Remarque 7.25 - *méthode de variation de la constante*

On considère l'équation différentielle sur X :

$$(\mathcal{E}) : \forall t \in X,\, a(t)y' - b(t)y = c(t)$$

où $(a,b,c) \in (\mathcal{C}^1(X))^3$, et y une fonction dérivable, inconnue. On note $S(\mathcal{E})$ l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$.
On se place sur un intervalle $I \subset X$ où a ne s'annule pas. On recherche une solution particulière sous la forme :

$$y_P : t \mapsto \lambda(t)e^{F(t)},\text{ où } \begin{cases} F \text{ est une primitive de } \frac{-b}{a} \text{ sur } I \\ \lambda \text{ est une fonction dérivable sur } I \end{cases}$$

Ensuite on trouve par équivalence une condition sur λ :

$$\begin{aligned} y_P \in S(\mathcal{E}) &\Leftrightarrow a y_P' - b y_P = c \\ &\Leftrightarrow a\left(\lambda' e^F - \frac{b}{a}\lambda e^F\right) + b\lambda e^F = c \\ &\Leftrightarrow a\lambda' e^F - b\lambda e^F + b\lambda e^F = c \\ &\Leftrightarrow a\lambda' e^F = c \\ &\Leftrightarrow \lambda' = \frac{c}{a}e^{-F} \end{aligned}$$

Donc λ Doit être une primitive de la fonction $\dfrac{c}{a}e^{-F}$. Un solution de $(\mathcal{E})$ est donc :

$$y_P : t \mapsto \int_{t_0}^{t} \frac{c(s)}{a(s)} e^{-F(s)}\,\mathrm{d}s \times e^{F(t)} \qquad \text{où } t_0 \in I$$