Formulaire de Mécanique

Raphaël Jamann

1 Les différentes forces

1.1 Force de Pesanteur (Poids)

$$F_p = mg$$

- F_p : force de pesanteur.
- m : masse de l'objet (en kilogrammes).
- g : accélération due à la gravité ($9.81\, m\, s^{-2}$).

1.2 Force de Réaction Normale

$$N = F_p \cos(\theta)$$

- N : force normale.
- F_p : force de pesanteur.
- θ : angle entre la surface et l'horizontale.

1.3 Force de Frottement Solide

$$F_f = \mu N$$

- F_f : force de frottement.
- μ : coefficient de frottement (statique ou cinétique).
  $\mu_c = \frac{R_T}{R_N}$ quand le système glisse et $\mu_s = \frac{R_{Tmax}}{R_N}$ quand il est statique.
- N : force normale.

1.4 Force Élastique (Loi de Hooke)

$$\overrightarrow{F} = -k(L - l)\overrightarrow{u}$$

- F : force de rappel d'un ressort.
- k : constante de raideur (en N, m^{-1}).
- l : longueur "à vide" du ressort.
- L : longueur du ressort étiré ou compressé.
- $\overrightarrow{u}$: vecteur dirigé de l'extrémité fixe du ressort vers le système (l'autre extrémité).

1.5 Force Gravitationnelle

$$F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

- F_g : force gravitationnelle.
- G : constante de gravitation universelle ($6,67 \times 10^{-11}\ N\ (m^2\, kg^{-2})$).
- m_1 et m_2 : masses des objets.
- r : distance entre les centres de masse.

1.6 Force de Lorentz

$$\overrightarrow{F} = q(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}) = \underbrace{q\overrightarrow{E}}_{\textit{électrique}} + \overbrace{q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}}^{\textit{magnétique}}$$

Une charge q qui se déplace dans une région de l'espace où coexistent un champ électrique $\overrightarrow{E}$ et un champ magnétique $\overrightarrow{B}$, subit une force totale dite de Lorentz.

1.7 Force de Laplace

Soit un fil rectiligne de longueur l parcouru par un courant I. Si ce fil est situé dans une région de l'espace où il y a un champ magnétique $\overrightarrow{B}$, alors il est soumis à une force de Laplace donnée par :

$$\overrightarrow{F} = I \cdot \overrightarrow{l} \wedge \overrightarrow{B}$$

2 Les Lois de Newton

- **1ère loi de Newton : principe d'inertie**
  Si R_g est galiléen, alors tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à R_g est aussi galiléen.
  $$\frac{\mathrm{d}\varepsilon_c}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{0} \qquad \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{0}$$
- **2ème loi de Newton : principe fondamental de la dynamique (PFD)**
  Les forces sont à l'origine du mouvement : $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t} = m\overrightarrow{a}$ dans un référentiel galiléen.
- **3ème loi de Newton : principe des actions réciproques**
  Si deux points sont en interaction, on a deux forces : $\overrightarrow{f_{1/2}} = -\overrightarrow{f_{2/1}}$
  Une force unique existant seule n'existe pas, d'où la résultante nulle des forces intérieures à un système.

3 Définitions

3.1 Quantité de mouvement

La quantité de mouvement (ou résultante cinétique) est définie comme :

$$\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v}$$

3.2 Moment cinétique

Le moment cinétique est le moment de la quantité de mouvement $\overrightarrow{p}$.

$$\overrightarrow{\sigma} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{p} = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v}$$

Ou alors on la définie comme ceci par rapport à un axe Δ :

$$\sigma_\Delta = J_\Delta \omega = J_\Delta \dot{\theta}$$

3.3 Moment d'inertie

Le moment d'inertie d'un solide (domaine $\mathcal{D}$) par rapport à un axe fixe Δ est :

$$J_\Delta = \iiint_{\mathcal{D}} r^2 dm$$

3.4 Énergie cinétique

L'énergie cinétique d'un point matériel de masse m et de vitesse v est :

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

Cas du mouvement de rotation autour d'un axe fixe Δ :

$$E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2$$

3.5 Énergie Potentiel

Si le travail élémentaire de la force F peut s'écrire sous la forme d'une différentielle exacte alors, on peut définir une énergie potentielle E_p telle que :

$$\mathrm{d}E_p = -\mathrm{d}W$$

On dit que la force dérive d'une énergie potentielle et aussi que cette force est conservative.

3.6 Énergie mécanique

Définition de l'énergie mécanique :

$$E_M = E_C + \sum E_P$$

3.7 Travail d'une force

Le travail mécanique représente la quantité d'énergie échangée entre le système et le milieu extérieur.

$$\delta W = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} \qquad W_{A \to B}(\overrightarrow{F}) = \int_A^B \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l}$$

Dans le cas d'une rotation élémentaire du point M autour de (Oz) :

$$\delta W = \mathcal{M}_{Oz}(\overrightarrow{F})\mathrm{d}\theta$$

- **Travail gravitationnel :** $\delta W_{\overrightarrow{P}} = mgh$
- **Travail élastique :**
  Ressort : $\delta W_{\overrightarrow{P}_e} = \frac{1}{2}kx^2$ avec x l'allongement (ou raccourcicement) du ressort.
  Torsion : $\delta W_{\overrightarrow{P}_e} = \frac{1}{2}C\theta^2$

3.8 Puissance d'une force

La puissance d'une force F, qui s'exerce sur un point M de vitesse $\vec{v}$ est définie par :

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Lorsque la puissance d'une force est nulle ($P = 0$), la force peut dévier la trajectoire du système mais pas modifier la norme de sa vitesse.

4 Les théorèmes importants

4.1 Théorème de l'énergie mécanique

Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie mécanique d'un point matériel est égale à la somme des travaux des forces non-conservatives :

$$\Delta E_M = E_M(B) - E_M(A) = \sum_i W_{A \to B}(\vec{F}_{i,\mathbf{nc}}) = W_{A \to B}(\vec{F}_{ext,\mathbf{nc}})$$

4.2 Théorème de l'énergie cinétique (TEC)

Dans un référentiel galiléen, la variation de l'énergie cinétique d'un point matériel est égale à la somme des travaux de toutes les forces :

$$\Delta E_C = E_C(B) - E_C(A) = \sum_i W_{A \to B}(\vec{F_i}) = W_{A \to B}(\overrightarrow{F_{ext}})$$

$$\mathrm{d}E_c = \delta W_{(\overrightarrow{F_{tot}})}$$

4.3 Théorème du moment cinétique (TMC)

Pour un solide indéformable en rotation autour d'un axe fixe Δ et soumis à plusieurs moments de forces extérieures $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$ par rapport à Δ, on a :

$$\sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = J_\Delta \ddot{\theta} = J_\Delta \dot{\omega}$$

Ou alors dans un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps du moment cinétique $\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma_O}}{\mathrm{d}t}$ du point matériel calculé en O (point fixe) est égal au moment résultant $\vec{\Gamma_O}$ par rapport à O.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma_O}}{dt} = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}_{0(\vec{F}_{ext})}}$$

Attention cependant $\vec{\Gamma_O} \neq \overrightarrow{OM} \wedge \vec{R}$!

4.4 Théorème de la puissance cinétique

Dans un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique d'un point matériel est égale à la puissance de toutes les forces appliquées.

$$P_{tot} = \frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t}$$