

Formulaire de Mécanique

Raphaël Jamann

1 Les différentes forces

1.1 Force de frottement solide

$$F_f = \mu N$$

- μ : coefficient de frottement qui dépend des matériaux du support et du système.
- N : la norme de la réaction normale du support.

1.2 Force de Pesanteur (Poids)

$$F_p = mg$$

- F_p : force de pesanteur.
- m : masse de l'objet (en kilogrammes).
- g : accélération due à la gravité (9.81 m s^{-2}).

1.3 Force de Réaction Normale

$$N = F_p \cos(\theta)$$

- N : force normale.
- F_p : force de pesanteur.
- θ : angle entre la surface et l'horizontale.

1.4 Force de Frottement Solide

$$F_f = \mu N$$

- F_f : force de frottement.
- μ : coefficient de frottement (statique ou cinétique).
 $\mu_c = \frac{R_T}{R_N}$ quand le système glisse et $\mu_s = \frac{R_{T_{max}}}{R_N}$ quand il est statique.
- N : force normale.

1.5 Force Élastique (Loi de Hooke)

$$\vec{F} = -k(L - l)\vec{u}$$

- F : force de rappel d'un ressort.
- k : constante de raideur (en N, m^{-1}).
- l : longueur "à vide" du ressort.
- L : longueur du ressort étiré ou compressé.
- \vec{u} : vecteur dirigé de l'extrémité fixe du ressort vers le système (l'autre extrémité).

1.6 Force Gravitationnelle

$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

- F_g : force gravitationnelle.
- G : constante de gravitation universelle ($6,67 \times 10^{-11} \text{ N (m}^2 \text{ kg}^{-2}\text{)}$).
- m_1 et m_2 : masses des objets.
- r : distance entre les centres de masse.

1.7 Force de Lorentz

$$\vec{F} = q(\overbrace{\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}}^{\text{magnétique}}) = \underbrace{q\vec{E}}_{\text{électrique}} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Une charge q qui se déplace dans une région de l'espace où coexistent un champ électrique \vec{E} et un champ magnétique \vec{B} , subit une force totale dite de Lorentz.

1.8 Force de Laplace

Soit un fil rectiligne de longueur l parcouru par un courant I . Si ce fil est situé dans une région de l'espace où il y a un champ magnétique \vec{B} , alors il est soumis à une force de Laplace donnée par :

$$\vec{F} = I \cdot \vec{l} \wedge \vec{B}$$

2 Les Lois de Newton

- **1ère loi de Newton : principe d'inertie**

Si R_g est galiléen, alors tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à R_g est aussi galiléen.

$$\frac{d\varepsilon_c}{dt} = 0 \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} \quad \frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \vec{0}$$

- **2ème loi de Newton : principe fondamental de la dynamique (PFD)**

Les forces sont à l'origine du mouvement : $\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$ dans un référentiel galiléen.

- **3ème loi de Newton : principe des actions réciproques**

Si deux points sont en interaction, on a deux forces : $\vec{f}_{1/2} = -\vec{f}_{2/1}$

Une force unique existant seule n'existe pas, d'où la résultante nulle des forces intérieures à un système.

3 Définitions

3.1 Quantité de mouvement

La quantité de mouvement (ou résultante cinétique) est définie comme :

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

alors, on peut définir une énergie potentielle E_p telle que :

$$dE_p = -dW$$

On dit que la force dérive d'une énergie potentielle et aussi que cette force est conservative.

3.2 Moment cinétique

Le moment cinétique est le moment de la quantité de mouvement \vec{p} .

$$\vec{\sigma} = \vec{OM} \wedge \vec{p} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$$

3.6 Énergie mécanique

Définition de l'énergie mécanique :

$$E_M = E_C + \sum E_P$$

3.3 Moment d'inertie

Le moment d'inertie d'un solide (domaine \mathcal{D}) par rapport à un axe fixe Δ est :

$$J_\Delta = \iiint_{\mathcal{D}} r^2 dm$$

3.7 Travail d'une force

Le travail mécanique représente la quantité d'énergie échangée entre le système et le milieu extérieur.

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{l} \quad W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Dans le cas d'une rotation élémentaire du point M autour de (Oz) :

$$\delta W = \mathcal{M}_{Oz}(\vec{F}) d\theta$$

3.4 Énergie cinétique

L'énergie cinétique d'un point matériel de masse m et de vitesse v est :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

Cas du mouvement de rotation autour d'un axe fixe Δ :

$$E_c = \frac{1}{2}J_\Delta \omega^2$$

3.8 Puissance d'une force

La puissance d'une force F , qui s'exerce sur un point M de vitesse \vec{v} est définie par :

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

3.5 Énergie Potentiel

Si le travail élémentaire de la force F peut s'écrire sous la forme d'une différentielle exacte

Lorsque la puissance d'une force est nulle ($P = 0$), la force peut dévier la trajectoire du système mais pas modifier la norme de sa vitesse.

4 Les théorèmes importants

4.1 Théorème de l'énergie mécanique

Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie mécanique d'un point matériel est égale à la somme des travaux des forces non-conservatives :

$$\Delta E_M = E_M(B) - E_M(A) = \sum_i W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{i,nc}) = W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{ext,nc})$$

4.2 Théorème de l'énergie cinétique (TEC)

Dans un référentiel galiléen, la variation de l'énergie cinétique d'un point matériel est égale à la somme des travaux de toutes les forces :

$$\Delta E_C = E_C(B) - E_C(A) = \sum_i W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_i) = W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{ext})$$

$$dE_c = \delta W_{(\vec{F})}$$

4.3 Théorème du moment cinétique (TMC)

Pour un solide indéformable en rotation autour d'un axe fixe Δ et soumis à plusieurs moments de forces extérieures $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$ par rapport à Δ , on a :

$$\sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = J_\Delta \ddot{\theta} = J_\Delta \dot{\omega}$$

Ou alors dans un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps du moment cinétique $\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt}$ du point matériel calculé en O (point fixe) est égal au moment $\vec{\Gamma}_O$ par rapport à O de la résultante des forces \vec{R} .

$$\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}_{0(\vec{F}_{ext})}} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{R} = \vec{\Gamma}_O$$

Attention cependant à être en mécanique du point. Sinon $\vec{\Gamma}_O \neq \overrightarrow{OM} \wedge \vec{R}$!

4.4 Théorème de la puissance cinétique

Dans un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique d'un point matériel est égale à la puissance de toutes les forces appliquées.

$$P_{tot} = \frac{dE_c}{dt}$$