Définition 6.16 Soit E un ensemble ordonné non vide et $e \in E$. On dit que :

- $p \in E$ est un prédécesseur immédiat de e si $p < e$ et il n'existe pas d'élement $a \in e$ tel que $p < a < e$
- $s \in E$ est successeur immédiat de e si $e < s$ et il n'existe pas d'élement $a \in e$ tel que $e < a < s$

Exemple 6.17 Dans $\mathbb{N}$ muni de l'ordre usuel :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $n + 1$ est le successeur immédiat de n.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n + 1$ est le prédécesseur immédiat de n.
- 0 n'a pas de prédécesseur (en particulier immédiat).

Exemple 6.18 Dans $\mathbb{R}$ muni de l'ordre usuel, aucun élément e n'a de prédécesseur (resp.successeur) immédiat puisque si $a < e$ alors en particulier $a < \frac{a+e}{2} < e$.

Définition 6.19 Soit E un ensemble ordonné non vide et $e \in E$. On dit que

- e est un élément minimal de E s'il n'admet pas de prédécesseur.
- e est un élément maximal de E s'il n'admet pas de successeur.

Exemple 6.20 Soit E un ensemble. L'ensemble $A = \mathcal{P}(E)$
$\{\varnothing\}$ des parties non vides de E muni de l'inclusion et ordonné. Si $E \neq \varnothing$, E est l'élément maximal de A, et $\forall e \in E$, $\{e\}$ est un élément maximal de A.

Remarque 6.21 L'ensemble précédent montre en particulier qu'un ensemble peut tout à fait avoir plusieurs éléments minimaux ou maximaux.

Définition 6.22 Soit E un ensemble ordonné non vide et $e \in E$. On dit que :

- e est le **plus grand élément** de E si $\forall x \in E, x \leq e$.
- e est le **plus petit élément** de E si $\forall x \in E, x \geq e$.

Démonstration : (preuve de l'unicité) Supposons par l'absurde, qu'il n'y a pas unicité du plus petit élément. Soit e et e' deux plus petits éléments distincts de E. Alors, par définition, (e est un plus petit élément E, $e \leq e'$). de même, $e' \leq e$. Par antisymétrie de $\leq$, $e = e'$. Absurde. On montre de même l'unicité du plus grand élément, s'il existe.

Définition 6.23 : *Ordre bien fondé* Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné. On dit que $\leq$ est un ordre bien fondé si toute partie non vide de E admet au moins un élément minimal.

Exemple 6.24 : *Ordres bien fondés*

- l'ordre usuel sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels est bien fondé.
- l'inclusion sur les parties d'un ensemble fini est bien fondée.
- la relation de divisibilité sur l'ensemble $\mathbb{N}^*$ est un ordre bien fondé.

Exemple 6.25 (Ordres non bien fondés)

- l'ordre usuel sur $\mathbb{Z}$ ou sur $\mathbb{R}_+$
- L'inclusion sur les parties d'un ensemble infini n'est pas bien fondée.