Ph202

Chapitre 2 : Cinématique

E. Riedinger
Département des Sciences Physiques

Février 2020

1. Référentiels

Étudier le mouvement du système considéré par rapport à une référence ?

Nécessité de mesurer distances et temps

Référentiel

Solide* indéformable de référence muni d'un repère et d'une horloge

$*$: ou ensemble de points

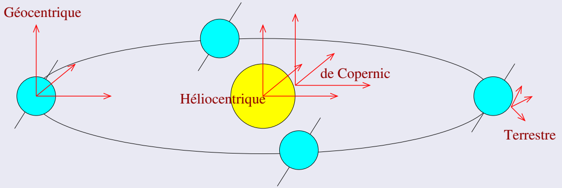
Principe de Galilée

Le temps s'écoule de manière identique dans tous les référentiels

(signifie synchronisation des horloges)

1. Référentiels

Référentiels usuels



Référentiel de Copernic

- origine au barycentre du système solaire
- directions d'étoiles fixes (approx)

Référentiels géocentrique et héliocentrique en translation / réf. Copernic

Référentiel terrestre = du laboratoire

2. Grandeurs cinématiques
2.1 Position

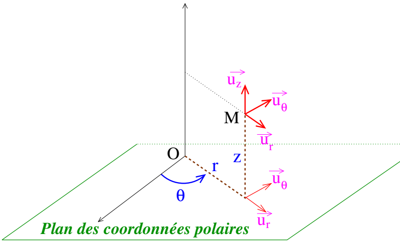
Repère de centre O. Point étudié en M.

Vecteur position

$\overrightarrow{OM}$

	Cartésiennes	Cylindriques
$\overrightarrow{OM}$	$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} r \\ 0 \\ z \end{vmatrix}$

En cylindriques (polaires) les composantes du vecteur position ne correspondent pas aux coordonnées de M !



2.1 Position

Lors du mouvement $x(t)$, $y(t)$, $r(t)$, $\theta(t)$... : équations horaires

Notation allégée

$\frac{dx}{dt} = \dot{x}$ et $\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$

De même pour autres variables. Réservé aux dérivées temporelles !

Définitions

Position	Vitesse	Accélération
$\overrightarrow{OM}$	$\overrightarrow{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$	$\overrightarrow{a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt}$

N'ont de sens que dans le référentiel d'étude !

2.2 Vitesse

Vitesse

$$\overrightarrow{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

Vitesse en cartésiennes

Déplacement élémentaire

$$d\overrightarrow{OM} = \left| \begin{array}{l} dx \\ dy \\ dz \end{array} \right.$$

Vitesse $\overrightarrow{v} = \left| \begin{array}{l} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{array} \right.$

Vitesse en cylindriques (polaires)

Déplacement élémentaire

$$d\overrightarrow{OM} = \left| \begin{array}{c} dr \\ rd\theta \\ dz \end{array} \right.$$

Vitesse $\overrightarrow{v} = \left| \begin{array}{c} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ \dot{z} \end{array} \right.$

$\dot{r}$ vitesse *radiale*

$\dot{\theta}$ *vitesse angulaire*

($\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ en $\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$)

2.2 Vitesse

Vitesse moyenne (à 1D)

Vitesse instantanée $v_x(t)$ sur parcours distance L, durée τ :

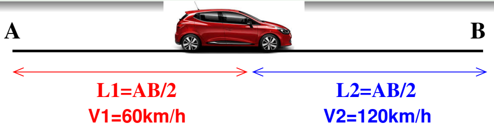
$$\langle v\rangle = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} v_x(t)\,dt$$

$$\langle v\rangle = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\frac{dx}{dt}dt = \frac{1}{\tau}\int_0^{L}dx \text{ donc } \boxed{\langle v\rangle = \frac{L}{\tau}}$$

Rem : vitesse moyenne = moyenne temporelle vitesses instantanées

Exemple

Vitesse moyenne $\langle v\rangle$ d'une voiture qui parcourt la moitié de son itinéraire à $v_1 = 60\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$ et l'autre moitié à $v_2 = 120\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$?



$$\langle v\rangle = \frac{AB}{T_1+T_2} = \frac{AB}{\frac{L_1}{V_1}+\frac{L_2}{V_2}} = \frac{1}{\frac{1}{2v_1}+\frac{1}{2v_2}} = \frac{2v_1v_2}{v_1+v_2} = 80\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$$

2.2 Vitesse

Exemple 2

Mouvement circulaire de rayon R : vitesse ? ✷—

Polaires : $r = R$ constante donc $\dot{r} = 0$
Position $\overrightarrow{OM} = R\overrightarrow{u_r}$
Vitesse $\overrightarrow{v} = R\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt}$ càd $\boxed{\overrightarrow{v} = R\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}}$

Exemple 3

Aiguille des secondes d'une pendule : vitesse angulaire ω ? ✷—

$\omega = \dot{\theta}$ constante : $\theta(t) = \omega t$ (avec $\theta = 0$ à $t = 0$)
$\omega = \frac{-2\pi}{60} = -0,105$ rad $\cdot$ s^{-1} (sens des aiguilles d'une montre !)
période temporelle $T \leftrightarrow$ période angulaire $\theta = \pm 2\pi$ donc $T = \left|\frac{2\pi}{\omega}\right|$

2.3 Accélération

Cartésiennes

$$\overrightarrow{a} = \ddot{x}\overrightarrow{u_x} + \ddot{y}\overrightarrow{u_y} + \ddot{z}\overrightarrow{u_z} = \left| \begin{array}{l} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{array} \right.$$

Démo : $\overrightarrow{a} = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}\overrightarrow{u_x} + \dot{y}\overrightarrow{u_y} + \dot{z}\overrightarrow{u_z}\right)$: vect. base constants

Polaires

Cas général $\boxed{\overrightarrow{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\overrightarrow{u_\theta}}$

Démo : (avec $d\overrightarrow{u_r} = d\theta\overrightarrow{u_\theta}$ et $d\overrightarrow{u_\theta} = -d\theta\overrightarrow{u_r}$) ✷—

$$\overrightarrow{a} = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}\right) = \frac{d\dot{r}}{dt}\overrightarrow{u_r} + \dot{r}\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + r\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + r\dot{\theta}\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt}$$

$\overrightarrow{a} = \ddot{r}\overrightarrow{u_r} + \dot{r}\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + r\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} - r\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_r}$ puis regrouper.

($+\ddot{z}\overrightarrow{u_z}$ en cylindriques)

$\ddot{\theta}$ accélération angulaire

2.3 Accélération

Exemple 1 : mouvement circulaire (rayon R, centre O) (uniforme)

Avec $\overrightarrow{v} = R\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$ on a $\overrightarrow{a} = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = R\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + R\dot{\theta}\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt}$

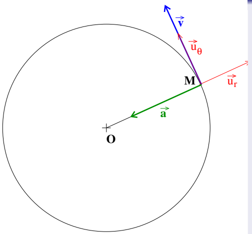
$$\boxed{\overrightarrow{a} = -R\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_r} + R\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}}$$

Uniforme : $\omega = \dot{\theta}$ constante ($\ddot{\theta} = 0$)

Vitesse $\overrightarrow{v} = R\omega\overrightarrow{u_\theta}$ (orthoradiale, tangente à la trajectoire)

Accélération $\overrightarrow{a} = -R\omega^2\overrightarrow{u_r}$

$\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{a}$ constantes en norme



Sur figure : $\omega > 0$

Cas général si mvt uniforme

$v^2 =$ constante (norme)

$\frac{d(v^2)}{dt} = \frac{d(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v})}{dt} = 2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{v} = 0$

Donc 3 cas :

- $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ (sans intérêt)
- $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ (mouvement rectiligne uniforme)
- $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{v}$

2.3 Accélération

Exemple 2 : vecteur rotation ($\longrightarrow$ TD)

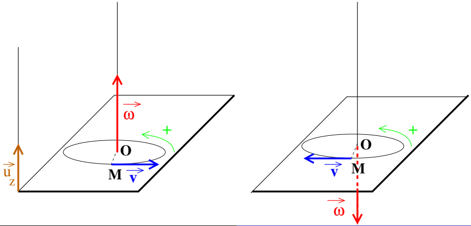
On pose $\vec{\omega} = \omega \vec{u_z}$ (appelé vecteur rotation).

$\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \omega \vec{u_z} \wedge \left(R\vec{u_r} + z\vec{u_z}\right) = R\omega \vec{u_\theta} = \vec{v}$

Vitesse $\vec{v}$ de tout point M de l'espace effectuant un mouvement circulaire autour de l'axe (Oz) (=rotation autour d'un axe fixe) :

$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$

Sens de rotation donné par le sens de $\vec{\omega}$ càd signe de ω



2.3 Accélération

Exemple 3

Virage circulaire de rayon 20m à vitesse 50km/h : calculer accélération (norme).

$a = R\omega^2 = \frac{v^2}{R} = \frac{(50/3{,}6)^2}{20} = 9,6\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ ($\simeq$ g !)

À comparer à accélération en ligne droite : si accélération $a_x = K$ constante de 0 à 100km/h en 2,7s :

$v_x = Kt$ (départ arrêté) donc $K = \frac{100/3{,}6}{2{,}7} = 10,3\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$

Exemple 4

Système avec accélération angulaire constante $\ddot{\theta} = 3\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-2}$. À $t = 0$ immobile en 0. Nb de tours effectués après $\tau = 5\,\mathrm{s}$?

$\ddot{\theta} = K$ donc $\dot{\theta} = Kt$ donc $\theta(t) = \frac{1}{2}Kt^2$

Nombre de tours $N = \frac{\theta(\tau)}{2\pi} = \frac{\frac{1}{2}\times 3\times 5^2}{2\pi} = 5,97$

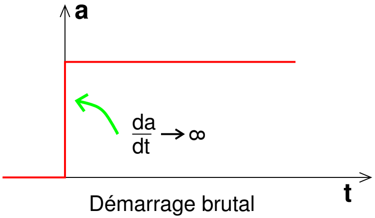
2.4 Autres grandeurs

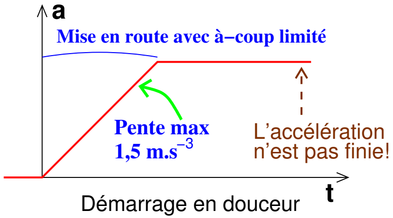
2.4.a Dérivée 3ème de la position par rapport au temps

$\frac{d^3\overrightarrow{OM}}{dt^3}$ représente l'**à-coup** ou la saccade

Corps sensible aux forces : notion physiologique de confort

Phase de démarrage ou mise en route : modification brutale si apparition soudaine d'une accélération ($\leftarrow$force)





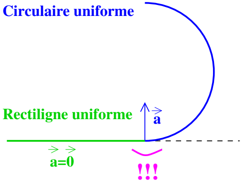
Normes : à-coup maximal $\simeq 1,5\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-3}$ (p. ex. ascenseur)

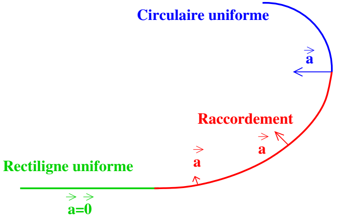
2.4.a À-coup

Exemple

Courbes de raccordement routières ou ferroviaires (clothoïde = spirale de Cornu)

Sur le raccordement la courbure donc l'accélération augmente proportionnellement à la distance parcourue





2.4.b Énergie cinétique (cf Ch.4)

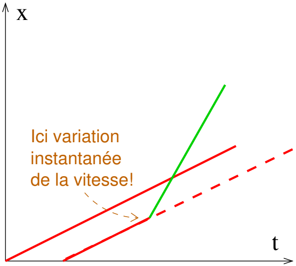
2.4.c Moment cinétique (cf. Ch.3)

3. Représentations graphiques
3.1 Diagrammes temporels

Équations horaires : $x(t)$, $r(t)$ etc
équations paramétriques où t temps

Diagrammes position-temps

Vitesse : pente

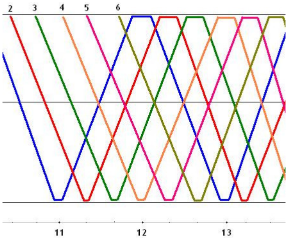


Visualisation :

écart entre mobiles

durée dépassement, etc.

Sillons de circulation



3.2 Trajectoires

Représentation spatiale (éliminer t entre équations horaires)
$y = f(x)$ ou $r = f(\theta)$

Exemple 1

Déterminer équations horaires et trajectoire sachant que $\vec{a} = -K\vec{u_y}$, vitesse initiale $\vec{v_0} = v_0\vec{u_x}$, position initiale $M_0 = O$ (K constante).

$\vec{a} = -K\vec{u_y} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

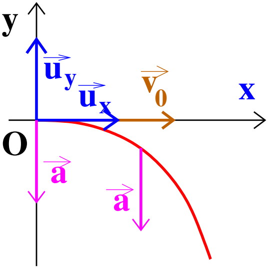
donc avec CI $\vec{v} = -Kt\vec{u_y} + \vec{v_0} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$

Position (avec CI) $\overrightarrow{OM} = -K\frac{t^2}{2}\vec{u_y} + t\vec{v_0} + \overrightarrow{OM_0}$

Équations horaires $x(t) = v_0 t$ et $y(t) = -K\frac{t^2}{2}$

Trajectoire (on remplace avec $t = \frac{x}{v_0}$)

$y = -\frac{K}{2}\frac{x^2}{v_0^2}$ parabole



3.2 Trajectoires

Exemple 2 : trajectoire elliptique (cf. gravitation)

$r = \frac{p}{1+e\cos\theta}$ (équation polaire d'une conique)

Origine repère en O. Coordonnées polaires (r,θ). p et e constantes

$e = 0$: *cercle de rayon* p

$0 < e < 1$: ellipse

$\theta = 0$: $r_{min} = \frac{p}{1+e}$

$\theta = \pi$: $r_{max} = \frac{p}{1-e}$

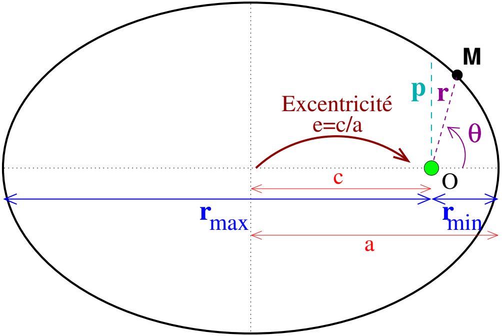
Sur grand axe de l'ellipse :

$a = \frac{r_{max}+r_{min}}{2} = \frac{p}{1-e^2}$

$c = r_{max} - a$

$c = a(1+e) - a = ea$

e excentricité p paramètre



Plus e proche de 1, plus origine décentrée et ellipse aplatie