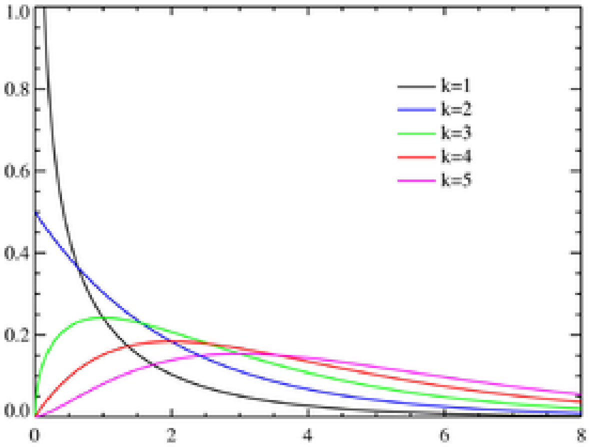
Loi du χ²

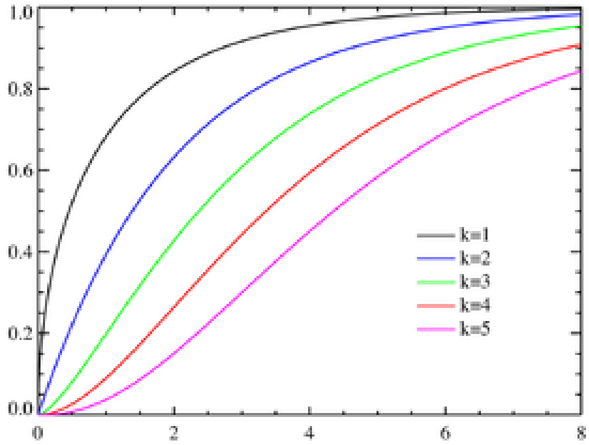
La **loi du χ^2** (prononcer « khi carré » voire « khi-deux ») est une loi à densité de probabilité. Cette loi est caractérisée par un paramètre dit *degrés de liberté* à valeur dans l'ensemble des entiers naturels (non nuls).

Soient $X_1,\ldots,X_k$, *k* variables aléatoires indépendantes suivant des lois normales de moyennes respectives μ_i et d'écart-type σ_i ; $Y_i = \frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i}$ leurs variables centrées et réduites, alors par définition la variable X, telle que

Loi du χ^2



Densité de probabilité (ou fonction de masse)



Fonction de répartition

Paramètres	$k \in \mathbb{N}^*$ degrés de liberté
Support	$x \in [0, +\infty[$
Densité de probabilité (fonction de masse)	$\frac{(1/2)^{k/2}}{\Gamma(k/2)} x^{k/2-1} e^{-x/2}$ *où Γ est la fonction gamma*
Fonction de répartition	$\frac{\gamma(k/2, x/2)}{\Gamma(k/2)}$ *où γ est la fonction gamma incomplète*
Espérance	k

Médiane	$\approx k - 2/3$
Mode	$k-2$ si $k \geq 2$
Variance	$2\,k$
Asymétrie	$\sqrt{8/k}$
Kurtosis normalisé	$\frac{12}{k}$
Entropie	$\frac{k}{2}+\ln(2\Gamma(k/2))+(1-k/2)\psi(k/2)$
Fonction génératrice des moments	$(1-2\,t)^{-k/2}$ pour $2\,t<1$
Fonction caractéristique	$(1-2\,i\,t)^{-k/2}$

$$X := \sum_{i=1}^{k} Y_i^2 = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{X_i-\mu_i}{\sigma_i}\right)^2$$

suit une loi du χ^2 à *k* degrés de liberté.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi du χ^2 à k degrés de liberté, on notera $\chi^2(k)$ la loi de X.

Alors une densité[1] de X notée f_X sera :

$f_X(t) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma(\frac{k}{2})} t^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}}$ pour tout *t* positif

où Γ est la fonction gamma.

L'espérance mathématique de X vaut k et sa variance vaut $2k$.

Sommaire

Approximation

Conformément au théorème central limite, lorsque *k* est « grand » (*k* > 100), la loi d'une variable de χ^2, somme de variables aléatoires indépendantes, peut être approchée par une loi normale d'espérance *k* et de variance 2*k*.

D'autres fonctions en χ^2 peuvent converger plus rapidement vers la loi normale, notamment en ayant $X \sim \chi^2(k)$ et k>30 :

- $\sqrt{2X}-\sqrt{(2k-1)}$ peut être approchée par une loi normale centrée réduite (Ronald Aylmer Fisher).
- $\sqrt[3]{X/k}$ peut être approchée par une loi normale de moyenne $1-2/(9k)$ et de variance $2/(9k)$ (Wilson et Hilferty, 1931).

Utilisation

Cette loi est principalement utilisée dans le test du χ^2 basé sur la loi multinomiale pour vérifier l'adéquation d'une distribution empirique à loi de probabilité donnée. Plus généralement elle s'applique dans le test d'hypothèses à certains seuils (indépendance notamment).

Liens avec d'autres lois

Soient X_i des variables aléatoires indépendantes suivant des lois normales d'espérance μ_i et de variance σ_i^2.

Différentes lois du χ et χ^2

Lois	en fonction de variables de loi normale
loi du χ^2	$\sum_{i=1}^k \left(\frac{X_i-\mu_i}{\sigma_i}\right)^2$
Loi du χ² non centrée	$\sum_{i=1}^k \left(\frac{X_i}{\sigma_i}\right)^2$
loi du χ	$\sqrt{\sum_{i=1}^k \left(\frac{X_i-\mu_i}{\sigma_i}\right)^2}$
loi du χ non centrée	$\sqrt{\sum_{i=1}^k \left(\frac{X_i}{\sigma_i}\right)^2}$

Si *X* est une variable aléatoire de loi normale centrée et réduite et *Y* suit une loi du χ^2 à *n* degrés de liberté, *X* et *Y* étant indépendantes, alors $\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$ suit une loi de Student à *n* degrés de liberté.

Si *X* suit une loi du χ^2 à *n* degré de liberté, et *Y* une loi du χ^2 à *m* degrés de liberté, et si *X* et *Y* sont indépendantes, alors $\frac{X/n}{Y/m}$ suit une loi de Fisher à *n* et *m* degrés de liberté.

Lien avec les méthodes bayésiennes

Dans son ouvrage *Décisions rationnelles dans l'incertain* (1974), qui constitue une somme des techniques bayésiennes dont la grande émergence se fait à cette époque, le professeur Myron Tribus montre que le χ^2 constitue un exemple de passage à la limite du *psi-test* (test de plausibilité) bayésien lorsque le nombre de valeurs en présence devient grand - ce qui est la condition de travail des statistiques classiques, mais pas nécessairement des bayésiennes. Le raccord entre les deux disciplines, qui sont asymptotiquement convergentes, est ainsi complet.

L'ouvrage de référence de Jaynes en donne également une démonstration en page 287[2].

Voir aussi

Articles connexes

- Loi Gamma
- Loi de Rice
- Méthode des moindres carrés
- Test du χ²

Notes et références

1. La loi de X est un cas particulier de loi plus générale dite loi Gamma.
2. Introduction du livre (http://bayes.wustl.edu/etj/prob/book.pdf)

Bibliographie

- H. O. Lancaster (1969) *The Chi-squared Distribution*, New York: Wiley.

Ce document provient de « http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Loi_du_χ²&oldid=107859904 ».

Dernière modification de cette page le 30 septembre 2014 à 17:03.
Droit d'auteur : les textes sont disponibles sous licence Creative Commons paternité partage à l'identique ; d'autres conditions peuvent s'appliquer. Voyez les conditions d'utilisation pour plus de détails, ainsi que les crédits graphiques. En cas de réutilisation des textes de cette page, voyez comment citer les auteurs et mentionner la licence.
Wikipedia® est une marque déposée de la Wikimedia Foundation, Inc., organisation de bienfaisance régie par le paragraphe 501(c)(3) du code fiscal des États-Unis.