Travaux dirigés de mécanique du point

Tous les exercices sont au programme.

Outils mathématiques

Thème I : Dérivées et différentielles

Exercice 1 – Dérivation

Dériver les fonctions suivantes :

$$
\begin{array}{lclclcl}
a(x) & = & \dfrac{1}{x}\,; & \quad & b(x) & = & x(x+1)(x-1)\,; \\
c(x) & = & \dfrac{1}{(x-x_0)^n}\,; & & c(x) & = & \dfrac{1}{\tan x}\,; \\
f(x) & = & e^{\sin 2x}\,; & & g(x) & = & \sin\left(\frac{x^2}{2}\right); \\
h(x) & = & (\ln(bx)) & & j(x) & = & \dfrac{x}{\ln x}\,; \\
k(x) & = & \sqrt{\sin^2(ax)+\cos^2(ax)}\,; & & & &
\end{array}
$$

Exercice 2 – Différentiation

Calculer la différentielle des fonctions suivantes :

1. $f(r,t) = r^2\cos(\omega t)$
2. $g(r) = r^2\cos(\omega t)$
3. $h(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

Exercice 3 ★ Extraction manuelle d'une racine

On souhaite utiliser le calcul différentiel pour estimer $\sqrt{145}$ à partir de la valeur de $\sqrt{144}$. On ne cherchera pas à déterminer l'erreur commise pour cette estimation.

1. Estimer la variation Δf d'une fonction $f(x)$ pour une variation de Δx de x autour de x_0. Rappeler sous quelle condition l'estimation est une égalité stricte.
2. Déterminer l'expression de la différentielle $\mathrm{d}f$ de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$.
3. Application numérique : calculer Δf pour une valeur de Δx à préciser et en déduire une estimation de $\sqrt{145}$ en conservant 7 chiffres significatifs.
4. Calculer une valeur approchée de $\sqrt{143}$.

Exercice 4 – Entropie ?

On considère un gaz parfait monoatomique constitué de N atomes. La grandeur thermodynamique S appelée *entropie* est liée à l'énergie interne U du gaz, au volume V occupé et à N de la façon suivante :

$$S(U,V,N) = Nk\left[\ln\frac{V}{N} + \frac{3}{2}\ln\frac{mU}{3\pi\hbar^2 N} + \frac{5}{2}\right]$$

où k désigne la constante de Boltzman, m la masse d'un atome et $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ la constante de Planck réduite.

La thermodynamique nous enseigne que la température T du gaz est liée à S par la relation $\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_V$. Montrer que la relation précédente conduit à l'expression de l'énergie interne U du gaz parfait selon $U = \frac{3}{2}NkT$.

Exercice 5 – Fonction de plusieurs variables

1. Rappeler la définition de la différentielle d'une fonction de deux variables réelles $f(x,y)$.
2. L'équation d'état d'un gaz, selon van der Waals, s'écrit :

   $$(P + \frac{n^2 a}{V^2})(V - nb) = nRT,$$

   où P est la pression, V le volume, T la température, n la quantité de matière et a, b et R sont des constantes. Cette équation traduit l'existence de forces d'interactions entre les molécules du gaz à la différence des gaz parfaits. On se place dans le cas où la quantité de matière se conserve (n constante). Donner l'expression de la différentielle de $P(T,V)$.

Exercice 6 – Sur les dimensions des conserves

On considère un cylindre de hauteur H et de rayon R.

1. Donner les expression de son volume $V(R,H)$ et de sa surface totale $A(R,H)$ en fonction de R et de H.
2. Exprimer alors les différentielles $\mathrm{d}V$ et $\mathrm{d}A$ en fonction de $\mathrm{d}R$ et $\mathrm{d}H$.
3. Quelle relation existe alors entre $\mathrm{d}R$ et $\mathrm{d}H$ à volume constant ?
4. Même question à surface constante.
5. *Application pratique* : on constate que les boîtes de conserve cylindriques vérifient le plus souvent des proportions telles que $H = 2R$. Justifier ce fait par des considérations d'économie du métal servant à fabriquer les boîtes de conserve, le volume du contenu étant fixé.

Exercice 7 ★ Limite de la mécanique classique

En mécanique relativiste, l'énergie cinétique d'une particule de masse m se mouvant à la vitesse v s'exprime par la relation $E_c = E - mc^2$ où c est la vitesse de la lumière et E l'énergie totale de la particule donnée par

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

On se place dans le cas où si $v \ll c$ et on se propose de déterminer jusqu'à quelle vitesse on peut calculer, avec une précision meilleure que 3%, l'énergie cinétique de la particule à partir de son expression classique.

1. Montrer que l'expression de l'énergie cinétique relativiste d'une particule E_c peut s'écrire $E_c = mc^2\left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1\right]$.
2. Dans la suite on utilisera la variable $x = \frac{v^2}{c^2}$. Établir l'expression du développement limité à l'ordre deux au voisinage de 0 de la fonction $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ en utilisant la formule de Taylor.
3. Que donne l'expression approchée de E_c à l'ordre 0 ? À l'ordre 1 ?
4. Pour que l'expression approchée à l'ordre 1 soit valable avec une précision meilleure que 3%, il faut que le terme d'ordre 2 du développement limité (représentant la partie essentielle de ce qui a été négligé) soit inférieur à 3% du terme d'ordre 1. Reformuler cette condition sous la forme d'une inégalité en reprenant les expressions obtenues au 2.
5. Qu'obtient-on comme condition sur x ? Sur $\frac{v}{c}$? Conclure.

Thème II : Rappels de trigonométrie et calcul vectoriel

Exercice 8 – Cercle trigonométrique et produit scalaire

On rapporte le plan à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et on considère le cercle de rayon unité centré en O. Soient A et B deux points quelconques sur le cercle, repérés par les angles $a = (\vec{\imath}, \overrightarrow{OA})$ et $b = (\vec{\imath}, \overrightarrow{OB})$.

En considérant d'une part la définition du produit scalaire

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \|\overrightarrow{OA}\| \times \|\overrightarrow{OB}\| \cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}),$$

et d'autre part son expression en fonction des coordonnées de

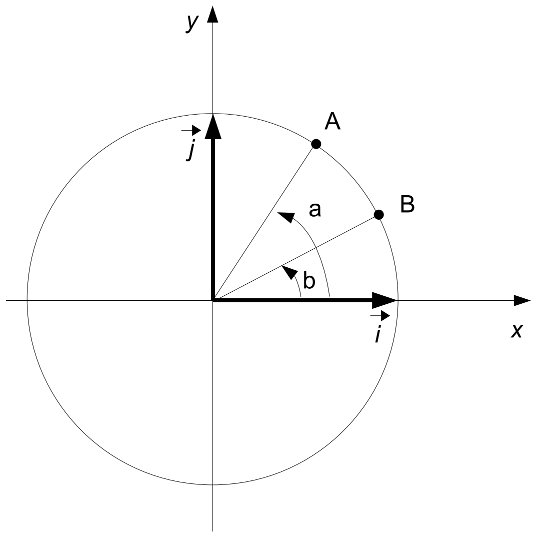
$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} &= x_A \overrightarrow{i} + y_A \overrightarrow{j}, \\ \overrightarrow{OB} &= x_B \overrightarrow{i} + y_B \overrightarrow{j}, \\ \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= x_A x_B + y_A y_B \end{aligned}$$

retrouver l'expression de $\cos(a-b)$.

En déduire celle de $\cos(a+b)$ puis, en vous appuyant sur le fait que le cosinus d'un angle θ est égal au sinus de son complémentaire $(\frac{\pi}{2} - \theta)$, en déduire les expressions de $\sin(a+b)$ et de $\sin(a-b)$.

Exercice 9

1. Soient deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$. Rappeler la définition de leur produit scalaire.
2. Représenter dans le plan les vecteurs $\vec{A} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$ et $\vec{B} = 5\vec{\imath} + \vec{\jmath}$. Calculer $\|\vec{A}\|$, $\|\vec{B}\|$, l'angle entre les deux vecteurs, le module de la projection de $\vec{B}$ sur $\vec{A}$.
3. Déterminer un vecteur orthogonal au vecteur $\vec{u} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$



Exercice 10

Soient deux vecteurs repérés dans la base orthonormée directe $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ définis par $\overrightarrow{a} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{b} = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} + z'\overrightarrow{k}$. Démontrer que

$$\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = (yz' - zy')\overrightarrow{i} + (zx' - xz')\overrightarrow{j} + (xy' - yx')\overrightarrow{k}$$

Exercice 11 ★

Soient deux vecteurs $\vec{A} = -\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + \sqrt{2}\vec{k}$ et $\vec{B} = 2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}$.

1. Calculer leurs normes et celle du vecteur $\vec{A} + \vec{B}$.
2. Soit le point $M(1, -1, 0)$. Donner le vecteur $\vec{r}$ unitaire sur l'axe (OM). Calculer la valeur algébrique de la projection des vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sur l'axe (OM).
3. Calculer le produit scalaire $\vec{A} \cdot \vec{B}$. En déduire l'angle entre $\vec{A}$ et $\vec{B}$.
4. Calculer le produit vectoriel $\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$. Que vaut le produit scalaire $\vec{C} \cdot \left(\vec{A} + \vec{B}\right)$?

Exercice 12

On considère le vecteur $\overrightarrow{OM} = \cos\omega t\,\overrightarrow{u_x} + \sin\omega t\,\overrightarrow{u_y}$ $(\omega \in \mathbb{R})$. Soit $\overrightarrow{v}$ la dérivée de ce vecteur. Montrer que $\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{A}$, où $\overrightarrow{A}$ est un vecteur constant que l'on précisera.

Exercice 13 – Projections d'un vecteur

Soient deux bases orthonormés $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ et $(\vec{u}_X, \vec{u}_Y, \vec{u}_Z)$ et un vecteur $\vec{v}$ de composantes x, y, z dans la première et de composantes X, Y, Z dans la seconde. On pose :

$$\begin{array}{rcl} \vec{u}_X &=& a_{11}\vec{u}_x + a_{12}\vec{u}_y + a_{13}\vec{u}_z \\ \vec{u}_Y &=& a_{21}\vec{u}_x + a_{22}\vec{u}_y + a_{23}\vec{u}_z \\ \vec{u}_Z &=& a_{31}\vec{u}_x + a_{32}\vec{u}_y + a_{33}\vec{u}_z \end{array}$$

1. Déterminer les anciennes composantes (x, y, z) en fonction des nouvelles (X, Y, Z).
2. Étudier le cas particulier où la seconde base se déduit de la première par une rotation d'angle $\alpha = (\vec{u}_x, \vec{u}_X)$ autour de l'axe Oz.

Thème III : Opérateur gradient

Utile pour exprimer la force en fonction de l'énergie, le flux de chaleur dans un conducteur en fonction de la température, le champ électrostatique en fonction de la charge, etc.

Exercice 14 – Propriétés du gradient

1. Rappeler la définition du gradient du champ scalaire $f(M)$ et ses expressions en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.
2. Redémontrer les propriétés du gradient :

— c'est un champ de vecteur
— il perpendiculaire aux surfaces de niveaux $f = cste$
— il est orienté dans le sens des f croissants.

Exercice 15 ★ Gradient d'un champ scalaire

Dans l'espace rapporté au repère orthonormé direct cartésien $(O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, considérons les vecteurs positions $\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$ et $\overrightarrow{OP} = x_P\vec{u}_x + y_P\vec{u}_y + z_P\vec{u}_z$.

1. Calculer $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\dfrac{1}{PM}\right)$ successivement au point M et au point P et commenter.
2. Déterminer $\overrightarrow{\text{grad}}(kr^n)$ où $k \in \mathbb{R}$, $r = \|\overrightarrow{OM}\|$ et $n \in \mathbb{Z}^*$. En déduire les expressions de $\overrightarrow{\text{grad}}(r)$ et $\overrightarrow{\text{grad}}(k/r)$.
3. On considère le champ scalaire
$$f(M) = f(x, y, z) = xy + C,$$
où C est une constante. Calculer $\overrightarrow{\text{grad}}f(M)$.

Exercice 16 – Vent géostrophique

Dans les conditions de l'équilibre géostrophique (en dehors des tropiques) il peut être établi que le vent est dirigé suivant les lignes isobares (où la pression P est constante) ; à proximité d'une dépression, le vent "tourne" autour de celle-ci, dans le sens anti-horaire dans l'hémisphère Nord. Ce mouvement est le résultat de l'équilibre entre les deux forces qui s'exercent sur une masse d'air à savoir $\overrightarrow{F_P}$ la force du gradient de pression et $\overrightarrow{F_C}$ la force de Coriolis (due à la rotation de la Terre). Ces forces s'expriment par unité de masse d'air :

$$\overrightarrow{F_P} = -\frac{k}{\rho}\overrightarrow{\text{grad}}P, \qquad \|\overrightarrow{F_C}\| = 2\Omega v \sin\lambda$$

où $\rho = 1.23$ kg/m^3 est la masse volumique de l'air, Ω est la vitesse de rotation de la Terre, λ est la latitude du point considéré et v est la vitesse du vent.

On s'intéresse aux positions suivantes sur la carte barométrique :

- (A) 60°N , 10 °O,
- (B) 51°N , 10 °O,
- (C) 61°N , 8 °E.

1. Représenter sur la carte la force de gradient de pression aux trois points considérés.
2. En déduire la représentation des forces de Coriolis en A, B et C.
3. Calculer la distance entre deux parallèles séparés de 1° et en déduire l'échelle de la carte. On rappelle que le rayon de la Terre vaut 6371 km.
4. Aux trois points considérés, calculer la valeur gradient de pression à partir des données du graphique.
5. Calculer la valeur numérique de Ω.
6. En tenant compte de l'équilibre des deux forces en présence, exprimer la vitesse du vent v.
7. Faire l'application numérique aux points A, B et C.

Thème IV : Equations différentielles du 1$^{\text{er}}$ ordre

Exercice 17 – Equations linéaires avec second membre constant

On considère l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}f} + \Psi t = \Phi$$

où Ψ et Φ sont des constantes.

1. Intégrer l'équation différentielle.
2. Déterminer la solution vérifiant la condition suivante : $t(f = f_0) = \Theta_0$.

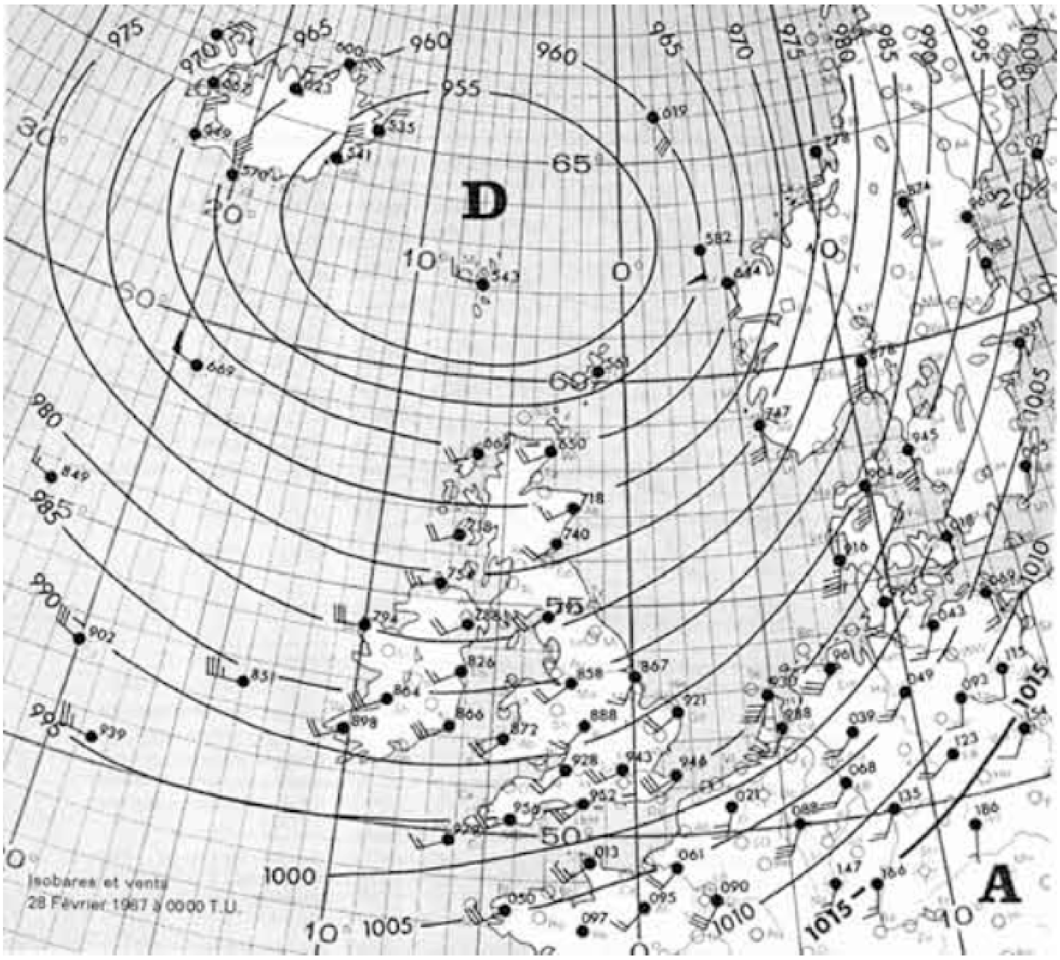
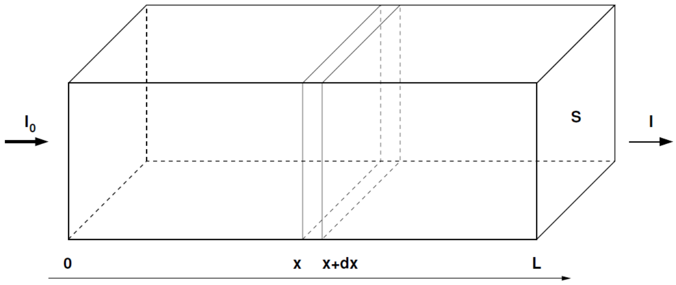


FIGURE 1 – Exercice sur le vent géostrophique : carte barométrique du nord de l'Europe pour le 28 février 1967. Les pressions sont exprimées en hPa



Exercice 18 ★ Physique pour la Chimie

On considère une cuve parallélépipédique de section S et de longueur L, remplie d'une solution d'un composé coloré dans un solvant parfaitement transparent. À l'extrémité $x = 0$ de la cuve, un faisceau lumineux d'intensité I_0 est envoyé à travers la cuve.

La solution comporte une concentration molaire C du soluté. Celui-ci sera modélisé au niveau moléculaire, par des molécules parfaitement absorbantes de surface absorbante σ (appelée plus proprement *section efficace*). La solution est suffisamment diluée pour que sur la longueur L de la cuve, l'image projetée de deux molécules quelconques de soluté ne se recouvre pas.

1. Combien de molécules de soluté compte-t-on dans une tranche parallélépipédique de cuve d'épaisseur dx ?
2. Montrer que la proportion de la surface S de la cuve alors obscurcie dans cette tranche est donnée par l'expression $\mathcal{N}_A C\sigma dx$, où $\mathcal{N}_A$ déisgne le nombre d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6,02.10^{23}$ mol^{-1}.
3. Exprimer alors l'intensité lumineuse $I(x + dx)$ à la sortie de la tranche en fonction de l'intensité lumineuse à l'entrée $I(x)$ et du résultat de la question précédente.
4. Reformuler alors cette relation sous la forme d'une équation différentielle. La résoudre compte tenu de la condition initiale. Cette équation trouvée au XVIIIe siècle porte le nom d'*équation de Beer-Lambert.*
5. On mesure à la sortie de la cuve une intensité lumineuse $I < I_0$. Exprimer C en fonction des autres données de l'énoncé.
6. *Application numérique :* $I = 25\% I_0$, $L = 1$ cm, $\sigma = 4,6.10^{-24}$ m^2. Calculer C.

Cinématique dans les différents systèmes de coordonnées

Thème I : Calcul vectoriel

Exercice 19 ★

Soit un vecteur vitesse dans une base cartésienne,

$$\overrightarrow{v} = 2t\overrightarrow{u_x} + 3\overrightarrow{u_y}$$

Ecrire le vecteur accélération. On note v la norme de $\overrightarrow{v}$ et a la norme de $\overrightarrow{a}$.

1. A-t-on $a = \dot{v}$?
2. A-t-on $\overrightarrow{a} = \dot{\overrightarrow{v}}$?

Exercice 20

Soit le vecteur $\overrightarrow{OM} = x(t)\overrightarrow{u}_x + y(t)\overrightarrow{u}_y + z(t)\overrightarrow{u}_z$ dont les composantes sont définies par

$$x(t) = 3e^{-2t}, \quad y(t) = 4\sin 3t, \quad z(t) = 5\cos 3t$$

1. Calculer la dérivée et la dérivée seconde de ce vecteur.
2. Calculer les modules de ces deux dérivées pour $t = 0$.

Exercice 21

Soit le vecteur

$$\overrightarrow{OM}(t) = 3\cos 2t\,\overrightarrow{u_x} + 3\sin 2t\,\overrightarrow{u_y} + (8t-4)\,\overrightarrow{u_z}.$$

Calculer sa dérivée à tout un instant t.

Exercice 22

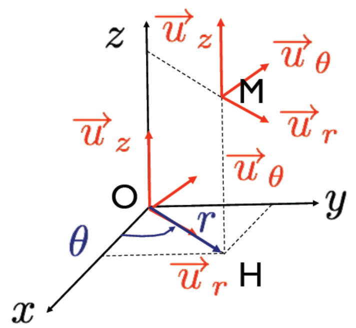
On considère le vecteur suivant :

$$\overrightarrow{a}(t) = 2e^{-t}\,\overrightarrow{u_x} + 5\cos t\,\overrightarrow{u_y} - 3\sin t\,\overrightarrow{u_z}.$$

1. Calculer le vecteur $\overrightarrow{v}(t)$ dont $\overrightarrow{a}(t)$ est la dérivée $\forall t > 0$, sachant que $\overrightarrow{v}(0) = 4\overrightarrow{u_x} - 3\overrightarrow{u_y} + 2\overrightarrow{u_z}$.
2. Calculer le vecteur $\overrightarrow{OM}(t)$ dont $\overrightarrow{a}(t)$ est la dérivée seconde $\forall t > 0$, sachant que $\overrightarrow{OM}(0) = \overrightarrow{u_x} - 3\overrightarrow{u_y} + 2\overrightarrow{u_z}$

Exercice 23 – Construction de la base cylindrique

On considère le vecteur position $\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$, où x, y, et z sont les coordonnées cartésiennes du point M.



1. Calculer l'expression du vecteur $\vec{u}_r$, vecteur unitaire dans la direction de $\overrightarrow{OH}$, le projeté orthogonal de M sur le plan $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$.
2. Calculer les coordonnées de $\vec{u}_\theta$ tel que $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ soit une base orthonormée directe. Cette base est la base cylindrique.
3. Calculer les projections de $\overrightarrow{OM}$ sur $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_z$.

4. En déduire l'expression de $\overrightarrow{OM}$ dans la base cylindrique.
5. Calculer la dérivée de cette expression de $\overrightarrow{OM}$.
6. Comparer ce résultat avec l'expression de la dérivée de $\overrightarrow{OM}$ exprimé dans le système de coordonnées cartésien.

Thème II : Équations paramétrées du mouvement

Exercice 24★

On munit l'espace d'un repère fixe orthonormé $(O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ et l'on considère un point mobile dont la trajectoire $(\mathcal{C})$ est donnée en fonction du temps par les équations :

$$\begin{aligned} x(t) &= 4t^2 \\ y(t) &= 4(t - t^3/3) \\ z(t) &= 3t + t^3 \end{aligned}$$

1. Déterminer le vecteur vitesse.
2. Déterminer la norme du vecteur vitesse.
3. Montrer que la tangente à la trajectoire $(\mathcal{C})$ fait un angle constant avec la direction de $\vec{u}_z$.

Exercice 25

On étudie le mouvement d'un projectile P, supposé ponctuel, dans un repère cartésien orthonormé direct $\mathcal{R} = (C, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ où $\vec{u}_z$ est dirigé selon la verticale. Le mouvement de P est donné par les équations paramétriques suivantes :

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{R}{\sqrt{2}} \cos(\omega t) \\ y(t) &= R \sin(\omega t) \\ z(t) &= -\frac{R}{\sqrt{2}} \cos(\omega t) \end{aligned}$$

1. Déterminer à chaque instant l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}$ et sa norme v.
2. Mêmes questions pour le vecteur accélération.
3. Quelle est la nature de la trajectoire ?
4. En représenter l'allure sur un schéma. Où se trouve P lorsque $t = 0$? On appellera ce point D par la suite.
5. On définit le vecteur $\vec{\sigma} = \overrightarrow{CP} \wedge \vec{v}$. Calculer l'expression de $\vec{\sigma}$ et déterminer sa norme. Quelles propriétés remarquables possède $\vec{\sigma}$?
6. On considère un nouveau repère cartésien $\mathcal{R}' = (C, \vec{u}_X, \vec{u}_Y, \vec{u}_Z)$ où

$$\begin{aligned} \vec{u}_X &= \frac{\overrightarrow{CD}}{\|\overrightarrow{CD}\|} \\ \vec{u}_Y &= \vec{u}_y \\ \vec{u}_Z &= \frac{\vec{\sigma}}{\|\vec{\sigma}\|} \end{aligned}$$

   Montrer que ce repère est orthonormé direct.
7. Déterminer les équations paramétriques de la trajectoire de P dans le nouveau repère.
8. On considère à présent le système de coordonnées cylindriques de centre C, d'axe $\vec{u}_Z$ et d'axe polaire $\vec{u}_X$. Les coordonnées cylindriques seront notées (r, θ, h). Déterminer les équations paramétriques de la trajectoire de P en cylindriques.
9. Quel est le point, que l'on appellera A, où se trouve le mobile P à l'instant $t_1 = \frac{9\pi}{2\omega}$? Quel est alors son vecteur vitesse $\vec{v}_1$? On exprimera les réponses dans $\mathcal{R}$.
10. Comment A et $\vec{v}_1$ sont-ils modifiés si l'on ne se trouve pas à l'instant t_1 mais à $t_1 + \mathrm{d}t$?

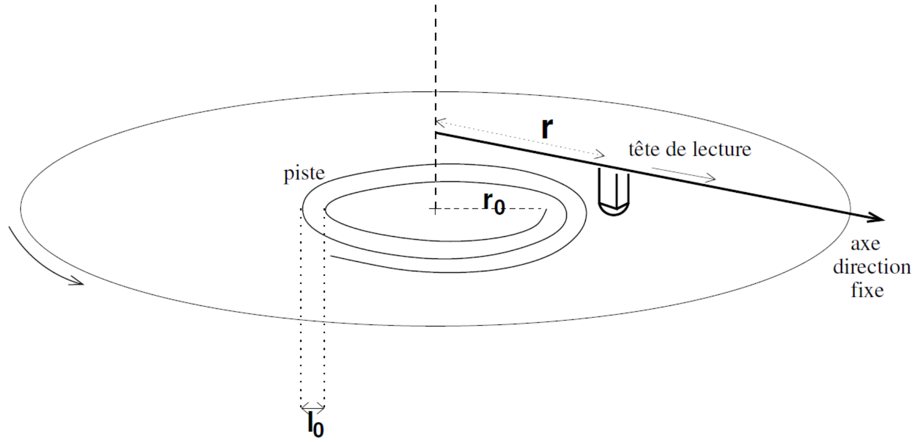
Exercice 26 – Avant de l'oublier

Les données d'un CD Audio sont gravées sur une piste formant une spirale à la surface du disque.

Le disque tourne, la piste défile devant une tête de lecture qui se déplace au fur et à mesure de la rotation le long d'un axe fixe (on appelle r la distance entre la tête et l'axe de rotation).

La rotation du disque n'est pas uniforme, mais la vitesse $v_0 = 1,25\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ du point du disque situé devant la tête de lecture est constante (pour assurer un débit constant des données, mode appelé CLV pour constant linear velocity).

Le pas de la spirale est $l_0 = 1,50\,\mu\mathrm{m}$ c'est-à-dire qu'à chaque tour du disque le rayon de la spirale augmente de l_0 et donc la tête de lecture s'est déplacée de l_0.



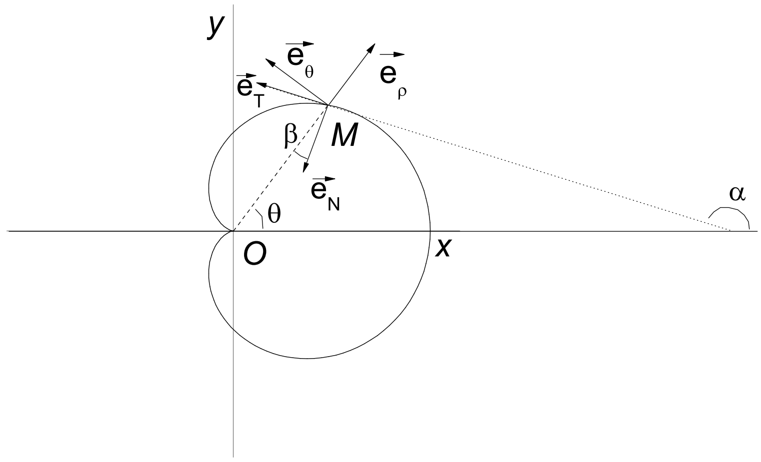
1. La tête de lecture est à la distance r. Si l'on suppose que cette distance ne varie pas pendant un tour, quelle est l'expression de la durée τ d'un tour, en fonction de r et v_0 ?
2. En tenant compte de la variation infinitésimale de r durant un tour, quelle est l'expression approchée de $\frac{dr}{dt}$ en fonction de l_0, r et v_0 ?
3. En déduire, par intégration, l'expression de $r(t)$, sachant que la valeur initiale de r est $r_0 = 25,0\,\text{mm}$.
4. Quelle est la durée du CD si le rayon maximal de la piste est $r_1 = 58,0\,\text{mm}$?
5. Quelle est la longueur totale de la piste ?
6. Déterminer l'accélération angulaire du disque à l'instant initial. Application numérique.
7. Le signal musical analogique stéréophonique est numérisé sous forme d'échantillons codés chacun sur 2×16 bits càd 2×2 octets, à la fréquence de $44,1\,\text{kHz}$. Quel est le débit de données en kilo-octets par seconde (ko/s) et quelle est la quantité de Mo de données présentes sur le disque ? On supposera que $1\,\text{Mo} = 10^3\,\text{ko} = 10^6\,\text{o}$. Remarque : en réalité sont aussi gravées des informations de codage, de correction d'erreurs, de synchronisation, etc, dont on ne tiendra pas compte.

Exercice 27 – Cardioïde

Un mobile supposé ponctuel décrit la courbe plane dont l'équation en coordonnées polaires (ρ, θ) est

$$\rho = \frac{1}{2}\rho_0(1 + \cos\theta).$$

On désigne par A le point correspondant à $\theta = 0$.



1. On choisit l'origine des temps à l'instant où le mobile passe en A, et on pose que la trajectoire est décrite avec une vitesse angulaire constante $\omega > 0$.
   a) Quelle relation lie θ, ω, et t ? Réécrire l'expression de ρ en fonction de t.
   b) Exprimer les composantes radiale v_ρ et orthoradiale v_θ du vecteur vitesse dans la base polaire.
   c) Calculer la norme v du vecteur vitesse en fonction de t.

d) Quelle est la distance $d\ell$ parcourue par le mobile durant une durée élémentaire dt ?

e) On rappelle que la distance parcourue au bout d'une durée T s'écrit

$$\ell(T) = \int d\ell = \int_0^T v dt.$$

Pour quel angle a-t-on $\ell = \rho_0$? On désigne par B le point correspondant à cette position du mobile.
Indication : Faire un changement de variable pour intégrer par rapport à θ en remarquant que $\frac{d\theta}{dt}dt = d\theta$.

f) Calculer le périmètre de la cardioïde.

g) À quelle incohérence évidente aurait conduit l'erreur d'oublier la valeur absolue à la question 2.iii ?

2. Montrer que les composantes radiale a_ρ et orthoradiale a_θ de l'accélération en fonction du temps s'écrivent :

$$\begin{aligned} a_\rho &= -\tfrac{1}{2}\rho_0\omega^2(1 + 2\cos\omega t) \\ a_\theta &= -\rho_0\omega^2 \sin\omega t. \end{aligned}$$

Exercice 28 – Géolocalisation et navigation

Dans tout l'exercice, on considère la Terre comme une sphère de centre O et de rayon $R = 6371$ km. On appelle A le port de Porto (Portugal) et B le port de New-York (États-Unis). On se place dans le référentiel géocentrique muni de la base cartésienne qui sert de référence pour les coordonnées sphériques et la base sphériques que l'on utilisera pour les calculs.

Données :
— Porto : $41°\ 08'\ 07''$ Nord, $8°\ 40'\ 01''$ Ouest. $\longrightarrow$ NY : $40°\ 43'$ Nord, $74°\ 00'$ Ouest
— Calais : $51°$ Nord, $1°\ 51'\ 23''$ Est. $\longrightarrow$ Douvres : $51°$ Nord, $1°\ 18'\ 32''$ Est

Partie 1 - Conversions

1. Un mille marin correspond à la longueur d'un arc de $1'$ d'angle le long de l'équateur. Convertir un mille marin en kilomètres.
2. Les coordonnées de géolocalisation sont données en latitude et longitude. Les coordonnées sphériques de la mécanique sont données en colatitude θ et longitude φ. Établir la conversion des coordonnées géographiques des points A et B en coordonnées sphériques, en radians.
On prendra pour la suite $M_{Porto} = (R, 0.86, -0.15)$, $M_{NY} = (R, 0.86, -1.29)$, $M_{Calais} = (R, 0.68, 0.03)$, $M_{Douvres} = (R, 0.68, 0.02)$.

Partie 2 - Route sans changer de cap

Le navigateur appareille à Porto en direction de New-York. L'océan est calme et il est confiant : il fixe le cap une fois pour toute plein Ouest. On appelle Γ_1 le chemin suivi.

1. Calculer $\vec{u}_T$ le vecteur unitaire tangent à la trajectoire.
2. En déduire la longueur D_1 du chemin Γ_1 parcourue par le navire.
3. Calculer l'angle que forme la tangente à la trajectoire avec la direction du Nord $\overrightarrow{N}$. On appelle $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{MN}$ le vecteur joignant la position du navire avec le pôle nord magnétique.

Partie 3 - Route la plus courte à vol d'oiseau

Contrit par le coût en carburant du voyage aller, le navigateur décide de réduire les frais. Il choisit pour le trajet retour le plus court chemin entre deux points à la surface d'une sphère : il suit une *géodésique*[1], c'est-à-dire pour une sphère, un cercle de même rayon et même centre que la sphère (on dit aussi un *grand cercle* de la sphère). On appelle ce chemin Γ_2.

1. Déterminer les coordonnées du point C à la surface de la Terre tel que $\overrightarrow{OC}$ est orthogonal au plan $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$.
2. En déduire l'équation dans le repère cartésien du plan auquel appartient le grand cercle sur lequel s'appuie la trajectoire.
3. En déduire l'équation de la trajectoire, c'est-à-dire la relation entre θ et φ sur la trajectoire.
4. Calculer l'angle ψ entre les vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OA}$.
5. En déduire la longueur D_2 du chemin retour Γ_2.
6. Donner, en fonction de $\dot{\theta}$ et $\dot{\varphi}$, l'expression du vecteur vitesse dans la base sphérique.
7. Pourquoi la traversée retour est-elle moins tranquille pour le navigateur ?[2]

1. Géodésique : courbe de plus courte distance entre deux points sur une surface quelconque.
2. indépendamment de la météo bien sûr.

Partie 4 - Route la plus courte à vol de taupe : la ligne droite

Calculer D_3 la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et comparer avec D_1 et D_2.

Pour finir, calculer et comparer la longueur de l'orthodromie et de la loxodromie pour la traversée entre Calais en France et Douvres en Grande-Bretagne.

Exercice 29 – Une mouche sur la trotteuse

Une mouche M parcourt à vitesse curviligne constante v_0 l'aiguille des secondes (de longueur L =20 cm) d'une horloge. À l'instant zéro, la mouche est au centre de l'horloge marquant 0 seconde et au bout de 60 secondes elle arrive à l'extrémité de l'aiguille dont le mouvement dans le référentiel terrestre est supposé circulaire uniforme. On utilisera les deux référentiels suivants :

— $\mathcal{R}_T$ le référentiel terrestre, supposé galiléen. On y utilisera le repère de coordonnées polaires.

— $\mathcal{R}'$ le référentiel dans lequel la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est fixe. $\mathcal{R}'$ et en rotation par rapport à $\mathcal{R}_T$ et n'est donc pas galiléen.

À l'exception des questions 1 et 5, on ne donnera pour ce problème que des expressions littérales.

1. Calculer v_0.
2. Établir les équations horaires en coordonnées polaires par rapport au référentiel terrestre. On fera attention au sens du parcours de l'aiguille par rapport aux conventions des coordonnées polaires.
3. En déduire l'équation de la trajectoire de la mouche en coordonnées polaires. Représentez graphiquement la trajectoire de la mouche.
4. D'après les équations horaires déterminer le vecteur vitesse en coordonnées polaires de la mouche.
5. Calculer la longueur parcourue par la mouche au bout de 30 secondes dans les deux référentiels $\mathcal{R}_T$ et $\mathcal{R}'$. Discuter les résultats obtenus.
   Indication : Pour le calcul d'intégrale, procéder au changement de variable suivant :
   — $y = \sinh u$
   — $\mathrm{d}y = \cosh u \mathrm{d}u$
   — y varie de 0 à $y_0 \Rightarrow u$ varie de $\mathrm{arcsinh}(0)$ à $\mathrm{arcsinh}(y_0)$
   On donne : $\mathrm{argsinh}(u) = \ln\left(u + \sqrt{u^2+1}\right)$
6. À l'instant $t = 0$, quelle est la direction de la tangente à la trajectoire.
7. Déterminer l'angle que fait la tangente à la trajectoire avec $\overrightarrow{OM}$ à un instant t quelconque.
8. Déterminer le vecteur accélération de la mouche.
9. Représenter les vecteurs vitesse et accélération aux instants $t = 0$ puis $t = 60$ s.

Lois de Newton

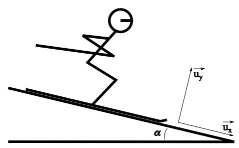
Thème I : Lois de Newton

Exercice 30 ★ Le ski

Un skieur, considéré comme un point matériel de masse m, se laisse glisser sur une pente incliné de $\alpha = 30\,°$ par rapport à l'horizontale. Sa trajectoire, contenue dans le plan $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$, est rectiligne. On ne néglige ni le frottement solide de la piste (de coefficients cinétique et statique $\mu_C = \mu_S = \mu = 0.2$) ni le frottement fluide de l'air (de coefficient λ : $\overrightarrow{f} = -\lambda\vec{v}$). À l'instant initial, la vitesse est nulle.

Données numériques $\sin 30° = 0.5$; $\cos 30° \approx 0.85$; $\tan 30° \approx 0.57$

1. Après avoir précisé le référentiel de travail, énumérer et représenter sur le schéma les forces appliquées au système.



2. Projeter les forces sur les axes $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$.
3. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, déterminer l'équation différentielle vérifiée par les coordonnées du skieur dans le plan $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$.
4. Montrer que la vitesse instantanée du skieur est donnée par l'expression suivante :

$$v(t) = \frac{mg}{\lambda}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\left(1 - e^{-\lambda t/m}\right)$$

5. Tracer à main levée le graphe de $v(t)$ en l'annotant des quantités pertinentes.
6. Toute chose étant égale par ailleurs, on fait tendre λ vers zéro. Une indétermination apparaît dans l'expression de $v(t)$ qui n'est alors plus valide. Pourquoi ? *(Répondre sans calcul)*.
7. On revient à une valeur finie de λ mais cette fois on change la valeur du coefficient de frottement solide et on choisit $\mu = 0.1$. Que devient le mouvement du système ?
8. Même question pour $\mu = 0.6$.
9. Imaginer à quelle situation pour le skieur ce dernier cas de figure pourrait correspondre.

Exercice 31 – Frottements solides

Frottement statique

On pose un cube – que l'on assimilera à un point matériel – sur un plan horizontal. En inclinant progressivement ce plan d'un angle α avec l'horizontale, on constate qu'au delà d'une certaine valeur α_c le cube commence à descendre avec une accélération constante sous l'effet de son poids (on appelle g l'accélération de la pesanteur). Exprimer la relation entre le coefficient de *frottement statique* μ_S et l'inclinaison α_c.

Frottement cinétique

Le cube peut maintenant glisser sur le plan incliné avec un coefficient de *frottement cinétique* μ_C. Le plan forme un angle β avec l'horizontale. Après avoir été soumis à une force extérieure qui l'entraîne vers le bas (on le pousse de la main par exemple), sa vitesse à l'instant initial est v, son mouvement est uniformément accéléré et il s'arrête après avoir parcouru une distance Δx_1. On répète l'expérience en le poussant vers le haut. Sa vitesse au nouvel instant initial possède la même amplitude et elle est dirigée vers le haut : il parcourt alors une distance Δx_2. On souhaite montrer que l'expression de μ_C en fonction de Δx_1, Δx_2, v, β et l'accélération de la pesanteur s'écrit :

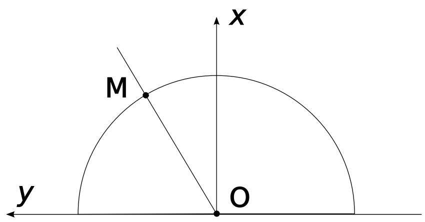
$$\mu_C = \frac{v^2}{4g\cos\beta}\left(\frac{1}{\Delta x_1} + \frac{1}{\Delta x_2}\right).$$

Dans cette partie, qui sera traitée indépendamment de la précédente, on choisit un repère cartésien $(O, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$ tel que le cube se trouve initialement au point O, que le vecteur $\overrightarrow{u_x}$ est orienté le long du plan incliné, vers le haut de la pente, et que $\overrightarrow{u_y}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u_x}$ dans le sens direct.

1. On étudie d'abord la situation où le cube descend : établir le bilan des forces. Représenter ces forces sur un schéma.
2. Décomposer ces forces dans la base cartésienne de vecteurs définie.
3. Écrire le principe fondamental de la dynamique.
4. En déduire deux relations correspondant respectivement à sa projection suivant $\overrightarrow{u_x}$ et suivant $\overrightarrow{u_y}$.
5. Écrire la loi de Coulomb relative au frottement de glissement (dynamique).
6. Déduire des deux questions précédentes l'expression de la composante suivant $\overrightarrow{u_x}$ de l'accélération en descente a_{xD} uniquement en fonction de g, α et μ_C.
7. Montrer que pour que le cube s'arrête a_{xD} doit avoir un signe que l'on précisera et justifiera.
8. Que peut-on dire de l'inclinaison du plan incliné si cette condition d'arrêt est vérifiée ? Comparer au résultat de la partie « Frottement statique ».
9. En tenant compte des conditions initiales, déterminer l'expression de la vitesse $v_x(t)$ le long de la pente puis celle de la position $x(t)$.
10. Déterminer l'expression de l'instant d'arrêt t_0 en fonction de v et de a_{xD}.
11. En déduire l'expression de la distance parcourue Δx_1 en fonction de v et a_{xD}.
12. Reprendre toutes les questions précédentes dans la situation où le cube monte. On fera un nouveau schéma mais seuls des signes sont à modifier dans les autres réponses aux questions. On notera a_{xM} l'accélération en montée et Δx_2 la nouvelle distance parcourue. Pourquoi la question 8. n'est-elle plus pertinente dans cette situation ?
13. Calculer l'expression de $\frac{1}{\Delta x_1} + \frac{1}{\Delta x_2}$ en fonction de v, a_{xM} et a_{xD}.
14. À partir des expressions obtenues à la question 6., en déduire l'expression de μ_C de l'énoncé.

Exercice 32 – Intérêt de la base polaire

On considère un point matériel M de masse m pouvant glisser sans frottement dans une glissière creuse à laquelle on a donné la forme d'un demi-cercle de rayon d comme le montre la figure. Ce point matériel est abandonné à l'instant initial du point M_0 le plus haut du demi-cercle et tombe sans vitesse initiale vers la gauche. Le point M a pour coordonnées x et y dans le repère cartésien.



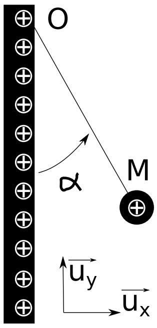
1. Faire le bilan des forces appliquées à M et les représenter.
2. Le référentiel terrestre étant considéré comme galiléen, y écrire le principe fondamental de la dynamique pour M.
3. Projeter cette relation vectorielle dans la base cartésienne et trouver une relation entre $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ et θ.
4. Donner les expressions de x et y en fonction de d et θ. Calculer $\ddot{x}$ et $\ddot{y}$.
5. En remplaçant dans l'expression précédente, montrer que l'on arrive à l'équation différentielle suivante (qu'on ne résoudra pas) :
$$\ddot{\theta} - \alpha^2 \sin\theta = 0$$
On donnera l'expression de α^2.
6. Montrer qu'en utilisant la base cylindrique, on trouve immédiatement cette équation.

Exercice 33

On considère une boule supposée ponctuelle, de masse m, repérée par le point M, suspendue à un fil de masse négligeable de longueur l accroché au mur au point O. La boule porte une charge électrique $q > 0$. L'autre extrémité du fil est fixée sur un mur vertical dont la surface porte une charge électrique uniforme et positive. La force d'interaction (répulsion) électrique entre la boule et le mur s'écrit $\overrightarrow{F} = \frac{q\sigma}{2\epsilon_0}\overrightarrow{u_x}$ où σ et ϵ_0 sont des constantes que l'on ne cherchera pas à interpréter. L'angle que fait le fil par rapport à la verticale descendante est noté α.

On suppose que la boule est à l'équilibre.

1. Faire le bilan des forces et les projeter dans la base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$.
2. Déterminer l'expression de l'angle α .



Exercice 34 – Saut Stratos de F. Baumgartner

Projet semestriel de Mrs Bertolo Adrien (PC), Faye Clément (MP) et Litvinov Andréa (MP).

Le 9 octobre 2012, le parachutiste Félix Baumgartner a battu le record du monde de chute libre en réalisant un saut depuis la stratosphère à 36 500 m d'altitude. C'est ainsi le premier homme à dépasser le mur du son (1224 km/h). Il atteint une vitesse maximale de 1342 km/h.

Partie 1 : Une simple chute avec la résistance de l'air ?

Dans cette partie, nous considérerons la réaction de l'air au cours de la chute. La formule de la résistance de l'air est donnée par l'expression suivante, $R = \frac{1}{2}C\rho S v^2$ avec C le coefficient de résistance aérodynamique, S la section droite perpendiculaire au mouvement et v la vitesse du corps en chute dans l'air et ρ la masse volumique de l'air. Nous assimilerons le sauteur, à une boule de rayon $R = 0{,}5$ m, de masse $m = 100$ kg et de coefficient de résistance aérodynamique $C = 0{,}5$. La vitesse initiale est nulle. La masse volumique de l'air dans l'atmosphère est de 1,2 kg/m^3. On prendra pour la constante gravitationnelle g = 9.81 m.s^2.

1. Faire le bilan des forces s'exerçant sur la boule pendant sa chute.
2. Appliquer le principe fondamental de la dynamique et en déduire une équation sur la vitesse.
3. En déduire l'expression de la vitesse limite atteinte par la boule lorsque le poids est compensé par la résistance de l'air. Faire l'application numérique.
4. Comparer cette valeur théorique à la valeur expérimentale. Quel est le terme qui dans l'expression de la résistance de l'air, a été incorrectement considéré à la question précédente comme une constante ? De quel(s) paramètre(s) est-il en fait fonction ?

Partie 2 : Etudions plutôt les faits

On donne ci-après des courbes représentant les évolutions de l'altitude et de la vitesse en fonction du temps pendant toute la durée de la chute de l'athlète. Nous pouvons maintenant différencier 3 phases que nous étudierons séparément. On distingue une phase d'accélération jusqu'à 10 000 m pendant laquelle nous négligerons la résistance de l'air, une phase de turbulence puis une phase de décélération.

A) Phase d'accélération

1. Donner le nouveau bilan des forces s'exerçant sur la boule.
2. Appliquer le principe fondamental de la dynamique et en déduire une nouvelle expression de la vitesse.
3. Calculer à partir de cette expression la durée au bout de la quelle la vitesse maximale est atteinte.
4. Comparer cette valeur à la valeur théorique à l'aide du graphique, expliquer.

B) Phase de turbulence Pendant la phase de turbulence, Félix a du résister aux variations de la résistance de l'air. Ces variations l'ont entrainé un court instant dans un mouvement de rotation, avant qu'il ne parvienne à se stabiliser à nouveau. Durant cette période, il a subit à un certain moment une force de $3g$. Retrouver sur le graphe un intervalle de 10 s au cours duquel cela a-t-il pu se produire.

C) Phase de décélération Au cours de cette dernière phase, nous pouvons observer sur la courbe de la vitesse que celle-ci augmente puis diminue de façon répétitive. En effet, la masse volumique de l'air étant suffisante, notre parachutiste a pu vraisemblablement contrôler sa vitesse (la décélération est constituée de ralentissements et d'accélérations). On rappelle la formule de la résistance de l'air :

$$R = \frac{1}{2} C \rho S v^2.$$

Comment fait-il pour faire varier sa vitesse ?

Exercice 35 – Drapeau sur une montgolfière

Une montgolfière se déplace librement avec le vent en direction du Nord. Dans quelle direction les drapeaux posés sur sa nacelle sont-ils dirigés ?

Exercice 36 ★ L'archer patient

Partie 1 : En négligeant la force de frottement de l'air Un archer très ambitieux entreprend d'atteindre une pomme en chute libre. Aussi patient qu'ambitieux il attend l'instant où la pomme se décroche de sa branche pour effectuer son tir. La flèche et la pomme sont considérées comme des points matériels. La branche se trouve à une hauteur $h = 3$ m au-dessus du point de départ de la flèche et l'archer se trouve à une distance $d = 30$ m de l'arbre. Comment doit tirer l'archer ?

Pour répondre à cette question, on choisit un repère cartésien dont l'origine O se trouve à la position initiale de la flèche (assimilée à un point matériel), et de base vectorielle $(\overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$, $\overrightarrow{u_y}$ étant horizontal, vers la droite et l'arbre, et $\overrightarrow{u_z}$ est vertical, vers le haut.

1. Quelles sont les coordonnées initiales de la pomme ?
2. En écrivant le principe fondamental de la dynamique pour la pomme puis en utilisant les conditions initiales, déterminer les composantes de son accélération, puis de sa vitesse, et finalement ses équations horaires $y_P(t)$ et $z_P(t)$.
3. La flèche est tirée avec une vitesse initiale de norme v_0, faisant un angle α par rapport à la direction de $\overrightarrow{u_y}$. En écrivant le principe fondamental de la dynamique pour la flèche puis en utilisant les conditions initiales, déterminer les composantes de son accélération, puis de sa vitesse, et finalement ses équations horaires $y_F(t)$ et $z_F(t)$.
4. À quel instant t_0 la trajectoire de la flèche croise-t-elle la trajectoire de la pomme ? (condition à exprimer sur $y_F(t_0)$).
5. Quelle condition portant sur $z_P(t_0)$ et $z_F(t_0)$ doit alors être vérifiée pour que la flèche touche la pomme ?
6. En déduire la condition sur l'angle α qui doit être vérifiée par l'archer lors de son tir. Application numérique.
7. Conclure. Que peut-on dire de la vitesse initiale v_0 ?

Partie 2 - En tenant compte de la force de frottement On considère maintenant que le projectile est soumis à une force de frottement de la forme :

$$\overrightarrow{F} = -mk\overrightarrow{v}$$

où k est une constante et $\overrightarrow{v}$ la vitesse de M.

1. Écrire le principe fondamental de la dynamique et en déduire les équations du mouvement $y(t)$ et $z(t)$.
2. Calculer le temps t_s nécessaire à M pour atteindre le sommet S de sa trajectoire.
3. Montrer que lorsque $t \longrightarrow +\infty$, cette trajectoire a une asymptote verticale et que la vitesse du projectile M tend vers une limite que l'on déterminera.

Exercice 37 – Une barque sur l'eau

1. Une barque, considérée comme un point de masse m, dérive librement sur un fleuve. La vitesse du courant est constante et vaut $\vec{v_c} = v_c\vec{u_x}$ (Application numérique : $v_c = 0,3$ m/s). On considère les deux référentiels $\mathcal{R}_r$ et $\mathcal{R}_e$, le premier étant lié à la rive (c'est le référentiel terrestre que l'on considérera galiléen) et le second, en translation par rapport au premier étant lié à l'eau. Calculer l'accélération dans chacun des référentiels $\mathcal{R}_r$ et $\mathcal{R}_e$. Comparer le bilan des forces. En déduire que $\mathcal{R}_e$ est galiléen.
2. On considère maintenant une seconde barque maintenue à la rive. On la pousse perpendiculairement à la rive de telle sorte qu'à l'instant $t = 0$, son vecteur vitesse est $\vec{v_0} = v_0\vec{u_y}$ (application numérique $v_0 = 0.3$ m/s). Sachant que l'eau s'oppose au mouvement de la barque avec une force proportionnelle à la vitesse de $\overrightarrow{v_{b/e}}$ celle-ci par rapport à l'eau ($\vec{F} = -\lambda\,\overrightarrow{v_{b/e}}$), appliquer à la barque le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel $\mathcal{R}_e$.
3. Au bout de combien de temps la barque commencera-t-elle à flotter librement (i.e. $\overrightarrow{v_{b/r}} = \vec{v_c}$).
4. Établir les équations horaires du mouvement.

Pour s'exercer :[3]

— Un observateur note que la barque est à une distance $y_1 = 7$ m de la rive, sa trajectoire forme un angle de 45° avec la rive. En déduire l'éloignement maximum de la barque.

— Reprendre les calculs de l'exercice dans le référentiel $\mathcal{R}_e$, et retrouver la trajectoire du mouvement.

Thème II : moments de force, moments cinétiques

Exercice 38 – Principes de conservation

1. Démontrer que lorsque la résultante des forces agissant sur un point matériel est nulle, la quantité de mouvement se conserve.
2. Démontrer que le moment de la résultante des forces (ou couple total) s'exerçant sur un point matériel est égal au taux de variation de son moment cinétique.
3. En déduire que lorsque le couple total agissant sur un point matériel est nul, le moment cinétique se conserve.

Exercice 39 ★ Pendule pesant

Soit un pendule de masse m repéré par le point A et relié par un fil rigide, de masse $m_{fil} \ll m$ et de longueur ℓ à un point fixe O. À l'instant initial, le pendule est à la verticale de son point de fixation et sa vitesse est v_0 vers la droite. On néglige les forces de frottement.

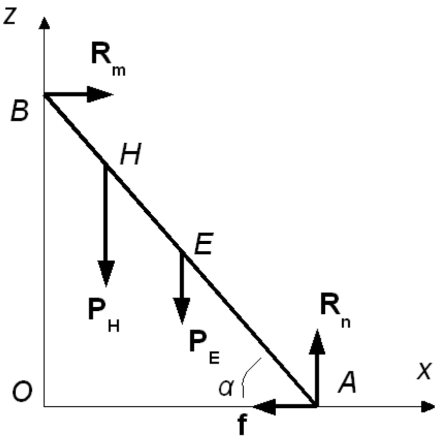
Poser le problème

1. Faire le bilan des forces appliquées au pendule.
2. Quel est le repère d'axe le plus approprié pour traiter le problème ?
   a) cartésien
   b) cylindrique
   c) sphérique
3. Projeter les forces dans ce repère.

Équation du mouvement On souhaite montrer par trois méthodes différentes que le mouvement est décrit par l'équation

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0.$$

1. Par le théorème du moment cinétique.
   Indications :
   — Calculer le moment de la résultante des forces appliquées au pendule.
   — Calculer le moment cinétique du pendule
   — Écrire le théorème du moment cinétique.
2. Par le principe fondamental de la dynamique.
   Indications : Exprimer la vitesse et l'accélération du point A dans le repère choisi.



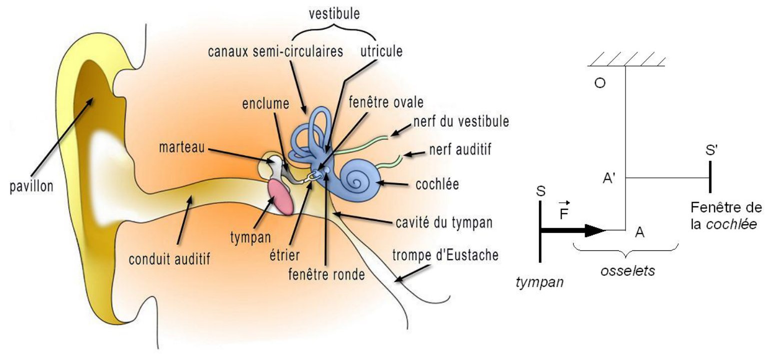
Exercice 40

Un individu de masse M positionné en H monte une échelle de centre de masse E et de masse m posée contre un mur. Cette échelle est inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale. On cherche la condition à imposer sur l'angle de α pour que l'individu puisse monter sans qu'elle ne glisse (on négligera les frottements sur le mur) en fonction du coefficient de frottement statique μ_s de l'échelle sur le sol.

1. Définir le système à étudier.
2. Faire le bilan des forces.
3. Établir les relations entre les forces puis entre les moments de ces forces au point A lorsque le système est à l'équilibre. En déduire la condition sur l'angle de l'échelle. [4]

Exercice 41 – Mécanisme de l'oreille

Le fonctionnement de l'oreille, dont un schéma simplifié est représenté ci-dessous à gauche peut être modélisé par le schéma mécanique ci-dessous à droite : le son (air en mouvement) exerce une force de pression $\overrightarrow{F}$ sur le *tympan*, de surface S, qui se met lui-même en mouvement. Ce mouvement est transmis à la fenêtre de la *cochlée* de surface S' par l'intermédiaire d'un système de bras rigides, les *osselets* qui se composent du *marteau*, de l'*enclume* et de l'*étrier*, en rotation autour du point O. On note $\alpha = OA/OA'$ et $\beta = S/S'$ ($\alpha > 1$ et $\beta > 1$). La force $\overrightarrow{F}$ est dirigée perpendiculairement à la surface, de sorte qu'elle est liée à la pression p par la relation $p = ||\overrightarrow{F}||/S$



1. Dessiner sur le schéma le moment $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{F})$ de la force $\overrightarrow{F}$ par rapport à O. Exprimer sa norme en fonction des données.
2. Dessiner la force $\overrightarrow{F'}$ qui devrait s'appliquer sur la fenêtre ovale pour maintenir le système en équilibre, puis son moment $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{F'})$ par rapport à O. A-t-on $||\overrightarrow{F'}|| > ||\overrightarrow{F}||$ ou $||\overrightarrow{F'}|| < ||\overrightarrow{F}||$? Calculer $||\overrightarrow{F'}||$
3. Calculer la surpression p' à l'intérieur de l'oreille, en fonction de la *surpression sonore* p à l'extérieur de l'oreille au niveau du *tympan*, α et β. Quel est l'intérêt de ce dispositif mécanique ?

3. « Mécanique du point », F. Biet, A. Bouzdine, T. Chameeva, H. Kachkachi, Ed. Dunod (Réf. BU 531 MEC)
4. « Mécanique du point », F. Biet, A. Bouzdine, T. Chameeva, H. Kachkachi, Ed. Dunod (Réf. BU 531 MEC)

Énergie, travail, puissance

Thème I : Travail d'une force et puissance

Exercice 42 ★ Énergies potentielles usuelles

Considérons les trois forces suivantes :

$$\overrightarrow{\mathbf{F}}_1 = -mg\vec{u}_z, \quad \overrightarrow{\mathbf{F}}_2 = -kx\vec{u}_x, \quad \overrightarrow{\mathbf{F}}_3 = k'\overrightarrow{OM}/r^3$$

m, g, k et k' sont des constantes positives et $\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$.

Trouver les énergies potentielles dont dérive chacune de ces forces.

Exercice 43 – Travail d'une force non conservative

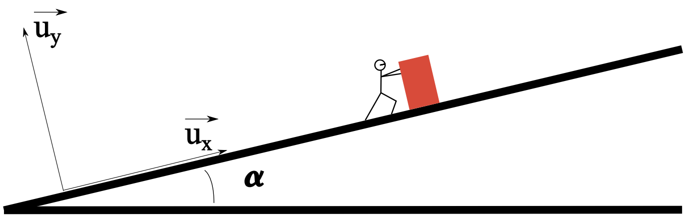
Une particule M se déplace entre les points $A(3,0,0)$ et $B(0,4,0)$ d'un référentiel $\mathcal{R}(O; x, y, z)$; elle est soumise à une force proportionnelle à la vitesse $\overrightarrow{\mathbf{F}} = -\lambda\overrightarrow{\mathbf{v}}$. Le mouvement de M pour aller de A à B est supposé uniforme, de vitesse constante $v_1 = 1\, m.s^{-1}$.

1. Calculer le travail effectué par $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ si son point d'application M emprunte : (i) la droite AB, (ii) la ligne brisée AO, OB, (iii) la demi-circonférence de diamètre AB.
2. Conclure.

Exercice 44 – Les efforts d'Armande Normoire

Un opérateur pousse vers le haut une armoire (considérée comme un point matériel) sur un plan incliné d'un angle α suivant un chemin rectiligne $\Gamma_{A\to B}$ de longueur L. L'armoire glisse avec frottement solide ($\mu_C = \mu_S = \mu$).

1. Après avoir précisé le référentiel de travail, énumérer et représenter sur le schéma les forces appliquées au système constitué de l'armoire.



2. Appliquer le principe fondamental de la dynamique et le projeter sur des axes $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$ ($\vec{u}_x$ dirigé suivant le mouvement, dans le sens du mouvement).
3. La force $\overrightarrow{F}$ exercée par l'opérateur est telle que la vitesse du système est constante et vaut v. Appliquer le théorème de l'énergie cinétique et en déduire le travail de la force exercée par l'opérateur sur $\Gamma_{A\to B}$.
4. La durée de l'ascension est T. Exprimer la puissance développée par l'opérateur.

Exercice 45 ★ Extrait du CC final 2015

Un point matériel de masse m est en chute libre. A l'instant initial sa vitesse est nulle. On négligera tout frottement.
Le référentiel terrestre lié au sol est supposé galiléen.
L'axe vertical z est orienté vers le bas. L'origine O est située au point de départ du mobile.
Données : $m = 10\,\text{kg}$; $g = 10\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

1. Ecrire la deuxième loi de Newton pour le point matériel étudié.
2. Déterminer les équations horaires donnant la vitesse $v_z(t)$ puis la position $z(t)$ du mobile, en tenant compte des conditions initiales.
3. Au bout de combien de temps τ le mobile a-t-il parcouru $h = 5\,\text{m}$?
4. Rappeler la définition de la puissance d'une force.
5. En déduire l'expression de la puissance $\mathcal{P}$ du poids en fonction de m, g et t.

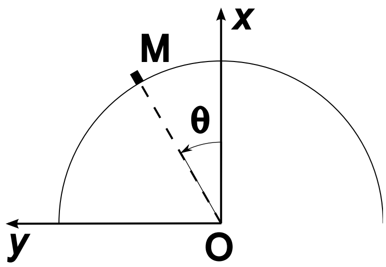
6. On rappelle que la formule déterminant la puissance moyenne $\langle \mathcal{P} \rangle$ sur le trajet est
$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \mathcal{P} dt$$
Calculer $\langle \mathcal{P} \rangle$ à l'aide de l'expression de $\mathcal{P}$.
7. Enoncer le théorème de la puissance cinétique. Préciser à quoi est égal $\mathcal{P}dt$.
8. Utiliser ce théorème pour calculer $\langle \mathcal{P} \rangle$ par une autre méthode. Comparer les résultats.
9. Pourquoi était-il prévisible que l'on ait $\langle \mathcal{P} \rangle = \mathcal{P}\left(\frac{\tau}{2}\right)$?

Thème II : É nergie cinétique, énergie potentielle

Exercice 46 ★

On considère un solide que l'on assimilera à un point matériel de masse m, repéré par le point M glissant *sans frotter* sur un rail formant un demi-cercle de centre O et de rayon ρ, placé dans le plan vertical. On munit le plan vertical du repère cartésien $(O; \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ et du repère polaire $(O; \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$; dont l'angle polaire θ est compté à partir de l'axe vertical $\vec{u}_x$. Le vecteur position s'écrit $\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y = r\vec{u}_r$.

On étudie ici le mouvement du mobile *tant qu'il est en contact avec le rail*. À l'instant initial, le mobile est lâché sans vitesse initiale du point M_0 tel que $\theta = \theta_0$.



1. Démontrer les expressions suivantes du vecteur vitesse et du vecteur accélération exprimés en coordonnées polaires :
$$\begin{aligned} \vec{v} &= \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta, \\ \vec{a} &= \left(\ddot{r} - r(\dot{\theta})^2\right)\vec{u}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{u}_\theta \end{aligned}$$
2. Dans le cas particulier du mouvement du point M sur le rail, donner l'expression de l'accélération du point M en mouvement sur le rail.
3. Établir le bilan des forces appliquées au système (on distinguera forces "de contact" et forces "à distance"). Reproduire le schéma de l'énoncé et dessiner les vecteurs représentant les forces appliquées au système.
4. Écrire le principe fondamental de la dynamique pour le point matériel M et le projeter dans la base polaire.
5. En déduire que la réaction s'écrit
$$R = -m\rho(\dot{\theta})^2 + mg\cos\theta,$$
et vérifier que l'expression est homogène.
6. Calculer le travail de la somme des forces appliquées entre M_0 et un point M tel que $\theta \in]\theta_0, \pi/2]$.
7. En déduire la variation d'énergie potentielle sur ce chemin. Justifier.
8. Rappeler l'énoncé du théorème de l'énergie cinétique et l'appliquer au chemin $M_0 \to M$.
9. On donne $\rho = 50$ cm, $\cos\theta_0 = 3/4$. Calculer l'altitude à laquelle le mobile quitte le rail.

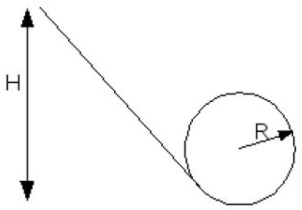
Exercice 47 – Description simplifiée d'un système stellaire

Une planète, assimilable à un point matériel de masse $m = 6,0 \cdot 10^{24}$ kg, effectue un mouvement circulaire uniforme de rayon $r = 1,5 \cdot 10^8$ km autour d'une étoile de masse $M = 2,0 \cdot 10^{30}$ kg. La seule force à laquelle elle est soumise est la force d'interaction gravitationnelle $\overrightarrow{F}$ dont l'expression en polaires dans le plan du mouvement est $\overrightarrow{F} = -\frac{\mathcal{G}mM}{r^2}\overrightarrow{u_r}$ où $\mathcal{G} = 6,7 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}$ est la constante de gravitation universelle.

1. Déterminer l'expression de la vitesse de la planète. Application numérique.
2. Déterminer l'expression de l'énergie cinétique de la planète. Application numérique.
3. Déterminer l'expression de l'énergie potentielle de la planète (on choisira par convention $\mathcal{E}_p(\infty) = 0$).
4. Que peut-on dire de l'énergie mécanique de la planète ?

Exercice 48 – La planche à roulette

Un adepte de la planche à roulette a décidé d'impressionner ses amis en s'élançant du haut de la piste représentée schématiquement ci-dessus. Sachant que notre sportif, de masse m, s'élance d'une hauteur H, va-t-il impressionner la galerie ?



Exercice 49 – Compétition entre deux forces

On considère deux billes chargées de même masse $m = 2.0$ g et de même charge $q = 1.6 \cdot 10^{-9}$ C. La bille A est fixée en un point O, la bille B est astreinte à se déplacer, sans frottement, sur un axe faisant un angle α avec l'horizontale (Ox). On travaille dans un repère $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$. On rappelle qu'en plus de leur poids, les deux billes interagissent l'une sur l'autre de sorte que la bille A, par exemple, exerce sur la bille B une force gravitationnelle et une force électrostatique s'exprimant respectivement

$$\overrightarrow{F}_{A\to B} = -\mathcal{G}m^2 \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|^3}, \qquad \overrightarrow{F}_{A\to B} = Kq^2 \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|^3}, \quad K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \quad \text{S.I.}. \tag{1}$$

Indication : $\mathcal{G} = 6.674\,28 \cdot 10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-1}, $e = 1.6022 \cdot 10^{-19}$ C, ϵ_0 : permittivité du vide.

1. *Pour s'exercer*, établir l'équation aux dimensions du facteur K et donner son unité dans le système international (S.I.).
2. Calculer numériquement l'intensité de ces forces pour une distance donnée entre les deux billes. Comparer les deux valeurs et proposer une approximation.
3. Calculer le travail des forces appliquées à la bille B lorsque son altitude varie de y_1 à y.
4. On suppose que la bille B est lachée de l'altitude y_1 sans vitesse initiale. En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, calculer la vitesse acquise par la bille lorsqu'elle se trouve à l'altitude y.
5. Montrer que l'énergie potentielle de la bille B peut s'écrire : $E_p = P(y + a/y)$ où a et P sont des constantes dont on donnera l'expression en fonction de m, q ,g, K et α.
6. On constate que la bille B lâchée sans vitesse initiale à l'altitude y_0 y reste en équilibre. En déduire la valeur y_0.
7. Tracer $E_p(y)$. Lâchée sans vitesse initiale à l'altitude $y_1 > y_0$, la bille B descend jusqu'à l'altitude y_2. Proposer une méthode graphique pour déterminer y_2.

Exercice 50 – Vitesse de libération

On donne l'expression du poids d'un solide ponctuel de masse m, en fonction de son altitude :

$$\overrightarrow{P} = -mg \frac{R^2}{(R+z)^2} \overrightarrow{u_z}$$

où $R = 6400$ km est le rayon de la Terre, $g = 10$m·s^{-2} est l'accélération de la pesanteur au niveau du sol et z la côte du solide mesurée sur un axe orienté vers le haut. Cette force est conservative et dérive d'une énergie potentielle.

1. Rappeler la relation liant la force et l'énergie potentielle.
2. Déterminer l'énergie potentielle $E_p(z)$ dont dérive le poids. On prendra l'énergie potentielle nulle quand z tend vers l'infini.
3. On appelle vitesse de libération v_L, la vitesse minimale que doit avoir au sol un point matériel pour échapper à l'attraction terrestre, c'est-à-dire s'éloigner à l'infini, où elle aura une vitesse nulle.
   a) En écrivant la conservation de l'énergie mécanique pour le point matériel entre le sol et un point infiniment éloigné de la Terre, déterminer l'expression de v_L en fonction de g et R.
   b) Calculer v_L.

Exercice 51 – Bille dans l'huile

Une boule de plomb de masse de 6 g est immergée dans un récipient d'huile. On néglige la poussée d'Archimède de sorte que la bille est soumise à son poids et à une force de frottement visqueux de la forme

$$\vec{f} = -\alpha \vec{v}.$$

On se propose de mesurer le coefficient α en étudiant le mouvement de la bille dans l'huile. Pour cela, on immerge la boule dans l'huile puis on la lâche sans vitesse initiale. Sa vitesse instantanée v est mesurée en mm·s^{-1} à intervalle régulier de 25 ms entre $t_0 = 0$ et $t_{10} = 250$ ms. Dans le tableau ci-dessous sont reportées les valeurs expérimentales de vitesse :

Temps	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}
v (mm·s^{-1})	0	165	237	268	282	288	290	291	292	292	292

1. Appliquer le principe fondamental de la dynamique et effectuer sa projection sur l'axe vertical (orienté de haut en bas, ayant pour origine $z = 0$ l'altitude de la bille à $t_0 = 0$). En déduire une équation différentielle sur la vitesse $v = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ de la bille.
2. Résoudre l'équation différentielle.
3. Donner l'expression de la vitesse limite.
4. Tracer la courbe de la vitesse en fonction du temps en faisant apparaître sur la figure au moins deux éléments de constructions (tangente à l'origine, asymptote, ...) en plus des points expérimentaux.
5. Déduire du tableau la valeur numérique du coefficient de frottement fluide α.
6. Calculer le coefficient α en utilisant à nouveau le tableau de valeurs, mais cette fois en appliquant le théorème de l'énergie cinétique (c'est-à-dire sans jamais utiliser l'expression de $v(t)$).

Exercice 52 – Oscillateur électrostatique

On considère un mobile de masse m contraint à ne se déplacer que sur l'axe (Ox) entre $-a$ et $+a$. Il n'est soumis qu'à deux forces : $\vec{F_1} = \frac{K}{(x+a)^2}\vec{u_x}$ et $\vec{F_2} = \frac{-K}{(a-x)^2}\vec{u_x}$ où K constante positive.

1. Déterminer les énergies potentielles $\mathcal{E}_{p_1}$ et $\mathcal{E}_{p_2}$ correspondant aux forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$, puis l'énergie potentielle totale $\mathcal{E}_p$.
2. À partir de l'expression de $\mathcal{E}_p(x)$, déterminer la position d'équilibre et étudier sa stabilité.
3. Si le mobile n'effectue que des petites oscillations au voisinage de la position d'équilibre, montrer que la résultante des forces peut s'écrire de manière approchée $\frac{-4Kx}{a^3}$. On utilisera l'approximation (développement limité au 1er ordre au voisinage de 0) : $(1+\epsilon)^{-2} \simeq 1 - 2\epsilon$ valable lorsque $\epsilon \ll 1$.
4. Montrer que le mouvement est alors périodique sinusoïdal, et préciser l'expression de la période T_0.

Exercice 53 – Potentiel de Lennard-Jones

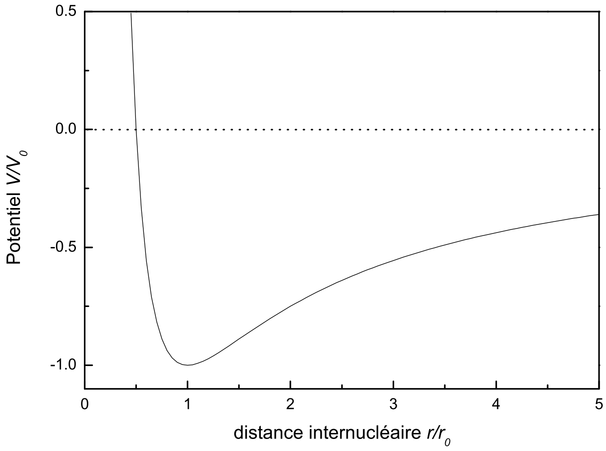
On considère le potentiel de Lennard-Jones décrivant l'interaction entre deux atomes d'un gaz monoatomique. Il s'exprime en fonction d'un seul paramètre, la distance inter-atomique r, de la façon suivante :

$$E_p(r) = 4A\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^{12} - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{6}\right],$$

où A désigne une constante spécifique à chaque espèce atomique ayant la dimension d'une énergie, et r_0 est une distance caractéristique.

Pour simplifier le problème, on ne considère que deux atomes en interaction.

1. Exprimer la force $\vec{F}$ qu'exerce un atome sur son voisin.
2. En déduire lequel des deux termes du potentiel E_p est le terme attracteur.
3. Montrer qu'un état d'équilibre existe et déterminer cet état.
4. Montrer que l'état d'équilibre est stable.



Exercice 54 ★ Énergie d'une molécule

L'énergie potentielle d'interaction entre les deux noyaux d'une molécule diatomique (H_2) varie avec la distance r entre les noyaux suivant la loi

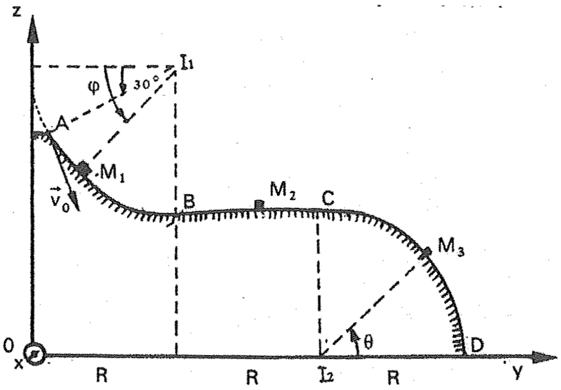
$$V(r) = V_0 \left[\left(\frac{r_0}{r} \right)^2 - 2\frac{r_0}{r} \right], \quad V_0 > 0, \quad r_0 > 0.$$

La représentation graphique de la fonction $V(r)$ est donnée dans la figure ci-après (le graphique est normalisé de telle sorte que $V_0 = 1$ S.I. et $r_0 = 1$ S.I.).

1. Par l'analyse de l'expression de $V(r)$ et de sa dérivée, donner la signification physique des constantes r_0 et V_0.
2. On se place dans le cadre de la mécanique classique. Étudier les différents mouvements d'un noyau par rapport à l'autre en vous basant sur le graphique dans les trois cas suivants (E est l'énergie totale du système) :
   a) $E = -V_0$,
   b) $-V_0 < E < 0$,
   c) $E \geq 0$. Discuter le cas $E = 0$.
3. On impose l'énergie de la molécule à $E = -8/9V_0$. Mettre en évidence les deux positions particulières du mouvement r_1 et r_2 et calculer leurs expressions en fonction de r_0.

Exercice 55 – Théorème de l'énergie cinétique et frottement solide

Un mobile de masse m repéré par le point M glisse dans le plan $(\vec{u}_y, \vec{u}_z)$ sur un support dont le profil est figuré sur le schéma. Sa vitesse au point A est v_0. Entre A et B, le support est circulaire (concave) de rayon R et le mobile glisse sans frottement ; entre B et C, la trajectoire est rectiligne, horizontale, et s'exerce une force de frottement solide de coefficient $\mu = \mu_C = \mu_S$; entre C et D, le support est circulaire (convexe) de rayon R et le mobile glisse sans frottement.



1. En utilisant le repère de projection approprié, calculer l'énergie cinétique de M en un point M_1 de l'arc $\widehat{AB}$.
2. En déduire la vitesse du mobile v_B en B.

3. Exprimer l'énergie cinétique de M pour une position quelconque M_2 du cube sur le segment $[BC]$.
4. En déduire la vitesse v_C au point C.
5. Quelle est la vitesse initiale minimum pour atteindre le point C ?
6. Calculer le travail de la somme des forces appliquées entre C et un point M_3 tel que $\theta \in [0, \pi/2]$.
7. En déduire la variation d'énergie potentielle sur ce chemin. Justifier.
8. Rappeler l'énoncé du théorème de l'énergie cinétique et l'appliquer au chemin $\overset{\frown}{CM_3}$.
9. Écrire le principe fondamental de la dynamique pour le point matériel M entre C et D et le projeter dans la base polaire.
10. En déduire que la réaction s'écrit
$$R_N = -mR(\dot{\theta})^2 + mg \sin\theta,$$
et vérifier que l'expression est homogène.
11. Calculer l'altitude à laquelle le mobile quitte le rail en fonction de R, g, μ et v_0.

Oscillateur harmonique

Exercice 56 Amortissement fort

On considère un oscillateur élastique constitué d'un mobile de masse m glissant sur un support horizontal avec frottement fluide ($\overrightarrow{f} = -\alpha\vec{v}$) mais sans frottement solide, relié à un ressort de constante de raideur k.

1. Montrer que pour un amortissement fort ($\Delta = \dfrac{\alpha^2}{m^2} - 4\omega_0^2 > 0$), le mouvement s'exprime :

$$x(t) = e^{-\frac{\alpha}{2m}t}\left(A\cosh\omega t + B\sinh\omega t\right),\ A, B \in \mathbb{R}.$$

2. Montrer que dans le régime critique ($\dfrac{\alpha^2}{m^2} = 4\omega_0^2$), le mouvement s'exprime :

$$x(t) = (At + C)e^{-\frac{\alpha}{2m}t},\ A, C \in \mathbb{R}.$$

Indication : exprimer l'équation du mouvement sous la forme de deux equations différentielles du premier ordre couplées en posant $Y(t) = \dot{x}(t) + \omega_0 x(t)$.

Exercice 57 ★ Energie potentielle élastique

Un oscillateur horizontal est constitué d'un ressort de raideur $k = 2$ N·m^{-1} auquel est accroché un point matériel M de masse $m = 100$ g. Le solide peut ainsi osciller sans frottement sur un axe horizontal.

On repère la position du point matériel par son abscisse x. A l'équilibre $x = 0$. A l'instant initial on déplace M de sorte que $x_0 = 4$ cm et on lui communique une vitesse initiale avec $\mathrm{v}_0 = 3$ cm·s^{-1} dirigée vers les x décroissants.

1. Calculer le travail élémentaire de la force de rappel élastique du ressort.
2. En déduire l'expression de l'énergie potentielle élastique.
3. Tracer l'énergie potentielle $E_p(x)$. Par convention, on prendra $E_p(0) = 0$.
4. Exprimer l'énergie mécanique totale de cet oscillateur et calculer sa valeur numérique.
5. Calculer l'énergie cinétique quand $x = 1$ cm. Illustrer sur la courbe.
6. Même question pour $x = 3$ cm.
7. Quelles sont les positions accessibles ? Ne conserver pour le calcul deux chiffres significatifs.
8. Décrire le mouvement du point M en utilisant le graphique.

Exercice 58 – Oscillateur élastique vertical

1. Établir l'équation du mouvement d'un oscillateur élastique vertical constitué d'un mobile de masse m pendu à un ressort de constante de raideur k et d'axe vertical dont l'autre extrémité est rigidement attaché à un support fixe dans le référentiel de travail. On négligera tout frottements.
2. Comparer la pulsation propre avec celle d'un oscillateur horizontal (où le mobile glisserait sans frottement sur un rail horizontal) ayant les mêmes caractéristiques m et k.

Exercice 59 – Mesure du coefficient de frottement fluide

On souhaite connaître par l'expérience la valeur du coefficient de frottement fluide α de l'huile sur une bille métallique sphérique de masse $m = 46$ g (en l'occurrence, la poussée d'Archimède est négligeable). Pour cela, on met en œuvre le dispositif suivant : la bille de plomb est attachée à une tige rigide de longueur ℓ et *d'épaisseur négligeable* (on ne tiendra donc pas compte des frottements fluides sur la tige) dont l'autre extrémité est attachée à un point fixe O. À l'instant initial, elle est lâchée sans vitesse depuis la position $\theta_0 \in]0; \pi/2[$. On étudie le système constitué de la bille que l'on traitera comme un point matériel. Le système évolue librement à partir du début d'une expérience. La mesure se décompose en deux parties. Dans la première, le mouvement est observé dans l'air, dans la seconde, dans l'huile. Le coefficient de frottement fluide est déduit de la comparaison des deux expériences.

On travaillera dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Tous les mouvements considérés ont lieu dans le plan vertical que l'on munit du repère polaire $(O; \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$. L'angle polaire θ est compté à partir de l'axe $\vec{u}_x$ vertical, dirigé vers le bas.

Partie 1 : expérience dans l'air

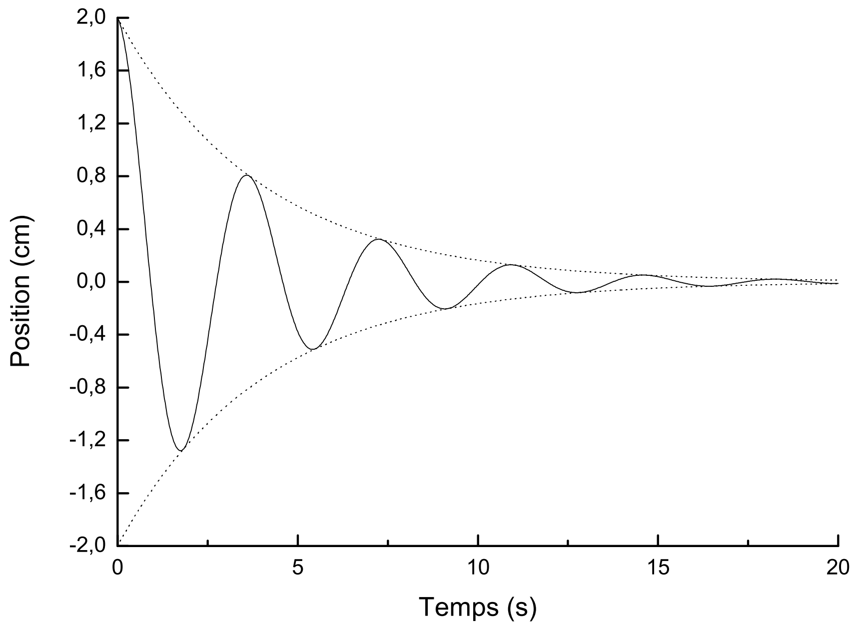
1. Établir le bilan des forces appliquées au système.
2. Appliquer le principe fondamental de la dynamique, et le projeter sur la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.
3. En déduire l'équation régissant le mouvement (c'est-à-dire la dépendance temporelle de θ) ainsi que l'expression de la tension du fil en fonction de θ.
4. Montrer que dans la limite où θ est petit (la condition initiale sur θ vérifie $\theta_0 \ll 1$), l'équation du mouvement se réécrit
$$\ddot{\theta} + \omega_0 \theta = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$
On appellera (E1) cette équation.
5. En tenant compte des conditions initiales, résoudre l'équation obtenue à la question précédente en utilisant les solutions du polynôme caractéristique associé à (E1).
6. *Application numérique* - La longueur de la tige est $\ell = 20$ cm. Calculer T_0, la période de l'oscillation.
7. *Question hors barème* - La mesure donne la valeur expérimentale $\hat{T}_0 = 900 \pm 5$ ms. Commenter ce résultat expérimental à la lumière de votre calcul littéral.

Partie 2 : expérience dans l'huile

1. Exprimer la force de frottement fluide exercée par l'huile sur la bille en fonction de θ ou de sa dérivée $\dot{\theta}$.
2. En appliquant de nouveau le principe fondamental de la dynamique, établir la nouvelle équation (E2) du mouvement. On se placera de nouveau dans la limite $\theta \ll 1$.
3. On observe une oscillation amortie du pendule. L'évolution de θ en fonction du temps est donc donnée par la solution de (E2) : $\theta(t) = \theta_0 e^{-\alpha t/2m} \cos \omega t$.
Tracer schématiquement la courbe de θ en fonction du temps t en indiquant comment se lit la pseudo-période T sur la figure.
4. Montrer que la pseudo-pulsation ω s'exprime
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\alpha^2}{4m^2}}.$$
5. La pseudo-période mesurée vaut $\hat{T} = 940 \pm 5$ ms. En déduire la valeur de α.
6. On reproduit la même expérience dans du miel. On observe alors un régime apériodique. En déduire une valeur minimum du coefficient de frottement fluide du miel.

Exercice 60 ★ Estimation expérimentale de l'amortissement

Le graphique ci-dessous représente l'enregistrement de la position x d'un oscillateur de masse m en fonction du temps t. Cet oscillateur est soumis à une force de rappel élastique $-kx\overrightarrow{u_x}$ et à une force de frottement fluide $-\lambda\dot{x}\overrightarrow{u_x}$.



On note $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ et $2\alpha = \frac{\lambda}{m} = \frac{\omega_0}{Q}$.

1. Déterminer les conditions initiales (position et vitesse) à partir du graphique.
2. Déterminer la pseudopériode T à partir du graphique.
3. Déterminer le décrément logarithmique δ défini par $\delta = \ln\left[\frac{x(t)}{x(t+T)}\right]$ à partir du graphique.
4. Sachant que l'expression générale de la loi horaire du mouvement est $x(t) = A\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos(\omega t + \phi)$ montrer que $\delta = \alpha T$. En déduire la valeur de α.
5. Montrer de même que $\omega^2 = \omega_0^2 - \alpha^2$. En déduire que $4\pi^2 = 4\pi^2\left(\frac{T}{T_0}\right)^2 - \delta^2$ et la valeur de la période T_0.
6. Déterminer Q.

Exercice 61 – Ressort incliné

Un mobile de masse $m = 0.1$ kg repose sur un plan incliné d'un angle $\theta = 30°$ par rapport à l'horizontale. Elle est accrochée à l'extrémité d'un ressort de raideur $k = 10$ N/m de longueur au repos ℓ_0, l'autre extrémité étant fixe dans le repère considéré. On travaillera dans un repère orthonormé direct du plan, dont l'axe $\vec{u}_x$ est colinéaire au support. On suppose qu'il n'y a pas de frottement solide entre le plan et le mobile.

En l'absence de frottement fluide

1. Déterminer l'allongement $\Delta\ell$ du ressort à l'équilibre.
2. Déterminer l'équation du mouvement portant sur la coordonnée $x(t)$ du mobile.
3. Identifier le type d'équation.
4. Exprimer la pulsation propre et la période propre du mouvement et donner leur valeurs numériques dans le système international (S.I.)
5. Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur à un instant t quelconque.
6. Exprimer l'énergie potentielle élastique à l'instant t.
7. Donner l'expression de l'énergie mécanique (totale) E_m du système à l'instant t.
8. Comment l'énergie mécanique évolue-t-elle ?

En présence de frottement fluide

9. On considère maintenant l'existence du frottement fluide de coefficient $\alpha = 1.2$ S.I. Déterminer l'unité de α dans le système international.
10. Quelle est la nouvelle équation du mouvement ? Quel est son type ?
11. Quelle est la nature du mouvement ?
12. Exprimer sans la redémontrer la solution de l'équation du mouvement.
13. Calculer la pseudo-période. Pourquoi parle-t-on de pseudo-période plutôt que de période ?
14. Sachant qu'à l'instant initial, le mobile est lâché sans vitesse de la position $x_m = +5$ cm, déterminer l'équation horaire du mobile.