

# Formulaire d'Electromagnétisme

Raphaël Jamann

## 1 Opérateurs de la Théorie des Champs

### 1.1 Opérateur Nabla $\nabla$

L'opérateur nabla est défini en coordonnées cartésiennes par :

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Il sera utile pour l'écriture d'autres opérateurs tels que  $\vec{\text{grad}}$ ,  $\text{div}$  ou encore  $\vec{\text{rot}}$ .

### 1.2 Le gradient

L'opérateur gradient ne s'applique qu'aux champs scalaires  $f(x, y, z)$  et donne un champ de vecteurs correspondant à la variation locale du champ scalaire  $f$  dans l'espace.

On peut le noter de deux manières différentes :

$$\vec{\text{grad}}f = \nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Ainsi, le gradient associe à chaque point de l'espace un vecteur orienté dans la direction de la plus forte croissance de  $f$  et de norme proportionnelle à la rapidité de cette croissance.

### 1.3 La divergence

L'opérateur divergence s'applique aux champs de vecteurs  $\vec{A}(x, y, z)$  et donne un champ scalaire correspondant au taux de « source » ou de « puits » du champ en un point.

On peut l'écrire de deux manières différentes :

$$\operatorname{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Ainsi, la divergence mesure la tendance d'un champ vectoriel à « sortir » (divergence positive) ou à « entrer » (divergence négative) d'un volume infinitésimal autour du point considéré.

La divergence en un point donné  $M$  peut donc être interprétée comme le flux par unité de volume passant à travers une boîte élémentaire délimitant un volume infinitésimal  $d\tau$  tendant vers 0, construit autour de ce point  $M$ .

### 1.4 Le rotationnel

L'opérateur rotationnel (ou *curl*) s'applique également aux champs de vecteurs  $\vec{A}(x, y, z)$  et donne un champ de vecteurs représentant la tendance locale du champ à « tourner » autour d'un point.

On peut l'écrire de deux manières différentes :

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Ainsi, le rotationnel mesure la « rotation locale » du champ autour d'un point donné.

### 1.5 Flux d'un champ de vecteurs à travers une surface

Flux d'un champ de vecteurs à travers une surface élémentaire  $d\vec{S}$  :

$$d\varphi = \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

Flux total à travers n'importe quelle surface  $S$ , plane ou non :

$$\varphi = \iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

Un champ de vecteurs dont la divergence est nulle en tout point est appelé champ de vecteurs à **flux conservatif** :  $\operatorname{div} \vec{A} = 0$

### 1.6 Théorème d'Ostrogradsky

$$\varphi = \oiint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_\tau \operatorname{div} \vec{A} d\tau$$

## 1.7 Circulation d'un champ de vecteurs

La circulation d'un champ de vecteurs  $\vec{A}$  le long d'un contour  $\Gamma$  (fermé ou non) se définit par :

$$\mathcal{C} = \int_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

Lorsque le contour est fermé, on note :

$$\mathcal{C} = \oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

La circulation est dite **consevative** si elle est nul sur un contour fermé  $\Gamma$  :

$$\mathcal{C} = \oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l} = 0$$

## 1.8 Théorème de Stokes

$$\oint_{\Gamma^+} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot} \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

# 2 Les Equations de Maxwell

## 2.1 Maxwell-Gauss

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

## 2.2 Maxwell-Faraday

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

## 2.3 Maxwell-Flux (ou Maxwell-Thomson)

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

## 2.4 Maxwell-Ampère

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$