Ph202

Chapitre 1 - Partie 2 : Outils 3D

E. Riedinger
Département des Sciences Physiques

Janvier - Février 2020

1.Repérage spatial
1.1 Vecteurs

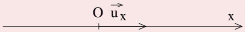
Caractéristiques d'un vecteur

direction, sens et norme

Représentation possible à partir de n'importe quel point

Notations relatives aux vecteurs

Sur l'axe des x : vecteur unitaire noté $\overrightarrow{u_x}$



$\overrightarrow{F}$ vecteur

F norme (positive) de $\overrightarrow{F}$

F_x composante (algébrique) de $\overrightarrow{F}$ sur l'axe des x : $F_x = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{u_x}$

Éviter les confusions !

$ma = F$ différent de $ma_x = F_x$ différent de $m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{F}$

1.2 Repères

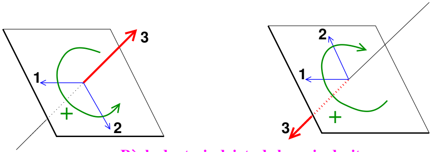
Repère

$\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$: origine + base de vecteurs

Tout vecteur de l'espace se décompose (=composantes) sur la base de vecteurs choisie.

$$\vec{A} = A_1 \vec{i} + A_2 \vec{j} + A_3 \vec{k} = \left| \begin{array}{l} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \right.$$

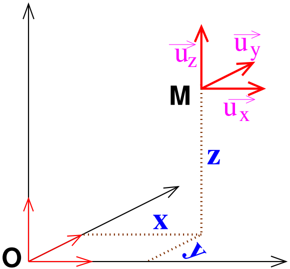
Choix : base de vecteurs orthonormée directe ($\rightarrow$ angles orientés)



Règle des trois doigts de la main droite

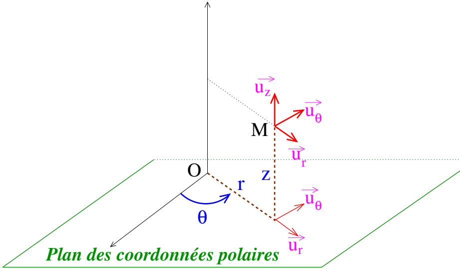
1.3 Repères usuels et coordonnées

Cartésiennes



Base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$
Coordonnées x, y, z
Directions : $\overrightarrow{u_x}$ abscisse
$\overrightarrow{u_y}$ ordonnée, $\overrightarrow{u_z}$ cote

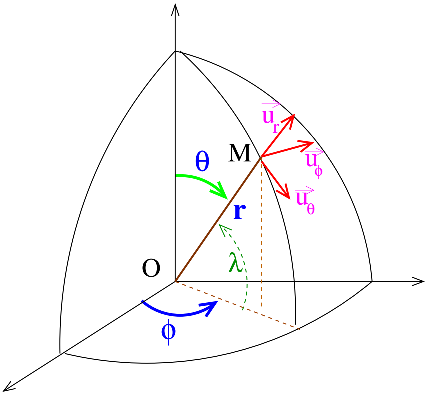
Cylindriques



Base $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$
Coordonnées r, θ, z
Directions : $\overrightarrow{u_r}$ radiale
$\overrightarrow{u_\theta}$ orthoradiale, $\overrightarrow{u_z}$ cote

1.3 Repères usuels et coordonnées

Sphériques



Base $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\phi})$

Coordonnées : r, θ, ϕ
θ : colatitude
ϕ : azimut ou longitude

Directions :
$\overrightarrow{u_r}$ vers le haut (radiale),
$\overrightarrow{u_\theta}$ vers le Sud, $\overrightarrow{u_\phi}$ vers l'Est

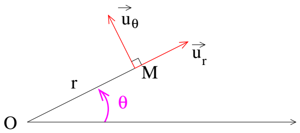
1.3 Cas particulier : repère polaire

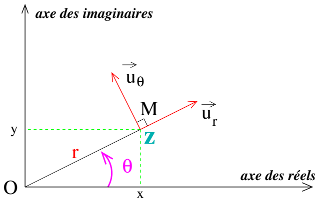
Polaires

Plan des coordonnées polaires : à 2D

Utile pour l'étude d'un mouvement de rotation dans un plan.

Coordonnées : r, θ





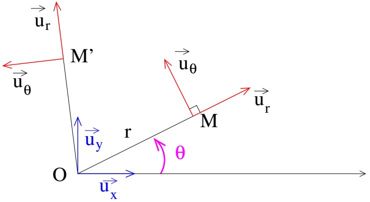
Interprétation : r et θ correspondent au module et à l'argument d'un nombre complexe z représentant $\overrightarrow{OM}$.

$z = re^{i\theta} = r\cos\theta + ir\sin\theta = x + iy$

1.3 Cas particulier : repère polaire

Attention

Les vecteurs de la base polaire sont tournants : $\overrightarrow{u_r}(\theta)$ et $\overrightarrow{u_\theta}(\theta)$ (θ dépend de la position de M)

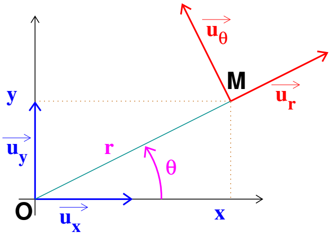


$$\frac{d\overrightarrow{u_r}}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\left(\cos\theta\,\overrightarrow{u_x} + \sin\theta\,\overrightarrow{u_y}\right) = -\sin\theta\,\overrightarrow{u_x} + \cos\theta\,\overrightarrow{u_y} = \overrightarrow{u_\theta}$$

Formules à retenir

$$\frac{d\overrightarrow{u_r}}{d\theta} = \overrightarrow{u_\theta} \qquad \text{et} \qquad \frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{d\theta} = -\overrightarrow{u_r}$$

1.3 Cas particulier : repère polaire



Dimensions

Coordonnées cartésiennes x, y : longueurs
Coordonnées polaires : r longueur, θ angle

La position d'un point M est parfaitement connue par ses coordonnées.

Vecteur position (cf. Ch. 2)

$\overrightarrow{OM}$: ses composantes sont des longueurs.

Cartésiennes $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u_x} + y\overrightarrow{u_y}$

Polaires $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r}$ (dépendance en θ = direction de $\overrightarrow{u_r}$).

Ne pas confondre

Les coordonnées du point M ne correspondent pas aux composantes du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ (sauf en cartésiennes).

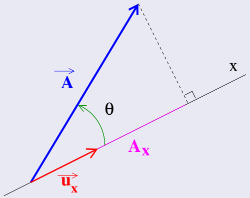
2. Opérations
2.1 Produit scalaire

Produit scalaire de deux vecteurs

$$\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = A \times B \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}}\right)$$

Calcul : $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{vmatrix} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3$

Projection d'un vecteur : utiliser le produit scalaire !



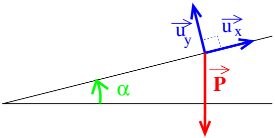
La composante A_x d'un vecteur $\overrightarrow{A}$ selon la direction $\overrightarrow{u_x}$ vaut $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{u_x}$

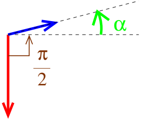
$\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{u_x} = A \times 1 \times \cos(\theta)$ et $\cos\theta = \frac{A_x}{A}$

2.1 Produit scalaire

Exemple

Composantes du vecteur $\overrightarrow{P}$ dans la base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$?





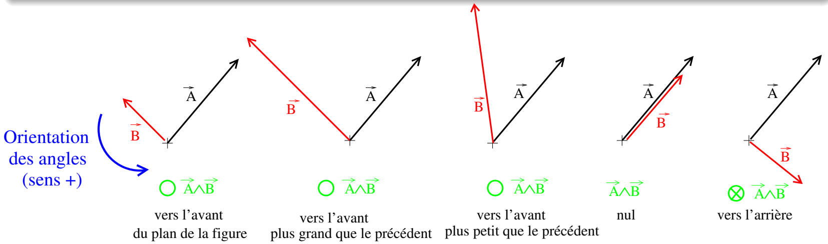
$$P_x = \overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{u_x} = P \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -P \sin\alpha$$
$$P_y = \overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{u_y} = P \cos(\alpha + \pi) = -P \cos\alpha$$

2.2 Produit vectoriel

Produit vectoriel

$\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B}$ est un vecteur défini par :

- $\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B}$ est orthogonal à $\overrightarrow{A}$ et à $\overrightarrow{B}$
- $\left(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B}\right)$ forment un trièdre direct **(→ règle 3 doigts main droite)**
- $\left\|\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B}\right\| = A \times B \times \left|\sin\left(\widehat{\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}}\right)\right|$ (ou aire parallélogramme formé par $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$)



2.2 Produit vectoriel

Calcul (démo ex. TD)

$$\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B} = \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_2 B_3 - A_3 B_2 \\ A_3 B_1 - A_1 B_3 \\ A_1 B_2 - A_2 B_1 \end{vmatrix}$$

Exemple

En cylindriques

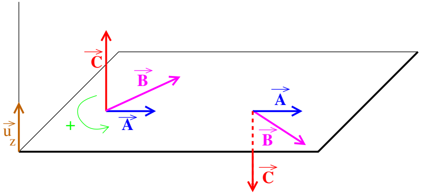
$$\overrightarrow{u_z} \wedge \overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \overrightarrow{u_\theta}$$

(vérifier résultat d'après définition : base orthonormée directe !)

2.2 Produit vectoriel

Remarque : si $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$ deux vecteurs toujours dans un même plan, alors $\overrightarrow{C} = \overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B}$ toujours dans direction fixe $\overrightarrow{u_z}$ $\perp$ au plan.

$C_z = \overrightarrow{C} \cdot \overrightarrow{u_z}$ positif ou négatif selon signe angle $\left(\widehat{\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}}\right)$



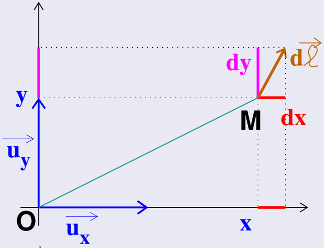
Exemple (cartésiennes)

$$\overrightarrow{A} = \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \text{ et } \overrightarrow{B} = \begin{vmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{vmatrix} \text{ alors } \overrightarrow{C} = \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \times (-3) \end{vmatrix} = -6\overrightarrow{u_z}$$

3 Vecteurs particuliers
3.1 Déplacement élémentaire

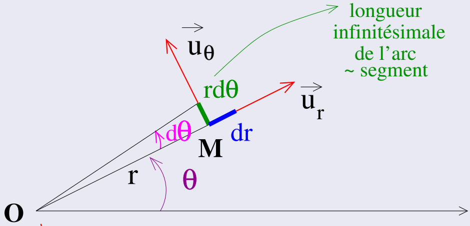
Variation infinitésimale de chaque coordonnée d'un point $M \longrightarrow$ déplacement infinitésimal : représenté dans l'espace par un vecteur noté $d\overrightarrow{\ell}$ (ou $d\overrightarrow{OM}$) appelé vecteur déplacement élémentaire.
Ses composantes sont donc des longueurs (infinitésimales).

Cartésiennes



$$d\overrightarrow{\ell} = dx\overrightarrow{u_x} + dy\overrightarrow{u_y}$$

Polaires



$$d\overrightarrow{\ell} = dr\overrightarrow{u_r} + rd\theta\overrightarrow{u_\theta}$$

3.1 Déplacement élémentaire

Vecteur déplacement élémentaire

Différentielle du vecteur position ($d\overrightarrow{OM} = d\overrightarrow{\ell}$)

Représente variation infinitésimale du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ (due à la variation infinitésimale de chaque coordonnée)

Démonstration

Cartésiennes $d\left(x\overrightarrow{u_x} + y\overrightarrow{u_y}\right) = dx\overrightarrow{u_x} + dy\overrightarrow{u_y}$

Polaires $d\left(r\overrightarrow{u_r}\right) = dr\overrightarrow{u_r} + rd\left(\overrightarrow{u_r}\right) = dr\overrightarrow{u_r} + rd\theta\overrightarrow{u_\theta}$

Vecteur		Cartésiennes (2D)	Polaires
Position	$\overrightarrow{OM}$	$x\overrightarrow{u_x} + y\overrightarrow{u_y} = \left\vert \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right.$	$r\overrightarrow{u_r} = \left\vert \begin{matrix} r \\ 0 \end{matrix} \right.$
Dépl. élém.	$d\overrightarrow{OM}$	$dx\overrightarrow{u_x} + dy\overrightarrow{u_y} = \left\vert \begin{matrix} dx \\ dy \end{matrix} \right.$	$dr\overrightarrow{u_r} + rd\theta\overrightarrow{u_\theta} = \left\vert \begin{matrix} dr \\ rd\theta \end{matrix} \right.$

3.1 Déplacement élémentaire

Exemple 1

Déplacement élémentaire le long d'un cercle de centre O (polaires)

En polaires : cercle de centre O : $r = r_0$ constante $dr = 0$

donc $d\overrightarrow{OM} = r_0 d\theta \overrightarrow{u_\theta} = \left| \begin{array}{c} 0 \\ r_0 d\theta \end{array} \right.$

Exemple 2

Déplacement élémentaire le long d'une parabole

En cartésiennes $y = x^2$.
Différentielle : $dy = 2xdx$ (variations de x et y liées !)

$d\overrightarrow{OM} = dx\overrightarrow{u_x} + 2xdx\overrightarrow{u_y} = \left| \begin{array}{c} dx \\ 2xdx \end{array} \right.$

3.2 Gradient

U grandeur scalaire définie en tout point M de l'espace : *champ*

Exemple : température $T(M)$, pression $P(M)$...

$U(x, y, z)$ ou $U(r, \theta, z)$ (U dépend de M donc de ses coordonnées)

Vecteur gradient d'un champ U

$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, U$ caractérise les variations locales de U au point considéré

Définition

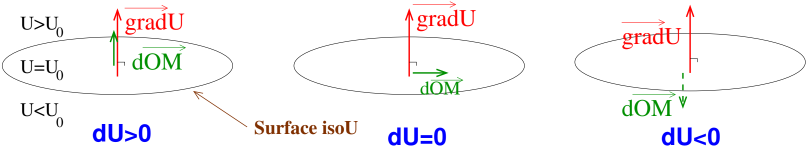
$$dU = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, U \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$$

3.2 Gradient

$dU = \overrightarrow{\textbf{grad}}\, U \cdot \textbf{d}\overrightarrow{OM}$

Au point considéré $\overrightarrow{\text{grad}}\, U$ est orienté dans la direction des plus grandes variations de U dans le sens croissant

$\overrightarrow{\text{grad}}\, U$ est orthogonal aux surfaces ou courbes isoU ($=$ de niveau)



Expressions du gradient

Cartésiennes (2D)

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, U = \left| \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \end{array} \right.$$

Polaires

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, U = \left| \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta} \end{array} \right.$$

3.2 Gradient

Justification

En cartésiennes (2D)

Différentielle : $dU = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) dy$

$\overrightarrow{\text{grad}}\, U = \begin{vmatrix} G_x \\ G_y \end{vmatrix}$ où G_x etc composantes du gradient (inconnues)

$d\overrightarrow{OM} = \begin{vmatrix} dx \\ dy \end{vmatrix}$

donc $\overrightarrow{\text{grad}}\, U \cdot d\overrightarrow{OM} = G_x dx + G_y dy$: on identifie à dU

Conclusion $\overrightarrow{\text{grad}}\, U = \begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \end{vmatrix}$

Remarque

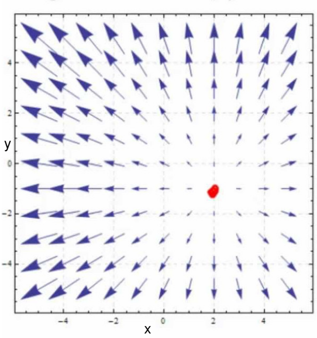
dimension des composantes de $\overrightarrow{\text{grad}}\, U$ = dimension de U / longueur

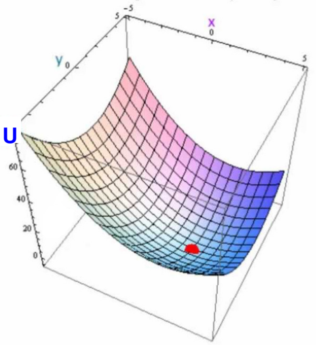
3.2 Gradient

Exemple (2D)

$$U\left(x,y\right)=x^2-4x+y^2+2y$$

$\overrightarrow{\text{grad}}\text{U} = (2x-4)\,\overrightarrow{u_x} + (2y+2)\,\overrightarrow{u_y}$. Nul au point $(x=2; y=-1)$.





3.3 Application

Circulation C d'un vecteur $\overrightarrow{D}$ sur une courbe orientée Γ

$$C = \int_\Gamma \overrightarrow{D} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$$

Cas général : la circulation dépend du chemin (courbe Γ) suivi

Propriété

Si $\overrightarrow{D}$ est le gradient d'un champ U alors la circulation de $\overrightarrow{D}$ est indépendante du chemin Γ suivi
$dC = \overrightarrow{D} \cdot d\overrightarrow{OM}$ est une **différentielle totale**

$\overrightarrow{D} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, U$ donc
$C = \int_\Gamma \overrightarrow{D} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \int_\Gamma \overrightarrow{\mathrm{grad}}\mathrm{U} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \int_\Gamma dU = [U]_A^B$
$C = U(B) - U(A)$ ne dépend que du point de départ A et d'arrivée B

3.3 Application

Comment savoir si $\overrightarrow{D}$ est un gradient ?

Théorème de Schwarz

Les dérivées croisées d'une fonction $f\left(x,y\right)$ de 2 variables sont égales : $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

Si $\overrightarrow{D}$ est un gradient de U :
ses composantes contiennent les dérivées partielles de U
donc doivent vérifier le théorème de Schwarz.

Si théorème non vérifié alors $\overrightarrow{D}$ n'est pas un gradient (cf. Ph201)

3.3 Application

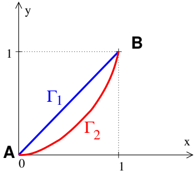
Exemple 1

Calculer (cartésiennes) la circulation C de $\overrightarrow{D} = \begin{vmatrix} 0 \\ x \end{vmatrix}$ entre $A(0;0)$ et $B(1;1)$ sur Γ_1 droite $y = x$ puis sur Γ_2 parabole $y = x^2$

Si $\overrightarrow{D}$ gradient de U alors $\overrightarrow{D} = \begin{vmatrix} 0 \\ x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \end{vmatrix}$.

Dérivées croisées $\frac{\partial}{\partial y}(0) = 0$ et $\frac{\partial}{\partial x}(x) = 1$ différentes donc $\overrightarrow{D}$ n'est pas un gradient : C dépend du chemin suivi.

$d\overrightarrow{OM} = dx\overrightarrow{u_x} + dy\overrightarrow{u_y}$



Sur Γ_1 : on a $dy = dx$ donc $d\overrightarrow{OM} = dx\overrightarrow{u_x} + d\overrightarrow{u_y}$

$$C = \int_{\Gamma_1} \overrightarrow{D} \cdot d\overrightarrow{OM} = \int_{\Gamma_1} xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Sur Γ_2 : $y = x^2$ donc $d\overrightarrow{OM} = dx\overrightarrow{u_x} + 2xdx\overrightarrow{u_y}$

$$C = \int_{\Gamma_2} \overrightarrow{D} \cdot d\overrightarrow{OM} = \int_{\Gamma_2} 2x^2dx = \left[\frac{2x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

3.3 Application

Exemple 2

Même question avec $\overrightarrow{E} = \begin{vmatrix} x \\ 0 \end{vmatrix}$

Si $\overrightarrow{E}$ gradient de U alors $\overrightarrow{E} = \begin{vmatrix} x \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \end{vmatrix}$.

Dérivées croisées $\frac{\partial}{\partial y}(x) = 0$ et $\frac{\partial}{\partial x}(0) = 0$ égales donc $\overrightarrow{E}$ est un gradient : C indépendante du chemin suivi.

$\overrightarrow{\text{grad}}\, U = \begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x \\ 0 \end{vmatrix}$ donc $U = \frac{1}{2}x^2(+\text{cste})$

La circulation C de $\overrightarrow{E}$ sur n'importe quel chemin Γ entre $A\,(0;0)$ et $B\,(1;1)$ est égale à $C = U\,(B) - U\,(A) = \frac{1}{2}$

Vérification possible sur Γ_1, Γ_2 etc.