

Vol stationnaire autonome d'un quadrirotor

Raphaël Mathon

6 juin 2017

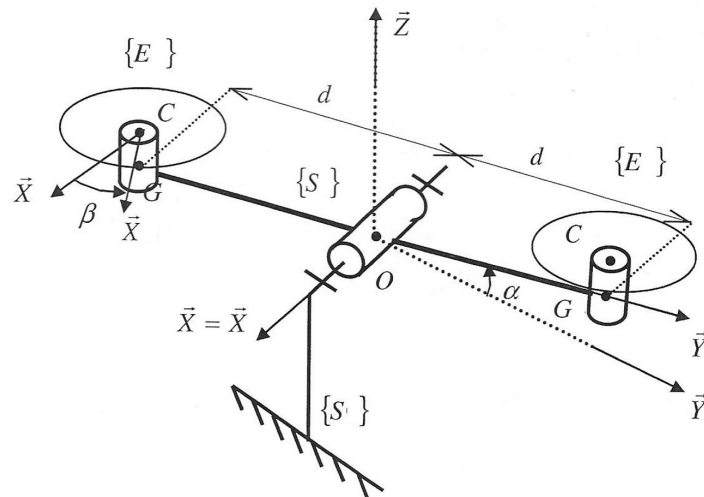
Première partie

Conception

1 Modélisation cinématique

1.1 Paramétrage

Afin de simplifier l'étude dynamique et centrer notre étude sur la démarche d'asservissement du système, on décide de considérer le mouvement du drone suivant un unique degré de liberté, l'angle de roulis. Cela revient à considérer que le système est en liaison pivot avec le "bâti", qui est ici le référentiel terrestre.



2 Aérodynamique des hélices

On souhaite dans cette section réaliser une modélisation de l'action de l'air sur les hélices du quadricoptère. En effet, afin de se maintenir en vol stationnaire,

la rotation des hélices assure une portance suffisante pour compenser le poids.

2.1 Torseur d'action mécanique

Les actions aérodynamiques s'expriment :

$$\vec{F}_t = \frac{1}{2} \rho C_t S v^2 \vec{x}_i \quad (1)$$

$$\vec{F}_p = \frac{1}{2} \rho C_p S v^2 \vec{x}_i \quad (2)$$

Où :

- $\rho = 1.225 \text{ kg m}^{-3}$: masse volumique de l'air
- C_t, C_p : coefficients de trainée et de portance
- S : surface caractéristique du solide
- v : vitesse apparente de l'air dans le référentiel du solide

On considère le drone en vol stationnaire dans le référentiel terrestre supposé galiléen, noté R_0 . On adopte la paramétrisation suivante :

- Châssis+stator : (E_1) fixe dans R_0 : base $B_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$,
- rotor+hélice : (E_i) : base $B_i = (\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$

(E_i) est en liaison pivot d'axe (C, \vec{z}_1) par rapport à E_i autour de $\vec{z}_1 = \vec{z}_i$;

on pose $\beta_i = (\vec{x}_1, \vec{x}_i) = (\vec{y}_1, \vec{y}_i), \dot{\beta}_i = \frac{d\beta_i}{dt}$

Considérons un élément de pale infinitésimal de longueur dr et d'épaisseur e situé en M , où $\vec{CM} = r\vec{u}_{x_2}$. La vitesse de rotation de l'hélice est très élevé, ainsi :

$$\vec{v}(M, \text{air}/E_i) = -\vec{v}(M, 2/1) = -r\dot{\beta}_i\vec{y}_i$$

On exprime alors le torseur global de l'action de l'air sur l'hélice, considérée bipale et symétrique :

$$\{\mathcal{T}(\text{air} \rightarrow E_i)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\mathcal{R}}_i = 2 \int_0^R \frac{1}{2} \rho C_p S r^2 \dot{\beta}_i^2 \text{ edr } \vec{z}_1 \\ \vec{\mathcal{M}}_i(O) = -2 \int_0^R \frac{1}{2} \rho C_t S r^3 \dot{\beta}_i^2 \text{ edr } \vec{z}_1 \end{array} \right\}_{(C)} \quad (3)$$

Puis, en intégrant et en exprimant en fonction du diamètre de l'hélice D :

$$\{\mathcal{T}(\text{air} \rightarrow E_i)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\mathcal{R}}_i = \frac{1}{24} \rho e C_p D^3 \dot{\beta}_i^2 \vec{z}_1 \\ \vec{\mathcal{M}}_i(O) = -\frac{1}{64} \rho e C_t D^4 \dot{\beta}_i^2 \vec{z}_1 \end{array} \right\}_{(C)} \quad (4)$$

On retiendra finalement l'expression de la résultante, nécessaire dans le bilan des actions mécaniques extérieures du système E :

$$\vec{\mathcal{R}}_i = K_h \dot{\beta}_i^2 \vec{z}_1 \quad (5)$$

Où :

$$K_h = \frac{1}{24} \rho e C_p D^3 \quad (6)$$

2.2 Puissance

La connaissance de ce torseur d'action permet le calcul de la puissance fournie par l'hélice à l'air :

$$\mathcal{P}_i(\text{air} \rightarrow E_i, R_0) = \{\mathcal{T}(\text{air} \rightarrow E_i)\}_{(C)} \otimes \{\mathcal{V}(E_i/R_0)\}_{(C)} \quad (7)$$

Ainsi :

$$\mathcal{P}_i(\text{air} \rightarrow E_i, R_0) = -\frac{1}{64}\rho e C_t D^4 \dot{\beta}_i^3 \quad (8)$$

Cette puissance est négative : en effet, ce sont les actionneurs du drone qui fournissent une certaine puissance afin de mettre en mouvement l'air.

Afin d'évaluer numériquement les composantes du torseur d'action ou la puissance consommée, il est nécessaire de déterminer la valeur des coefficients aérodynamiques. Parmi les solutions envisageables, on en retient deux que l'on pourra comparer.

La première méthode consiste à modéliser chaque élément de pale par une section de profil standard dont les coefficients sont inscrits dans des bases de données, comme la base NACA. A partir de la mesure de grandeurs caractéristiques sur une photo du profil d'une hélice, on pourra trouver le profil adapté et lire la valeur de C_t et C_p .

Une deuxième méthode est de déterminer ces coefficients à partir de mesures expérimentales fournies par les constructeurs de composants de drone. Notamment, en connaissant la poussée exercée par l'hélice et la puissance consommée pour plusieurs valeurs de β_i , il est possible de calculer ces coefficients.

Comme les valeurs de C_t et C_p ne dépendent que de la forme de l'hélice, on pourra conserver leurs ordres de grandeur pour des hélices de diamètres différents.

3 Modélisation des moteurs

3.1 Spécificité des moteurs à courant continu sans balais

Les moteurs à courant continu sans balais sont très répandus dans le milieu de l'aéromodélisme, et dans les applications de faible puissance en général (robotique, informatique...). Ces moteurs sont alimentés en courant continu ; un composant électronique, l'ESC (electronic speed controller : variateur de vitesse électronique) assure la commutation des courants au sein du circuit statorique triphasé.

Les moteurs brushless s'affranchissent des contraintes des balais et collecteurs équipant les MCC (frottements, remplacement, bruit), le rotor étant constitué d'aimants permanents. Cependant, afin d'assurer l'orthogonalité du champ magnétique statorique et du moment magnétique rotorique, le variateur de vitesse doit disposer de capteurs retournant la position du champ magnétique : pour les variateurs de vitesse de drones, il s'agit généralement de capteurs de force contre-electromotrice (technologie non détaillée ici).

3.2 Equations

La modélisation d'un moteur brushless est identique à celle d'un MCC (cf cours de génie mécanique, ENS Cachan). On retrouve les équations, dans l'hypothèse d'inductance faible des phases ($\frac{L}{R} \ll 1$) :

$$C_{M_i} = K_c I_i \quad (9)$$

$$E_i = K_c \beta_i \quad (10)$$

$$I_i = \frac{U_i - E_i}{R} \quad (11)$$

$$J \dot{\beta}_i = C_{M_i} - C_{R_i} \quad (12)$$

Où :

- C_{M_i} : couple moteur
- C_{R_i} : couple résistant
- β_i : vitesse de rotation du rotor
- J : inertie du moteur
- K_c : constante de flux
- U_i : tension d'induit
- E_i : force contre-électromotrice
- I_i : courant d'induit

On fait ainsi l'hypothèse que les deux moteurs ont des caractéristiques identiques.

On peut dès lors modéliser un tel moteur par un schéma bloc constitué des différentes équations dans le domaine de Laplace.

La section précédente a permis de modéliser le couple résistant C_{R_i} exercé par l'air sur le rotor E_i . On verra par la suite s'il est important d'en tenir compte dans la modélisation globale de notre système.

Sans tenir compte du couple résistant, la fonction de transfert du moteur est alors :

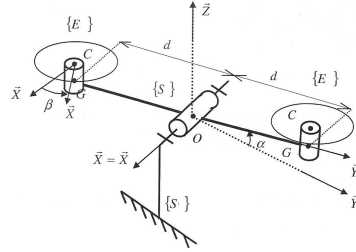
$$H_{m_i}(p) = \frac{K_m}{1 + \tau p} \quad (13)$$

Où K_m et τ s'expriment en fonction des caractéristiques du moteur :

$$K_m = \frac{1}{K_c} \quad (14)$$

$$\tau = \frac{RJ}{K_c^2} \quad (15)$$

4 Eléments dynamiques du système



Considérons le système (E) constitué de deux hélices E_2 et E_3 en rotation autour des axes respectifs (C_2, \vec{z}_2) et (C_3, \vec{z}_3)

4.1 Hypothèses

On fait les hypothèses suivantes :

- Les solides E_i , constitués du rotor du moteur et de l'hélice, sont modélisés par des solides de révolution autour de leur axe de rotation. Le centre de l'hélice est noté C_i , le centre d'inertie est noté G_i .
- L'ensemble (E) est supposé parfaitement équilibré en terme de répartition de masse.
- La liaison pivot est supposée parfaite.

4.2 Eléments dynamiques

En considérant l'hélice comme un solide de révolution autour de son axe de rotation, on peut considérer que sa matrice reste diagonale dans le repère R_1 et ainsi :

$$I(G_2, E_2) = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}_{R_2, R_1}, \quad \vec{\Omega}(E_2/R_0) = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}_{R_1}$$

Dans ce cas :

$$\vec{\sigma}(G_2, E_2/R_0) = [I(G_2, E_2)]_{R_1} \left[\vec{\beta}_2(G_2, E_2/R_0) \right]_{R_1} = I_{xx} \dot{\alpha} \vec{x}_1 + I_{zz} \dot{\beta}_2 \vec{z}_1$$

Puis en dérivant par rapport à t en R_0 :

$$\vec{\delta}(G_2, E_2/R_0) = I_{xx} \ddot{\alpha} \vec{x}_1 - I_{zz} \dot{\beta}_2 \dot{\alpha} \vec{y}_1 + I_{zz} \ddot{\beta}_2 \vec{z}_1$$

Soit :

$$\vec{\delta}(G_2, E_2/R_0) = \begin{bmatrix} I_{xx} \ddot{\alpha} \\ -I_{zz} \dot{\beta}_2 \dot{\alpha} \\ I_{zz} \ddot{\beta}_2 \end{bmatrix}_{R_1}$$

On obtient finalement en changeant de point le moment dynamique de l'hélice au point O :

$$\vec{\delta}(O, E_2/R_0) = \begin{bmatrix} (I_{xx} + md^2) \ddot{\alpha} \\ -I_{zz} \dot{\beta}_2 \dot{\alpha} \\ I_{zz} \ddot{\beta}_2 \end{bmatrix}_{R_1}$$

Le calcul étant identique pour l'hélice E_3 :

$$\vec{\delta}(O, E_3/R_0) = \begin{bmatrix} (I_{xx} + md^2)\ddot{\alpha} \\ -I_{zz}\dot{\beta}_3\dot{\alpha} \\ I_{zz}\ddot{\beta}_3 \end{bmatrix}_{R_1}$$

D'autre part, on obtient de même la moment dynamique du châssis E_1 en O :

$$\vec{\delta}(O, E_1/R_0) = \begin{bmatrix} I_{0xx}\ddot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{R_1}, \quad I(O, E_1) = \begin{bmatrix} I_{0xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{0yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{0zz} \end{bmatrix}_{R_1}$$

Finalement :

$$\vec{\delta}(O, E/R_0) = \begin{bmatrix} (2(I_{xx} + md^2) + I_{0xx})\ddot{\alpha} \\ -I_{zz}\dot{\alpha}(\dot{\beta}_2 + \dot{\beta}_3) \\ I_{zz}(\ddot{\beta}_2 + \ddot{\beta}_3) \end{bmatrix}_{R_1} \quad (16)$$

4.3 Théorème du moment dynamique

On peut finalement appliquer le théorème du moment dynamique au système E en O selon l'axe (O, \vec{x}_1) . Les moments de l'action de l'air sur les hélices sont : $\vec{\mathcal{M}}(O, air \rightarrow E_2) = -dK_h\dot{\beta}_2^2 \vec{x}_1$, $\vec{\mathcal{M}}(O, air \rightarrow E_3) = +dK_h\dot{\beta}_3^2 \vec{x}_1$
Soit finalement :

$$J_{eq_x}\ddot{\alpha} = dK_h(\dot{\beta}_3^2 - \dot{\beta}_2^2) \quad (17)$$

$$J_{eq_x} = 2(I_{xx} + md^2) + I_{0xx} \quad (18)$$

Où :

- K_h : coefficient de portance de l'hélice (défini précédemment)
- J_{eq_x} : inertie équivalente de E par rapport à l'axe (O, \vec{x}_1)