MA100 - Travaux dirigés

Informations générales

- Les enseignements se font sous forme de COURS/TD. Il n'y a pas de CM en amphi.
- Ils se déroulent sur 14 semaines à raison de 8 semaine de 4h30 (3h + 1h30) et 6 semaines de 3h.
- Il y aura au moins trois contrôles continus.
- Vérifier votre emploi du temps très régulièrement, au moins chaque début de semaine.
- La semaine du 26 octobre est une semaine de vacances.
- La semaine du 11 janvier est pour d'éventuels rattrapages de CC ou de TD
- Les vacances de fin de l'année civile du 20 décembre 2020 au 3 janvier 2020 inclus.
- Le polycopié de cours est sur Moodle.
- Certains TD ont besoin d'une introduction sous forme de cours, d'autres non.
- Chaque feuille de TD est suivie d'une série d'exercices d'entrainement dont les énoncés sont similaires à ceux du TD et une série pour aller plus loin pour ceux qui souhaitent chercher davantage. Ces exercices ne sont pas à corriger en TD mais seulement pour ceux qui l'ont cherchés.
- Vous trouverez sur Moodle un sujet d'auto-évaluation, qui contient des exercices de révision d'analyse (études de signe, factorisation, fonctions usuelles) : faites le pour réviser et rendez votre devoir à votre enseignant·e pour lui permettre d'évaluer le niveau de son groupe et d'ajuster son enseignement.

Contenu du document

TD 1 : Etude de fonctions

Exercice 1. Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes en précisant les différentes étapes du calcul :

(1) $f : x \to e^x(1-x)^2$ (2) $f : x \to \ln(e^x + e^{-x})$ (3) $f : x \to \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

(4) $f : x \to \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ (5) $f : x \to \sin(x) - \dfrac{1}{3}\sin^2(x)$ (6) $f : x \to \tan^2(x) + \ln(\cos^2(x))$

Exercice 2. Calculer les limites suivantes

(1) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{x^3 - x^2 + 2x + 1}{-3x^2 + x - 1}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 3^-} \frac{|x-3|}{x-3}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 1^-} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ (5) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0} 2x\ln(x+\sqrt{x})$ (6) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{\ln(3x+1)}{\sqrt{2x+3}}$

Exercice 3. (asymptotes)

On considère la fonction suivante : $f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - x$

1. Etudier les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$
2. Calculer les asymptotes de f si elles existent

Exercice 4. (étude complète) Faire l'étude complète des fonctions suivantes :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6}, \quad g(x) = 2|2x-1| - |x+2| + 3x, \quad h(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x+1}, \quad j(x) = \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$$

Exercice 5. (composées et réciproques) Le but de cet exercice est de démontrer l'égalité suivante :

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si} \quad x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Les questions qui suivent vous guident jusqu'au résultat.

1. On pose $f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$. Quel est le domaine de définition de f ? Est-elle dérivable partout sur son domaine de définition ?
2. Calculer la dérivée de f.
3. Calculer $f(1)$ et $f(-1)$.
4. Déduire des questions précédentes l'égalité recherchée.

Exercice 6. Déterminer $x \in \mathbb{R}$ vérifiant l'(in)équation (E).

1. $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\sin(x)\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{4}$
3. $\sqrt{3}\sin(x) - \cos(x) \leq \sqrt{2}$

Exercice 7.

1. Donner le domain de définition des fonctions suivantes : $f(x) = \arccos(\tan(x))$, $g(x) = \arcsin(\cos(x))$, $h(x) = \tan(\arcsin(x))$
2. Donnner une expression algébrique des fonctions suivantes : $f(x) = \cos(\arcsin(x))$, $g(x) = \sin(\arctan(x))$

TD1 - Pour s'entrainer

Exercice 8. Pour cet exercice :

1. S'il y a une forme indéterminée (FI), préciser laquelle.
2. Dire quelle est la méthode adaptée pour lever cette FI, et motiver ce choix.
3. La mettre en œuvre pour calculer la limite, en détaillant les étapes.

Calculer les limites suivantes, si elles existent :

$$a)\ \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|-1}{\sqrt{x}-1} \quad b)\ \lim_{x\to 4^+} \frac{\sqrt{x-4}}{x+2} \quad c)\ \lim_{x\to 3^-} \frac{|x-3|}{x-3} \quad d)\ \lim_{x\to 1} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad e)\ \lim_{x\to -\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{2x}$$

$$f)\ \lim_{x\to +\infty} (\sqrt{x+4}-\sqrt{x-3}), \quad g)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} \quad h)\ \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} \quad i)\ \lim_{x\to 0} \frac{x^2+2|x|}{x}$$

$$j)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin x} \quad k)\ \lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+x+1}-x \quad l)\ \lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$$

Exercice 9. Soient m, n des entiers positifs. Étudier $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^m}-\sqrt{1-x^m}}{x^n}$.

Exercice 10. Calculer les dérivées des fonctions :

$$x \mapsto \sqrt{1+x^2\sin^2 x} \quad ; \quad x \mapsto \frac{\exp(1/x)+1}{\exp(1/x)-1} \quad ; \quad x \mapsto \log\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}$$

1. $x \mapsto \ln(\cos(x)) \quad ; \quad x \mapsto \tan(x) \quad ; \quad x \mapsto \sin(\tan(x))$
2. $x \mapsto (\ln(1+x))^2 \quad ; \quad x \mapsto \exp(\sin(x)) \quad ; \quad x \mapsto \sin^6(x)$

Exercice 11. (étude complète)

Faire l'étude complète des fonctions suivantes (parité, domaine de déf, dérivée, variations, limites, asymptotes, graphe, etc.) :

$$f(x) = x+2-\frac{4}{x-2}, \quad g(x) = \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1} \quad h(x) = \frac{x^2-2x+5}{x-1}, \quad j(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

$$k(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad l(x) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right) \quad m(x) = e^{1/\ln x} \quad n(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \quad p(x) = \ln\left|\frac{1}{e^x-1}\right|$$

Exercice 12. Étudier la dérivabilité de la fonction définie par :

$$f(x) = x^2\cos\frac{1}{x}, \ \text{ si } x \neq 0 \quad ; \quad f(0) = 0$$

Exercice 13. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a $\sin(x) \leq x$.

Exercice 14. Déterminer les extremums de $f(x) = x^4 - x^3 + 1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ de manière à ce que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad f(x) = ax^2+bx+1 \quad \text{si } x > 1$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 16. On pose : $F = \{\ \arcsin, \ \arccos, \ \arctan\ \}$ et $G = \{\ \sin, \ \cos, \ \tan\ \}$.

1. Pour tout $f \in F$ et pour tout $g \in G$, donner une expression algébrique pour la composée $g \circ f$.
2. Pour tout $f \in F$ et pour tout $g \in G$, déterminer le domaine de définition de la composée $f \circ g$ et représenter son graphe.

TD1 - Pour aller plus loin

Exercice 17. Soit $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 ; on note encore f la fonction prolongée. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que f' n'est pas continue en 0.

Exercice 18. Prolonger par continuité en 0 et étudier la dérivabilté des fonctions

$$f(x) = \sqrt{x} \ln x \quad ; \quad g(x) = \frac{e^x - 1}{\sqrt{x}}$$

Exercice 19. Montrer que le polynôme $X^n + aX + b$, $(a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$ admet au plus trois racines réelles.

Exercice 20. Pour tout $x \in]1, +\infty[$ on pose $f(x) = x\ln(x) - x$. Montrer que f est une bijection de $]1, +\infty[$ sur $]-1, +\infty[$. On pose $g = f^{-1}$ l'application réciproque de f. Calculer $g(0)$ et $g'(0)$.

Exercice 21. Soit $n \geq 2$ un entier fixé et $f : \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par la formule suivante :

$$f(x) = \frac{1 + x^n}{(1 + x)^n}, \quad x \geq 0.$$

1. (a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer $f'(x)$ pour $x \geq 0$.
   (b) En étudiant le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}^+$, montrer que f atteint un minimum sur $\mathbb{R}^+$ que l'on déterminera.
2. (a) En déduire l'inégalité suivante : $(1 + x)^n \leq 2^{n-1}(1 + x^n), \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$.
   (b) Montrer que si $x \in \mathbb{R}^+$ et $y \in \mathbb{R}^+$ alors on a $(x + y)^n \leq 2^{n-1}(x^n + y^n)$.

Exercice 22. Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant x_0 dans son intérieur. On suppose que $\lim_{x \to x_0} f(x) = u > 0$. Démontrer qu'il existe $t > 0$ tel que si $0 < |x - x_0| < t$ alors $f(x) \geq \frac{u}{2}$.

Exercice 23. On pose : $F = \{ \text{ argsinh}, \text{ argcosh}, \text{ argtanh } \}$ et $G = \{ \text{ sinh}, \text{ cosh}, \text{ tanh } \}$.

1. Pour tout $f \in F$ et pour tout $g \in G$, donner une expression algébrique pour la composée $g \circ f$.
2. Pour tout $f \in F$ et pour tout $g \in G$, déterminer le domaine de définition de la composée $f \circ g$ et représenter son graphe.

Exercice 24. (composées et réciproques) On considère la fonction f qui à $x \in \mathbb{R}$ associe :

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1 + x^2}\right) .$$

1. Vérifier que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ et calculer sa dérivée.
3. Représenter le graphe de f.
4. Montrer que :

$$f(x) = \begin{cases} -2\arctan(x) - \pi & \text{si} \quad x \in]-\infty, -1] \\ 2\arctan(x) & \text{si} \quad x \in [-1, 1] \\ -2\arctan(x) + \pi & \text{si} \quad x \in [1, +\infty[. \end{cases}$$

Exercice 25. Déterminer $x \in \mathbb{R}$ vérifiant l'équation (E).

1. (E) $\quad \arccos(x) = \arcsin(1/3) + \arcsin(1/4)$.
2. (E) $\quad \arccos(x) = 2\arccos(3/4)$.
3. (E) $\quad \arccos(x) = \arcsin(1 - x)$.
4. (E) $\quad \arctan(x) + \arctan(2x) = \pi/4$.

TD 2 : Polynômes

Exercice 1. Effectuer la division euclidienne du polynôme $P = X^5 - X^4 + 2X^3 + X^2 + 4$ par $Q = X^2 - 1$.

Exercice 2. Effectuer les divisions euclidiennes de
$3X^5 + 4X^2 + 1$ par $X^2 + 2X + 3$,
$3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$ par $X^3 + X + 2$,
$X^4 - X^3 + X - 2$ par $X^2 - 2X + 4$.

Exercice 3. Décomposer dans $\mathbb{R}[X]$, sans déterminer ses racines, le polynôme $P = X^4 + 1$, en produit de facteurs irréductibles.

Exercice 4. Décomposer les fractions suivantes en éléments simples sur $\mathbb{R}$, par identification des coefficients.

1. $F = \frac{X}{X^2-4}$
2. $G = \frac{X^3-3X^2+X-4}{X-1}$
3. $H = \frac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-2X+1}$
4. $K = \frac{X+1}{X^4+1}$

TD2 - Pour s'entrainer

Exercice 5. Effectuer la division euclidienne de A par B :

1. $A = 3X^5 + 4X^2 + 1,\ B = X^2 + 2X + 3$
2. $A = 3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1,\ B = X^3 + X + 2$
3. $A = X^4 - X^3 + X - 2,\ B = X^2 - 2X + 4$
4. $A = X^5 - 7X^4 - X^2 - 9X + 9,\ B = X^2 - 5X + 4$

Exercice 6 (Calcul de restes)**.** Trouver les restes des divisions euclidiennes :

1. de X^{50} par $X^2 - 3X + 2$.
2. de $\left(X + \sqrt{3}\right)^{17}$ par $X^2 + 1$.
3. de $X^8 - 32X^2 + 48$ par $\left(X - \sqrt{2}\right)^3$.

Exercice 7. Décomposer $X^{12} - 1$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 8. Décomposer les fractions suivantes en éléments simples sur $\mathbb{R}$, en raisonnant par substitution pour obtenir les coefficients.

1. $F = \frac{X^5+X^4+1}{X^3-X}$
2. $G = \frac{X^3+X+1}{(X-1)^3(X+1)}$
3. $H = \frac{X}{(X^2+1)(X^2+4)}$
4. $K = \frac{2X^4+X^3+3X^2-6X+1}{2X^3-X^2}$

TD2 - Pour aller plus loin

Exercice 9. Calculer le reste de la division euclidienne du polynôme $X^n + X + 1$ par le polynôme $(X-1)^2$.

Exercice 10. Déterminer $a, b \in \mathbb{Z}$ de façon à ce que le polynôme $aX^{n+1} - bX^n + 1$ soit divisible par le polynôme $(X-1)^2$. Calculer alors le quotient des deux polynômes.

Exercice 11. Quelle est la décomposition de $X^6 + 1$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$? Dans $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 12. Soit $P = (X^2 - X + 1)^2 + 1$.

1. Vérifier que i est racine de P.
2. En déduire alors la décomposition en produit de facteurs irréductibles de P sur $\mathbb{R}[X]$
3. Factoriser sur $\mathbb{C}[X]$ et sur $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants en produit de polynômes irréductibles : $P = X^4 + X^2 + 1,\ Q = X^{2n} + 1,\ R = X^6 - X^5 + X^4 - X^3 + X^2 - X + 1,\ S = X^5 - 13X^4 + 67X^3 - 171X^2 + 216X - 108$ (on cherchera les racines doubles de S).

Exercice 13. Soit P le polynôme $X^4 + 2X^2 + 1$. Déterminer les multiplicités des racines i et $-i$, de deux façons différentes : soit en décomposant P dans $\mathbb{C}[X]$, soit en utilisant le polynôme dérivé de P.

Exercice 14. Soit le polynôme $P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$.

1. Montrer que j est racine de ce polynôme. Déterminer son ordre de multiplicité.
2. Quelle conséquence peut-on tirer de la parité de P ?
3. Décomposer P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 15. Soient x_1, x_2, x_3 les racines de $X^3 - 2X^2 + X + 3$. Calculer $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$.

Exercice 16. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$:

1. $X^6 + 1$.
2. $X^9 + X^6 + X^3 + 1$.

TD 3 : Suites numériques

Exercice 1. Récurrence

Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} p(p+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

En déduire une expression en fonction de n de chacune des sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=0}^{k} p, \qquad S_2 = \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=0}^{k} k, \qquad S_3 = \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=0}^{k} n.$$

Exercice 2. Encadrement

On considère la suite $(a_n)_{n>0}$ définie par $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$.

Montrer que pour tout $n > 0$ on a : $\dfrac{n^2}{n^2+n} \leq a_n \leq \dfrac{n^2}{n^2+1}$ et déduire la limte de (a_n).

Exercice 3. Soit une suite arithmétique (u_n) ne s'annulant pas. On note r sa raison et u_0 son premier terme.

1. Montrer que pour tout entier k, on a $\dfrac{r}{u_k u_{k+1}} = \dfrac{1}{u_k} - \dfrac{1}{u_{k+1}}$
2. En déduire que
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k u_{k+1}} = \frac{n+1}{u_0 u_{n+1}}$$

Exercice 4. Calculer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants :

$$(1)\quad u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \qquad (2)\quad u_n = \frac{(-1)^n}{n^2} \qquad (3)\quad u_n = \frac{n^2}{n^2+n}$$

$$(4)\quad u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k \qquad (5)\quad u_n = \frac{\sin n}{n} \qquad (6)\quad u_n = \frac{\sqrt{\ln(n+3)}}{\sqrt{\ln(\ln(n+3))}}$$

Exercice 5. Suite récurrente

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$

1. Démontrer que pour tout entier naturel n, $0 < u_n < 2$
2. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n \leq u_{n+1}$
3. Que peut-on déduire ?

Exercice 6. Suite récurrente

On admet que la suite (u_n) déterminée par la donnée de son premier terme $u_0 \neq 0$ et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3-2u_n}$ est bien définie. Pour tout entier n, on pose $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n}$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique, déduire l'expression de u_n en fonction de n et u_0 et étudier la limite de (u_n).

TD3 - Pour s'entrainer

Exercice 7. Étudier la convergence des suites suivantes définies par le terme général

1. $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n}$
2. $v_n = \dfrac{n\sin(n)}{n^2+1}$
3. $w_n = \dfrac{1}{n} + (-1)^n$
4. $t_n = (-1)^n \dfrac{n+1}{n}$

Exercice 8. Suite croissante et majorée
Soit (u_n) une suite de $]0,1[$ telle que pour tout entier n on ait $(1-u_n)u_{n+1} > 1/4$..

1. Montrer que si (u_n) converge vers ℓ alors $\ell = 1/2$.
2. Montrer que pour tout entier n on a : $u_n(1-u_n) \leq 1/4 < u_{n+1}(1-u_n)$.
3. En déduire que la suite (u_n) est croissante et qu'elle est est convergente.

Exercice 9. On définit par récurrence les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 1, v_0 = 2, u_{n+1} = \frac{(u_n)^2}{u_n+v_n}, v_{n+1} = \frac{(v_n)^2}{u_n+v_n}.$$

1. Montrer par récurrence que l'on a $u_n > 0$ et $v_n > 0$.
2. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissent. En déduire qu'elles convergent vers ℓ et ℓ' respectivement. Montrer que l'on a $\ell\ell' = 0$.
3. Montrer que la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. En déduire ℓ et ℓ'.

Exercice 10. Série harmonique
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que la suite $(H_{2n} - H_n)$ est minorée par $\dfrac{1}{2}$ et en déduire que la suite (H_n) tend vers $+\infty$.

TD3 - Pour aller plus loin

Exercice 11. Soit $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$.

1. En utilisant une intégrale, montrer que pour tout $n > 0$: $\dfrac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \dfrac{1}{n}$.
2. En déduire que $\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$.
3. Déterminer la limite de H_n.
4. Montrer que $u_n = H_n - \ln(n)$ est décroissante et positive.
5. Conclusion ?

Exercice 12. Montrer qu'une suite d'entiers qui converge est constante à partir d'un certain rang.

Exercice 13. Soit $f\colon [0,1] \to [0,1]$. On considère $a \in [0,1]$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses :

1. Si f est croissante, alors (u_n) est croissante.
2. Si (u_n) est croissante, alors f est croissante.
3. Si (u_n) est croissante et f monotone, alors f est croissante.
4. Si (u_n) converge vers une limite l, alors l est point fixe de f.
5. Si f est dérivable, alors (u_n) est bornée.
6. Si le graphe de f est au dessus de la droite d'équation $y = x$, alors (u_n) est croissante.
7. Si (u_n) converge vers un point fixe l de f, alors f est continue en l.

Exercice 14. Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ?

1. Une suite à termes positifs qui tend vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.
2. Si une suite a une limite strictement positive, tous ses termes sont strictement positifs à partir d'un certain rang. Réciproque ?

Exercice 15. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}$. Que pensez-vous des propositions suivantes :

1. Si $(u_n)_n$ converge vers un réel ℓ alors $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers ℓ.
2. Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont convergentes, il en est de même de $(u_n)_n$.
3. Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont convergentes, de même limite ℓ, il en est de même de $(u_n)_n$.

TD 4 : Développements limités

Exercice 1. Donner le développement limité en 0 des fonctions

1. $x \mapsto \ln(\cos(x))$ (à l'ordre 6).
2. $x \mapsto (\ln(1+x))^2$ (à l'ordre 4).
3. $x \mapsto \exp(\sin(x))$ (à l'ordre 3).
4. $x \mapsto \sin^6(x)$ (à l'ordre 9.)

Exercice 2. Faire un développement limité en a à l'ordre n de :

1. $f(x) = \sqrt{x}\,;\ n = 3; a = 1$
2. $g(x) = e^{\sqrt{x}}\,;\ n = 3; a = 1$
3. $h(x) = \ln(\sin x)\,;\ n = 3; a = \pi/3$
4. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x^2}}\,;\ n = 2; a = 0.$

Exercice 3. Questions de limites

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer si elles ont une limite en 0. Si oui, la calculer (si possible).

1. $f : x \longmapsto \frac{\sin x - x}{x^2}$
2. $g : x \longmapsto \frac{\sin x - x}{x^3}$
3. $h : x \longmapsto \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$

Exercice 4. Déterminer la position relative de la courbe de la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x^2+1}$ et de sa tangente au voisinage des points d'abscisse 0 puis 1. On pourra envisager deux méthodes différentes, et les comparer.

Exercice 5. Etude de l'allure de la courbe de la fonction $p : x \longmapsto x\sqrt{1+x^2}$ au voisinage de $+\infty$: on cherchera/trouvera une parabole asymptote à la courbe, on précisera la position relative de la courbe et de l'asymptote au voisinage de $+\infty$.

À l'aide d'une machine, regarder les positions relatives de la courbe et de cette parabole asymptote sur les intervalles $[0, 1]$, $[0, 2]$, puis $[0, 10]$. Méditer.

Que peut-on dire de la courbe au voisinage de $-\infty$?

Exercice 6. (examen de mai 2013)
On conseille de bien détailler les calculs.

1. Calculer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de
$$f(x) = \exp(2\sqrt{1+x} - 2) - \frac{x}{4}\sin(x).$$
2. En déduire une équation de la tangente T à la courbe représentative C de f au point d'abscisse 0. Déterminer alors la position relative au voisinage de 0 de T et C.

TD4 - Pour s'entrainer

Exercice 7.

1. En utilisant une formule de Taylor à l'ordre 2, donner une valeur approchée de $\cos(0,01)$ et de $\cos(0,05)$. Comparer avec les valeurs proposées par votre calculatrice (ces dernières sont-elles exactes ?)
2. Même question avec $\sqrt{4,01}$, mais en utilisant en une formule de Taylor à l'ordre 1 seulement.

Exercice 8. On considère la fonction réelle f donnée par $f(x) = x^2 + (x+1)\ln x$.

1. Ecrire les différentes formules de Taylor pour f au voisinage de 1, à l'ordre 1 puis à l'ordre 2.
2. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1. Quelle est la position relative entre la courbe et sa tangente au point d'abscisse 1 ?
   Donner l'équation de la "meilleure approximation parabolique" de f au voisinage de 1.
3. Sur une calculatrice ou un ordinateur, représenter sur un même graphique la courbe de f, puis la tangente et la parabole, successivement sur un « petit intervalle autour de 1 » (par exemple $]0,8;1,2[$) puis sur un « grand intervalle autour de 1 ».
   Représenter enfin la parabole d'équation $y = 2x^2 - 1$ (même valeur en 1, ainsi que pour la dérivée première mais pas pour la seconde). Pensez-vous que $\frac{f(x)-(2x^2-1)}{(x-1)^2}$ ait la limite 0 en 1 ?

Exercice 9. Déterminer (en réfléchissant à la démarche à suivre avant de se lancer dans des calculs) les développements limités au voisinage de 0, sauf mention contraire, aux ordres indiqués, des fonctions suivantes.

1. (a) $a_1 : x \longmapsto x^5 - x^3 + 2x^2 + x + \frac{2}{1-x}$ à l'ordre 4.
   (b) $a_2 : x \longmapsto \ln(1+x) + \sin(x)$ à l'ordre 3, puis à l'ordre 4.
   (c) $a_3 = \mathrm{sh}$ à l'ordre 3, à l'ordre 4, à l'ordre 5, puis à l'ordre $2n$ quelconque.
2. $b_1 : x \longmapsto \frac{\sin x}{x}$ à l'ordre 6. Peut-on faire de même pour $b_2 : x \longmapsto \frac{\sin x}{x^2}$?
3. (a) $c_1 : x \longmapsto \frac{\cos x}{1-x}$ à l'ordre 6.
   (b) $c_2 : x \longmapsto e^x\sqrt{1+x}$ à l'ordre 3.
   (c) $c_3 : x \longmapsto \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$ à l'ordre 4 puis à l'ordre 5.
4. Calculer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de

$$f(x) = \cos(x)e^x + x^4 + \frac{1}{1+\ln(1+x)}.$$

Exercice 10. Soit $f(x) = \left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x$
Calculer $\ell = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et donner un équivalent de $(f(x)-\ell)$ lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 11. Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$$

Exercice 12. Déterminer la position relative de la courbe de la fonction $g : x \longmapsto \sqrt{1+3x+3x^2}$ et de sa tangente au point d'abscisse 0.

Exercice 13. Étudier l'allure de la courbe de la fonction $q : x \longmapsto \frac{x^2-5x+3}{x}e^{-\frac{1}{x}}$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 14. (examen de mai 2011) Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = (x^2 + x)\sqrt{1+\frac{1}{x}}$.

1. Déterminer le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 3 de $\sqrt{1+h}$.
2. Montrer que la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f admet une parabole asymptote au voisinage de $+\infty$, puis préciser la position relative de la courbe et de cette asymptote au voisinage de $+\infty$. On pourra utiliser la question (a) en posant $h = \frac{1}{x}$.

Exercice 15. Déterminer les limites suivantes :

$$1)\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+3x+2}+x \qquad 2)\lim_{x\to 0^+}(\arctan x)^{\frac{1}{x^2}} \qquad 3)\lim_{x\to 0}\frac{(1+3x)^{\frac{1}{3}}-1-\sin x}{1-\cos x}$$

TD4 - Pour aller plus loin

Exercice 16. Inégalités de Kolmogorov
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, de classe C^2. On suppose que f et f'' sont bornées, et l'on pose :

$$M_0 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|, \quad M_2 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|$$

(M_0 et M_2 sont donc des nombres réels tels que, pour tout x réel, on a $|f(x)| \leq M_0$ et $|f''(x)| \leq M_2$). Le but de cet exercice est de prouver que f' est bornée, et de majorer $M_1 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)|$ en fonction de M_0 et M_2. Soit $x \in \mathbb{R}$, et $h > 0$.

1. Appliquer la formule de Taylor-Lagrange à f entre x et $x+h$ à l'ordre 2.
2. En déduire l'inégalité :
$$|f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}.$$
En particulier, si on choisit $h = 1$, on obtient $|f'(x)| \leq 2M_0 + \frac{M_2}{2}$ pour tout x de $\mathbb{R}$, ce qui prouve que f' est bornée par M_1, avec $M_1 \leq 2M_0 + \frac{M_2}{2}$. On se propose de trouver une meilleure majoration :
3. Etudier la fonction $h \mapsto \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$ sur $]0,+\infty[$.
4. En déduire $M_1 \leq 2\sqrt{M_0M_2}$.

Exercice 17. Suite de solutions d'une équation et comportement asymptotique

1. Montrer que l'équation $\tan x = x$ possède une solution unique notée x_n dans $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$.
2. Ecrire une relation entre x_n et $\arctan(x_n)$.
3. Montrer que la suite $(x_n - n\pi)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puis déterminer sa limite. En déduire que $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)$.
4. Facultatif (plus difficile).
   (a) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}?*$, $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$. En déduire qu'au voisinage de $+\infty$,
   $$\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x^2}).$$
   (b) En écrivant $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + \epsilon_n$ et en utilisant le résultat de la question 2., en déduire que
   $$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

TD 5 : Intégration

Exercice 1. Calculer les intégrales suivantes :

$$a) I_1 = \int_1^2 \left(x^2 + \frac{3}{x^2}\right) dx, \quad b) I_2 = \int_1^2 (2 - 4e^{3x})\, dx, \quad c) I_3 = \int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+5}\, dx,$$
$$d) I_4 = \int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\, dx, \quad e) I_5 = \int_0^1 (2x+3)\sqrt{x^2+3x+4}\, dx, \quad f) I_6 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx.$$

Exercice 2. À l'aide d'intégrations par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$a) I_1 = \int_e^{2e} x^2 \ln x\, dx, \quad b) I_2 = \int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\, dx, \quad c) I_3 = \int_0^{\pi/2} e^x \cos x\, dx,$$
$$d) I_4 = \int_1^e (x^2+x+2)\ln(x)\, dx, \quad e) I_5 = \int_1^e (\ln x)^2\, dx, \quad f) I_6 = \int_0^1 \arctan x\, dx.$$

Exercice 3. A l'aide d'un changement de variables adéquat :

1. calculer les intégrales suivantes,

$$a) \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}} \quad b) \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x + x(\ln x)^2}\, dx \quad c) \int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x+1}\, dx \quad d) \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^4 x}\, dx$$

2. calculer les primitives suivantes sur I

$$a) \int^t \frac{\sin x \cos x}{1-\cos x}\, dx,\ I = \left]-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right[\qquad b) \int^t \frac{dx}{\cos x},\ I = \left]-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right[$$

Exercice 4. Calculer les intégrales suivantes, en réfléchissant préalablement à l'outil (voire les outils) le plus adapté pour chaque calcul :

$$a) \int_1^e \frac{1+\ln x}{x}\, dx \quad b) \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx \quad c) \int_0^1 \frac{\arctan x}{(x+1)^2}\, dx \quad d) \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+\sin x \cos x}$$

Exercice 5. Décomposer chacune des fractions rationnelles suivantes en éléments simples dans $\mathbb{R}$ pour en déduire une primitive :

$$q_1(x) = \frac{x^2}{(x-2)(x-3)}, \quad q_2(x) = \frac{2x-1}{(x-1)^2 x}, \quad q_3(x) = \frac{x^7+1}{x^2-1}$$

$$q_4(x) = \frac{5x^2-2x+3}{(x^2+1)(x-1)}, \quad q_5(x) = \frac{1}{x^2+2x+3}, \quad q_6(x) = \frac{1}{x^2+x-1}$$

TD5 - Pour s'entrainer

Exercice 6. Déterminer une primitive sur I des fonctions suivantes définies par :

$a)\ f(x) = xe^{x^2},\ I = \mathbb{R}$ $\quad b)\ g(x) = \frac{x^2}{1+x^3},\ I =]-1,+\infty[$

$c)\ h(x) = \frac{\ln x}{x},\ I =]0,+\infty[$ $\quad d)\ i(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},\ I = \mathbb{R}$

$e)\ j(x) = \frac{1}{x \ln x},\ I =]0,+\infty[$ $\quad f)\ k(x) = \tan x,\ I = \left]-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right[.$

Exercice 7. Calculer les primitives suivantes par changement de variable.

$$\int (\cos x)^{1234} \sin x\, dx, \quad \int \frac{1}{x \ln x}\, dx, \quad \int \frac{1}{3+\exp(-x)} dx, \quad \int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} dx$$

Exercice 8. Calculer les primitives suivantes par intégration par partie :

$$\int e^x \cos x dx \quad ; \quad \int \frac{\ln x}{x^n} dx \ n \in \mathbb{N} \quad ; \quad \int x \text{Arctan}\, x dx \quad ; \quad \int (x^2+x+1)e^x dx.$$

Exercice 9. Calculer les primitives (on précisera leurs intervalles de définition) ou intégrales suivantes, en réfléchissant préalablement à l'outil (voire les outils) le plus adapté pour chaque calcul :

$$e) \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x + 1}} \quad f) \int^x \frac{x+1}{x^2-x+1}\, dx \quad g) \int_0^{1/2} \arcsin x\, dx \quad h) \int^x \frac{dx}{1+x^3}$$

Exercice 10. Décomposer les fractions rationnelles suivantes ; en calculer les primitives.

$a) \frac{1}{a^2+x^2}$	$b) \frac{1}{(1+x^2)^2}$	$c) \frac{x^3}{x^2-4}$	$d) \frac{4x}{(x-2)^2}$	$e) \frac{1}{x^2+x+1}$
$f) \frac{1}{(t^2+2t-1)^2}$	$g) \frac{3t+1}{(t^2-2t+10)^2}$	$h) \frac{3t+1}{t^2-2t+10}$	$i) \frac{1}{t^3+1}$	$j) \frac{x^3+2}{(x+1)^2}$
$k) \frac{x+1}{x(x-2)^2}$	$l) \frac{(x^2-1)(x^3+3)}{2x+2x^2}$	$m) \frac{x^2}{(x^2+3)^3(x+1)}$	$n) \frac{x^7+x^3-4x-1}{x(x^2+1)^2}$	$o) \frac{3x^4-9x^3+12x^2-11x+7}{(x-1)^3(x^2+1)}$

TD5 - Pour aller plus loin

Exercice 11. Calculer les intégrales suivantes :

$$J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos^4 t\, dt, \quad J_2 = \int_0^{\pi} \sin t \cos^2 t\, dt,$$
$$J_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t \cos^3 t\, dt, \quad J_4 = \int_0^{\pi} \sin^2 t \cos^2 t\, dt.$$

Exercice 12. Formule de Wallis
Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\, dt.$$

1. Établir une relation de récurrence entre I_{n+2} et I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer les valeurs de I_0 et de I_1. En déduire I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Comparer les réels I_n, I_{n+1} et I_{n+2}. À l'aide de la question précdente en déduire la convergence de la suite $\left(\frac{I_{n+1}}{I_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^2 4^2 6^2 ... (2p)^2}{3^2 5^2 ... (2p-1)^2(2p+1)} = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 13. Soit $x > 0$ un réel. Calculer les valeurs de

$$I(x) = \int_0^x \frac{\arctan t}{1+t^2} dt \qquad \text{et} \qquad J(x) = \int_0^x \frac{\arctan t}{(1+t)^2} dt.$$

Quelles sont leurs limites quand $x \to +\infty$?

Exercice 14. Pour tous n, p dans $\mathbb{N}$, on définit

$$J_{n,p} = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \cos^p t\, dt.$$

Trouver des relations de récurrence liant $J_{n,p}$ et $J_{n,p-2}$, ainsi que $J_{n,p}$ et $J_{n-2,p}$. En déduire la valeur de $J_{n,p}$.

TD 6 : Equations différentielles

Exercice 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E) \quad y' - y = e^t$

Exercice 2. On considère sur $I =]-\infty, +\infty[$ l'équation différentielle

$$(E) \quad y' + 2y = t^2 - 3t$$

Trouver une solution particulière de (E) de la forme d'une fonction polynômiale $y(t) = at^2+bt+c$ puis la résoudre.

Exercice 3. Résoudre sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$(E) \quad 2ty' + y = t^4$$

puis donner la solution de (E) qui vaut 0 en 1.

Exercice 4. Montrer que l'équation différentielle $t^2y' + 2ty = 1$ n'a pas de solutions sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5. On considère sur $I =]0, \pi[$ l'équation différentielle

$$(E) \quad y' \sin(t) - y \cos(t) = 1$$

Vérifier que la fonction sin est une solution non nulle de l'équation homogène associée à (E) et que la fonction $-\cos$ est une solution particulière de (E) puis donner toutes les solutions de E.

Exercice 6. Résoudre sur l'intervalle I proposé les équations différentielles suivantes :

$$(E_1) \quad (t\ln(t))y' + y = t, \ I =]1, +\infty[\qquad (E_2) \quad t(ty' + y - t) = 1, \ I =]-\infty, 0[$$

Exercice 7.

Trouver les solutions des équations différentielles du second ordre suivantes :

$$(a) \ u'' - u' - 2u = 0; \quad u(0) = 3; u'(0) = 0$$

$$(b) \ u'' - 4u' + 4u = 0; \quad u(0) = 3; u'(0) = -4$$

$$(c) \ u'' - 2u' + 5u = 0; \quad u(0) = -1; u'(0) = 3$$

Exercice 8. On considère sur $I =]-\infty, 0[$ l'équation différentielle

$$(E) \quad x(xy' + y - x) = 1$$

1. Montrer qu'une fonction f est solution de (E) ssi la fonction f_1 définie par $f_1(x) = xf(x)$ est solution de l'équation différentielle (E_1) :

$$(E_1) \quad y' = \frac{1}{x} + x$$

2. Résoudre l'équation différentielle (E_1) puis l'équation (E) dans I.

TD6 - Pour s'entrainer

Exercice 9. Trouver les solutions réelles des équations différentielles suivantes :

$$y'(t) + 2y(t) = 0 \quad ; \quad \frac{dx}{dt} - x = 0 \quad ; \quad y'(x) + 2y(x) = 0 \text{ avec } (y - y')(0) = 0$$

Exercice 10. Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$y' = y + x \text{ avec } \; y(0) = 1 \quad ; \quad y' = \cos x + y \quad ; \quad y' + 2y = (x-2)^2$$

Exercice 11. Trouver les solutions réelles des équations différentielles suivantes :

$$(1 + x^2)y' - xy = 0 \quad ; \quad y' + y \tan x = 0, \text{ pour } x \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$$

Exercice 12. Résoudre sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ proposé les équations différentielles suivantes :

1. $(x \ln x)y' + y = x, \; I =]1, +\infty[\quad ; \quad x(xy' + y - x) = 1, \; I =]-\infty, 0[$
2. $2xy' + y = x^4, \; I =]-\infty, 0[\quad ; \quad y' + 2y = x^2 - 3x, \; I = \mathbb{R}$

Exercice 13.

Trouver les solutions des équations différentielles du second ordre suivantes :

$$(a) \; u'' - 6u' + 10u = 0; \quad u(0) = 4; u'(0) = -3$$

$$(b) \; u'' + u' - 6u = 0; \quad u(0) = 2; u'(0) = 3$$

$$(c) \; u'' + 8u' + 16u = 0; \quad u(0) = 1; u'(0) = -2$$

TD6 - Pour aller plus loin

Exercice 14. Résoudre l'équation différentielle $x(x^2-1)y' + 2y = x^2$. (On déterminera $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$).

Exercice 15. On se propose d'intégrer sur l'intervalle le plus grand possible contenu dans $]0, \infty[$ l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y(x)^2 = -9x^2.$$

1. Déterminer $a \in]0, \infty[$ tel que $y(x) = ax$ soit une solution particulière y_0 de (E).
2. Montrer que le changement de fonction inconnue : $y(x) = y_0(x) - \frac{1}{z(x)}$ transforme l'équation (E) en l'équation différentielle

$$(E_1) \qquad z'(x) + (6x + \frac{1}{x})z(x) = 1.$$

3. Intégrer (E_1) sur $]0, \infty[$.
4. Donner toutes les solutions de (E) définies sur $]0, \infty[$.