Lista 7 - Programação Linear e Inteira

João Lucas Duim
Raphael Felberg Levy

11 de Maio de 2022

Questão 2.5.1

Consider the LP problem

$$\max\{c^T x : Ax = b,\ x \geq 0\},$$

where

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a)

Beginning with the basis $B = \{1, 4\}$, solve the problem with the simplex method. At each step, choose the entering variable and leaving variable by Bland's rule.

Solução:

Ver *Simplex.ipynb*.

A solução ótima encontrada para o problema é:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(b)

Give a certificate of optimality or unboundedness for the problem, and verify it.

Solução:

Temos $A_B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Daí, o problema dado é equivalente a:

Maximize

$$z(x) = 7 + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{8} & 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{8} & 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x \geq \mathbb{O}$$

Note que $z(x) \leq 7$, $\forall x \geq \mathbb{O}$ e $z(\bar{x}) = 7$. Portanto, a solução encontrada é ótima.

Questão 2.5.2

Consider the LP problem

$$\max\{c^T x : Ax = b,\ x \geq 0\},$$

where

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 2 & -4 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \\ 4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Let $B = \{1, 3, 4\}$. You are given that

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -\dfrac{1}{2} & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ -\dfrac{3}{2} & \dfrac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

(a)

Find the basic solution x determined by B, and the canonical form of the problem corresponding to B. Is x feasible?

Solução:

Aplicando o código da lista passada, encontramos a forma canônica:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 2 & 0.5 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.25 \\ 0.625 \end{bmatrix}$$

Logo, a solução básica é:

$$x = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 1.25 \\ 0.625 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como $x \geq \mathbb{O}$, é solução básica factível.

(b)

Apply the simplex method beginning with the canonical form from part (a). Choose the entering and leaving variables by Bland's rule. Go as far as finding the entering and leaving variables on the first iteration, the new basis and the new basic solution.

Solução:

Ver *Simplex.ipynb*.

A variável que sai é a 1 e a que entra é a 6. A nova base é $\{6, 3, 4\}$ e a solução encontrada é:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.75 \\ 0.375 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Questão 2.5.3

Consider the LP problem

$$\max\{c^T x : Ax = b,\ x \geq 0\},$$

where

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Notice that the problem is in canonical form with respect to the basis $B = \{4, 5, 6\}$ and that B determines a feasible basic solution x. Beginning from this canonical form, solve the problem with the simplex method. At each step, choose the entering and leaving variable by Bland's rule. At termination, give a certificate of optimality or unboundedness.

Solução:

Ver *Simplex.ipynb*.

Veja que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} Ax = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} b$$

Assim, o problema se torna:

Maximize

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x \geq \mathbb{0}$$

Considere A a nova matriz do problema equivalente obtido. Finalmente, veja que $\bar{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $d = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ satisfazem $Ad = 0$, $d \geq \mathbb{0}$ e $c^T d = 2 > 0$. Portanto, $(\bar{x}, d)$ é um certificado de solução ilimitada.

Questão 2.5.5

The princess' wedding ring can be made from four types of gold 1, 2, 3, 4 with the following amounts of milligrams of impurity per gram:

Type	1	2	3	4
mg of lead	1	2	2	1
mg of cobalt	0	1	1	2
value	1	2	3	2

Set up an LP which will determine the most valuable ring that can be made containing at most 6mg of lead and at most 10mg of cobalt. Put the LP into SEF and then solve it using the simplex algorithm.

Solução:

Seja $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$, onde x_i é a quantidade em gramas de ouro do tipo i usado.

Temos a seguinte modelagem:

Maximize

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4$$

sujeito a

$$\begin{aligned} & x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 6 \\ & x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 10 \\ & x_i \geq 0 \ , \forall i \in \{1, 2, 3, 4\} \end{aligned}$$

Na forma matricial:

Maximize

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 2\end{bmatrix} x$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 2\end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix}6\\ 10\end{bmatrix}$$

$$x \geq \mathbb{0}$$

Finalmente, na forma padrão:
Maximize

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 2 & 0 & 0\end{bmatrix} x$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1\end{bmatrix} x = \begin{bmatrix}6\\ 10\end{bmatrix}$$

$$x \geq \mathbb{0}$$

Aplicando o simplex, obtemos a seguinte solução ótima:

$$x = \begin{bmatrix}0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{14}{3}\end{bmatrix}$$

Portanto, o anel deve ser composto por $\frac{2}{3}g$ de ouro tipo 3 e $\frac{14}{3}g$ de ouro tipo 4.

Questão 2.5.6

The simplex algorithm solves the problem

$$\max\{z = c^T x : Ax = b,\ x \geq 0\}.$$

Consider the following LP:

$$\min\{c^T x : Ax = b,\ x \geq 0\}.$$

(a)

Indicate what changes you need to make to the algorithm to solve (Q) instead of (P) (max was replaced by min). Do NOT convert (Q) into SEF, your algorithm should be able to deal with (Q) directly.

Solução:

Os passos 2 e 3 devem ser alterados de:

2: if $c_N \leq \mathbb{0}$ then stop (x is optimal) end if
3: Select $k \in \mathbb{N}$ such that $c_k > 0$.

para

2: if $c_N \geq \mathbb{0}$ then stop (x is optimal) end if
3: Select $k \in \mathbb{N}$ such that $c_k < 0$.

(b)

Explain why the solution is optimal for (Q) when your algorithm claims that it is.

Solução:

Se $c_N \geq \mathbb{0}$, $c_B = 0$ e $\bar{x}_N = 0$ (por estarmos considerando uma solução básica $\bar{x}$), então $z(\bar{x}) = 0$ e $z(x) \geq 0$, $\forall x$ factível. Portanto, o algoritmo indica corretamente a otimalidade.

(c)

Explain why (Q) is unbounded when your algorithm claims that it is.

Solução:

Se o problema está na forma canônica com respeito à base B, $c_k < 0$ para algum $k \in \mathbb{N}$ e $A_k \leq \mathbb{0}$, então $\bar{x}$ e d formam um certificado de solução ilimitada, onde $d_B = -A_k$, $d_k = 1$ e as demais entradas de d são nulas, pois $Ad = d_k A_k + A_B d_B = A_k - IA_k = 0$, $d \geq \mathbb{0}$ e $c^T d = c_N^T d_N = c_k d_k = c_k < 0$, daí $A(\bar{x} + td) = A\bar{x} + tAd = b + 0 = b$, $\bar{x} + td \geq \mathbb{0}$, $z(\bar{x} + td) = c^T(\bar{x} + td) = c^T\bar{x} + tc^T d = tc^T d < 0 = z(\bar{x})$ e $\lim_{t\to+\infty} z(\bar{x} + td) = -\infty$, configurando um problema de minimização ilimitado. Portanto, o algoritmo indica corretamente uma solução ilimitada.

Questão 2.6.1

Consider an LP of the form

$$\min\{c^T x : Ax = b,\ x \geq 0\}.$$

Use the two phase simplex method using Bland's rule, to solve the LP for each of the following cases:

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 27 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

(c)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(d)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(e)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Solução:

Ver *Simplex2.ipynb*.