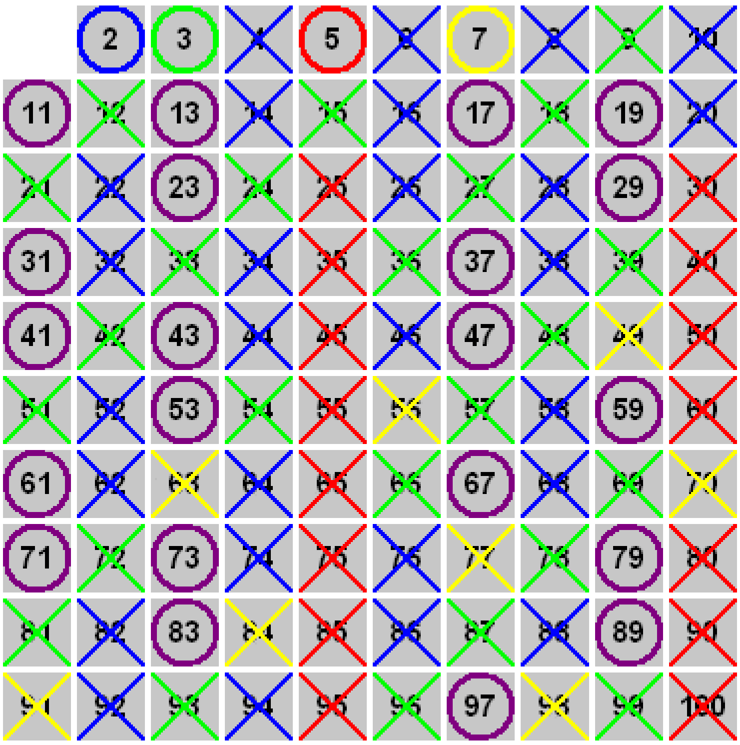
Séquence 11 : Nombres premiers

Objectifs :
- 4A10 : Déterminer la liste des nombres premiers inférieurs à 100
- 4A11 : Décomposer un nombre entier en produit de facteurs premiers
- 4A12 : Modéliser et résoudre des problèmes simples mettant en jeu les notions de divisibilité et de nombre premier

I Crible d'Ératosthène

Méthode :

> On commence par entourer 2 et on raye tous ses multiples.
> On entoure l'entier suivant qui n'est pas rayé (3) et on recommence.
> On entoure l'entier suivant qui n'est pas rayé (5) et ainsi de suite.
> Au final, tous les entiers qui n'ont pas été rayés sont des nombres premiers.



Nombres premiers

2	3	5	7
11	13	17	19
23	29	31	37
41	43	47	53
59	61	67	71
73	79	83	89
97			

Remarques :
- 11 × 2 a déjà été rayé lorsqu'on a rayé les multiples de 2, pareil pour 11 × 3, 11 × 4 etc. jusqu'à 11 × 10
- le plus petit multiple de 11 qui n'a pas encore été rayé avec les tables précédentes est donc 11 × 11 = 121 qui est déjà plus grand que 100 !

Arrivé à 10, comme 10 × 10 = 100, on peut directement entourer tous les nombres qui n'ont pas été barrés, ce sont tous des nombres premiers.

Méthode :

> Pour vérifier si un nombre inférieur à 100 est un nombre premier, on vérifie s'il est dans le table de 2, 3, 5 ou 7. S'il n'est dans aucune de ces tables, alors c'est un nombre premier !

Propriétés (rappel) :

Un nombre est :
- divisible par 2 s'il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8
- divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3
- divisible par 5 s'il se termine par 0 ou 5

Méthode :

Pour vérifier si un nombre plus petit que 70 est dans la table de 7 il suffit de connaître la table de 7
S'il est plus grand que 70, on enlève 70 et on vérifie si ce qui reste est dans la table de 7.

II Décomposer en un produit de facteurs premiers

Méthode :

Pour décomposer un nombre en un produit de facteurs premiers, on le divise autant que possible par des nombres premiers

Exemple :

On veut décomposer 1008 en produit de facteurs premiers.
Il est divisible par 2 (car il se termine par 8)
$1008 = 2 \times 504$ (qui est divisible par 2 car il se termine par 4)
$504 = 2 \times 252$ (qui est divisible par 2 car il se termine par 2)
$252 = 2 \times 126$ (qui est divisible par 2 car il se termine par 6)
$126 = 2 \times 63$ (qui est divisible par 3 car $6 + 3 = 9$ qui est divisible par 3)
$63 = 3 \times 21$ (qui est divisible par 3 car $2 + 1 = 3$ qui est divisible par 3)
$21 = 3 \times 7$ (on s'arrête là car 7 est un nombre premier)
Si on refait les calculs dans l'autre sens, on obtient :
$7 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 1008$
On a bien trouvé une décomposition en facteurs premiers de 1008.

Remarque :

On peut aussi le rédiger autrement :

1008	2
504	2
252	2
126	2
63	3
21	3
7	7
1	

Méthode :

Pour décomposer un nombre en produit de facteurs premiers plus efficacement, on peut garder en tête (ou sur la calculatrice) les résultats intermédiaires et n'écrire que les facteurs premiers.

Exemple :

En tête : 1050 525 175 35
Sur la feuille : $2100 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7$