

Définition 3.1 - caractérisation de norme sur un \mathbb{K} -espace vectoriel

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. une *norme sur E* est une application $||\cdot|| : E \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant pour tout $(x, y) \in E^2$:

1. *positivité* :

$$||x|| \geq 0$$

2. *Axiome de séparation* :

$$||x|| = 0 \implies x = 0$$

3. *Absolue homogénéité* :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, ||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$$

4. *Inégalité triangulaire* :

$$||x|| + ||y|| \geq ||x + y||$$

Exemple 3.3 (1) - normes de \mathbb{K}^n

Les applications suivantes sont des normes sur \mathbb{K}^n :

1. $||\cdot||_1 : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n |x_i|$

2. la *norme euclidienne associée au produit scalaire canonique sur \mathbb{K}^n* :

$$||\cdot||_2 : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$$

3. la *norme infinie* $||\cdot||_\infty : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} (|x_i|)$

Exemple 3.3 (2) - normes de $\mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$

Les applications suivantes sont des normes sur $\mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$:

1. la *norme de la convergence en moyenne* $||\cdot||_1 : f \mapsto \int_a^b |f(t)| dt$

2. la *norme euclidienne associée au produit scalaire canonique sur $\mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$* :

$$||\cdot||_2 : f \mapsto \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt}$$

3. la *norme infinie* $||\cdot||_\infty : f \mapsto \sup_{x \in [a; b]} (|f(x)|)$

Théorème 3.7 - norme euclidienne associée à un produit scalaire

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel. L'application $\|\cdot\| : x \mapsto \sqrt{(x|x)}$ est une norme, appelée *norme euclidienne associée à $(\cdot|\cdot)$* .

Définition 3.12 - espace métrique

Soit E un ensemble. Une application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée *distance* si elle vérifie ces propriétés :

1. $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) \geq 0$
2. $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = 0 \implies x = y$
3. $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = d(y, x)$
4. $\forall (x, y, z) \in E^3, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Une telle application munit E d'une structure d'*espace métrique*.

Définition 3.14 - distance d'un point à une partie non vide

Soit (E, d) un espace métrique. Étant donnée une partie A de E et x un élément de E , on appelle *distance de x à A* la borne inférieure des distances de x à tous les éléments de A :

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$$

Définition 3.15 - sphère d'un espace vectoriel normé

Soit E un espace vectoriel normé. On appelle *sphère de centre $a \in E$ et de rayon $r \geq 0$* de E l'ensemble $\mathcal{S}(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| = r\}$.

Définition 3.16 - partie bornée d'un espace vectoriel normé

Soit E un espace vectoriel normé. On dit qu'une partie A de E est *bornée* lorsqu'il existe une boule fermée la contenant :

$$\exists a \in E, \exists r \geq 0, A \subset \overline{B}(a, r)$$

Soit :

$$\exists r \geq 0, \forall x \in A, \|x\| \leq r$$

Définition 3.19 - *application bornée*

Soit E un espace vectoriel normé et X un ensemble fini. Une application $\varphi : X \rightarrow E$ est dite bornée lorsque l'ensemble $\text{Im}(\varphi)$ est borné.

Définition 3.20 - *applications bornées sur un espace vectoriel normé*

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel normé et X un ensemble fini. L'ensemble $\mathcal{B}(X, E)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel et l'application :

$$f \mapsto \sup_{x \in X} \|f(x)\|$$

est une norme sur $\mathcal{B}(X, E)$, appelée *norme infinie*.

Définition 3.21 - *application lipschitzienne*

Soit E et F deux espaces vectoriels normés, $A \subset E$ et $k \geq 0$. Une application $f : A \rightarrow F$ est dite k -lipschitzienne sur A lorsque :

$$\forall (x, y) \in A^2, \|f(x) - f(y)\|_F \leq k \|x - y\|_E$$

L'ensemble des applications k -lipschitziennes de A dans F est noté $\text{Lip}_k(A, F)$.

Définition 3.30 - *normes équivalentes*

Soit N et N' deux normes sur un espace vectoriel E . On dit que N et N' sont *équivalentes* lorsque :

$$\exists (\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \alpha N \leq N' \leq \beta N$$

Il s'agit d'une relation d'équivalence.

Proposition 3.31 - *normes équivalentes et convergence de suites*

Deux normes sur un espace vectoriel sont équivalentes si et seulement si toute suite qui converge pour l'une vers $x \in E$ converge pour l'autre, également vers x .

Proposition 3.32 - *normes équivalentes et boules incluses*

Deux normes sur un espace vectoriel sont équivalentes si et seulement si toute boule pour l'une contient une boule pour l'autre.

Définition 3.37 - *valeur d'adhérence d'une suite*

Un élément $a \in E$ est appelé valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ s'il existe une suite extraite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers a .

Proposition 3.38 - *caractérisation de l'adhérence*

Soit E un espace vectoriel normé. L'élément a est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ si et seulement si pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, toute boule centrée en a contient au moins un terme de la suite de rang supérieur ou égal à n_0 :

$$\forall n_0 \in \mathbb{N}, \forall r > 0, \exists N \geq n_0, \|u_N - a\| < r$$