LISTA 4 Interpolação polinomial e aproximação de EDOs

(As questões sinalizadas com **(**)** *deverão ser entregues até o dia 5 de Novembro, 23 : 59 hrs)*

1. Sejam p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 pontos da parábola $y = 3x^3 + 2x^2 - 4x + 7$. Quantos polinômios de grau 4 passam por esses 5 pontos?. Justifique

2. Sejam $p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots, p_{m+1}$ pontos da parábola $y = 3x^3 + 2x^2 - 4x + 7$. Quantos polinômios de grau m passam por esses $m + 1$ pontos?. Justifique

3. Pode um polinômio de grau 4 interceptar um polinômio de grau 5 em 6 pontos?. Justifique

4. **(**)** Seja $P(x)$ um polinômio de grau n que passa pelos pontos $(i, -i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ e tal que tem termo independente igual a $(-1)^n$. Usando seu conhecimento de interpolação polinomial, prove que para todo número natural $k > n$, tem-se que $P(k) = \binom{k-1}{n} - k$.

5. Considere a função $f(x) = \cos x$, para $x \in [0\ \pi]$. Determine o minimo de pontos a considerar no intervalo dado para garantir que o erro máximo da aproximação de $f(x)$ por um polinômio interpolador nesses pontos seja inferior a 0.5

6. Considere a equação diferencial
$$x'(t) = \begin{pmatrix} -1000 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{10} \end{pmatrix} x(t)$$
   (a) Implemente um programa que construa uma aproximação da solução usando o método de Euler explícito (Forward Euler). Considere como parâmetros de entradas o tamanho de paso h, o intervalo de integração e as condições iniciais.
   (b) Teste seu programa para diferentes valores de h (incluindo valores $h > 0.002$ e valores $h < 0.002$) e compare com a solução exata do sistema (Para obter a solução exata, note que a matriz da EDO é diagonalizável). Explique os resultados computacionais obtidos, com base em seus conhecimentos de estabilidade absoluta (A-stability).
   (c) Implemente o método de Euler implícito (Backward Euler) para este sistema e compare com os resultados obtidos com o Euler explicito (Forward Euler). Por que desempenho do Backward Euler é bem melhor?.

7. **(**)** Considere a EDO
$$\begin{aligned} &x'(t) = k(a - x(t))(b - x(t)), \quad (k, a, b \in \mathbb{R}) \\ &x(0) = 0 \end{aligned}$$
   (a) Escreva um programa que implemente o método RK4 clásico para aproximar a solução dessa EDO. Use como parâmetros de entrada do seu programa: o tamanho de passo h, o tempo de integração T, e os valores de k, a, b. Para $k = 0.01$, $a = 70$, $b = 50$, use seu programa, com $h = 0.5$, para achar numéricamente a solução da EDO no intervalo $[0\ 20]$ e compare a solução numérica, obtida com seu programa, com a solução exata
$$x(t) = 350(1 - e^{-0.2t})/(7 - 5e^{-0.2t}).$$
   (b) Teste seu programa para alguns valores de T (tomando valores de T em ordem crescente) disminuindo -caso seja necessário- o valor de h, de modo que a solução numérica aproxime bem a solução exata.
   (c) Observe que a solução exata satisfaz: $\lim_{t\to\infty} x(t) = 50$. Existe algum valor fixo de h (mesmo muito pequenho), de modo que o método RK4 seja capaz de reproduzir esse comportamento assintótico da solução exata?. Justifique.

8. Demonstre que o seguinte método de Runge-Kutta tem ordem de convergência 3:
$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ 1 & -1 & 2 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$