

Feuille de TD 1 : Formules de Taylor et développements limités

Formules de Taylor

Exercice 1.

Retrouver les formules de développements limités à l'ordre n au voisinage de 0 des fonctions usuelles du cours (\exp , \sin , \cos , $(1+x)^\alpha$) en utilisant la formule de Taylor-Young.

Exercice 2.

1. En utilisant une formule de Taylor à l'ordre 2, donner une valeur approchée de $\cos(0,01)$ et de $\cos(0,05)$. Comparer avec les valeurs proposées par votre calculatrice (ces dernières sont-elles exactes?)
2. Même question avec $\sqrt{4,01}$, mais en utilisant en une formule de Taylor à l'ordre 1 seulement.

Exercice 3.

On considère la fonction polynomiale $P(x) = 3x^5 + x^4 - 2x^2 + 3x + 1$. Quel est le développement limité de P , au voisinage de 0, à l'ordre 1? (Penser à la définition du cours!) Expliciter le reste.

Puis faire de même aux ordres 2, 3, 4, 5 et $n, n \geq 6$.

Exercice 4.

On considère la fonction réelle f donnée par $f(x) = x^2 + (x+1)\ln x$.

1. Ecrire les différentes formules de Taylor pour f au voisinage de 1, à l'ordre 1 puis à l'ordre 2.
2. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1. Quelle est la position relative entre la courbe et sa tangente au point d'abscisse 1?
Donner l'équation de la « meilleure approximation parabolique » de f au voisinage de 1.
3. Sur une calculatrice ou un ordinateur, représenter sur un même graphique la courbe de f , puis la tangente et la parabole, successivement sur un « petit intervalle autour de 1 » (par exemple $]0,8;1,2[$) puis sur un « grand intervalle autour de 1 ».
Représenter enfin la parabole d'équation $y = 2x^2 - 1$ (même valeur en 1, ainsi que pour la dérivée première mais pas pour la seconde). Pensez-vous que $\frac{f(x)-(2x^2-1)}{(x-1)^2}$ ait la limite 0 en 1?

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 , et soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}.$$

Exercice 6. Inégalités de Kolmogorov

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} , de classe C^2 . On suppose que f et f'' sont bornées, et l'on pose :

$$M_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|, \quad M_2 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)|$$

(M_0 et M_2 sont donc des nombres réels tels que, pour tout x réel, on a $|f(x)| \leq M_0$ et $|f''(x)| \leq M_2$). Le but de cet exercice est de prouver que f' est bornée, et de majorer $M_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)|$ en fonction de M_0 et M_2 . Soit $x \in \mathbb{R}$, et $h > 0$.

1. Appliquer la formule de Taylor-Lagrange à f entre x et $x+h$ à l'ordre 2.

2. En déduire l'inégalité :

$$|f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}.$$

En particulier, si on choisit $h = 1$, on obtient $|f'(x)| \leq 2M_0 + \frac{M_2}{2}$ pour tout x de \mathbb{R} , ce qui prouve que f' est bornée par M_1 , avec $M_1 \leq 2M_0 + \frac{M_2}{2}$. On se propose de trouver une meilleure majoration :

3. Etudier la fonction $h \mapsto \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$ sur $]0, +\infty[$.
 4. En déduire $M_1 \leq 2\sqrt{M_0M_2}$.

Calculs de développements limités

Petit conseil : toujours réfléchir à la démarche à suivre avant de se lancer dans des calculs. C'est une banalité, qui a vraiment son importance dans ce contexte : elle vous permettra d'économiser des calculs inutiles.

Exercice 7.

Déterminer (en réfléchissant à la démarche à suivre avant de se lancer dans des calculs) les développements limités au voisinage de 0, sauf mention contraire, aux ordres indiqués, des fonctions suivantes.

1. (a) $a_1 : x \mapsto x^5 - x^3 + 2x^2 + x + \frac{2}{1-x}$ à l'ordre 4.
 (b) $a_2 : x \mapsto \ln(1+x) + \sin(x)$ à l'ordre 3, puis à l'ordre 4.
 (c) $a_3 = \text{sh}$ à l'ordre 3, à l'ordre 4, à l'ordre 5, puis à l'ordre $2n$ quelconque.
2. $b_1 : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ à l'ordre 6. Peut-on faire de même pour $b_2 : x \mapsto \frac{\sin x}{x^2}$?
3. (a) $c_1 : x \mapsto \frac{\cos x}{1-x}$ à l'ordre 6.
 (b) $c_2 : x \mapsto e^x \sqrt{1+x}$ à l'ordre 3.
 (c) $c_3 : x \mapsto \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$ à l'ordre 4 puis à l'ordre 5.
4. (a) $d_1 : x \mapsto \frac{\cos 2x}{1-2x}$ à l'ordre 6 (regarder le développement limité de c_1).
 (b) $d_2 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ à l'ordre 7.
 (c) $d_3 : x \mapsto \ln(\cos(x))$ à l'ordre 3.
 (d) $d_4 : x \mapsto \frac{1}{1-\ln(1+x)}$ à l'ordre 3.
 (e) $d_5 : x \mapsto \exp(\sin(x))$ à l'ordre 4.
5. Déduire le développement de $e_1 : x \mapsto \arcsin x$ à l'ordre 6 de celui de d_2 .
6. (a) $f_1 : x \mapsto \frac{1}{2+x}$ en 0 à l'ordre 4. En déduire le développement limité de $f_2 : x \mapsto \frac{1}{x}$ au voisinage de 2 à l'ordre 4.
 (b) $f_3 : x \mapsto \ln(x+3)$ en 0 à l'ordre 4. En déduire le développement limité de $f_4 : x \mapsto \ln x$ au voisinage de 3 à l'ordre 4.
7. Calculer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de

$$f(x) = \cos(x)e^x + x^4 + \frac{1}{1 + \ln(1+x)}.$$

Applications des développements limités

Exercice 8. questions de limites

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer si elles ont une limite en 0. Si oui, la calculer (si possible).

1. $m_1 : x \mapsto \frac{\sin x - x}{x^2}$, puis $m_2 : x \mapsto \frac{\sin x - x}{x^3}$.
2. $m_2 : x \mapsto \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$.

3. $m_3 : x \mapsto (e^x - x)^{\frac{1}{x^2}}$ (sans oublier de se poser la question de la définition de cette fonction au voisinage de 0).

Exercice 9. Position relative courbe/tangente

1. Déterminer la position relative de la courbe de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$ et de sa tangente au voisinage des points d'abscisse 0 puis 1. On pourra envisager deux méthodes différentes, et les comparer.
2. Déterminer la position relative de la courbe de la fonction $g : x \mapsto \sqrt{1 + 3x + 3x^2}$ et de sa tangente au point d'abscisse 0.

Exercice 10. Branches infinies

1. Etude de l'allure de la courbe de la fonction $p : x \mapsto x\sqrt{1+x^2}$ au voisinage de $+\infty$: on cherchera/trouvera une parabole asymptote à la courbe, on précisera la position relative de la courbe et de l'asymptote au voisinage de $+\infty$.
À l'aide d'une machine, regarder les positions relatives de la courbe et de cette parabole asymptote sur les intervalles $[0, 1]$, $[0, 2]$, puis $[0, 10]$. Méditer.
Que peut-on dire de la courbe au voisinage de $-\infty$?
2. Étudier de même l'allure de la courbe de la fonction $q : x \mapsto \frac{x^2-5x+3}{x}e^{-\frac{1}{x}}$ au voisinage de $+\infty$.

Les deux exercices suivants sont tirés d'examens de MA202.

Exercice 11. (examen de mai 2013)

On conseille de bien détailler les calculs.

1. Calculer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de

$$f(x) = \exp(2\sqrt{1+x} - 2) - \frac{x}{4} \sin(x).$$

2. En déduire une équation de la tangente T à la courbe représentative C de f au point d'abscisse 0. Déterminer alors la position relative au voisinage de 0 de T et C .

Exercice 12. (examen de mai 2011), les deux questions sont indépendantes.

1. Calculer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de

$$a(x) = (1 + x^2 + x^5)e^x + \frac{1}{2 + \sin(x)}.$$

2. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = (x^2 + x)\sqrt{1 + \frac{1}{x}}$.
 - (a) Déterminer le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 3 de $\sqrt{1+h}$.
 - (b) Montrer que la courbe représentative \mathcal{C} de f admet une parabole asymptote au voisinage de $+\infty$, puis préciser la position relative de la courbe et de cette asymptote au voisinage de $+\infty$. On pourra utiliser la question (a) en posant $h = \frac{1}{x}$.

Exercice 13. Suite de solutions d'une équation et comportement asymptotique

1. Montrer que l'équation $\tan x = x$ possède une solution unique notée x_n dans $]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$.
2. Ecrire une relation entre x_n et $\arctan(x_n)$.
3. Montrer que la suite $(x_n - n\pi)_{n \in \mathbb{N}}$ converge puis déterminer sa limite. En déduire que $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)$.
4. Facultatif (plus difficile).

(a) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*, \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$. En déduire qu'au voisinage de $+\infty$,

$$\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

(b) En écrivant $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + \epsilon_n$ et en utilisant le résultat de la question 2., en déduire que

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$