Questão 3 da Prova A2. Introdução à Análise Numérica. FGV EMAp 2022 (Simulação estocástica)

- Valor da questão: **3 pontos**
- Data de entrega: **30 de Novembro, 23:59 hr**

Observações:

- Alunos com primeiro nome iniciando com a letra **A** ou **B** devem responder somente a **questão 1**
- Alunos com primeiro nome iniciando com a letra **C** ou **D** devem responder somente a **questão 2**
- Alunos com primeiro nome iniciando com a letra **E** ou **F** devem responder somente a **questão 3**
- Alunos com primeiro nome iniciando com a letra **J** devem responder somente a **questão 4**
- Alunos com primeiro nome iniciando com a letra **L** ou **P** devem responder somente a **questão 5**
- Alunos com primeiro nome iniciando com a letra **R** devem responder somente a **questão 6**
- Alunos com primeiro nome iniciando com a letra **S** ou **T** devem responder somente a **questão 7**
- Alunos com primeiro nome iniciando com a letra **V** ou **W** devem responder somente a **questão 8**

1. Um ponto x e um ponto y são selecionados ao acaso (i.e. conforme a distribuição uniforme) no intervalo $[0\ \ 2]$ e $[2\ \ 3]$, respectivamente. Use o método de simulação Monte Carlo para calcular aproximadamente a probabilidade de que os três segmentos $[0\ \ x]$, $[x\ \ y]$ e $[y\ \ 3]$ possam formar um triângulo.

2. Dois jogadores A e B jogam o seguinte jogo: A seleciona, ao acaso, um dos três "spinner" da figura 1, e B seleciona um dos outros dois. Ambos os jogadores giram os "spinners" selecionados. Aquele que obtenha o maior numéro é o ganhador. Assumindo que os números em cada "spinner" tem igual probabilidade de sair, simule computacionalmente várias vezes esse jogo e decida se você prefere ser o jogador A ou o jogador B.

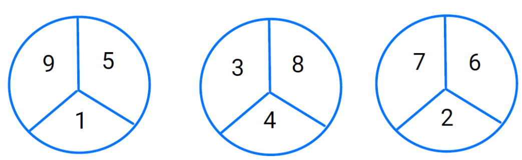

Figure 1: spinners

3. Dois jogadores lamçam moedas simultaneamente até obterem o primeiro casamento (i.e., ou duas caras ou duas coroas). Se os dois lançam "cara" simultaneamente, ganha o jogador I. Se ambos lançam "coroa", ganha o jogador II. Por exemplo, se os dois obtêm "cara" no primeiro lançamento, então o jogo termina e o jogador I ganha o jogo. Suponha que a moeda do jogador I seja honesta (i.e., tendo probabilidade $\frac{1}{2}$ de lançar "cara" e probabilidade $\frac{1}{2}$ de lançar "coroa"), mas que a moeda do jogador II não necessariamente o seja, tendo probabilidade p de "cara", $0 < p < 1$. Ache usando simulação Monte Carlo a probabilidade do jogador I ganhar o jogo (mais cedo ou mais tarde)

4. Uma caixa contém k moedas. É conhecido que se a i-ésima ($i = 1, \ldots, k$) moeda é lançada, a probabilidade de obter "cara" é $\frac{i}{k+1}$. Suponha que uma moeda é selecionada ao acaso e então é lançada repetidamente. Escreva um programa que calcule via Monte Carlo, com uma tolerância de 10^{-2}, a probabilidade de que se nos primeiros n lançamentos são obtidas "caras", no lançamento $n+1$ é obtida "cara" também. Considere como entrada do seu programa: k e n.

5. Considere o problema de calcular usando Monte Carlo a área interior da elipse

$$40x^2 + 25y^2 + y + \frac{9}{4} \leq 52xy + 14x$$

em $0 \leq x, y \leq 1$.

   (a) Implemente um programa para calcular essa área, gerando $N = 10^6$ números pseudo-aleatórios. Compare com a área correta $\frac{\pi}{18}$.

   (b) Quantas amostras são necessárias para voce calcular essa área com um erro $< 10^{-3}$, ao 99% de confiabilidade?

6. Um par de dados honestos são lançados repetidamente até que todos os possíveis resultados das somas (i.e., $2, \ldots, 12$) tenham acontecido ao menos uma vez. Faça um estudo por simulação para estimar o número médio de lançamentos que são necessários para obter todas essas possíveis somas.

7. Suponha que você está no ponto de ônibus às 10:00 horas da manhã. Sabendo que o ônibus chega ao ponto em algum tempo uniformemente distribuido entre 10:00 e 10:30 da manhã; use simulação Monte Carlo para determinar a probabilidade de que, se às 10:15 o ônibus não chegou ainda, você tenha que esperar ao menos 10 minutos adicionais.

8. Um ônibus de certa companhia viaja entre as cidades A e B, as quais estão a uma distância de 100 km uma da outra. Sabe-se que quando o ônibus quebra na estrada, isso acontece aleatóriamente uniformemente no trajeto. Nas cidades A, B e na mitade do caminho entre ambas, existem estações de servicios responsáveis por ajudar caso o ônibus quebre. A direção da companhia sugere que é mais eficiente colocar essas estações de servicio a uma distância de 25 km, 50 km e 75 km de A. Você (que é matemático) é consultado acerca dessa sugestão. Você concordaría com a proposta?