Lista 5 - Programação Linear e Inteira

João Lucas Duim
Raphael Felberg Levy

22 de Abril de 2022

Obs.: Os arquivos computacionais estão nomeados como *L5-Qx.ipynb*.

Questão 2.1.1

(a)

Prove that the following LP problem is infeasible:
Maximize $z = 3x_1 + 4x_2 + 6x_3$, subject to :

$$\begin{aligned} &3x_1 + 5x_2 - 6x_3 = 4 \\ &x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2 \\ &-x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ &x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Solução:

Se existe uma solução $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ para o problema, então a seguinte igualdade também deve ser satisfeita:

$$(3x_1 + 5x_2 - 6x_3) - 2(x_1 + 3x_2 - 4x_3) + (-x_1 + x_2 - x_3) = (4) - 2 \cdot (2) + (-1)$$

$$x_3 = -1$$

No entanto, $x_3 \geq 0$, absurdo! Portanto, o problema é infactível.

(b)

Prove that the following LP problem is unbounded:
Maximize $z = -x_3 + x_4$, subject to :

$$\begin{aligned} &x_1 + x_3 - x_4 = 1 \\ &x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ &x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Solução:

Sendo $t \in \mathbb{R}_+$, é fácil verificar que $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2t \\ 2+t \\ t \\ 3t \end{bmatrix}$ é uma solução para o problema $\forall t$.

Finalmente, note que, para as soluções acima, $z = -x_3 + x_4 = -t + 3t = 2t$ e $\lim_{t\to\infty} z = \infty$, ou seja, o problema é ilimitado.

(c)

Prove that the LP problem

$$\max\{c^T x : Ax = b,\ x \geq 0\}$$

is unbounded, where

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & -6 & -1 \\ -1 & 1 & -4 & 1 & 3 \\ 3 & -6 & 5 & 3 & -5 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 11 \\ -2 \\ -10 \end{bmatrix},\ c = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

HINT: Consider the vectors $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ and $d = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solução:

Sendo $t \in \mathbb{R}_+$, é fácil verificar que $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \bar{x} + td = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+t \\ 3+t \\ 1+t \\ t \\ t \end{bmatrix}$ é uma solução para o problema $\forall t$.

Finalmente, note que, para as soluções acima, $z = x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2t - 4$ e $\lim_{t\to\infty} z = \infty$, ou seja, o problema é ilimitado.

(d)

For each of the problems in parts (b) and (c), give a feasible solution having objective value exactly 5000.

Solução:

Para o item (b), queremos que $z = 2t = 5000 \Rightarrow t = 2500 \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5001 \\ 2502 \\ 2500 \\ 7500 \end{bmatrix}$.

Para o item (c), queremos que $z = 2t - 4 = 5000 \Rightarrow t = 2502 \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2503 \\ 2505 \\ 2503 \\ 2502 \\ 2502 \end{bmatrix}$.

Questão 2.1.2

Let A be an $m \times n$ matrix and let b be a vector with m entries. Prove or disprove each of the following statements (in both cases y is a vector with m entries):

(i) If there exists y such that $y^T A \geq 0^T$ and $b^T y < 0$, then $Ax \leq b$, $x \geq 0$ has no solution.

(ii) If there exists $y \geq 0$ such that $y^T A \geq 0^T$ and $b^T y < 0$, then $Ax \leq b$, $x \geq 0$ has no solution.

Solução:

(i) Sejam $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $x = b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $y = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Temos:

$$y^T A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0^T$$

$$b^T y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = -2 < 0$$

$$Ax = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = b$$

Portanto, a afirmação é falsa.

(ii) Seja $y \geq 0$ tal que $y^T A \geq 0^T$ e $b^T y = y^T b < 0$. Suponha que exista $x \geq 0$ satisfazendo $Ax \leq b$. Daí, $y^T Ax \leq y^T b < 0$. No entanto, como $y^T A \geq 0^T$ e $x \geq 0$, então $y^T Ax \geq 0$, absurdo!

Portanto, não existe tal x e a afirmação é verdadeira.

Questão 2.2.1

Convert the following LPs into SEF:

(a)

$$\min \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

subject to

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 & 3 \\ 2 & 8 & 9 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 6 \\ -3 & 4 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leq \\ \geq \\ = \\ \leq \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_4 \geq 0$$

Solução:

Primeiramente, já que queremos resolver esse problema e deixar a solução na forma padrão, devemos torná-lo num problema de maximização. Sendo assim, nossa formulação original se torna:

$$\max \begin{bmatrix} -2 & 1 & -4 & -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Agora, note que definimos apenas $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_4 \geq 0$, e portanto x_3 e x_5 são variáveis livres. Assim, vamos criar variáveis extras, de forma que $x_3 = x_3^+ - x_3^-$ e $x_5 = x_5^+ - x_5^-$; $x_3^+, x_3^-, x_5^+, x_5^- \geq 0$. Dessa maneira, ficamos com:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & -4 & -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = -2x_1 + x_2 - 4x_3 - 2x_4 - 4x_5$$

$$= -2x_1 + x_2 - 4(x_3^+ - x_3^-) - 2x_4 - 4(x_5^+ - x_5^-)$$

$$= -2x_1 + x_2 - 4x_3^+ + 4x_3^- - 2x_4 - 4x_5^+ + 4x_5^-$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 1 & -4 & 4 & -2 & -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3^+ \\ x_3^- \\ x_4 \\ x_5^+ \\ x_5^- \end{bmatrix}$$

Reescrevendo o lado esquerdo da restrição original:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 & 3 \\ 2 & 8 & 9 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 6 \\ -3 & 4 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} =$$

$$= x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix} =$$

$$= x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + (x_3^+ - x_3^-) \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + (x_5^+ - x_5^-) \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix} =$$

$$= x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + x_3^+ \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + x_3^- \begin{bmatrix} -4 \\ -9 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + x_5^+ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix} + x_5^- \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -4 & 7 & 3 & -3 \\ 2 & 8 & 9 & -9 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 6 & -6 \\ -3 & 4 & 3 & -3 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3^+ \\ x_3^- \\ x_4 \\ x_5^+ \\ x_5^- \end{bmatrix}$$

Para deixar mais claro, temos a forma atual do nosso problema da seguinte maneira:

$$\max \begin{bmatrix} -2 & 1 & -4 & 4 & -2 & -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3^+ \\ x_3^- \\ x_4 \\ x_5^+ \\ x_5^- \end{bmatrix}$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -4 & 7 & 3 & -3 \\ 2 & 8 & 9 & -9 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 6 & -6 \\ -3 & 4 & 3 & -3 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3^+ \\ x_3^- \\ x_4 \\ x_5^+ \\ x_5^- \end{bmatrix} \begin{matrix} \leq \\ = \\ \geq \\ \leq \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3^+ \geq 0, x_3^- \geq 0, x_4 \geq 0, x_5^+ \geq 0, x_5^- \geq 0$$

Aqui, vamos alterar a primeira restrição, $x_1 + 2x_2 + 4x_3^+ - 4x_3^- + 7x_4 + 3x_5^+ - 3x_5^- \leq 1$, de forma a retirar a desigualdade. Vamos então introduzir uma nova variável $x_6 \geq 0$, de forma que $x_1 + 2x_2 + 4x_3^+ - 4x_3^- + 7x_4 + 3x_5^+ - 3x_5^- + x_6 = 1$:

$$\max \begin{bmatrix} -2 & 1 & -4 & 4 & -2 & -4 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3^+ \\ x_3^- \\ x_4 \\ x_5^+ \\ x_5^- \\ x_6 \end{bmatrix}$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -4 & 7 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & 8 & 9 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 6 & -6 & 0 \\ -3 & 4 & 3 & -3 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3^+ \\ x_3^- \\ x_4 \\ x_5^+ \\ x_5^- \\ x_6 \end{bmatrix} \begin{matrix} = \\ = \\ \geq \\ \leq \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3^+ \geq 0,\ x_3^- \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5^+ \geq 0,\ x_5^- \geq 0,\ x_6 \geq 0$$

Devemos observar que ainda temos duas desigualdades. Para resolver a primeira delas ($x_1+x_2+2x_4+6x_5^+ - 6x_5^- \geq 3$), vamos adicionar uma variável $x_7 \geq 0$ de forma que $x_1 + x_2 + 2x_4 + 6x_5^+ - 6x_5^- - x_7 = 3$. Agora nosso problema está da seguinte maneira:

$$\max \begin{bmatrix} -2 & 1 & -4 & 4 & -2 & -4 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3^+ \\ x_3^- \\ x_4 \\ x_5^+ \\ x_5^- \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix}$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -4 & 7 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 9 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 6 & -6 & 0 & -1 \\ -3 & 4 & 3 & -3 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3^+ \\ x_3^- \\ x_4 \\ x_5^+ \\ x_5^- \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} \begin{matrix} = \\ = \\ = \\ \leq \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3^+ \geq 0,\ x_3^- \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5^+ \geq 0,\ x_5^- \geq 0,\ x_6 \geq 0,\ x_7 \geq 0$$

Para resolver a última desigualdade, vamos introduzir $x_8 \geq 0$ de forma que $-3x_1 + 4x + 2 + 3x_3^+ - 3x_3^- + x_4 - x_5^+ + x_5^- \geq 4$ fique $-3x_1 + 4x + 2 + 3x_3^+ - 3x_3^- + x_4 - x_5^+ + x_5^- 1 - x_8 = 4$. Nosso problema fica da seguinte forma:

$$\max \begin{bmatrix} -2 & 1 & -4 & 4 & -2 & -4 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3^+ \\ x_3^- \\ x_4 \\ x_5^+ \\ x_5^- \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix}$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -4 & 7 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 9 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 6 & -6 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & 3 & -3 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3^+ \\ x_3^- \\ x_4 \\ x_5^+ \\ x_5^- \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3^+ \geq 0,\ x_3^- \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5^+ \geq 0,\ x_5^- \geq 0,\ x_6 \geq 0,\ x_7 \geq 0,\ x_8 \geq 0$$

Temos agora nosso problema na forma padrão.

(b)

Let A, B, D be matrices and b, c, d, f be vectors (all of suitable dimensions). Convert the following LP with variables x and y (where x, y are vectors) into SEF:

$$\min\ c^T x + d^T y$$

subject to

$$\begin{aligned} &Ax \geq b \\ &Bx + Dy = f \\ &x \geq \mathbb{0} \end{aligned}$$

Note, the variables y are free.

Solução:

Temos:

$$y = D^{-1}(f - Bx)$$

Trocando o problema para maximização e substituindo y, a função objetivo fica:

$$z(x) = -c^T x - d^T y = -c^T x - d^T D^{-1}(f - Bx) = (-d^T D^{-1} f) + [-(c^T - d^T D^{-1} B)]x$$

Logo:

$$\bar{z} \leftarrow -d^T D^{-1} f$$

$$c^T \leftarrow (d^T D^{-1} B - c^T)$$

Para alterar todas as restrições de $Ax \geq b$ para igualdades, fazemos:

$$A \leftarrow \begin{bmatrix} A & -I_n \end{bmatrix}$$

$$c^T \leftarrow \begin{bmatrix} c^T & 0_n \end{bmatrix}$$

onde I_n é a matriz identidade de ordem n e 0_n é o vetor nulo de $\mathbb{R}^n$.
Feito isso, o problema está na forma padrão:

$$\max \ c^T x + \bar{z}$$

subject to

$$Ax = b$$

$$x \geq \mathbb{O}$$

Questão 2.3.1

In this exercise, you are asked to repeat the argument in Section 2.3 with different examples.

(a)

Consider the following LP:

$$\max \ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x$$

subject to

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x \geq \mathbb{O}$$

Observe that $\bar{x} = (0, 2, 3, 0)^T$ is a feasible solution. Starting from $\bar{x}$, construct a feasible solution x' with value larger than that of $\bar{x}$ by increasing as much as possible the value of exactly one of $\bar{x}_1$ or $\bar{x}_4$ (keeping the other variable unchanged).

Solução:

A solução $\bar{x}$ dada pelo problema satisfaz $z(\bar{x}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$

Primeiramente, vamos alterar o valor de $x_1 = t$ mantendo $x_4 = 0$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 2+t \\ 3-t \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para termos essa solução, devemos ter:

$$\begin{cases} 2 + t \geq 0 \\ 3 - t \geq 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \iff 0 \leq t \leq 3$$

A função objetivo torna-se $z(x) = -1 \cdot (t) + 2 \cdot (0) = -t$. Como $t = 0$ gera $\bar{x}$ e o valor de t que maximiza $-t$ satisfazendo $0 \leq t \leq 3$ é $t = 0$, concluímos que a solução não pode ser otimizada alterando x_1 e fixando $x_4 = 0$, ou seja, $\bar{x}$ já é ótimo nesse caso.

Agora, vamos alterar o valor de $x_4 = t$ mantendo $x_1 = 0$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2-2t \\ 3+3t \\ t \end{bmatrix}$$

Para termos essa solução, devemos ter:

$$\begin{cases} 2 - 2t \geq 0 \\ 3 + 3t \geq 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \iff 0 \leq t \leq 1$$

A função objetivo torna-se $z(x) = -1 \cdot (0) + 2 \cdot (t) = 2t$. Como $t = 0$ gera $\bar{x}$ e o valor de t que maximiza $2t$ satisfazendo $0 \leq t \leq 1$ é $t = 1$, concluímos que a solução pode ser otimizada para $z(x) = 2$ com $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(b)

Consider the following LP:

$$\max \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & -6 \end{bmatrix} x$$

subject to

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x \geq \mathbb{0}$$

Observe that $\bar{x} = (2, 1, 0, 0)^T$ is a feasible solution. Starting from $\bar{x}$, construct a feasible solution x' with value larger than that of $\bar{x}$ by increasing as much as possible the value of exactly one of $\bar{x}_3$ or $\bar{x}_4$ (keeping the other variable unchanged). What can you deduce in this case?

Solução:

A solução $\bar{x}$ dada pelo problema satisfaz $z(\bar{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$

Primeiramente, vamos alterar o valor de $x_3 = t$ mantendo $x_4 = 0$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+t \\ 1+3t \\ t \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para termos essa solução, devemos ter:

$$\begin{cases} 2 + t \geq 0 \\ 1 + 3t \geq 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \iff t \geq 0$$

A função objetivo torna-se $z(x) = 4 \cdot (t) - 6 \cdot (0) = 4t$. Como $t = 0$ gera $\bar{x}$, não existe cota superior para t e $\lim_{t \to +\infty} 4t = +\infty$, concluímos que qualquer valor de $t > 0$ é capaz de otimizar a solução sem alterar x_4. Logo, o problema é ilimitado.

Agora, vamos alterar o valor de $x_4 = t$ mantendo $x_3 = 0$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-t \\ 1-2t \\ 0 \\ t \end{bmatrix}$$

Para termos essa solução, devemos ter:

$$\begin{cases} 2 - t \geq 0 \\ 1 - 2t \geq 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \iff 0 \leq t \leq \frac{1}{2}$$

A função objetivo torna-se $z(x) = 4 \cdot (0) - 6 \cdot (t) = -6t$. Como $t = 0$ gera $\bar{x}$ e o valor de t que maximiza $-6t$ satisfazendo $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ é $t = 0$, concluímos que a solução não pode ser otimizada alterando x_4 e fixando $x_3 = 0$, ou seja, $\bar{x}$ já é ótimo nesse caso.

Questão 2.4.1

Consider the system $Ax = b$ where the rows of A are linearly independent. Let $\bar{x}$ be a solution to $Ax = b$. Let J be the column indices j of A for which $\bar{x}_j \neq 0$.

(a) Show that if $\bar{x}$ is a basic solution, then the columns of A_J are linearly independent.

(b) Show that if the columns of A_J are linearly independent, then $\bar{x}$ is a basic solution for some basis $B \supseteq J$.

Note that (a) and (b) give you a way of checking whether $\bar{x}$ is a basic solution, namely you simply need to verify whether the columns of A_J are linearly independent.

(c) Consider the system of equations

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 5 & 4 & 3 & 3 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

and the following vectors:

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$

(ii) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$

(iii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$

(iv) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$

(v) $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$

For each vector in (i) – (v), indicate if it is a basic solution or not. You need to justify your answers.

(d) Which of the vectors in (i) – (v) are basic feasible solutions?

Solução:

(a)

Vamos assumir que A possui m linhas linearmente independentes, com $F = \begin{bmatrix} A \\ -A \\ I_n \end{bmatrix}$ e $G = \begin{bmatrix} b \\ -b \\ \vec{0} \end{bmatrix}$, onde I_n é uma identidade $n \times n$ e $\vec{0}$ um vetor de zeros $n-$dimensional. Supondo que $\bar{x}$ é uma solução básica factível, temos n vetores linearmente independentes em $\{f_i : f_i^T\bar{x} = g_i\}$ e m vetores linearmente independentes em $\{a_i : a_i^T\bar{x} = b_i\}$. Com isso, temos $\bar{x}_j > 0$ para pelo menos $n - m$ índices j.

Para garantir a independência linear, seja e_j^T a $j-$ésima linha de I_n. Assim, $\{a_i : a_i^T\bar{x} = b_i\} \cup \{e_j : e_j^T\bar{x} = 0\}$ deve conter n vetores linearmente independentes. Considere a matriz F^* que tem $\{a_i : a_i^T\bar{x} = b_i\} \cup \{e_j : e_j^T\bar{x} = 0\}$ como suas linhas, assumindo, sem perda de generalidade, que as primeiras m linhas são dadas por $a_1^T, ..., a_m^T$. Temos que a matriz tem n colunas, e agora precisamos verificar que o posto das linhas dessa matriz seja n. Nesse caso, o posto das colunas também será n, e as colunas serão LI.

As colunas de F^* são dadas por j tal que $\bar{x_j} > 0$, e portanto a $j-$ésima coluna será da seguinte forma: $\begin{bmatrix} A_j \\ \vec{0} \end{bmatrix}$. Agora, vamos considerar j tal que $\bar{x_j} = 0$. Aqui, e_j^T será uma linha da matriz F^*, digamos que seja uma coluna $k < m$. A $j-$ésima coluna de F^* será similar a coluna com j tal que $\bar{x_j} > 0$, com a exceção de que a $k-$ésima entrada possui valor 1. Já que essa é a única coluna com um valor não-zero na $k-$ésima entrada, essa coluna deve ser linearmente independente de todas as outras.

Dessa forma, precisamos de todas as colunas de F^* correspondentes às entradas j tal que $\bar{x_j} > 0$ sejam linearmente independentes, o que implica que as colunas de A_j com j tal que $\bar{x_j} > 0$ também sejam linearmente independentes.

Agora, sejam $B_1,\ ..., B_k$ os índices j tal que $\bar{x_j} > 0$. Como temos $k < m$, e que $A_{B_1}, ..., A_{B_k}$ devem ser colunas linearmente independentes, podemos ainda encontrar $m - k$ colunas adicionais $A_{B_{k+1}}, ..., A_{B_m}$ tais que $A_{B_1}, ..., A_{B_m}$ sejam colunas linearmente independentes.

(b)

Vamos assumir por enquanto que $\bar{x}$ é uma solução factível, mas não básica. Seja $J = \{i : \bar{x}(i) \neq 0\}$. Agora, podemos aumentar J de forma a indexar $B \supseteq J$ de forma que A_B seja não-singular. Assim, devemos ter $A_B\bar{x_B} = b$ e $\bar{x}(j) = 0$ para todo $j \notin B$, e portanto $\bar{x}$ é uma solução básica.

(c)

Para (i), é fácil ver que x não é uma solução básica, já que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 5 & 4 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Para (ii), temos:

$$A_j = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Como as colunas de A_J não são L.I., x não é básica.
Para (iii), temos:

$$A_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Como as colunas de A_J são L.I., x é solução básica.
Para (iv), temos:

$$A_j = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Como as colunas de A_J são L.I., x é solução básica.

Para (v), temos:

$$A_j = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Como as colunas de A_J são L.D., x não é solução básica.

(d)

É fácil checar que apenas o vetor de (i) do item anterior, $x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, não é solução factível. Além disso, das soluções factíveis, apenas $x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ e $x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ são básicas.

Questão 2.4.2

The following LP is in SEF:

$$\max \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} x$$

subject to

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$x \geq \mathbb{0}$$

Find an equivalent LP in canonical form for:

(a) the basis $\{1, 4\}$,

(b) the basis $\{3, 5\}$.

In each case, state whether the basis (i.e. the corresponding basic solution) is feasible.

Solução:

(a)

Temos:

$$c = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix},\ \bar{z} = \mathbb{O},\ A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Para a base $B = \{1, 4\}$:

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix},\ c_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Daí,

$$A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix},\ A_B^{-T} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$y = A_B^{-T} c_B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

As restrições tornam-se:

$$A_B^{-1} A x = A_B^{-1} b$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$x \geq \mathbb{O}$$

A função objetivo torna-se:

$$\max z(x) = y^T b + \bar{z} + (c^T - y^T A) x =$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \right) x = -5 + \begin{bmatrix} 0 & -5 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

Portanto, a forma canônica do problema na base $\{1, 4\}$ é:

$$\max\ -5 + \begin{bmatrix} 0 & -5 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

subject to

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$x \geq \mathbb{O}$$

(b)

Temos:

$$c = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix},\ \bar{z} = \mathbb{O},\ A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Para a base $B = \{3, 5\}$:

$$A_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ c_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Daí,

$$A_B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix},\ A_B^{-T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$y = A_B^{-T} c_B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 3 \end{bmatrix}$$

As restrições tornam-se:

$$A_B^{-1} A x = A_B^{-1} b$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$x \geq \mathbb{O}$$

A função objetivo torna-se:

$$\max z(x) = y^T b + \bar{z} + (c^T - y^T A)x =$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \right) x = -\frac{9}{2} + \begin{bmatrix} -\frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & 0 & \frac{5}{2} & 0 \end{bmatrix} x$$

Portanto, a forma canônica do problema na base $\{3, 5\}$ é:

$$\max\ -\frac{9}{2} + \begin{bmatrix} -\frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & 0 & \frac{5}{2} & 0 \end{bmatrix} x$$

subject to

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$x \geq \mathbb{0}$$

Questão 2.4.5

Consider the following LP (P):

$$\max \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -6 \end{bmatrix} x + 17$$

subject to

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -9 & 12 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 39 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 13 & -66 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$x \geq \mathbb{0}$$

(a) Find the basic solution $\bar{x}$ of (P) for the basis $B = \{1, 2, 3\}$.

(b) Show that $\bar{x}$ is an optimal solution of (P).

(c) Show that $\bar{x}$ is the unique optimal solution of (P).

HINT: Show that for every feasible solution x' of value 17 $\{j : x'_j \neq 0\} \subseteq B$. Then use Exercise 1 (b). Consider the following LP (Q):

$$\max c^T x + \bar{z}$$

subject to

$$Ax = b$$

$$x \geq \mathbb{0},$$

where $\bar{z}$ is a constant, B is a basis of A, $A_B = I$, $c_j = 0$ for every $j \in B$ and $c_j < 0$ for every $j \notin B$. Moreover, assume that $b \geq \mathbb{0}$. (The previous example has such a form.) Let $\bar{x}$ be a basic solution for (Q).

(d) Show that $\bar{x}$ is an optimal solution of (Q).

(e) Show that $\bar{x}$ is the unique optimal solution of (Q).

HINT: Same argument as (c).

Solução:

(a)

Aqui, já que queremos um $\bar{x}$ tal que a base seja $B = \{1, 2, 3\}$, já podemos considerar $\bar{x_4} = \bar{x_5} = \bar{x_6} = 0$. Assim, nosso $\bar{x}$ já está da seguinte forma:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x_1} \\ \bar{x_2} \\ \bar{x_3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Agora, pela definição de solução básica, devemos ter $A\bar{x} = b$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -9 & 12 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 39 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 13 & -66 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x_1} \\ \bar{x_2} \\ \bar{x_3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Com isso, chegamos a $\bar{x}^T = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(b)

No problema dado, podemos reescrever

$$\max z(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -6 \end{bmatrix} x + 17$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -9 & 12 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 39 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 13 & -66 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

da seguinte maneira:

$$\max z(x) = y^T b + \bar{z} + (c^T - y^T A)x$$

sujeito a

$$A_B^{-1} A x = A_B^{-1} b$$

$$x \geq \mathbb{O}$$

Onde $A_B = A_B^{-1} = A_B^{-T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $c_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; $y = A_B^{-T} c_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; $y^T A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Sendo assim, nosso problema é:

$$\max z(x) = 17 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix} + (\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix})x$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -9 & 12 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 39 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 13 & -66 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$x \geq \mathbb{0}$$

Já que $x \geq \mathbb{0}, \max z(x) = 17$. Agora, através do $\bar{x}$ que encontramos, podemos usar a função original

$$\max \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 17 = 17.$$

Como $\max z(x) = \max z(\bar{x})$, a solução $\bar{x}$ é ótima.

(c)

Como $c \leq 0$ e $x \geq 0$, vale $z(x) = 17 + c^T x \leq 17$. Seja $x' \neq \bar{x}$ tal que $z(x') = 17 \Rightarrow c^T x' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -6 \end{bmatrix} x' = 0 \Rightarrow x'_4 = x'_5 = x'_6 = 0$. De $Ax' = b$, obtemos $x' = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 5 \end{bmatrix}^T = \bar{x}$ como única solução (pois a matriz do sistema para encontrar x'_1, x'_2, x'_3 é a matriz identidade, que é invertível), absurdo. Portanto, $\bar{x}$ é a única solução ótima.

(d)

Veja que $c^T x = \sum_{n \notin B} c_n x_n \leq 0 \Rightarrow z(x) = \bar{z} + c^T x \leq \bar{z}$. Seja $x' \neq \bar{x}$ tal que $z(x') = \bar{z} \Rightarrow c^T x' = 0 \Rightarrow x'_n = 0, \forall x'_n$ não básica. De $Ax' = b$, obtemos $A_B x'_B = b \Rightarrow x' = \bar{x}$ como única solução (pois a matriz do sistema para encontrar x'_B (variáveis básicas) é a matriz identidade, que é invertível), absurdo. Portanto, $\bar{x}$ é a única solução ótima.

(e)

Ver item acima.