrow{u_r}$ avec $\phi(r) = -kr$: $\mathcal{E}_p = +\frac{1}{2}kr^2 + K$
- Attraction gravitationnelle :
  $\overrightarrow{F} = -\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{r^2}\overrightarrow{u_r}$ avec $\phi(r) = -\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{r^2}$: $\mathcal{E}_p = -\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{r} + K$

3.2 Énergie mécanique

Dans $\mathcal{R}$ galiléen système soumis à $\overrightarrow{F_C}$ force conservative ($\mathcal{E}_p$ énergie potentielle associée) et à $\overrightarrow{F_{NC}}$ force non conservative.

Théorème de l'énergie cinétique : $d\mathcal{E}_c = dW\left(\overrightarrow{F_C}\right) + dW\left(\overrightarrow{F_{NC}}\right)$

Or énergie potentielle : $dW\left(\overrightarrow{F_C}\right) = -d\mathcal{E}_p$

Donc $d\mathcal{E}_c = -d\mathcal{E}_p + dW\left(\overrightarrow{F_{NC}}\right)$

Définition

Énergie mécanique $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$

$d\mathcal{E}_m = d\mathcal{E}_c + d\mathcal{E}_p = dW\left(\overrightarrow{F_{NC}}\right)$

On intègre sur le chemin suivi entre A et B :

$\Delta\mathcal{E}_m = \int_A^B d\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_m(B) - \mathcal{E}_m(A) = \int_A^B dW\left(\overrightarrow{F_{NC}}\right)$

$$\Delta\mathcal{E}_m = W_{AB}\left(\overrightarrow{F_{NC}}\right)$$

3.2 Énergie mécanique

Théorème de l'énergie mécanique

$$\Delta\mathcal{E}_m = W_{AB}\left(\overrightarrow{F_{NC}}\right)$$

Dans $\mathcal{R}$ galiléen la variation d'énergie mécanique d'un système entre A et B est égale au travail des forces non conservatives sur le chemin suivi entre A et B.

Système conservatif (=uniquement soumis à des forces conservatives)

L'énergie mécanique $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$ d'un système conservatif est constante (= loi de conservation = intégrale première du mouvement).

Th. de l'énergie mécanique pour système conservatif à 1D (x) :
$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p(x) =$ constante ($=$ valeur intiale) ($\mathcal{E}_p(x)$ connue)

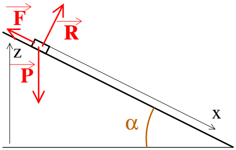
Retrouver l'équation différentielle du mouvement

Dériver (/t) cette équation énergétique : équation des puissances.
Diviser par la vitesse (1D) : forces (PFD).

3.2 Énergie mécanique

Exemple

Point matériel $m = 1\,\text{kg}$ glisse ($\mu = 0,2$) sans vitesse initiale sur plan incliné $\alpha = 30°$. Vérifier le théorème de l'énergie mécanique entre $A(t=0)$ et $B\,(t = 3\,\text{s})$. $g = 10\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. ✷—(cf .Ch.3)



$\vec{R}\perp$déplacement ne travaille pas

Acc : $a_x = g\,(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = 3,27\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

En B $v_B = ta_x = 9,80\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

Distance $AB = \frac{1}{2}a_x t^2 = 14,7\,\text{m}$

TEM entre A et B : $\mathcal{E}_m\,(B) - \mathcal{E}_m\,(A) = W_{AB}\left(\vec{F}\right)$

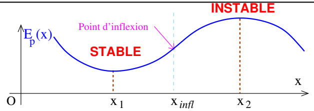
$$\mathcal{E}_m\,(B) = \mathcal{E}_c\,(B) + \mathcal{E}_p\,(B) = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgz_B$$
$$\mathcal{E}_m\,(A) = \mathcal{E}_c\,(A) + \mathcal{E}_p\,(A) = 0 + mgz_A$$
$$\mathcal{E}_m\,(B) - \mathcal{E}_m\,(A) = \frac{1}{2}\times 1\times 9,8^2 - 1\times 10\times 14,7\times\frac{1}{2} = -25,47\,\text{J}$$
$$W_{AB}\left(\vec{F}\right) = \int_A^B \vec{F}\cdot d\overrightarrow{OM} = -F\times AB = -\mu mgAB\cos\alpha = -25,47\,\text{J}$$

3.3 Propriétés
3.3.1 Étude de la stabilité d'un équilibre

À 1D (1 degré de liberté x) $\overrightarrow{F} = F_x \overrightarrow{u_x}$ conservative, $\mathcal{E}_p(x)$ connue

Position d'équilibre x_i : extremum de $\mathcal{E}_p$ càd $\frac{d\mathcal{E}_p}{dx}(x_i) = -F_x = 0$

Si $\mathcal{E}_p$ minimale en x_i :
$\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2}(x_i) \geq 0$ càd $\frac{d\mathcal{E}_p}{dx}$ croissante autour de x_i
donc $F_x = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dx}$ décroissante
Au voisinage de x_i :
$F_x(x < x_i) > 0$ et
$F_x(x > x_i) < 0$ donc $\overrightarrow{F}$ ramène le mobile en x_i = position stable

			
x	x_1	x_{infl}	x_2
$\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2}$	$+$	0	$-$
$\frac{d\mathcal{E}_p}{dx}$	$-$ 0 $+$ croissante	max	$+$ 0 $-$ décroissante
F_x	$+$ 0 $-$ F_x ramène mobile vers x_1		$-$ 0 $+$ F_x éloigne mobile de x_2

Stabilité

Équilibre stable si $\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2}(x_i) > 0$, instable si $\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2}(x_i) < 0$

3.3.1 Étude de la stabilité d'un équilibre

Conséquence

Déplacement au voisinage d'une position d'équilibre stable

Si petits déplacements autour de la position d'équilibre $x_0 = 0$:
Développement limité de $\mathcal{E}_p(x)$ à l'ordre 2 autour de 0 :

$$\mathcal{E}_p(x) = \mathcal{E}_p(0) + x\frac{d\mathcal{E}_p}{dx}(0) + \frac{1}{2}x^2\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2}(0)$$

avec $\frac{d\mathcal{E}_p}{dx}(0) = -F_x(0) = 0$ (équilibre) et $\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2}(0) > 0$ (stabilité)
On pose $k = \frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2}(0)$ $(\neq 0)$ donc $\mathcal{E}_p(x) = \mathcal{E}_p(0) + \frac{1}{2}kx^2$
càd force $F_x = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dx} = -kx$ identique à force de rappel élastique
Alors (2e loi de Newton) $m\ddot{x} = F_x = -kx$ soit $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$
équation d'un oscillateur harmonique (cf. Chap.5)

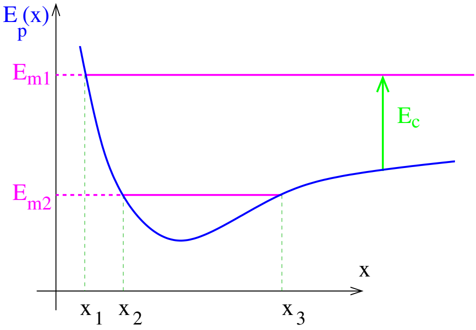
Conclusion

Un système uniquement soumis à une force conservative effectue des oscillations harmoniques au voisinage d'une position d'équilibre stable

3.3.2 Détermination de la nature des mouvements

Prévision graphique

$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_p + \mathcal{E}_c$ avec $\mathcal{E}_m$ constante et $\mathcal{E}_c \geq 0$
Graphiquement $\mathcal{E}_m$ au-dessus de $\mathcal{E}_p$



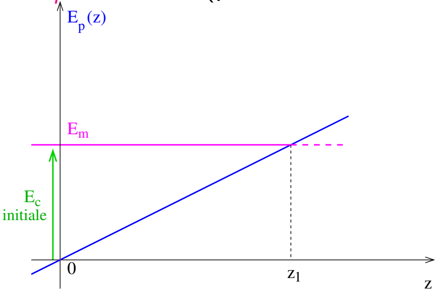
Cas 1 ($\mathcal{E}_{m1}$) : le mouvement peut aller de x_1 à $+\infty$
Cas 2 ($\mathcal{E}_{m2}$) : le mouvement est borné entre x_2 et x_3

3.3.2 Détermination de la nature des mouvements

Exemple : Chute libre

Mobile avec vitesse v_0 initiale vers le haut : tracer $\mathcal{E}_p(z)$, $\mathcal{E}_m$.

$\mathcal{E}_p(z) = mgz$ (on choisit comme référence $\mathcal{E}_p(0) = 0$)
TEM : $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$ constante (poids seule force, conservative)



Le mouvement ne peut donc pas aller plus haut que z_1.
Valeur de z_1 : $\mathcal{E}_m(0) = \mathcal{E}_m(z_1)$ càd $\frac{1}{2}mv_0^2 = mgz_1$ donc $z_1 = \frac{v_0^2}{2g}$