Lista 1 - Programação Linear e Inteira

João Lucas Duim
Raphael Felberg Levy

21 de Fevereiro de 2022

Obs.: Todos os arquivos gerados no Geogebra estão anexados, nomeados como *L1Qx.ggb*, enquanto os gerados no Excel estão nomeados como *L1-Qx.xlsx*.

Questão 1

Indicate graphically whether each of the following linear programs has a feasible solution. Graphically determine the optimal solution, if one exists, or show that none exists.

a) Maximize $z = x_1 + 2x_2$, subject to:

$$x_1 - 2x_2 \leq 3,$$
$$x_1 + x_2 \leq 3,$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

b) Minimize $z = x_1 + x_2$, subject to:

$$x_1 - x_2 \leq 2$$
$$x_1 - x_2 \geq -2,$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

c) Redo (b) with the objective function 'Maximize $z = x_1 + x_2$'.

d) Maximize $z = 3x_1 + 4x_2$, subject to:

$$x_1 - 2x_2 \geq 4,$$
$$x_1 + x_2 \leq 3,$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Solução:

a) $x_1 = 0, x_2 = 3, z_{\max} = 6$. Ver arquivo *L1Q1A.ggb*.

b) $x_1 = 0, x_2 = 0, z_{\max} = 0$. Ver arquivo *L1Q1B.ggb*.

c) Nesse caso, é possível tornar x_1 e x_2 tão grandes quanto se queira e ainda satisfazerem as 4 restrições. Por esse motivo, não é possível maximizar $z = x_1 + x_2$. Ver arquivo *L1Q1C.ggb*.

d) Nesse caso, não há solução para o problema, pois as 4 restrições não podem ser simultaneamente satisfeitas. Ver arquivo *L1Q1D.ggb*.

Questão 2

Consider the following linear program:

Maximize $z = 2x_1 + x_2$, subject to:

$$
\begin{aligned}
&12x_1 + 3x_2 \leq 6,\\
&x_2 - 3x_1 \leq 7,\\
&x_2 \leq 10,\\
&x_1 \geq 0,\\
&x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

a) Draw a graph of the constraints and shade in the feasible region. Label the vertices of this region with their coordinates.

b) Using the graph obtained in (a), find the optimal solution and the maximum value of the objective function.

c) What is the slack in each of the constraints?

d) Find the shadow prices on each of the constraints.

e) Find the ranges associated with the two coefficients of the objective function.

f) Find the righthand-side ranges for the three constraints.

Solução:

a) Ver arquivo *L1Q2.ggb*.

b) A partir da figura mencionada no item acima, nota-se que a solução ótima é $(x_1, x_2) = (0, 2)$, atingindo o valor $z_{\max} = 2$.

c) O *slack* na primeira restrição é $s_1 = 6 - (12 \cdot 0 + 3 \cdot 2) = 0$; o *slack* na segunda restrição é $s_2 = 7 - (2 - 3 \cdot 0) = 5$; o *slack* na terceira restrição é $s_3 = 10 - 2 = 8$.

d) É fácil ver que o *shadow price* associado às restrições $x_2 - 3x_1 \leq 7$ e $x_2 \leq 10$ são todos 0, pois alterando-as uma a uma para $x_2 - 3x_1 \leq 8$ e $x_2 \leq 11$ não causa nenhuma alteração no valor ótimo da função objetivo. Por fim, encontremos o *shadow price* associado à restrição $12x_1 + 3x_2 \leq 6$: Alterando-a para $12x_1 + 3x_2 \leq 7$, temos a nova solução ótima:

$$
\begin{cases}
12x_1 + 3x_2 = 7\\
x_1 = 0
\end{cases}
$$

Assim, na nova solução ótima $(x_1, x_2) = \left(0, \frac{7}{3}\right)$, temos $z = 2x_1 + x_2 = \frac{7}{3}$. Logo, o referido *shadow price* vale $\frac{7}{3} - 2 = \frac{1}{3}$.

e) Sendo c_1 o *range* associado ao coeficiente de x_1, podemos reescrever a função objetivo como:

$$x_2 = z - c_1 x_1$$

Tendo em vista os limites como as inclinações das retas $x_1 = 0$ e $12x_1 + 3x_2 = 6$, temos:

$$-4 \leq -c_1$$

$$c_1 \leq 4$$

onde o valor atual de $c_1 = -\frac{1}{2}$.

De forma análoga, sendo c_2 o *range* associado ao coeficiente de x_2, podemos reescrever a função objetivo como:

$$x_2 = \frac{z}{c_2} - \frac{2}{c_2}x_1$$

Tendo em vista os limites como as inclinações das retas $x_1 = 0$ e $12x_1 + 3x_2 = 6$, temos:

$$-4 \leq -\frac{2}{c_2}$$

$$c_2 \geq \frac{1}{2} \text{ ou } c_2 < 0$$

onde o valor atual de $c_2 = 1$.

f) Ver arquivo *L1-Q2.xlsx.* Na planilha de Relatório de Sensibilidade, pode-se coletar os seguintes *righthand-side ranges*, associados, respectivamente, a $12x_1 + 3x_2 \leq 6$, $x_2 - 3x_1 \leq 7$ e $x_2 \leq 10$:

$$0 < b_1 < 21$$
$$2 < b_2 < \infty$$
$$2 < b_3 < \infty$$

Questão 3

Consider the bond-portfolio problem formulated in Section 1.3. Reformulate the problem restricting the bonds available only to bonds A and D. Further add a constraint that the holdings of municipal bonds must be less than or equal to $3 million.

a) What is the optimal solution?

b) What is the shadow price on the municipal limit?

c) How much can the municipal limit be relaxed before it becomes a nonbinding constraint?

d) Below what interest rate is it favorable to borrow funds to increase the overall size of the portfolio?

e) Why is this rate less than the earnings rate on the portfolio as a whole?

Solução:

a) A solução ótima para $z = 0.043x_A + 0.022x_D$ é $x_A = 3, x_D = 7, z_{\max} = 0.283$

b) O shadow price do limite municipal é de 0,021. Observando o Relatório de Sensibilidade da planilha A, é permitido aumentar a restrição de D em até 0.33333. Assim, podemos aumentar o limite à direita por algum valor menor que 0.333, nesse caso 0.1, e ao final multiplicar o valor do *shadow price* encontrado por 10, como pode ser visto na planilha B2.

c) O limite municipal pode ser relaxado em $0.333 milhões antes que a restrição se torne *nonbinding*.

d) É favorável fazer empréstimos para aumentar o tamanho do portfólio numa taxa juros de até 4.4% (after-tax rate de 2.2%). Com uma taxa maior ou igual a 4.4%, não é benéfico pegar empréstimos.

e) Para que as restrições dadas sejam atendidas, $1 milhão adicional seria todo destinado ao investimento de menor retorno. Com isso, a taxa de juros mínima aceitável passa a ser menor que a taxa de retorno de antes.

Ver arquivo *L1-Q3.xlsx.*

Questão 5

The truck-assembly division of a large company produces two different models: the Aztec and the Bronco. Their basic operation consists of separate assembly departments: drive-train, coachwork, Aztec final, and Bronco final. The drive-train assembly capacity is limited to a total of 4000 units per month, of either Aztecs or Broncos, since it takes the same amount of time to assemble each. The coachwork capacity each month is either 3000 Aztecs or 6000 Broncos. The Aztecs, which are vans, take twice as much time for coachwork as the Broncos, which are pickups. The final assembly of each model is done in separate departments because of the parts availability system. The division can do the final assembly of up to 2500 Aztecs and 3000 Broncos each month.

The profit per unit on each model is computed by the firm as follows:

	Aztec		Bronco	
Selling Price		\$4200		\$4000
Material cost	\$2300		\$2000	
Labor cost	400	2700	450	2450
Gross Margin		\$1500		\$1550
Selling & Administrative*	\$ 210		\$ 200	
Depreciation†	60		180	
Fixed overhead†	50		150	
Variable overhead	590	910	750	1280
Profit before taxes		\$ 590		\$ 270

* 5% of selling price.
† Allocated according to planned production of 1000 Aztecs and 3000 Broncos per monthfor the coming year.

a) Formulate a linear program to aid management in deciding how many trucks of each type to produce per month.

b) What is the proper objective function for the division?

c) How many Aztecs and Broncos should the division produce each month?

Solução:

a) Para resolver o problema proposto acima, formulamos o seguinte programa linear:

$$\text{Maximizar } z = 590x_A + 270x_B,$$

sujeito às seguintes restrições:

$$x_A + x_B \leq 4000$$

$$2x_A + x_B \leq 6000$$

$$x_A \leq 2500$$

$$x_B \leq 3000.$$

b) O valor maximizado da função objetivo será 1.745.000.

c) A divisão deve produzir 2500 caminhões Aztec's e 1000 Bronco's.

Ver arquivo *L1-Q5_Q6.xlsx*.

Questão 6

Suppose that the division described in Exercise 5 now has the opportunity to increase its drive-train capacity by subcontracting some of this assembly work to a nearby firm. The drive-train assembly department cost breakdown per unit is as follows:

	Aztec	*Bronco*
Direct labor	\$ 80	\$ 60
Fixed overhead	20	60
Variable overhead	200	150
	\$300	\$270

The subcontractor will pick up the parts and deliver the assembled drive-trains back to the division. What is the maximum amount that the division would be willing to pay the subcontractor for assembly of each type of drive-train?

Solução:

Agora que a firma não precisará produzir tanto na sua divisão como antes, podemos alterar o programa linear anterior:

$$\text{Maximizar } z = 590x_A + 270x_B - 300x_{A2} - 270x_{B2},$$

sujeito às seguintes restrições:

$$x_A + x_B - x_{A2} - x_{B2} \leq 4000$$

$$2x_A + x_B \leq 6000$$

$$x_A \leq 2500$$

$$x_B \leq 3000$$

$$x_A \geq x_{A2} \Rightarrow x_{A2} - x_A \leq 0$$

$$x_B \geq x_{B2} \Rightarrow x_{B2} - x_B \leq 0.$$

Colocando esse programa no Excel (também está no arquivo *L1-Q5_Q6.xlsx*), nota-se que a divisão não estará disposta a pagar nada para aumentar a produção, isso pois já estava maximizando seus lucros sem precisar maximizar a produção de $drive - train$: com $x_A = 2500$ e $x_B = 1000$, a produção de $drive - train$ era de 3500 unidades, quando seu máximo é de 4000.

Questão 10

A leather-goods factory manufactures five styles of handbags, whose variable contributions are \$30, \$40, \$45, \$25, and \$60 per dozen, respectively. The products must pass through four work centers and the man-hours available in each are: clicking (700), paring (600), stitching (400), and finishing (900). Hourly requirements for each dozen handbags are

Style	*Click*	*Pare*	*Stitch*	*Finish*
341	3	8	2	6
262	4	3	1	0
43	2	2	0	2
784	2	1	3	4
5-A	5	4	4	3

To prevent adding to inventory levels already on hand, the production manager, after reviewing the weekly sales forecasts, has specified that no more than 100, 50, 90, 70, and 30 dozen of each style respectively may be produced. Each handbag is made from five materials as specified in the following table:

Style	*Leather*	*Fabric*	*Backing*	*Lining*	*Accessories*
341	0	1	4	2	3
262	4	0	7	4	4
43	5	7	6	2	0
784	6	4	1	1	2
5-A	2	3	3	0	4
Total available	300	400	1000	900	1600

Formulate a linear program for next week's optimum manufacturing schedule if overall contribution is to be maximized.

Solução:

Sejam as seguintes variáveis a serem determinadas a respeito de um dia de produção, medidas em *gallons*:

x_1: Quantidade produzida de *handbags style* 341, em dúzias.
x_2: Quantidade produzida de *handbags style* 262, em dúzias.
x_3: Quantidade produzida de *handbags style* 43, em dúzias.
x_4: Quantidade produzida de *handbags style* 784, em dúzias.
x_5: Quantidade produzida de *handbags style* $5-A$, em dúzias.

Do enunciado, extrai-se as seguintes restrições relativas às horas disponíveis para cada etapa de produção:

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 5x_5 \leq 700$$
$$8x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + 4x_5 \leq 600$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_4 + 4x_5 \leq 400$$
$$6x_1 + 2x_3 + 4x_4 + 3x_5 \leq 900$$

Devido à limitação de produção de cada *style*, obtêm-se as seguintes restrições:

$$x_1 \leq 100$$
$$x_2 \leq 50$$
$$x_3 \leq 90$$
$$x_4 \leq 70$$
$$x_5 \leq 30$$

Por fim, há as restrições de não-negatividade das variáveis:

$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$
$$x_3 \geq 0$$
$$x_4 \geq 0$$
$$x_5 \geq 0$$

A função objetivo do problema é maximizar o lucro, que será dado por:

$$30x_1 + 40x_2 + 45x_3 + 25x_4 + 60x_5$$

Portanto, a modelagem pedida é:

Maximize $30x_1 + 40x_2 + 45x_3 + 25x_4 + 60x_5$ sujeito a:

$$
\begin{aligned}
&3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 5x_5 \leq 700\\
&8x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + 4x_5 \leq 600\\
&2x_1 + x_2 + 3x_4 + 4x_5 \leq 400\\
&6x_1 + 2x_3 + 4x_4 + 3x_5 \leq 900\\
&x_1 \leq 100\\
&x_2 \leq 50\\
&x_3 \leq 90\\
&x_4 \leq 70\\
&x_5 \leq 30\\
&x_1 \geq 0\\
&x_2 \geq 0\\
&x_3 \geq 0\\
&x_4 \geq 0\\
&x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

Veja o arquivo *L1-Q10.xlsx* com a resolução por método simplex.

Assim, a solução ótima encontrada é $x_1 = 10$, $x_2 = 50$, $x_3 = 90$, $x_4 = 70$ e $x_5 = 30$, maximizando o lucro em 9900.

Questão 11

A corporation that produces gasoline and oil specialty additives purchases three grades of petroleum distillates, A, B, and C. The company then combines the three according to specifications of the maximum or minimum percentages of grades A or C in each blend.

Mixture	*Max % allowed for Additive* A	*Min % allowed for Additive* C	*Selling price* \$/gallon
Deluxe	60%	20%	7.9
Standard	15%	60%	6.9
Economy	—	50%	5.0

Supplies of the three basic additives and their costs are:

Distillate	*Maximum quantity available per day* (gals)	*Cost* \$/gallon
A	4000	0.60
B	5000	0.52
C	2500	0.48

Show how to formulate a linear program to determine the production policy that will maximize profits

Solução:

Sejam as seguintes variáveis a serem determinadas a respeito de um dia de produção, medidas em *gallons*:

x_1: Quantidade total de aditivo A utilizado na produção de *Deluxe*.
x_2: Quantidade total de aditivo C utilizado na produção de *Deluxe*.
x_3: Quantidade total de aditivo A utilizado na produção de *Standard*.
x_4: Quantidade total de aditivo C utilizado na produção de *Standard*.
x_5: Quantidade total de aditivo A utilizado na produção de *Economy*.
x_6: Quantidade total de aditivo C utilizado na produção de *Economy*.
x_7: Quantidade total de aditivo B utilizado na produção de *Deluxe*.
x_8: Quantidade total de aditivo B utilizado na produção de *Standard*.
x_9: Quantidade total de aditivo B utilizado na produção de *Economy*.

Sejam, ainda, as seguintes variáveis auxiliares:

$D = x_1 + x_2 + x_7$: Quantidade total produzida de *Deluxe*.
$S = x_3 + x_4 + x_8$: Quantidade total produzida de *Standard*.
$E = x_5 + x_6 + x_9$: Quantidade total produzida de *Economy*.

Do enunciado, extrai-se as seguintes restrições relativas à porcentagem de aditivos na composição:

$$
\begin{aligned}
x_1 &\leq 0,6D \\
x_2 &\geq 0,2D \\
x_3 &\leq 0,15S \\
x_4 &\geq 0,6S \\
x_6 &\geq 0,5E
\end{aligned}
$$

Substituindo os valores das variáveis auxiliares, obtêm-se:

$$
\begin{aligned}
&-0,4x_1 + 0,6x_2 + 0,6x_7 \geq 0 \\
&-0,2x_1 + 0,8x_2 - 0,2x_7 \geq 0 \\
&-0,85x_3 + 0,15x_4 + 0,15x_8 \geq 0 \\
&-0,6x_3 + 0,4x_4 - 0,6x_8 \geq 0 \\
&-0,5x_5 + 0,5x_6 - 0,5x_9 \geq 0
\end{aligned}
$$

Devido à limitação de produção de cada aditivo, obtêm-se as seguintes restrições:

$$x_1 + x_3 + x_5 \leq 4000$$
$$x_2 + x_4 + x_6 \leq 5000$$
$$x_7 + x_8 + x_9 \leq 2500$$

Por fim, há as restrições de não-negatividade das variáveis:

$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$
$$x_3 \geq 0$$
$$x_4 \geq 0$$
$$x_5 \geq 0$$
$$x_6 \geq 0$$
$$x_7 \geq 0$$
$$x_8 \geq 0$$
$$x_9 \geq 0$$

A função objetivo do problema é maximizar o lucro, que será dado por:

$$7,9D + 6,9S + 5E - 0,6(x_1 + x_3 x_5) - 0,48(x_2 + x_4 + x_6) - 0,52(x_7 + x_8 + x_9) =$$
$$= 7,3x_1 + 7,42x_2 + 6,3x_3 + 6,42x_4 + 4,4x_5 + 4,52x_6 + 7,38x_7 + 6,38x_8 + 4,48x_9$$

Portanto, a modelagem pedida é:
Maximize $7,3x_1 + 7,42x_2 + 6,3x_3 + 6,42x_4 + 4,4x_5 + 4,52x_6 + 7,38x_7 + 6,38x_8 + 4,48x_9$ sujeito a:

$$
\begin{aligned}
&-0,4x_1+0,6x_2+0,6x_7\geq 0\\
&-0,2x_1+0,8x_2-0,2x_7\geq 0\\
&-0,85x_3+0,15x_4+0,15x_8\geq 0\\
&-0,6x_3+0,4x_4-0,6x_8\geq 0\\
&-0,5x_5+0,5x_6-0,5x_9\geq 0\\
&x_1+x_3+x_5\leq 4000\\
&x_2+x_4+x_6\leq 5000\\
&x_7+x_8+x_9\leq 2500\\
&x_1\geq 0\\
&x_2\geq 0\\
&x_3\geq 0\\
&x_4\geq 0\\
&x_5\geq 0\\
&x_6\geq 0\\
&x_7\geq 0\\
&x_8\geq 0\\
&x_9\geq 0
\end{aligned}
$$

Veja o arquivo *L1-Q11.xlsx* com a resolução por método simplex.

Assim, a solução ótima encontrada é $x_1 = 4000$, $x_2 = 5000$, $x_7 = 2500$ e $x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = x_8 = x_9 = 0$, ou seja, produzindo apenas *Deluxe* com, aproximadamente, $34,78\%$ de A e $43,49\%$ de C, maximizando o lucro em 84750.