Lista 8 - Programação Linear e Inteira

João Lucas Duim
Raphael Felberg Levy

26 de Maio de 2022

Questão 4.1.1

Find the dual of each of the following LPs:

(a)

$$\max(1,3,1)x$$

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \\ 9 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} x \begin{matrix} \leq \\ = \\ \leq \\ = \end{matrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1, x_2 \geq 0, x_3 \text{ free.}$$

Solução:

Já que temos um problema primal acima, o dual será dado por:

$$\min(-3,9,5,0)y$$

sujeito a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 7 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} y \ ? \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y_1 \ ? \ 0, y_2 \ ? \ 0, y_3 \ ? \ 0, y_4 \ ? \ 0$$

Agora, usando a tabela de relação entre primal e dual, temos:

- Restrição (1) de P é $\leq \implies y_1 \geq 0$ em D
- Restrição (2) de P é $= \implies y_2$ será livre em D
- Restrição (3) de P é $\leq \implies y_3 \geq 0$ em D
- Restrição (4) de P é $= \implies y_4$ será livre em D
- $x_1 \geq 0$ em $P \implies$ Restrição (1) de D é $\geq$

- $x_2 \geq 0$ em $P \implies$ Restrição (2) de D é $\geq$
- x_3 é livre em $P \implies$ Restrição (3) de D é $=$

Sendo assim, D é dado por:

$$\min(-3, 9, 5, 0)y$$

sujeito a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 7 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} y \begin{smallmatrix} \geq \\ \geq \\ = \end{smallmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \text{ livre}, y_3 \geq 0, y_4 \text{ livre}$$

(b)

$$\min(5, 6)x$$

subject to

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} x \begin{smallmatrix} \geq \\ = \\ \leq \\ = \end{smallmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \text{ free.}$$

Solução:

Nesse caso, precisaremos deixar P na forma padrão, consequentemente:

$$P' = \max(-5, -6, 6)(x_1, x_2^+, x_2^-)^T$$

sujeito a

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2^+ \\ x_2^- \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x_1, x_2^+, x_2^- \geq 0$$

Agora, transformando o primal P' no dual D':

$$D' = \min(-8, -2, 2, 2, -3, 3)(y_1, y_2^+, y_2^-, y_3, y_4^+, y_4^-)^T$$

sujeito a

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -4 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & -4 & 4 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2^+ \\ y_2^- \\ y_3 \\ y_4^+ \\ y_4^- \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$y_1, y_2^+, y_2^-, y_3, y_4^+, y_4^- \geq 0$$

Questão 4.1.3

Let $a_1, ..., a_n$ be n distinct real numbers. Consider the LP problem

$$\max\{x : x \leq a_i, i = 1, ..., n\}.$$

(a)

Prove that the optimal value of (P) is the minimum of $a_1, ..., a_n$.

Solução:

(b)

Find the dual (D) of (P).

Solução:

(c)

Explain in words what (D) is doing?

Solução:

Questão 4.1.4

Give an example of an infeasible LP problem whose dual is also infeasible. You need to prove algebraically that your example and its dual are infeasible.

Solução:

Um exemplo de problema infactível com dual também infactível é:

$$P = \max(-1, -1)(x_1, x_2)^T$$

sujeito a

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Pela restrição, teremos $-x_1 \geq 1 \Rightarrow x_1 \leq -1$, o que é um absurdo, já que $x_1 \geq 0$, e portanto o problema é infactível. Agora vejamos seu dual:

$$D = \min(1,1)(y_1, y_2)^T$$

sujeito a

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

Aqui, $y_2 \leq -1$, novamente absurdo, e portanto o dual do problema também é infactível.

Questão 4.2.1

Let (P) denote the LP problem $\max\{c^T x : Ax \leq b, x \geq \mathbb{0}\}$, and let (D) be the dual of (P). The goal of this exercise is to prove the strong duality theorem for (P) and (D). (In the book we proved strong duality only for problems in SEF.)

(a)

Convert (P) into an equivalent problem (P') in SEF.

Solução:

(b)

Find the dual (D') of (P').

Solução:

(c)

Suppose that (P) has an optimal solution x. Construct an optimal solution x' of (P').

Solução:

(d)

Using Theorem 4.3 for problems in SEF, deduce that there exists an optimal solution y' to (D') where the value of x' for (P') is equal to the value of y' for (D').

Solução:

Questão 4.3.1

For each of (a) and (b), do the following:

- Write the dual (D) of (P).
- Write the complementary slackness (CS) conditions for (P) and (D).
- Use weak duality to prove that $\bar{x}$ is optimal for (P) and $\bar{y}$ is optimal for (D).
- Use CS to prove that $\bar{x}$ is optimal for (P) and $\bar{y}$ is optimal for (D).

(a)

$$\max(-2,-1,0)x$$

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} x \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$x_1 \leq 0, x_2 \geq 0, x_3 \text{ free}$$

and $\bar{x} = (-1,0,3)^T,\ \bar{y} = (-1,1)^T$.

Solução:

Pela relação de pares primal-dual, temos:

- Restrição (1) de P é $\geq \implies y_1 \leq 0$ em D
- Restrição (2) de P é $\leq \implies y_2 \geq 0$ em D
- $x_1 \leq 0$ em $P \implies$ Restrição (1) de D é $\leq$
- $x_2 \geq 0$ em $P \implies$ Restrição (2) de D é $\geq$
- x_3 é livre em $P \implies$ Restrição (3) de D é $=$

Sendo assim, D é dado por:

$$\min(5,7)y$$

sujeito a

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} y \begin{matrix} \leq \\ \geq \\ = \end{matrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y_1 \leq 0, y_2 \geq 0$$

Agora, usando $\bar{x}$ e $\bar{y}$, temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \substack{\geq \\ \leq} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \substack{\leq \\ \geq \\ =} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para achar a variável de folga s tal que nosso problema (P') seja

$$\max\{c^T x : Ax + s = b, s \geq \mathbb{O}\},$$

temos $\bar{s} = b - A\bar{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Agora, usando o teorema da dualidade fraca, temos $c^T\bar{x} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 = b^T\bar{y} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, e portanto $\bar{x}$ é solução ótima para (P) e $\bar{y}$ é solução ótima para (D).

Usando a "folga complementar", devemos ter:

$$\bar{y_1} = 0 \text{ ou } (1, 3, 2)\bar{x} = 5$$

$$\bar{y_2} = 0 \text{ ou } (-1, 4, 2)\bar{x} = 7$$

Temos que as condições são satisfeitas por $c^T\bar{x}$, e portanto $\bar{x}$ é solução ótima para (P) e $\bar{y}$ é solução ótima para (D).

(b)

$$\min(-5, -7, -5)x$$

subject to

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} x \substack{\leq \\ \leq \\ \geq} \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

and $\bar{x} = (1, 1, 0)^T$, $\bar{y} = (-1, -1, 0)^T$.

Solução:

Note que P não está na forma padrão. Assim:

$$P' = \max(5, 7, 5)(x_1, x_2, x_3)^T$$

sujeito a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & -8 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Agora vamos criar D':

$$D' = \min(3, 9, -2)(y_1, y_2, y_3)^T$$

sujeito a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & -8 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Questão 4.4.1

(a)

Prove that exactly one of the following statements holds:

- there exists x such that $Ax \leq b$, $x \geq \mathbb{0}$ (1);
- there exists y such that $A^T y \geq \mathbb{0}$, $y \geq \mathbb{0}$ and $b^T y < 0$ (2).

Solução:

Vamos supor por contradição que existe $\bar{x}$ solução de $Ax \leq b, x \geq \mathbb{0}$ e $\bar{y}$ tal que $\bar{y}^T A \geq \mathbb{0}^T$ e $\bar{y}^T b < 0$, ou seja, ambas as condições são satisfeitas simultaneamente.

Como $A\bar{x} \leq b$, então $\bar{y}^T A\bar{x} \leq \bar{y}^T b$. Como $\bar{y}^T A \geq \mathbb{0}$ e $\bar{x} \geq \mathbb{0}$, então $\bar{y}^T b \geq 0$, o que contradiz nossa proposição inicial, e portanto ambas as condições não podem ser satisfeitas simultaneamente.

Com o que mostramos acima, garantimos que se (1) é verdadeiro, (2) é falso. Agora, vamos mostrar que se (1) é falso, (2) é verdadeiro:

Considere o par primal-dual a seguir:

$$\begin{aligned} &(P)\ \max\ \{\mathbb{0}^T x : Ax \leq b; x \geq 0\} \\ &(D)\ \min\ \{b^T y : A^T y \geq \mathbb{0}\} \end{aligned}$$

Por hipótese, (P) é infactível, já que (1) é falso. Observe que (D) é factível, uma vez que $A^T y \geq \mathbb{0}$. Em particular, existe solução factível $\bar{y}$ de (D) com valores negativos, isso é, $A^T \bar{y} \geq 0$ e $b^T \bar{y} < 0$, como queríamos demonstrar.

(b)

Prove that exactly one of the following statements holds:

- there exists $x \neq \mathbb{0}$ such that $Ax = \mathbb{0}, x \geq \mathbb{0}$ (1);
- there exists y such that all entries of $A^T y$ are positive (2).

Solução:

Supondo que existe $x \neq \mathbb{0}$ tal que $Ax = \mathbb{0}$ e $x \geq \mathbb{0}$ e y tal que $y^T A > 0$, então $0 = y^T Ax > 0$, o que é uma contradição. Com isso, se (1) é verdadeiro, (2) é falso. Vamos mostrar que se (1) é falso, (2) é verdadeiro:

Assumindo que $y^T A > 0$ não tem solução, então $\forall\ s > 0, s$ escalar, $y^T A - se \geq 0$ não tem solução, onde $e = (1, 1, ..., 1)$. Assim, seja $z = \begin{pmatrix} y \\ -s \end{pmatrix}$, $\bar{A} = \begin{pmatrix} A \\ e \end{pmatrix}$ e $b^T := (0, 0, ..., 0, 1)$. Com isso, podemos definir o sistema $\bar{A}^T z \geq 0, b^T z < 0$.

Questão 1.5.2.0

Verifique a corretude da seguinte formulação do problema de shortest-path como programação inteira: Min

$$\sum (c_e x_e : e \in E)$$

subject to

$$\begin{aligned} &\sum (x_e : e \in \delta(U)) \geq 1 \ (U \subseteq V, s \in U, t \notin U) \\ &x_e \geq 0 \ (e \in E) \\ &x_e \in \mathbb{Z} \ (e \in E) \end{aligned}$$

Solução: Temos um grafo $G = (V, E)$ com vértices distintos s e t e assumiremos que $c_e > 0$ para todo $e \in E$, ou seja, toda aresta tem comprimento positivo. Seja P um st-path. Nós precisamos verificar que P corresponde a uma solução factível $\bar{x}$ do problema dado. Para fazer isso, definimos $x_e = 1$ se e for uma aresta de P, e $x_e = 0$ caso contrário. Sabemos que todo st-cut $\delta(U)$ contém uma aresta de P, portanto, $\sum(x_e : e \in \delta(U)) \geq 1$. Segue que $\bar{x}$ é factível. Não é verdade, porém, que cada solução factível para o problema corresponde a um st-path. No entanto, basta mostrar que toda solução ótima $\bar{x}$ para o problema corresponde a um st-path. Seja $S = \{e \in E : \bar{x} = 1\}$. Sabemos que as arestas de S contêm um st-path P. Se $S = P$, então terminamos. Caso contrário, defina x' configurando $= 1$ se e for uma aresta de P, e $= 0$ caso contrário. Então x' também é uma solução factível para o problema, mas tem um valor objetivo estritamente menor que $\bar{x}$, absurdo. Segue que S é um st-path, como queríamos demonstrar.

Questão 1.5.2.2

Uma cobertura de vértices de um grafo G é um conjunto S de vértices de G tal que cada aresta de G é incidente com pelo menos um vértice de S. Por exemplo, na figura 1.10 o conjunto $S = \{2, 3, 4, 6, 7\}$ é uma cobertura de vértices. O tamanho de uma cobertura de vértice é o número de vértices que ela contém. Portanto, o conjunto acima é uma cobertura de vértice de tamanho 5.

(a)

Formule o seguinte problema como um IP: encontre uma cobertura de vértices no grafo G dado na figura 1.10 de menor tamanho possível.

Solução: Pelo item (b), obtemos:

Minimize

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{bmatrix} x \geq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_v \in \{0,1\} \ (v \in V = \{1,...,8\})$$

(b)

Agora faça o mesmo para um grafo arbitrário G. Ou seja, você recebe um grafo $G = (V, E)$. Formule o problema de encontrar uma cobertura de vértices de tamanho mínimo como um IP.

Solução: $\forall v \in V$, seja x_v variável binária assumindo valor 1 quando $v \in S$ e 0 caso contrário. Queremos minimizar a quantidade de vértices, que é dada por $\mathbb{1}^T x$. Como não queremos ter 2 vértices fora da cobertura que sejam vizinhos, basta ter a restrição $x_u + x_v \geq 1$, $\forall uv \in E$. Portanto, temos:

Minimize

$$\mathbb{1}^T x$$

sujeito a

$$x_u + x_v \geq 1 \ (u, v \in V, uv \in E)$$
$$x_v \in \{0,1\} \ (v \in V)$$

Questão 3.1.3.1

Uma cobertura de vértices de um grafo $G = (V, E)$ é um conjunto S de vértices de G tal que cada aresta de G é incidente com pelo menos um vértice de S. O seguinte IP encontra uma cobertura de vértices de cardinalidade mínima:

Min

$$\sum (x_e : e \in E)$$

subject to

$$x_i + x_j \geq 1 \text{ (for all} ij \in E)$$
$$x \geq \mathbb{0}$$

Denote por (P) o relaxamento LP deste IP.

(a)

Encontre o dual (D) de (P).
Solução: O dual é dado por
Maximize

$$\sum_{e \in E} y_e$$

sujeito a

$$\sum_{e \text{ incidente em } u} y_e \leq 1, \ \forall u \in V$$
$$y_e \geq 0, \ \forall e \in E$$

(b)

Mostre que o maior tamanho (número de arestas) de um matching em G é uma cota inferior do tamanho de uma cobertura de vértice mínima de G.

Solução: Suponha um grafo $G = (V, E)$ com os vértices s e t, e pesos de aresta não negativos c. Suponha que P denota o relaxamento LP para a condição dada:
Minimize

$$\sum (x_e : e \in E)$$

sujeito a

$$x_i + x_j \geq 1 (ij \in E)$$
$$x \geq \mathbb{0}$$

Considere a restrição para cada aresta $e \in E$, formulando o problema do caminho mais curto e derivando um dual do relaxamento LP:
Maximize

$$\sum (y_E : ij \in E)$$

sujeito a

$$\sum (y_i + y_j : ij \in E) \leq 1 (e \in E)$$
$$y_U \geq 0$$

Suponha que P e Q seja um par de primal e dual e considere que $\bar{x}$ e $\bar{y}$ são a solução factível para P e D respectivamente, então $\bar{x}$ e $\bar{y}$ referem-se a uma solução ótima para P e D se e somente se a condição de folga complementar for válida. Portanto, este é o dual do relaxamento LP do IP. Suponha $\bar{y}$ solução factível para P. Agora, deduza o caminho mais curto se ambas as condições forem válidas da seguinte forma:

(1) Todas as arestas são arestas de igualdade. (2) Todos os cortes ativos contêm exatamente uma aresta.

Suponha que P seja um caminho padrão que satisfaça ambas as condições para a largura viável. Assim, para cada aresta é o conjunto de todos os cortes padrão ativos que contêm aresta e prova que é um caminho mais curto porque as larguras são viáveis para o caminho mais curto e a largura total de todos os cortes padrão é um caminho padrão mais curto. Portanto, a cota inferior do grafo no tamanho de um vértice mínimo. Então, G tem um caminho padrão que satisfaz ambas as condições para a largura viável. Então, para cada aresta é o conjunto de todos os cortes padrão ativos que contêm aresta. O caminho padrão basicamente satisfez as condições para a largura viável e determina que cada aresta é o conjunto de todos os cortes padrão ativos.

(c)

Dê um exemplo em que todos os matchings tenham tamanho estritamente menor que as soluções ótimas de (P) e de (D) e onde estas são estritamente menores que o tamanho da cobertura de vértice mínima.

Solução: Suponha que P denota o relaxamento LP para a condição dada:

Minimize

$$\sum(x_e : e \in E)$$

sujeito a

$$x_i + x_j \geq 1(ij \in E)$$
$$x \geq 0$$

Considere a restrição para cada aresta $e \in E$ e ela formula o problema do caminho mais curto e deriva um dual de relaxamento LP:

Maximize

$$\sum(y_E : ij \in E)$$

sujeito a

$$\sum(y_i + y_j : ij \in E) \leq 1(e \in E)$$
$$y_U \geq \mathbb{0}$$

Suponha que P e D seja um par de primal e dual e considere $\bar{x}$ e $\bar{y}$ a solução factível para P e D, respectivamente; então $\bar{x}$ e $\bar{y}$ refere-se a uma solução ótima para P e D se e somente se a condição de folga complementar for válida. Portanto, este é o dual do relaxamento LP do IP. Suponha $\bar{y}$ solução factível para P. Agora, deduza o caminho mais curto se ambas as condições forem válidas da seguinte forma:

(3) Todas as arestas são arestas de igualdade. (4) Todos os cortes ativos contêm exatamente uma aresta.

Suponha que P seja um caminho padrão que satisfaça ambas as condições para a largura viável. Assim, para cada aresta é o conjunto de todos os cortes padrão ativos que contêm aresta e provam que P é um caminho mais curto porque as larguras são viáveis para o caminho mais curto e a largura total de todos os cortes padrão é um caminho padrão mais curto. Considere $\bar{x}$ e $\bar{y}$ são a solução factível para P e D respectivamente. Então, a condição satisfeita:

(1) $x^T\bar{x} \leq b^T\bar{y}$. (2) Se $x^T\bar{x} \leq b^T\bar{y}$, então $\bar{x}$ e $\bar{y}$ se referem a uma solução ótima para P e D.

Portanto, $c^T\bar{x} = b^T\bar{y}$, então $\bar{x}$ é uma solução ótima para P. Assim, G tem um caminho padrão que satisfaz ambas as condições para a largura viável. Então, para cada aresta é o conjunto de todos os cortes padrão ativos que contêm aresta. Assim, todo o matching é estritamente menor do que a solução ótima. A solução ótima pode ser derivada quando a condição é satisfeita e $\bar{x}$ e $\bar{y}$ são a solução factível para P e D.