Théorème 25.5 - *caractérisations métriques de domination et négligeabilité*

Soit f et g définies sur X et $x_0 \in \overline{X}$. Ainsi,

1. $f(x) \underset{x \to x_0}{=} o\big(g(x)\big) \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, |x - x_0| < \eta \implies |f(x)| \leq \epsilon |g(x)|$
2. $f(x) \underset{x \to x_0}{=} \mathcal{O}\big(g(x)\big) \quad \Leftrightarrow \quad \exists M \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in X, |x - x_0| < \eta \implies |f(x)| \leq M |g(x)|$

Définition 25.13 - *développement de Taylor de f*

Soit $f \in \mathcal{D}^n(\{x_0\})$. Un *développement de Taylor à l'ordre n de f en x_0* est un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant :

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad P^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$$

donc un polynôme dont la courbe est, en x_0, *tangente à l'ordre n* à celle de f. Ce polynôme existe, est unique et donné par :

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(X - x_0)^k$$

Définition 25.16 - *reste de Taylor à l'ordre n*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{D}^n$ sur $\{x_0\}$. On appelle *reste de Taylor à l'ordre n de f en x_0* la fonction :

$$R_{n,x_0} : I \to \mathbb{R} \quad ; \quad x \mapsto f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Proposition 25.18 - *fonction développable en série de Taylor*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I, $x_0 \in I$. Alors :

$$\Big(\forall x \in I, \lim_{n \to +\infty} R_{n,x_0}(x) = 0\Big) \quad \implies \quad \Big(\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(X - x_0)^k\Big)$$

Dans ce cas, on dit que f est *développable en série de Taylor en x_0*.

Théorème 25.20 - *formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n au point a*

Soit $a < b$ et $f : [a\,;b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a\,;b]$. Alors

$$\forall x \in [a\,;b],\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,\mathrm{d}t$$

Théorème 25.27 - *formule de Taylor-Young à l'ordre n en x_0*

Soit I ouvert, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de x_0. Alors :

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\big((x-x_0)^n\big)$$

Proposition 25.34 - *formule de Taylor pour les polynômes*

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$, on a :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}(X-x_0)^k$$

Définition 25.36 - *développement limité*

Soit I ouvert, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que le polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k(X-x_0)^k \in \mathbb{R}_n[X]$ est un *développement limité à l'ordre n de f en x_0* si on a :

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} P(x) + o\big((x-x_0)^n\big)$$

Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de x_0, un tel polynôme existe, est unique et donné par la formule de Taylor-Young:

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(X-x_0)^k$$

Proposition 25.41 - *DL de fonctions paires ou impaires*

Soit I ouvert tel que $0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$.

- Si f est paire, alors si existence, ses développements limités en 0 ne présentent que des monômes de degré pair.
- Si f est impaire, alors si existence, ses développements limités en 0 ne présentent que des monômes de degré impair.

Proposition 25.42 - *classe d'une fonction admettant un DL*

Soit I ouvert, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$.

1. Si f admet un DL à l'ordre 0 en x_0, alors f est continue en x_0.
2. Si f admet un DL à l'ordre 1 en x_0, alors f est dérivable en x_0.

Définition 25.44 - *DL au sens fort*

Soit I ouvert, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k (X - x_0)^k \in \mathbb{R}_n[X]$ est un *développement limité au sens fort à l'ordre n de f en x_0* si on a :

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} P(x) + \mathcal{O}\big((x - x_0)^{n+1}\big)$$

Définition 25.46 - *troncature*

Soit $m \leq n$ dans $\mathbb{N}$, et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k (X - x_0)^k \in \mathbb{R}_n[X]$. La troncature de P à l'ordre m au voisinage de x_0 est le polynôme :

$$T_{m,x_0}(P) = \sum_{k=0}^{m} a_k (X - x_0)^k$$

Ainsi, si :

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} P(x) + o\big((x - x_0)^n\big)$$

alors,

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} T_{m,x_0}(P)(x) + o\big((x - x_0)^m\big)$$

Proposition 25.55 - *somme de DL*

Soit I et J ouverts tel que $(0,0) \in I \times J$, $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$ et $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$. Si on a :

$$\begin{cases} f(x) \underset{x\to 0}{=} P(x) + o\big(x^n\big) \\ g(x) \underset{x\to 0}{=} Q(x) + o\big(x^n\big) \end{cases}$$

Alors,

$$(f+g)(x) \underset{x\to 0}{=} P(x) + Q(x) + o\big(x^n\big)$$

Proposition 25.56 - *produit de DL*

Soit I et J ouverts tel que $(0,0) \in I \times J$, $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$ et $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$. Si on a :

$$\begin{cases} f(x) \underset{x\to 0}{=} P(x) + o\big(x^n\big) \\ g(x) \underset{x\to 0}{=} Q(x) + o\big(x^n\big) \end{cases}$$

Alors,

$$(fg)(x) \underset{x\to 0}{=} T_{n,0}(PQ)(x) + o\big(x^n\big)$$

Proposition 25.59 - *composition de DL*

Soit I et J ouverts tel que $(0,0) \in I \times J$, $f : I \to \mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$, $g : J \to \mathbb{R}$ et $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$. Si on a :

$$\begin{cases} f(x) \underset{x\to 0}{=} P(x) + o\big(x^n\big) \\ g(x) \underset{x\to 0}{=} Q(x) + o\big(x^n\big) \end{cases}$$

Alors,

$$g \circ f(x) \underset{x\to 0}{=} T_{n,0}(Q \circ P)(x) + o\big(x^n\big)$$

Proposition 25.62 - *DL d'une réciproque*

Soit I ouvert tel que $0 \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que :

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x \to 0}{=} P(x) + o\big(x^n\big)$$

Si f est bijective (ou au moins injective) au voisinage de 0, alors il existe $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$f^{-1}(x) \underset{x \to 0}{=} Q(x) + o\big(x^n\big)$$

Ce polynôme Q s'identifie en résolvant :

$$x \underset{x \to 0}{=} f^{-1} \circ f(x) + o\big(x^n\big)$$

Proposition 25.65 - *DL d'un inverse*

Soit I ouvert tel que $0 \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$, $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que :

$$f(0) \neq 0 \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x \to 0}{=} P(x) + o\big(x^n\big)$$

Comme $f(0) \neq 0$, on a également $P(0) \neq 0$. On peut alors écrire :

$$P = a_0(1 + Q) \qquad \text{avec} \quad Q = a_0^{-1} \sum_{k=1}^{n} a_k X_k$$

où ici $Q(0) = 0$. En remarquant que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{P(x)} = \frac{1}{a_0(1 + Q(x))}$$

on peut appliquer la formule de composition des développements limités sur $h \circ Q$ avec $h : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ $(Q(0) = 0)$, on a :

$$\frac{1}{f(x)} \underset{x \to 0}{=} \frac{1}{a_0} \times T_{n,0}\left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k Q^k\right) + o\big(x^n\big)$$

Proposition 25.65 - *primitive de DL*

Soit I ouvert tel que $0 \in I$, $f \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$, $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tels que :

$$f'(x) \underset{x \to 0}{=} P(x) + o\big(x^{n-1}\big)$$

Alors f admet un développement limité à l'ordre n, en 0, donné par :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x \to 0}{=} f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{k-1}}{k} x^k + o(x^n) \\ &\underset{x \to 0}{=} f(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \cdots + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + o(x^n) \end{aligned}$$

Proposition 25.87 (1) - *DL de* $x \mapsto e^x$

Le développement limité au rang $n \in \mathbb{N}$ de $x \mapsto e^x$ en 0 est :

$$\begin{aligned} e^x &\underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \\ &\underset{x \to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \end{aligned}$$

Proposition 25.87 (2) - *DL de* $x \mapsto \ln(1+x)$

Le développement limité au rang $n \in \mathbb{N}$ de $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0 est :

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &\underset{x \to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \\ &\underset{x \to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n!} + o(x^n) \end{aligned}$$

Proposition 25.87 (3) - *DL de* $x \mapsto \cos(x)$

Le développement limité au rang $n \in \mathbb{N}$ de $x \mapsto \cos(x)$ en 0 est :

$$\begin{aligned}\cos(x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^n) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} x^{(2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)}}{(2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)!} + o(x^n)\end{aligned}$$

Proposition 25.87 (4) - *DL de* $x \mapsto \sin(x)$

Le développement limité au rang $n \in \mathbb{N}$ de $x \mapsto \sin(x)$ en 0 est :

$$\begin{aligned}\sin(x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^n) \\ &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} x^{(2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor+1)}}{(2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor+1)!} + o(x^n)\end{aligned}$$

Proposition 25.87 (5) - *DL de* $x \mapsto \tan(x)$

Le développement limité au rang 10 de $x \mapsto \tan(x)$ en 0 est :

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + o(x^{10})$$

Proposition 25.87 (6) - *DL de* $x \mapsto \arctan(x)$

Le développement limité au rang $n \in \mathbb{N}$ de $x \mapsto \arctan(x)$ en 0 est :

$$\begin{aligned}\arctan(x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^n) \\ &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} x^{(2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor)}}{(2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor)} + o(x^n)\end{aligned}$$

Proposition 25.87 (7) - *DL de* $x \mapsto \cosh(x)$

Le développement limité au rang $n \in \mathbb{N}$ de $x \mapsto \cosh(x)$ en 0 est :

$$\begin{aligned}\cosh(x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^n) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{(2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)}}{(2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)!} + o(x^n)\end{aligned}$$

Proposition 25.87 (8) - *DL de* $x \mapsto \sinh(x)$

Le développement limité au rang $n \in \mathbb{N}$ de $x \mapsto \sinh(x)$ en 0 est :

$$\begin{aligned}\sinh(x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^n) \\ &\underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^{(2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor)}}{(2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor)!} + o(x^n)\end{aligned}$$

Proposition 25.87 (9) - *DL de* $x \mapsto \tanh(x)$

Le développement limité au rang 10 de $x \mapsto \tanh(x)$ en 0 est :

$$\tanh(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + o(x^{10})$$

Proposition 25.87 (10) - *DL de* $x \mapsto (1+x)^\alpha$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Le développement limité au rang $n \in \mathbb{N}$ de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ en 0 est :

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (\alpha - i) + o(x^n) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2} + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \prod_{i=0}^{n-1} (\alpha - i) + o(x^n)\end{aligned}$$

Proposition 25.87 (11) - *DL de* $x \mapsto \frac{1}{1+x}$

Le développement limité au rang $n \in \mathbb{N}$ de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ en 0 est :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x} &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)\end{aligned}$$

Proposition 25.87 (12) - *DL de* $x \mapsto \frac{1}{1-x}$

Le développement limité au rang $n \in \mathbb{N}$ de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ en 0 est :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)\end{aligned}$$