# Semaine 6 - Chaînes de Markov

On considère des chaînes de Markov permettant de modéliser la météo. Une chaîne permet de modéliser la météo dans une ville. Un état d'une chaîne correspond au climat observé pour un jour donné (Soleil, Nuage ou Pluie) dans la ville. Chaque jour, on change d'état suivant la loi de probabilités de transitions associée à l'état courant. On prendra comme convention que l'état 1 correspond à Soleil, l'état 2 à Nuage, l'état 3 à Pluie.

## Exercice 1 – Probabilité d'une séquence, génération aléatoire d'une séquence

On suppose que les paramètres de la chaîne de Markov pour Paris sont les suivants (dans l'ordre les observations sont S N P) :
- probabilités initiales : $\Pi = [0.2, 0.3, 0.5]$
- probabilités de transitions : $A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}$

**Q 1.1** Calculez la probabilité de la séquence d'états suivante : N, N, S, N, N, P, P, N, P, S, S, P. Généralisez au cas quelconque d'une séquence.

**Q 1.2** On souhaite utiliser la chaîne de Markov précédente pour générer aléatoirement une séquence de climats journaliers.
Pour cela, on utilise la procédure suivante : on considère une distribution de probabilités sur un ensemble fini d'événements $E = \{e_1, \ldots, e_N\}$ possibles. Cette distribution est donc définie par des probabilités associées aux événements $p(e_1), \ldots p(e_N)$, avec $\sum p(e_i) = 1$.
Pour tirer un événement au hasard « informatiquement » avec une distribution de ce type (tirage type *roulette*), on découpe le segment [0,1] en autant de tranches qu'il y a d'événements, la tranche correspondant à $e_i$ ayant une largeur égale à $p(e_i)$. Ensuite, on utilise un générateur aléatoire uniforme entre 0 et 1, et on regarde dans quelle tranche on tombe. L'événement tiré aléatoirement est celui correspondant à la tranche dans laquelle on « tombe ». On utilise cette procédure pour tirer au hasard le premier état, puis la transition à partir de cet état, etc ... Les nombres donnés par le générateur aléatoire (entre 0 et 1) sont : $0.21, 0.63, 0.92, 0.87, 0.01, 0.35, 0.01, 0.43, 0.55$.
Quelle est la séquence de climats journaliers générée avec ces tirages ?

**Q 1.3** Quelle est la longueur moyenne d'une séquence consécutive de nuage avec ce modèle ?
Indice : l'espérance d'une loi géométrique de paramètre $p$ est $1/p$.

**Q 1.4** Ecrire le code python d'une fonction prenant en paramètres une chaîne de Markov et une longueur de séquence et qui produit une séquence d'observations générée par la chaine.

**Q 1.5** Ecrire le code python d'une fonction prenant en paramètres une chaîne de Markov et une séquence d'observations, et qui produit en sortie la probabilité de la séquence par la chaîne.

## Exercice 2 – Exemple de classification avec des CMs

On vous donne la séquence de climats journaliers suivante (S, S, P, P, N, S). On dispose également de deux chaînes de Markov, l'une correspondant au climat de Paris, l'autre au climat de Marseille. Les paramètres de ces deux chaînes sont les suivants :

$$\textsc{Paris} : \quad \Pi = [0.2, 0.3, 0.5] \quad A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix} \qquad \textsc{Marseille} : \quad \Pi = [0.5, 0.3, 0.2] \quad A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \end{bmatrix}$$

**Q 2.1** En quelle ville (Paris ou Marseille) cette séquence a été observée ?

**Q 2.2** On se place dans l'état initial *Soleil* : quelle est la distribution de probabilité des états au bout de 2 jours dans les deux villes ?

## Exercice 3 – Apprentissage des paramètres d'une chaîne de Markov

On observe une séquence d'observations et on souhaite apprendre les paramètres de la chaîne de Markov qui a généré cette séquence d'observations. Soit la séquence de symboles suivante : P N S P N S P.

**Q 3.1** Déterminez les fréquences d'apparition des symboles et celle des bigrammes (suite de deux symboles). En déduire les paramètres de la chaîne de Markov permettant de modéliser le processus sous jacent qui a généré la séquence précédente. Dressez la matrice de transition d'ordre 1.

**Q 3.2** Ecrire le code python d'une fonction d'apprentissage d'une CM qui prend en paramètres une séquence d'apprentissage et qui produit la CM qui maximise la vraisemblance de cette base.

**Q 3.3** Ecrire le code python d'une fonction d'apprentissage d'une CM qui prend en paramètres une base d'apprentissage de séquences et qui produit la CM qui maximise la vraisemblance de cette base.

## Exercice 4 – Apprentissage des paramètres d'un mélange de chaînes de Markov

L'algorithme des K-Moyennes est une version simplifiée de l'algorithme EM pour la classification de données qui fonctionne comme suit :

1. Initialiser $k$ prototypes (par exemple, des individus tirés dans la base)
2. Tant que *critère de convergence* non atteint
   - Affecter à chaque point de la base la classe du prototype le plus proche ($\sim$E)
   - Re-estimer les prototypes comme la moyenne des points composants chaque classe ($\sim$M)

On observe des séquences d'observations (eg 1 séquence = 1 mouvement ou 1 séquence = 1 série de lancers de dé pipé) et on souhaite apprendre les paramètres d'un mélange de chaîne de Markov ($k$ mouvements distincts ou $k$ dés différents) qui a généré cet ensemble de séquences d'observations.

**Q 4.1** En vous inspirant de l'algorithme des K-Moyennes imaginer une stratégie pour réaliser un tel apprentissage.

**Q 4.2** Ecrire le code python correspondant.

## Exercice 5 – Classes sociales (exercice de LI323)

D'éminents sociologues rangent les individus de notre société dans trois classes sociales : (B)ourgeoisie, (C)lasse moyenne et (P)rolétariat. On s'intéressera, dans ce modèle simpliste, à la classe sociale qu'atteint un individu à la fin de sa vie. On supposera que celle-ci dépend uniquement de la classe sociale de son père (et pas de celles de ses ancêtres).

- Si le père appartient à la classe sociale (B) son fils appartiendra aux classes (B), (C) avec des probabilités respectives 0.5 et 0.5.
- Si le père appartient à la classe sociale (C) son fils appartiendra aux classes (B), (C) et (P) avec des probabilités respectives 0.2, 0.7 et 0.1.
- Si le père appartient à la classe sociale (P) son fils appartiendra aux classes (B), (C) et (P) avec des probabilités respectives 0.1, 0.3 et 0.6.

**Q 5.1** Montrer que ce comportement sociologique peut être modélisé par une chaîne de Markov (CM). Donner le graphe associé, ainsi que la matrice des transitions.

**Q 5.2** Cette chaîne est-elle irréductible ? Apériodique ? Quelle est la nature des différents états de la CM ?

**Q 5.3** Déterminer les probabilités stationnaires des trois classes sociales. Quelles sont, à (très) long terme, les proportions de gens de chacune des trois classes ?

**Q 5.4** Quelle est la probabilité d'être d'une classe sociale différente de celle de son grand-père (paternel) ?

## Exercice 6 – Météo (bis) (*FM Diener*)

Le magicien d'Oz a comblé tous les désirs des habitants du pays d'Oz, sauf peut-être en ce qui concerne le climat : au pays d'Oz en effet, s'il fait beau un jour, il est certain qu'il pleuvra ou neigera le lendemain, avec une probabilité égale qu'il pleuve ou qu'il neige. Et si le temps d'un jour est pluvieux ou neigeux, alors il reste inchangé dans 50% des cas le lendemain et ne devient beau que dans 25% des cas. Les habitants se sont plaint auprès du magicien, affirmant que, ce faisant, ils n'ont qu'un beau jour sur cinq, ce à quoi il a répondu qu'il s'agit d'une impression mais qu'en réalité il y a bien plus d'un beau jour sur cinq. Qu'en est-il ? Pour le savoir, on se propose de modéliser l'évolution du climat au pays d'Oz par une chaîne de Markov à 3 états, $\{P, B, N\}$ (pour Pluvieux, Beau, et Neigeux).

**Q 6.1** Donner la matrice de transition $A$ de ce modèle.

**Q 6.2** Donner un exemple de trajectoire de probabilité nulle.

**Q 6.3** Donner la probabilité que le surlendemain d'un jour neigeux soit neigeux.

**Q 6.4** Le carré de $A$ vaut : $\begin{bmatrix} 0,438 & 0,188 & 0,375 \\ 0,375 & x & 0,375 \\ 0,375 & 0,188 & 0,438 \end{bmatrix}$

**Q 6.4.1** Que représente $A^2$ concrètement ?

**Q 6.4.2** Donner le coefficient $x$ manquant.

**Q 6.5** En calculant les puissances successive de $A^k$, on trouve une valeur stable à partir de $k = 6$ :

$$A^{k>5} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}$$

**Q 6.5.1** En déduire la valeur de la distribution stationnaire $\mu$

**Q 6.5.2** En déduire la réponse à la question initiale sur le nombre de jours de beau temps.