

LISTA 2 Métodos iterativos para sistemas de equações lineares

(As questões sinalizadas com (**) deverão ser entregues até o dia 11 de setembro)

1. Considere a matriz tridiagonal por blocos $A \in \mathbb{R}^{m^2 \times m^2}$

$$A = \begin{bmatrix} T & -I & & & \\ -I & T & -I & & \\ & -I & T & -I & \\ & & -I & T & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & -I \\ & & & & -I & T \end{bmatrix}$$

com I a matriz identidade de $m \times m$, e T a matriz

$$T = \begin{bmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & -1 & 4 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

(Essa matriz A aparece muito na solução numérica de EDP de tipo Poisson)

- (a) O método de Gauss-Seidel aplicado ao sistema $Ax = b$ ($b \in \mathbb{R}^{m^2}$) é convergente $\forall m \in \mathbb{N}$? Justifique bem sua resposta.
- (b) Uma boa escolha do parâmetro ω no método SOR pode levar a uma convergência mais rápida, comparado com Jacobi e Seidel. Em geral determinar o valor ótimo de ω não é um problema fácil, mas em alguns casos em que a matriz do sistema tem uma estrutura específica é possível achar esse valor ótimo $\omega_{\text{ótimo}}$. Por exemplo, para a matriz A acima é conhecido que

$$\omega_{\text{ótimo}} = \frac{2}{1 + \sin\left(\frac{\pi}{m+1}\right)}$$

Implemente o método SOR para resolver o sistema $Ax = b$, onde b é um vetor tal que o sistema tem a solução exata $x^* = (2, 2, \dots, 2, 2)$. Compare a performance do método SOR usando 4 valores diferentes do parâmetro ω : i) $\omega = \omega_{\text{ótimo}}$, ii) $\omega = 1$ (o método de Seidel), iii) $\omega = 0.5$, iv) $\omega = 0$, para 4 valores diferentes de m : $m = 50, 100, 1000, 5000$. Como critério de comparação use o número de iterações necessárias para que o erro na norma ∞ seja $\leq 10^{-6}$. Comente sobre os resultados obtidos.

2. (**) Considere uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que os elementos na diagonal de A são todos 3, na subdiagonal inferior e superior são todos -1 , e $A_{i, n+1-i} = \frac{1}{2} \forall i = 1, \dots, n$ (excepto para $i = \frac{n}{2}$ e $i = \frac{n}{2} + 1$). Por exemplo, para $n = 4$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & & \frac{1}{2} \\ -1 & 3 & -1 & \\ & -1 & 3 & -1 \\ \frac{1}{2} & & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Defina o vetor $b = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \dots, \frac{3}{2}, 1, 1, \frac{3}{2}, \dots, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)^T$. Então a solução do sistema $Ax = b$ é $x^* = (1, 1, \dots, 1, 1)$.

- (a) Implemente um programa que resolva o sistema $Ax = b$ usando o método de Jacobi e o método de Seidel. Considere como parâmetros de entradas: a dimensão n do sistema e a tolerância ε . Considere como saída: a aproximação obtida com Jacobi, a obtida com Seidel e o número de iterações realizadas por cada método.

- (b) Para $n = 100000$, itere os métodos acima até obter uma aproximação com 6 dígitos de precisão usando Jacobi e Seidel. Para isto utilize como critério de parada o erro exato na norma infinita, isto é: $\|x^* - x^{(k)}\|_\infty$. Quantas iterações foram necessárias para cada método?
- (c) Implemente um programa usando o método do Gradiente Conjugado e, para $n = 100000$, determine o erro exato $\|x^* - x^{(k)}\|_\infty$ após k iterações, para $k = k_{jacobi}$ e $k = k_{seidel}$, onde k_{jacobi} e k_{seidel} são a quantidade de iterações que foram necessárias com Jacobi e Seidel no item b). Qual dos 3 métodos teve a melhor performance?
3. Escreva um programa que, tendo como dados de entrada uma matriz A (diagonalmente dominante), um vetor b , e uma constante ε , utiliza o método de Jacobi e o método de Seidel para obter aproximações da solução do SEL $Ax = b$ com uma precisão ε .
- (a) Teste seu programa com matrizes diagonalmente dominantes por linhas e por colunas.
- (b) Teste seu programa com uma matriz tal que $\max(|\lambda_i|) < 1$, onde λ_i são os autovalores da matriz de iteração C , e tal que A não seja uma matriz diagonalmente dominante. Comprove que neste caso o método é convergente. Por que?
- (c) Resolva o seguinte sistema de equações lineares com ao menos 5 dígitos de precisão de cada x_i

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0 \\ -x_{j-1} + 2.5x_j - x_{j+1} &= e^{-\frac{(j-3)^2}{20}} \quad 2 \leq j \leq 4 \\ 2x_5 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

4. Considere o sistema Linear

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

- (a) Está garantida a convergência do método de Gauss-Seidel, independentemente da condição inicial escolhida?
- (b) Com $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ obtenha o vetor $x^{(1)}$ e calcule uma estimativa do erro $\|x - x^{(1)}\|_\infty$.

5. Considere o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0 \\ -x_{j-1} + 5x_j - x_{j+1} &= \cos\left(\frac{j}{10}\right) \quad 2 \leq j \leq 10 \\ x_{11} &= \frac{x_{10}}{2} \end{aligned}$$

- (a) Construa a iteração para encontrar a solução deste problema pelos métodos de Jacobi e SOR com $\omega = 1$.
- (b) Usando esses métodos, encontre uma solução aproximada com erro absoluto inferior a 10^{-5} .
6. Prove ou refute a seguinte afirmação: "Para toda matriz A simétrica definida positiva e qualquer vetor b , o método de Jacobi aplicado ao sistema $Ax = b$ converge, independentemente da iteração inicial". Justifique sua resposta.
7. Seja a matriz A simétrica definida positiva e b um vetor qualquer. Demonstre que o método de Seidel aplicado ao sistema $Ax = b$ é convergente.
8. Seja a função quadrática $f(x) = \frac{1}{2}x^\top Ax - b^\top x$, onde $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é uma matriz simétrica definida positiva e $b \in \mathbb{R}^{m \times 1}$

- (a) Prove que: x^* minimiza $f(x) \iff Ax^* = b$ (não precisa usar cálculo para provar esse resultado)
- (b) Use o método do Gradiente Conjugado para determinar o mínimo da função

$$f(x) = 2x^2 + 5y - 2yz - 8x - 2xy + 19 + 2y^2 - 6z + 2z^2$$

Observação: Em algumas das questões acima, envolvendo matrizes de grandes dimensões, note que muitos elementos são iguais a zero. Use esse fato para trabalhar as matrizes como sparse. Isso ajudará a armazenar e realizar operações de forma muito mais econômica sem ter que reservar tanta memória para guardar todos os elementos da matriz. Apenas os elementos diferentes de zero precisam ser armazenados.