

Définition 1.32 - sous-groupe engendré par une partie

Soit (G, \star) , un groupe, L'intersection de tous les sous-groupes de G contenant A est un sous-groupe de G , appelé *sous-groupe engendré par A* et noté $\langle A \rangle$.

$$\langle A \rangle = \bigcap_{\substack{H \text{ sg de } G \\ A \subset H}} H$$

Proposition 1.33 - caractérisation du sous-groupe engendré par A

Soit (G, \star) un groupe et A une partie de G . Alors $\langle A \rangle$ est, au sens de l'inclusion, le plus petit sous-groupe de G contenant A .

Proposition 1.34 : description du sous-groupe engendré par une partie Soit (G, \star) un groupe et A une partie de G .
1. $1_G \in \langle A \rangle$. 2. Si A est non-vide alors $\langle A \rangle = \langle A \cup A^{-1} \rangle$.
En d'autres termes $\langle A \rangle$ est l'ensemble des éléments de G qui sont des produits finis d'éléments de A ou d'inverses d'éléments de A .

Proposition 1.34 - description du sous-groupe engendré par une partie

Soit (G, \star) un groupe et A une partie de G .

1. Si $A = \emptyset$, alors $\langle A \rangle = \{1_G\}$
2. Sinon, alors $\langle A \rangle$ est l'ensemble des éléments de G qui sont des produits finis d'éléments de A ou d'inverses d'éléments de A :

$$\langle A \rangle = \{x \in G, \exists n \in \mathbb{N}^*, \exists (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (A \cup A^{-1})^n, x = \alpha_1 \star \dots \star \alpha_n\}$$

Définition 1.35 - groupe monogène

Un groupe (G, \star) est *monogène* lorsqu'il est engendré par un seul de ses éléments. En d'autres termes, s'il existe $g \in G$ tel que $G = \langle g \rangle$ (ou $\langle g \rangle$).

Dans ce cas tout élément $g \in G$ tel que $G = \langle g \rangle$ est appelé *générateur* de G .

Définition 1.35 bis - groupe cyclique

Un groupe est dit cyclique s'il est fini et monogène.

Définition 1.59 - classe d'équivalence, représentant

Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence sur un ensemble E . On appelle *classe d'équivalence d'un élément* l'ensemble des éléments qui sont en relation avec lui :

$$\text{cl}(x) = \bar{x} = \{y \in E, x\mathcal{R}y\}$$

On appelle *représentant* de la classe $\text{cl}(x)$ tout élément y tel que $y \in \text{cl}(x)$.

Théorème 1.61 - partition d'un ensemble par les classes d'équivalence

Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence sur un ensemble E . Les classes d'équivalence de \mathcal{R} forment une partition de E :

1. Aucune classe n'est vide : pour tout $x \in E$, $\text{cl}(x) \neq \emptyset$.
2. Deux classes distinctes sont disjointes : si $\text{cl}(x) \neq \text{cl}(y)$ alors $\text{cl}(x) \cap \text{cl}(y) = \emptyset$.
3. La réunion de toutes les classes est égale à E .

Théorème 1.62 - de Lagrange

Dans un groupe fini, le cardinal d'un sous-groupe divise le cardinal du groupe.

Définition 1.65 - l'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

L'ensemble des classes d'équivalence pour la congruence modulo $n \in \mathbb{Z}$ est par définition :

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\text{cl}(0), \dots, \text{cl}(n-1)\}$$

Théorème 1.67 - groupe quotient $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$

L'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un groupe abélien pour la loi $+$ définie par $\text{cl}(a+b) = \text{cl}(a) + \text{cl}(b)$, appelé groupe quotient.

Théorème 1.70 - générateurs de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$

Soit $k \in \mathbb{Z}$. la classe $\text{cl}(k)$ génère $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ si et seulement si $k \wedge n = 1$.

Théorème 1.71 - *produits de groupes quotients*

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ premiers entre eux. Les groupes $\mathbb{Z}/np\mathbb{Z}$ et $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ sont isomorphes.

Proposition 1.75 - *description des groupes monogènes*

Soit $n \in \mathbb{Z}$.

1. Tout groupe monogène infini est isomorphe à \mathbb{Z} .
2. Tout groupe monogène fini (ou cyclique) d'ordre n est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Définition 1.76 - *ordre d'un groupe fini, ordre d'un élément d'un groupe*

On appelle ordre d'un groupe fini son cardinal, qui est dit infini pour un groupe infini.

On appelle ordre d'un élément a d'un groupe l'ordre du sous-groupe engendré par a .

Théorème 1.79 - *ordre d'un élément d'un groupe fini*

L'ordre d'un élément d'un groupe fini divise le cardinal du groupe.