

**Définition 25.13** - développement de Taylor de  $f$

Soit  $f \in \mathcal{D}^n(\{x_0\})$ . Un *développement de Taylor à l'ordre  $n$  de  $f$  en  $x_0$*  est un polynôme  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  vérifiant :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad P^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0)$$

donc un polynôme dont la courbe est, en  $x_0$ , *tangente à l'ordre  $n$*  à celle de  $f$ . Ce polynôme existe, est unique et donné par :

$$P = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (X - x_0)^k$$

**Définition 25.16** - reste de Taylor à l'ordre  $n$

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{D}^n$  sur  $\{x_0\}$ . On appelle *reste de Taylor à l'ordre  $n$  de  $f$  en  $x_0$*  la fonction :

$$R_{n,x_0} : I \rightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad x \mapsto f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (X - x_0)^k$$

**Proposition 25.18** - fonction développable en série de Taylor

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $I$  (ou sur  $\{x_0\}$  ?). Alors :

$$\left( \forall x \in I, \lim_{n \rightarrow +\infty} R_{n,x_0}(x) = 0 \right) \implies \left( \forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (X - x_0)^k \right)$$

Dans ce cas, on dit que  $f$  est *développable en série de Taylor en  $x_0$* .

**Théorème 25.20** - formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre  $n$  au point  $a$

Soit  $a < b$  et  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur  $[a; b]$ . Alors

$$\forall x \in [a; b], R_{n,a}(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n dt$$

**Théorème 25.27** - formule de Taylor-Young à l'ordre  $n$  en  $x_0$

Soit  $I$  ouvert,  $x_0 \in I$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^n$  au voisinage de  $x_0$ . Alors :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$$

**Proposition 25.34** - formule de Taylor pour les polynômes

Pour tous  $n \in \mathbb{N}$  et  $x_0 \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

**Définition 25.36** - développement limité

Soit  $I$  ouvert,  $x_0 \in I$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que le polynôme  $P = \sum_{k=0}^n a_k (X - x_0)^k \in \mathbb{R}_n[X]$  est un *développement limité à l'ordre  $n$  de  $f$  en  $x_0$*  si on a :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} P(x) + o((x - x_0)^n)$$

Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  au voisinage de  $x_0$ , un tel polynôme existe, est unique et donné par la formule de Taylor-Young:

$$P = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (X - x_0)^k$$

**Proposition 25.41** - DL de fonctions paires ou impaires

Soit  $I$  ouvert tel que  $0 \in I$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

- Si  $f$  est paire, alors si existence, ses développements limités en 0 ne présentent que des monômes de degré pair.
- Si  $f$  est impaire, alors si existence, ses développements limités en 0 ne présentent que des monômes de degré impair.

**Proposition 25.42** - classe d'une fonction admettant un DL

Soit  $I$  ouvert,  $x_0 \in I$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

- Si  $f$  admet un DL à l'ordre 0 en  $x_0$ , alors  $f$  est continue en  $x_0$ .
- Si  $f$  admet un DL à l'ordre 1 en  $x_0$ , alors  $f$  est dérivable en  $x_0$ .

**Définition 25.44** - DL au sens fort

Soit  $I$  ouvert,  $x_0 \in I$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que le polynôme  $P = \sum_{k=0}^n a_k (X - x_0)^k \in \mathbb{R}_n[X]$  est un *développement limité au sens fort à l'ordre  $n$  de  $f$  en  $x_0$*  si on a :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} P(x) + \mathcal{O}((x - x_0)^{n+1})$$

**Définition 25.46** - troncature

Soit  $m \leq n$  dans  $\mathbb{N}$ , et  $P = \sum_{k=0}^n a_k (X - x_0)^k \in \mathbb{R}_n[X]$ . La troncature de  $P$  à l'ordre  $m$  au voisinage de  $x_0$  est le polynôme :

$$T_{m,x_0}(P) = \sum_{k=0}^m a_k (X - x_0)^k$$

Ainsi, si :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} P(x) + o((x - x_0)^n)$$

alors,

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} T_{m,x_0}(P)(x) + o((x - x_0)^m)$$

**Proposition 25.55** - somme de DL

Soit  $I$  et  $J$  ouverts tel que  $(0, 0) \in I \times J$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  et  $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ . Si on a :

$$\begin{cases} f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} P(x) + o(x^n) \\ g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} Q(x) + o(x^n) \end{cases}$$

Alors,

$$(f + g)(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} P(x) + Q(x) + o(x^n)$$

**Proposition 25.56** - produit de DL

Soit  $I$  et  $J$  ouverts tel que  $(0, 0) \in I \times J$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  et  $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ . Si on a :

$$\begin{cases} f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} P(x) + o(x^n) \\ g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} Q(x) + o(x^n) \end{cases}$$

Alors,

$$(fg)(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} T_{n,0}(PQ)(x) + o(x^n)$$

**Proposition 25.59** - composition de DL

Soit  $I$  et  $J$  ouverts tel que  $(0, 0) \in I \times J$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f(0) = 0$ ,  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  et  $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ . Si on a :

$$\begin{cases} f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} P(x) + o(x^n) \\ g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} Q(x) + o(x^n) \end{cases}$$

Alors,

$$g \circ f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} T_{n,0}(Q \circ P)(x) + o(x^n)$$

**Proposition 25.62** - DL d'une réciproque

Soit  $I$  ouvert tel que  $0 \in I$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  tels que :

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} P(x) + o(x^n)$$

Si  $f$  est bijective (ou au moins injective) au voisinage de 0, alors il existe  $Q \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} Q(x) + o(x^n)$$

Ce polynôme  $Q$  s'identifie en résolvant :

$$x \underset{x \rightarrow 0}{=} f^{-1} \circ f(x) + o(x^n)$$

**Proposition 25.65** - *DL d'un inverse*

Soit  $I$  ouvert tel que  $0 \in I$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$  tels que :

$$f(0) \neq 0 \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} P(x) + o(x^n)$$

Comme  $f(0) \neq 0$ , on a également  $P(0) \neq 0$ . On peut alors écrire :

$$P = a_0(1 + Q) \quad \text{avec} \quad Q = a_0^{-1} \sum_{k=1}^n a_k X^k$$

où ici  $Q(0) = 0$ . En remarquant que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\frac{1}{P(x)} = \frac{1}{a_0(1 + Q(x))}$$

on peut appliquer la formule de composition des développements limités sur  $h \circ Q$  avec  $h : x \mapsto \frac{1}{1+x}$  ( $Q(0) = 0$ ), on a :

$$\frac{1}{f(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{a_0} \times T_{n,0} \left( \sum_{k=0}^n (-1)^k Q^k \right) + o(x^n)$$

**Proposition 25.65** - *primitive de DL*

Soit  $I$  ouvert tel que  $0 \in I$ ,  $f \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$ ,  $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$  tels que :

$$f'(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} P(x) + o(x^{n-1})$$

Alors  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$ , en 0, donné par :

$$\begin{aligned} f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} f(0) + \sum_{k=1}^n \frac{a_{k-1}}{k} x^k + o(x^n) \\ \underset{x \rightarrow 0}{=} f(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \cdots + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + o(x^n) \end{aligned}$$

**Proposition 25.87 (1)** - DL de  $x \mapsto e^x$

Le développement limité au rang  $n \in \mathbb{N}$  de  $x \mapsto e^x$  en 0 est :

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \end{aligned}$$

**Proposition 25.87 (2)** - DL de  $x \mapsto \ln(1+x)$

Le développement limité au rang  $n \in \mathbb{N}$  de  $x \mapsto \ln(1+x)$  en 0 est :

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} + o(x^n) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n!} + o(x^n) \end{aligned}$$

**Proposition 25.87 (3)** - DL de  $x \mapsto \cos(x)$

Le développement limité au rang  $n \in \mathbb{N}$  de  $x \mapsto \cos(x)$  en 0 est :

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^n) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} x^{(2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)}}{(2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)!} + o(x^n) \end{aligned}$$

**Proposition 25.87 (4)** - DL de  $x \mapsto \sin(x)$

Le développement limité au rang  $n \in \mathbb{N}$  de  $x \mapsto \sin(x)$  en 0 est :

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^n) \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} x^{(2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1)}}{(2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1)!} + o(x^n) \end{aligned}$$

**Proposition 25.87 (5)** - DL de  $x \mapsto \tan(x)$

Le développement limité au rang 10 de  $x \mapsto \tan(x)$  en 0 est :

$$\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{63}{2835}x^9 + o(x^{10})$$

**Proposition 25.87 (6)** - DL de  $x \mapsto \arctan(x)$

Le développement limité au rang  $n \in \mathbb{N}$  de  $x \mapsto \arctan(x)$  en 0 est :

$$\begin{aligned} \arctan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} & \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^n) \\ & \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} x^{(2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1)}}{(2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1)} + o(x^n) \end{aligned}$$

**Proposition 25.87 (7)** - DL de  $x \mapsto \cosh(x)$

Le développement limité au rang  $n \in \mathbb{N}$  de  $x \mapsto \cosh(x)$  en 0 est :

$$\begin{aligned} \cosh(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} & \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^n) \\ & \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{(2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)}}{(2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)!} + o(x^n) \end{aligned}$$

**Proposition 25.87 (8)** - DL de  $x \mapsto \sinh(x)$

Le développement limité au rang  $n \in \mathbb{N}$  de  $x \mapsto \sinh(x)$  en 0 est :

$$\begin{aligned} \sinh(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} & \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^n) \\ & \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^{(2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1)}}{(2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1)!} + o(x^n) \end{aligned}$$

**Proposition 25.87 (9)** - DL de  $x \mapsto \tanh(x)$

Le développement limité au rang 10 de  $x \mapsto \tanh(x)$  en 0 est :

$$\tanh(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + o(x^{10})$$

**Proposition 25.87 (10)** - DL de  $x \mapsto (1+x)^\alpha$

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Le développement limité au rang  $n \in \mathbb{N}$  de  $x \mapsto (1+x)^\alpha$  en 0 est :

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (\alpha - i) + o(x^n) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2} + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \prod_{i=0}^{n-1} (\alpha - i) + o(x^n) \end{aligned}$$

**Proposition 25.87 (11)** - DL de  $x \mapsto \frac{1}{1+x}$

Le développement limité au rang  $n \in \mathbb{N}$  de  $x \mapsto \frac{1}{1+x}$  en 0 est :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \end{aligned}$$

**Proposition 25.87 (12)** - DL de  $x \mapsto \frac{1}{1-x}$

Le développement limité au rang  $n \in \mathbb{N}$  de  $x \mapsto \frac{1}{1-x}$  en 0 est :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n) \end{aligned}$$