Lista 3 - Programação Linear e Inteira

João Lucas Duim
Raphael Felberg Levy

20 de Março de 2022

Obs.: Os arquivos computacionais para a questão extra estão nomeados como *L3-QExtra.R* e *Podcasts.xlsx*.

Questão 1

As the leader of an oil-exploration drilling venture, you must determine the least-cost selection of 5 out of 10 possible sites. Label the sites $S_1, S_2, ..., S_{10}$, and the exploration costs associated with each as $C_1, C_2, ..., C_{10}$. Regional development restrictions are such that:

i) Evaluating sites S_1 and S_7 will prevent you from exploring site S_8.
ii) Evaluating site S_3 or S_4 prevents you from assessing site S_5.
iii) Of the group S_5, S_6, S_7, S_8, only two sites may be assessed.

Formulate an integer program to determine the minimum-cost exploration scheme that satisfies these restrictions.

Solução:

Sejam as variávis binárias de decisão:

$$S_i = \begin{cases} 1 \text{ , se o local } i \text{ é visitado} \\ 0 \text{ , se o local } i \text{ não é visitado} \end{cases}$$

Como o total de lugares a serem visitados é 5, temos:

$$\sum_{i=1}^{10} S_i = 5$$

Da restrição (i), obtemos:

$$S_1 + S_7 + S_8 \leq 2$$

Da restrição (ii), obtemos:

$$S_3 + S_5 \leq 1$$

$$S_4 + S_5 \leq 1$$

Da restrição (iii), obtemos:

$$S_5 + S_6 + S_7 + S_8 \leq 2$$

Finalmente, a modelagem pedida é:

Minimize $\sum_{i=1}^{10} C_i S_i$ sujeito a

$$\sum_{i=1}^{10} S_i = 5$$
$$S_1 + S_7 + S_8 \leq 2$$
$$S_3 + S_5 \leq 1$$
$$S_4 + S_5 \leq 1$$
$$S_5 + S_6 + S_7 + S_8 \leq 2$$
$$S_i \in \{0, 1\}, \forall i \in \{1, 2, ..., 10\}$$

Questão 2

A company wishes to put together an academic "package"for an executive training program. There are five area colleges, each offering courses in the six fields that the program is designed to touch upon.

The package consists of 10 courses; each of the six fields must be covered.

The tuition (basic charge), assessed when at least one course is taken, at college i is T_i (independent of the number of courses taken). Moreover, each college imposes an additional charge (covering course materials, instructional aids, and so forth) for each course, the charge depending on the college and the field of instructions.

Formulate an integer program that will provide the company with the minimum amount it must spend to meet the requirements of the program.

Solução:

Sejam as variáveis de decisão x_{ij} dada pela quantidade de cursos na faculdade i e campo j. Sejam c_{ij} os custos adicionais de cada curso na faculdade i e campo j.

Como existe um total de 10 cursos:

$$\sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{6} x_{ij} = 10$$

Para que todos os 6 campos sejam cobertos, temos:

$$\sum_{i=1}^{5} x_{ij} > 0, \forall j \in \{1, 2, ..., 6\}$$

Finalmente, a modelagem pedida é:

Minimize $\sum_{i=1}^{5} \left(T_i \cdot \mathbb{1}\{\sum_{j=1}^{6} x_{ij} > 0\} \right) + \sum_{i=1}^{5} \sum_{i=1}^{6} c_{ij} x_{ij}$ sujeito a:

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{6} x_{ij} = 10$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_{ij} > 0, \forall j \in \{1,2,...,6\}$$

$$x_{ij} \in \mathbb{Z}_+, \forall i \in \{1,2,...,5\}, j \in \{1,2,...,6\}$$

Questão 4

Three different items are to be routed through three machines. Each item must be processed first on machine 1, then on machine 2, and finally on machine 3. The sequence of items may differ for each machine. Assume that the times t_{ij} required to perform the work on item i by machine j are known and are integers. Our objective is to minimize the total time necessary to process all the items.

a) Formulate the problem as an integer programming problem. [Hint. Let x_{ij} be the starting time of processing item i on machine j. Your model must prevent two items from occupying the same machine at the same time; also, an item may not start processing on machine $(j+1)$ unless it has completed processing on machine j.]

b) Suppose we want the items to be processed in the same sequence on each machine. Change the formulation in part (a) accordingly.

Solução:

a) Sejam as variáveis de decisão x_{ij} conforme mencionado na dica.

Como o último procedimento é colocar um dos 3 itens na máquina 3, queremos minimizar a expressão $\max\{x_{13}, x_{23}, x_{33}\}$.

Para garantir que cada item passará nas máquinas 1, 2 e 3, nessa ordem, sem estar em duas máquinas diferentes ao mesmo tempo, fazemos:

$$x_{i(j+1)} \geq x_{ij} + t_{ij}, \forall i \in \{1,2,3\}, j \in \{1,2\}$$

Agora, sejam:

$$T = 2\max_{i,j} t_{ij}$$

$$(a,b) = (1,2) \text{ ou } (a,b) = (2,3) \text{ ou } (a,b) = (3,1),$$

ou seja, a e b são 2 itens distintos dentre os 3 disponíveis. Logo, para cada máquina j:

$$x_{bj} - x_{aj} \geq t_{aj} \text{ ou } x_{aj} - x_{bj} \geq t_{bj} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{aj} - x_{bj} \leq -t_{aj} \text{ ou } x_{bj} - x_{aj} \leq -t_{bj}$$

Seja a variável binária $y_{ij} \in \{0,1\}$. Temos as seguintes restrições equivalentes às anteriores:

$$x_{aj} - x_{bj} - T(1 - y_{ij}) \leq -t_{aj}$$

$$x_{bj} - x_{aj} - Ty_{ij} \leq -t_{bj}$$

Finalmente, a modelagem pedida é:

Minimize $\max\{x_{13}, x_{23}, x_{33}\}$ sujeito a:

$$
\begin{aligned}
&x_{i(j+1)} \geq x_{ij} + t_{ij}\\
&x_{aj} - x_{bj} - T(1 - y_{ij}) \leq -t_{aj}\\
&x_{bj} - x_{aj} - Ty_{ij} \leq -t_{bj}\\
&y_{ij} \in \{0, 1\}\\
&x_{ij} \geq 0
\end{aligned}
$$

Veja outra solução a seguir:

a) Sejam as variáveis de decisão x_{ij} conforme mencionado na dica.

Como o último procedimento é colocar um dos 3 itens na máquina 3, queremos minimizar a expressão $\max\{x_{13}, x_{23}, x_{33}\}$.

Para garantir que cada item passará nas máquinas 1, 2 e 3, nessa ordem, sem estar em duas máquinas diferentes ao mesmo tempo, fazemos:

$$x_{i,j+1} \geq x_{ij} + t_{ij}, \forall i \in \{1, 2, 3\}, j \in \{1, 2\}$$

Agora, sejam:

$$
\begin{aligned}
&a = \arg\min_i \, x_{ij}\\
&b = 6 - \arg\min_i \, x_{ij} - \arg\max_i \, x_{ij}\\
&c = \arg\max_i \, x_{ij}
\end{aligned}
$$

Assim, garantimos que, para cada máquina j, os itens a, b e c (uma permutação de 1, 2 e 3) passam nessa ordem por ela e um por vez:

$$
\begin{aligned}
&x_{bj} \geq x_{aj} + t_{aj}, \forall j \in \{1, 2, 3\}\\
&x_{cj} \geq x_{bj} + t_{bj}, \forall j \in \{1, 2, 3\}
\end{aligned}
$$

Finalmente, a modelagem pedida é:

Minimize $\max\{x_{13}, x_{23}, x_{33}\}$ sujeito a:

$$
\begin{aligned}
&x_{i,j+1} \geq x_{ij} + t_{ij}, \forall i \in \{1, 2, 3\}, j \in \{1, 2\}\\
&x_{bj} \geq x_{aj} + t_{aj}, \forall j \in \{1, 2, 3\}\\
&x_{cj} \geq x_{bj} + t_{bj}, \forall j \in \{1, 2, 3\}\\
&x_{ij} > 0, \forall i \in \{1, 2, 3\}, j \in \{1, 2, 3\}
\end{aligned}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
a &= \arg\min_i \, x_{ij} \\
b &= 6 - \arg\min_i \, x_{ij} - \arg\max_i \, x_{ij} \\
c &= \arg\max_i \, x_{ij}
\end{aligned}
$$

b) Nesse caso, $y_{ij} = y_{i1} = y_i$, pois a ordem dos itens em cada máquina é a mesma que na máquina 1. Assim, temos:

Minimize $\max\{x_{13}, x_{23}, x_{33}\}$ sujeito a:

$$
\begin{aligned}
&x_{i(j+1)} \geq x_{ij} + t_{ij} \\
&x_{aj} - x_{bj} - T(1 - y_i) \leq -t_{aj} \\
&x_{bj} - x_{aj} - Ty_i \leq -t_{bj} \\
&y_i \in \{0, 1\} \\
&x_{ij} \geq 0
\end{aligned}
$$

Questão 6

Formulate, but do not solve, the following mathematical-programming problems. Also, indicate the type of algorithm used in general to solve each.

a) A courier traveling to Europe can carry up to \$50 kilograms of a commodity, all of which can be sold for 40 per kilogram. The round-trip air fare is \$450 plus \$5 per kilogram of baggage in excess of 20 kilograms (one way). Ignoring any possible profits on the return trip, should the courier travel to Europe and, if so, how much of the commodity should be taken along in order to maximize his profits?

b) A copying service incurs machine operating costs of:

\$0.10 for copies 1 to 4,
\$0.05 for copies 5 to 8,
\$0.025 for copies 9 and over,

and has a capacity of 1000 copies per hour. One hour has been reserved for copying a 10-page article to be sold to MBA students. Assuming that all copies can be sold for \$0.50 per article, how many copies of the article should be made?

c) A petrochemical company wants to maximize profit on an item that sells for \$0.30 per gallon. Suppose that increased temperature increases output according to the graph in Fig. 1. Assuming that production costs are directly proportional to temperature as \$7.50 per degree centigrade, how many gallons of the item should be produced?

Solução:

a) Vamos definir x como a quantidade de quilogramas transportados. Temos:

$$0 \leq x \leq 50$$

O objetivo é maximizar a função lucro, dada por:

$$L(x) = 40x - \left(450 + 5 \cdot \left(\frac{x - 20 + |x - 20|}{2}\right)\right)$$

Simplificando, obtemos:

$$L(x) = \frac{75x}{2} - 400 - \frac{5}{2}|x - 20|$$

Agora, temos 2 casos a analisar:

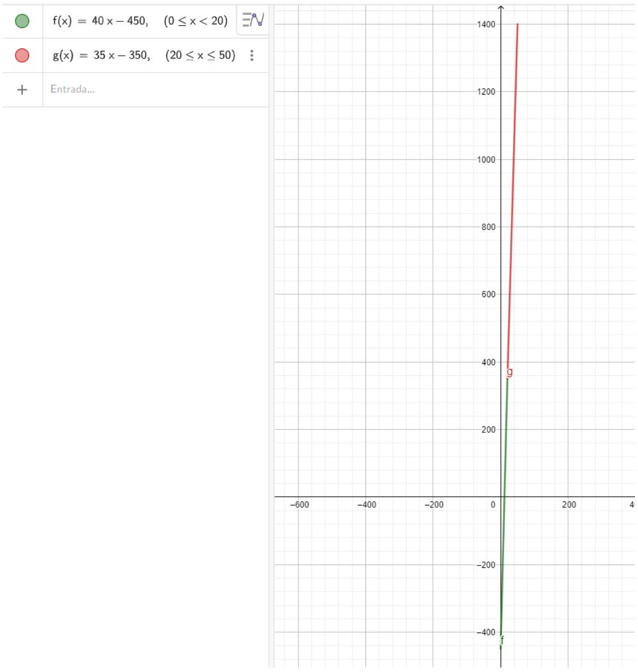
- $0 \leq x < 20$:

$$L(x) = \frac{75x}{2} - 400 - \frac{5}{2}(20 - x) = 40x - 450$$

- $20 \leq x \leq 50$:

$$L(x) = \frac{75x}{2} - 400 - \frac{5}{2}(x - 20) = 35x - 350$$

Finalmente, note no gráfico ilustrado a seguir que a função lucro é maximizada quando $x = 50$.



Assim, escrevendo a formulação de forma mais direta, temos:
Max $L(x)$, sujeito à:

$$t_1 = \begin{cases} 1, \text{ se } 0 \leq x < 20 \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

$$t_2 = \begin{cases} 1, \text{ se } 20 \leq x \leq 50 \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

$$L(x) = \begin{cases} 40x - 450, \text{ se } t_1 = 1 \\ 35x - 350, \text{ se } t_2 = 1 \end{cases}$$

b) Sejam as variáveis binárias:

$$t_1 = \begin{cases} 1, \text{ se } 1 \leq x \leq 4 \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

$$t_2 = \begin{cases} 1, \text{ se } 4 < x \leq 8 \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

$$t_3 = \begin{cases} 1, \text{ se } 8 < x \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Finalmente, queremos maximizar o lucro, que será dado por:

$$0,5x - 0,1xt_1 - 0,05xt_2 - 0,025xt_3$$

com a restrição $x \leq 100$.

Como a receita é linear com a quantidade de cópias, basta imprimir a maior quantidade de cópias possível, a fim de diluir os custos maiores das 8 primeiras cópias no custo médio.

c) Sejam as variáveis binárias:

$$t_1 = \begin{cases} 1, \text{ se } 0 \leq x \leq 4 \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

$$t_2 = \begin{cases} 1, \text{ se } 4 < x \leq 6 \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

$$t_3 = \begin{cases} 1, \text{ se } 6 < x \leq 8 \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

De acordo com o gráfico do enunciado, a temperatura é dada por:

$$\begin{cases} \frac{10x}{4}, \text{ se } t_1 = 1 \\ 5x - 10, \text{ se } t_2 = 1 \\ 10x - 40, \text{ se } t_3 = 1 \end{cases}$$

Finalmente, queremos maximizar o lucro, que será dado por:

$$0,3x - 7,5 \cdot \left[\frac{10x}{4}t_1 + (5x - 10)t_2 + (10x - 40)t_3\right]$$

Questão 7

Suppose that you are a ski buff and an entrepreneur. You own a set of hills, any or all of which can be developed. Figure 2 illustrates the nature of the cost for putting ski runs on any hill.

The cost includes fixed charges for putting new trails on a hill. For each hill j, there is a limit d_j on the number of trails that can be constructed and a lower limit t_j on the number of feet of trail that must be developed if the hill is used.

Use a piecewise linear approximation to formulate a strategy based on cost minimization for locating the ski runs, given that you desire to have M total feet of developed ski trail in the area.

Questo_7.jpg

Solução:

Questão Extra

Nessa questão, nos foi pedido que montássemos uma lista de 30 produções audiovisuais, e selecionássemos 10 delas para ver ou ouvir, de forma a maximizar o "valor" total e minimizar o custo. Então selecionamos de forma aleatória 30 podcasts do Spotify, que podem ser encontrados no arquivo *Podcasts.xlsx*, da seguinte forma:

Maximize $\sum_{i=1}^{30} V_i x_i$ sujeito a:

$$\sum_{i=1}^{30} x_i \leq 10$$
$$x_i \leq 1 \; \forall \; i \in \{1, 30\}$$
$$x_6 + x_{20} \leq 1$$
$$x_8 + x_{21} \leq 1$$
$$\sum_{i=1}^{30} t_i \leq 683$$

Onde a primeira restrição nos limita a selecionar apenas 10 podcasts dentre os 30, a segunda garante que x_i será binário, ou seja, assistimos (1) ou não assistimos (0) o podcast i, a terceira e quarta nos garantem que não vamos ouvir mais de um podcast de um mesmo canal, e na nossa lista houveram apenas duas repetições (x_6 e x_{20} são podcasts do canal "Primocast", enquanto que x_8 e x_{21} são do canal "Os Sócios Podcast"). Por fim, a última restrição nos limita a ouvir um tempo total aproximadamente igual a 1/3 do tempo total de ouvir os 30 podcasts, que somam 2050 minutos: $2050/3 \approx 683$.