1)

O-Notation:

Sei $g: N \to R^+$ eine Funktion. Dann bezeichnen wir mit $O(g(n))$ die folgende Menge von Funktionen

$$O(g(n)) := \left\{ f(n) : \begin{array}{l} \text{Es existieren Konstanten } c>0, n_0 \\ \text{so dass für alle } n > n_0 \text{ gilt} \\ 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n) \end{array} \right\}$$

$O(g(n))$: Die Funktion $f(n)$ wächst asymptotisch nicht schneller als $g(n)$

$f \in O(g)$: Asymptotische obere Schranke

$$\limsup_{x \to a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \infty$$

Ω-Notation

Sei $g: N \to R^+$ eine Funktion. Dann bezeichnen wir mit $\Omega(g(n))$ die folgende Menge von Funktionen

$$\Omega(g(n)) := \left\{ f(n) : \begin{array}{l} \text{Es existieren Konstanten } c > 0, n_0, \\ \text{sodass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt} \\ 0 \leq c \cdot g(n) \leq f(n) \end{array} \right\}$$

$\Omega(g(n))$: Die Funktion ~~z~~ $f(n)$ wächst ~~mit~~ asymptotisch mindestens so schnell wie $g(n)$

$f \in \Omega(g)$: Asymptotische Untere Schranke
$\to g \in O(f)$

$f \in \Omega(g)$: $\liminf_{x \to a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| > 0$

Θ-Notation

Sei $g: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ eine Funktion. Dann bezeichnen wir mit $\Theta(g(n))$ die folgende Menge von Funktionen

$$\Theta(g(n)) = \left\{ f(n) : \begin{array}{l} \text{Es existieren Konstanten } c_1, c_2 > 0 \\ \text{sodass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt} \\ 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \end{array} \right.$$

Regeln für Kalküle

Satz 2.10 Sei $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ mit $f(n) \geq 1$ für alle n. Weiter sei $k, l \geq 0$ mit $k \geq l$. Dann gilt:

1. $f(n)^l = O(f(n)^k)$
2. $f(n)^k = \Omega(f(n)^l)$

Satz 2.11 Seien $\varepsilon, k > 0$ beliebig. Dann gilt

1. $\log(n)^k = O(n^\varepsilon)$
2. $n^\varepsilon = \Omega(\log(n)^k)$

Algo Lab Blatt 1

2) Logarithmus Regeln

Produkt: $\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$

Quotient: $\log_b \frac{x}{y} = \log_b(x) - \log_b(y)$

Summe (analog Differenz): $\log_b(x+y) = \log_b x + \log_b\left(1 + \frac{x}{y}\right)$

weil $x+y = x\left(1+\frac{y}{x}\right)$ und Produktregel

Potenzen: $\log_b(x^r) = r \cdot \log_b x$

Wurzeln: $\log_b \sqrt[n]{x} = \log_b\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n} \log_b x)$

Basisumrechnung: $\log_b x = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$

ALGODAT BLATT 1

3)

42

$\log(n)$

$\sqrt{n}$

$n = 2^{\log_2 n}$ Θ

$n \cdot (\log(\log(n)))$ Θ

$(n \cdot (\log(\log(2^n)))$ $)$ Θ

$n \cdot \log(n)$ Θ

$n \cdot \log_2(n)$

$n^{1,5}$

$n^2 = 4^{\log_2 n}$ Θ

n^3

$\cancel{2^{\log_2 n}}$

$\cancel{4^{\log_2 n}}$

2^n

3)

$f \in O(g)$
$42 \in O(\log(n))$

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \infty \quad ?$$

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{42}{\log(n)}\right| \approx 0 < \infty$$

$$\Longrightarrow 42 \in O(\log(n))$$

$\log(n) \in O(\sqrt{n})$

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{\log(n)}{\sqrt{n}}\right| < \infty$$

De L'Hospital
$\limsup_{x\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(n)}{g'(n)}$
ABLEITUNG

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n\cdot\ln(10)} \Big/ \frac{1}{2\sqrt{n}} \right|$$

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{2\cdot\sqrt{n}}{n\cdot\ln(10)} \right|$$

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{2}{\sqrt{n}\cdot\ln(10)} \right| \approx 0 < \infty$$

$$\Longrightarrow \log(n) \in O(\sqrt{n})$$

Einfacher: Nach Satz 2.1. aus VO

$\sqrt{n} \in O(n)$ $\qquad \limsup\limits_{n\to\infty} \left| \frac{\sqrt{n}}{n} \right| \approx 0 < \infty$

$$\Rightarrow \sqrt{n} \in O(n)$$

ODER: NACH SATZ 2.1

$n \in O(n \cdot \log(\log(n)))$

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{n}{n \cdot \log(\log(n))} \right| =$$

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{1}{\log\log(n)} \right| \approx 0 < \infty$$

$$\Rightarrow n \in O(n \cdot \log(\log(n)))$$

$n \cdot \log(\log(n)) \in \Theta(n \cdot \log(\log(2^n)))$

$$0 < \liminf_{n\to\infty} \frac{n \log\log(n)}{n \cdot \log\log(2^n)} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{n \cdot \log\log(n)}{n \cdot \log\log(2^n)} < \infty$$

$$0 < \liminf_{n\to\infty} \frac{\log(\log(n))}{\log(n \cdot \log(2))} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}\log(\log(n))}{\cancel{\log 2}\log\log(n \cdot \log(2))} < \infty$$

STREBT GEGEN 0
WEIL NENNER IMMER GRÖßER

$$0 < \approx 0 \leq \approx 0 < \infty$$

$$\Rightarrow n \cdot \log(\log(n)) \in \Theta(n \cdot \log(\log(2^n)))$$

3)

$$n \cdot (\log(\log(2^n))) \in \Theta(n \cdot \log(n))$$

$$0 < \liminf_{n\to\infty} \frac{\cancel{n} \cdot (\log\log(2^n))}{\cancel{n} \cdot \log(n)} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\cancel{n} \cdot \log\log 2^n}{\cancel{n} \cdot \log(n)} < \infty$$

$$0 < \liminf_{n\to\infty} \frac{\log(n \cdot \log(2))}{\log(n)} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\log(n \cdot \log(2))}{\log(n)} < \infty$$

$$0 < \liminf_{n\to\infty} \frac{\log(n) + \log(2)}{\log(n)} \leq \ldots$$

$$0 < \liminf_{n\to\infty} \frac{\log(n)}{\log(n)} + \frac{\log(2)}{\log(n)} \leq \ldots$$

$$0 < \liminf_{n\to\infty} 1 + \frac{\log(2)}{\log(n)}$$

→ konv gegen 0

$$0 < \liminf_{n\to\infty} 1 + \frac{\log(2)}{\log(n)} \leq \limsup_{n\to\infty} 1 + \frac{\log(2)}{\log(n)} < \infty$$

→ konv gegen 1

$$0 < 1 \leq 1 < \infty$$

$$\Longrightarrow n \cdot (\log(\log(2^n))) \in \Theta(n \cdot \log(n))$$

$n \cdot \log(n) \in \Theta\left(n \log_2(n)\right)$

$$0 < \liminf_{n \to \infty} \frac{n \log(n)}{n \log_2(n)} \le \limsup_{n \to \infty} \frac{n \log(n)}{n \log_2(n)} < \infty$$

$$0 < \liminf_{n \to \infty} \frac{\log_{10}(n)}{\log_2(n)} \le \ldots$$

$$0 < \liminf_{n \to \infty} \frac{\frac{\ln(n)}{\ln(10)}}{\frac{\ln(n)}{\ln(\cancel{10}\,2)}} \le \ldots$$

$$0 < \liminf_{n \to \infty} \frac{\ln(n) - \ln(2)}{\ln(n) - \ln(10)} \le$$

$$0 < \liminf_{n \to \infty} \frac{\ln(2)}{\ln(10)} \le$$

$$0 < \frac{\ln(2)}{\ln(10)} \le \frac{\ln(2)}{\ln(10)} < \infty$$

$$\Rightarrow$$

$$n \cdot \log(n) \in \Theta\left(n \cdot \log_2(n)\right)$$

ALGODAT Blatt 1

3)

$n \cdot \log_2(n) \in \mathcal{O}(n^{1,5})$

$\limsup_{n\to\infty} \left[\frac{n \cdot \log_2(n)}{n^{1,5}} = \frac{\cancel{n} \cdot \log_2(n)}{\cancel{n} \cdot n^{\frac{1}{2}}}\right] < \infty$

$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log_2(n)}{\sqrt{n}} < \infty$

Konv gegen 0
weil siehe Berechnung $\log(n) \in \mathcal{O}(\sqrt{n})$
Nach Satz 2.11.

$0 < \infty$

$\Longrightarrow n \cdot \log_2(n) \in \mathcal{O}(n^{1,5})$

$n^{1,5} \in \mathcal{O}(n^2)$

$\limsup_{n\to\infty} \frac{n^{1,5}}{n^2} < \infty$

trivial weil Nenner immer größer als Zähler
Nach Satz 2.1.

$\Longrightarrow n^{1,5} \in \mathcal{O}(n^2)$

$n^2 \in \mathcal{O}(n^3)$

alalog wie $n^{1,5} \in \mathcal{O}(n^2)$

$\Rightarrow n^2 \in \mathcal{O}(n^3)$

$\cancel{n^3 \in O(2^{\log_2 n})}$

$\cancel{\limsup_{n \to \infty} \frac{n^3}{2^{\log_2 n}}}$

$n^3 \in O(2^n)$ De L'Hospital

$\limsup_{n \to \infty} \frac{n^3}{2^n} < \infty$ – " –

$\limsup_{n \to \infty} \frac{3n^2}{n \cdot 2^{n-1}} < \infty$ – " –

$\limsup_{n \to \infty} \frac{\cancel{3}6n}{n \cdot (n-1) \cdot 2^{n-2}} < \infty$ – " –

$\limsup_{n \to \infty} \frac{6}{n(n-1)(n-2) \cdot 2^{n-3}} < \infty$ – " –

$\limsup \frac{0}{\cdots} < \infty$ – " –

$= 0$

$0 < \infty$

$\Longrightarrow n^3 \in O(2^n)$