Formulaire d'Electromagnétisme

Raphaël Jamann

1 Opérateurs de la Théorie des Champs

1.1 Opérateur Nabla ∇

L'opérateur nabla est défini en coordonnées cartésiennes par :

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Il sera utile pour l'écriture d'autres opérateurs tels que $\vec{\text{grad}}$, div ou encore $\vec{\text{rot}}$.

1.2 Le gradiant

L'opérateur gradient ne s'applique qu'aux champs scalaires $f(x, y, z)$ et donne un champ de vecteurs correspondant à la variation locale du champ scalaire f dans l'espace.

On peut le noter de deux manières différentes :

$$\vec{\text{grad}} f = \nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Ainsi, le gradient associe à chaque point de l'espace un vecteur orienté dans la direction de la plus forte croissance de f et de norme proportionnelle à la rapidité de cette croissance.

1.3 La divergence

L'opérateur divergence s'applique aux champs de vecteurs $\vec{\mathbf{A}}(x, y, z)$ et donne un champ scalaire correspondant au taux de « source » ou de « puits » du champ en un point.

On peut l'écrire de deux manières différentes :

$$\mathrm{div}\,\vec{\mathbf{A}} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{A}} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Ainsi, la divergence mesure la tendance d'un champ vectoriel à « sortir » (divergence positive) ou à « entrer » (divergence négative) d'un volume infinitésimal autour du point considéré.

La divergence en un point donné M peut donc être interprétée comme le flux par unité de volume passant à travers une boîte élementaire délimitant un volume infinitésimal $\mathrm{d}\tau$ tendant vers 0, construit autour de ce point M.

1.4 Le rotationnel

L'opérateur rotationnel (ou *curl*) s'applique également aux champs de vecteurs $\vec{\mathbf{A}}(x, y, z)$ et donne un champ de vecteurs représentant la tendance locale du champ à « tourner » autour d'un point.

On peut l'écrire de deux manières différentes :

$$\vec{\mathrm{rot}}\vec{\mathbf{A}} = \vec{\nabla} \wedge \vec{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Ainsi, le rotationnel mesure la « rotation locale » du champ autour d'un point donné.

1.5 Flux d'un champ de vecteurs à travers une surface

Flux d'un champ de vecteurs à travers une surface élémentaire $\mathrm{d}\vec{\mathbf{S}}$:

$$\mathrm{d}\varphi = \vec{\mathbf{A}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{S}}$$

Flux total à travers n'importe quelle surface S, plane ou non :

$$\varphi = \iint_S \vec{\mathbf{A}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{S}}$$

Un champ de vecteurs dont la divergence est nulle en tout point est appelé champ de vecteurs à **flux conservatif** : $\mathrm{div}\,\vec{\mathbf{A}} = 0$

1.6 Théorème d'Ostrogradsky

$$\varphi = \oiint_S \vec{\mathbf{A}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{S}} = \iiint_\tau \mathrm{div}\,\vec{\mathbf{A}}\,\mathrm{d}\tau$$

1.7 Circulation d'un champ de vecteurs

La circulation d'un champ de vecteurs $\vec{\mathbf{A}}$ le long d'un contour Γ (fermé ou non) se définit par :

$$\mathcal{C} = \int_\Gamma \vec{\mathbf{A}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{l}}$$

Lorsque le contour est fermé, on note :

$$\mathcal{C} = \oint_\Gamma \vec{\mathbf{A}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{l}}$$

La circulation est dite **consevative** si elle est nul sur un contour fermé Γ :

$$\mathcal{C} = \oint_\Gamma \vec{\mathbf{A}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{l}} = 0$$

1.8 Théorème de Stokes

$$\oint_{\Gamma^+} \vec{\mathbf{A}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{l}} = \iint_S \vec{\mathrm{rot}}\vec{\mathbf{A}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{S}}$$