Lista 4 (Análise Numérica)

Raphael F. Levy

13 de novembro de 2022

Questão 4:

Seja $P(x)$ um polinômio de grau n que passa pelos pontos $(i; -i)(i = 1, ..., n)$ e tal que tem termo independente igual a $(-1)^n$. Usando seu conhecimento de interpolação polinomial, prove que para todo número natural $k > n$; tem-se que $P(k) = \binom{k-1}{n} - k$.

Solução:

Primeiramente, temos que

$$\binom{k-1}{n} - k = \frac{(k-1)!}{n!(k-1-n)!} - k$$

Além disso, pelo enunciado temos $P(x) = -x$, e portanto $P(x) + x$ será uma raiz do polinômio P para qualquer x. Agora, sendo um polinômio de grau n, podemos escrever

$$P(x) + x = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = a(x-1)(x-2)...(x-n)$$

$$\Rightarrow P(x) = a(x-1)(x-2)...(x-n) - x$$

Ainda, $P(0) = a_n(0)^n + a_{n-1}(0)^{n-1} + ... + a_1(0) + a_0 - (0) = a(0-1)(0-2)...(0-n) - 0 = (-1)^n$, pelo enunciado, logo $P(0) = a(-1)^n n! = (-1)^n \Rightarrow a = \dfrac{1}{n!}$.

Sendo assim, temos $P(x) = \dfrac{1}{n!}(x-1)(x-2)...(x-n) - x$.

Agora, para $k > n$, digamos $k = n+1$, $P(k) = \dfrac{1}{n!}(k-1)(k-2)...(k-n) - k = \dfrac{1}{n!}(k-1)(k-2)...(1) - k = \dfrac{1}{n!}(k-1)! - k$.

Para $k = n+2$: $P(k) = \dfrac{1}{n!}(k-1)(k-2)...(k-n) - k = \dfrac{1}{n!}(k-1)(k-2)...(2) - k = \dfrac{1}{n!}\dfrac{(k-1)!}{1} - k$.

Para $k = n+3$: $P(k) = \dfrac{1}{n!}(k-1)(k-2)...(k-n) - k = \dfrac{1}{n!}(k-1)(k-2)...(3) - k = \dfrac{1}{n!}\dfrac{(k-1)!}{2.1} - k$.

Para $k = n+4$: $P(k) = \dfrac{1}{n!}(k-1)(k-2)...(k-n) - k = \dfrac{1}{n!}(k-1)(k-2)...(4) - k = \dfrac{1}{n!}\dfrac{(k-1)!}{3.2.1} - k$.

...

Para $k = n + i$: $P(k) = \frac{1}{n!}(k-1)(k-2)...(k-n) - k = \frac{1}{n!}(k-1)(k-2)...(i) - k = \frac{1}{n!}\frac{(k-1)!}{(i-1)!} - k$.

Com isso, para $k > n$ qualquer, temos

$$P(k) = \frac{1}{n!}(k-1)...(k-n) - k = \frac{1}{n!}(k-1)...(k-n) - k = \frac{1}{n!}\frac{(k-1)!}{(k-1-n)!} - k = \binom{k-1}{n} - k,$$

como queríamos demonstrar.

Questão 7:

Considere a EDO

$$x'(t) = k(a - x(t))(b - x(t)), \ (k, a, b \in \mathbb{R})$$

$$x(0) = 0$$

a) Escreva um programa que implemente o método RK4 clássico para aproximar a solução dessa EDO. Use como parâmetros de entrada do seu programa: o tamanho de passo h, o tempo de integração T, e os valores de k, a, b. Para $k = 0.01, a = 70, b = 50$, use seu programa, com $h = 0.5$, para achar numéricamente a solução da EDO no intervalo [0 20] e compare a solução numérica, obtida com seu programa, com a solução exata

$$x(t) = 350(1 - e^{-0.2t})/(7 - 5e^{-0.2t})$$

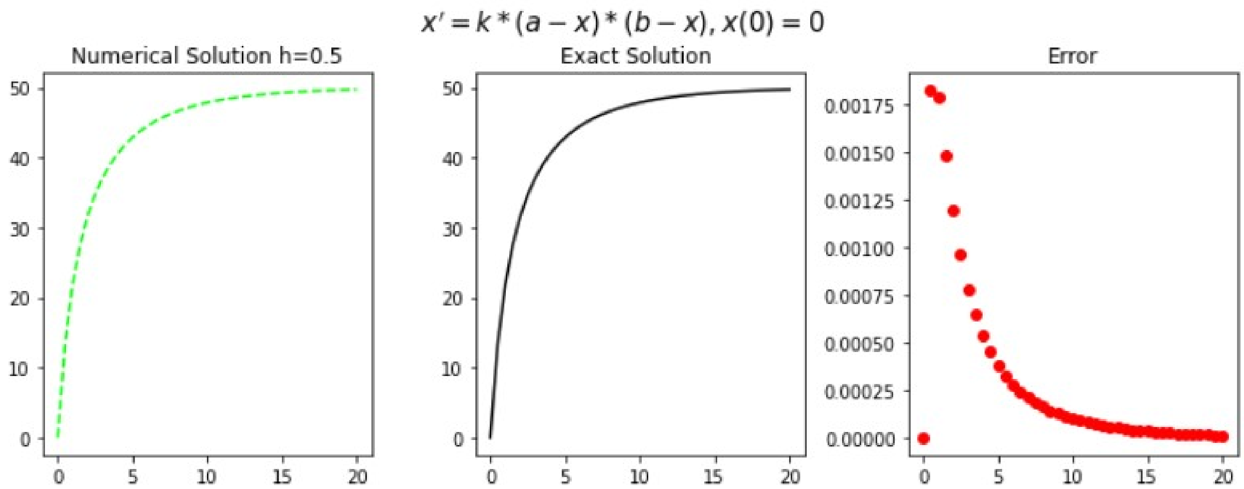
b) Teste seu programa para alguns valores de T (tomando valores de T em ordem crescente) diminuindo -caso seja necessário- o valor de h, de modo que a solução numérica aproxime bem a solução exata.

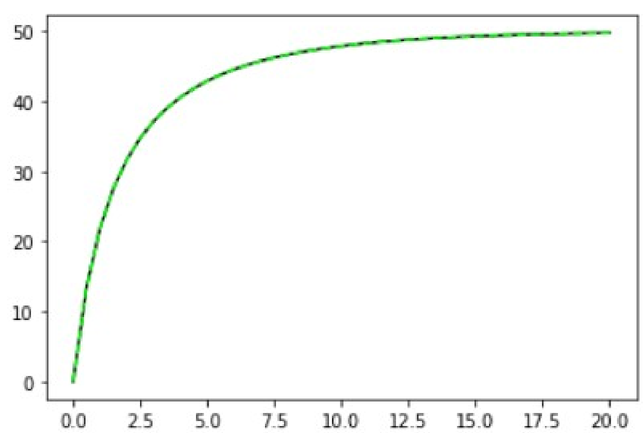
c) Observe que a solução exata satisfaz: $\lim_{t\to\infty} x(t) = 50$. Existe algum valor fixo de h (mesmo muito pequeno), de modo que o método RK4 seja capaz de reproduzir esse comportamento assintótico da solução exata? Justifique.

Solução:

Os códigos implementados e os gráficos gerados estão no arquivo *Lista4_AN_Raphael_Levy.ipynb*.

a)





Testando com os parâmetros originais, temos $x(1) = 13.45291623$, $w(1) = 13.45108554$, $x(T) = 49.73487955$ e $w(T) = 49.73486767$. Dessa forma, é possível ver que o método de Runge-Kutta se aproximou bem à solução exata, acertando o resultado até a quarta casa decimal. Além disso, buscando a maior diferença entre os valores de x e w, encontrei $\max |x - w| = 0.0018306916345292024$, uma diferença relativamente pequena.

b) Ver arquivo *Lista4_AN_Raphael_Levy.ipynb*.

c) Tomando valores de T muito grandes, até $T = 200.000$, foi possível notar que a solução dada por Runge-Kutta sempre tendia a 50 para valores pequenos de h. De forma mais específica, a solução por RK4 no intervalo $[0,\ T]$ era extremamente próxima da solução exata até um valor de $h = 2.67$, um valor aproximado de $\sqrt[4]{50}$, com $x(1) = 35.59117575695174$ e $w(1) = 49.94402221109137$. A partir de $h = 2.68$, temos como resultado $x(1) = 35.64063408858601$ e $w(1) = 50.29301704543909$. Ainda assim, apesar do método de Runge-Kutta começar com um valor superior a 50, no limite de t o método ainda tendia a 50.

Contudo, o método só convergia para 50 com um valor de h até 3.12, obtido por inspeção exaustiva, e a partir de 3.13, temos um erro de overflow, com $w(1) = 70.06801012771969$ e $w(T) = \infty$. Sendo assim, para que o método de Runge-Kutta convirja para a solução 50 de forma próxima à solução exata, devemos usar h até 2.67.

Claro, esses resultados foram obtidos de forma prática. De forma teórica, temos que o erro $||x(i) - w(i)||$ é de ordem $O(h^4)$. Sendo assim, existe $C > 0$ tal que

$$0 \leq ||x(i) - w(i)|| \leq Ch^4,$$

e tomando $h \to 0$, temos que $Ch^4 \to 0 \Rightarrow ||x(i) - w(i)|| \to 0$, logo o valor resultante do método de Runge-Kutta deverá se aproximar do valor exato, consequentemente para qualquer valor de h bem pequeno, o método reproduzirá o comportamento assintótico da solução exata.