Définition 7.1 - *endomorphisme diagonalisable*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E. On dit que *u est diagonalisable* s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Proposition 7.2 - *CNS de diagonalisabilité*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. Il existe une base de E constituée de vecteurs propres de u.
2. L'endomorphisme u est diagonalisable.
3. Les sous-espaces propres de u sont supplémentaires dans E : $E = \bigoplus\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$

Théorème 7.6 - *caractérisation de la diagonalisabilité par la dimension des sous-espaces propres*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E. u est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des sous-espaces propres de u vaut la dimension de E :

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim\big(E_\lambda(u)\big) = \dim(E)$$

Théorème 7.7 - *caractérisation de la diagonalisabilité par la multiplicité de ses valeurs propres*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E. u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé et si la dimension de chaque sous-espace propre associé à la valeur propre λ vaut la multiplicité de λ :

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u),\ \dim\big(E_\lambda(u)\big) = m_\lambda$$

Théorème 7.9 - *caractérisation de la diagonalisabilité par le polynôme minimal*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E. u est diagonalisable si et seulement si μ_u est scindé à racines simples.

Définition 7.14 - *endomorphisme trigonalisable*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E. On dit que *u est trigonalisable* s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

Proposition 7.17 - *point commun entre polynômes caractéristique et minimal*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E. χ_u est scindé si et seulement si μ_u est scindé.

Théorème 7.18 - *caractérisation de la trigonalisabilité*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E. u est trigonalisable si et seulement si ses polynômes caractéristique et minimal sont scindés (c'est équivalent).

Proposition 7.31 - *caractérisation de la nilpotence*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E. u est nilpotent si et seulement s'il est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0.

Proposition 7.32 - *famille libre impliquant un endomorphisme nilpotent*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotente d'indice p et $x \in E$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$. Alors la famille $\big(x, u(x), \dots u^{p-1}(x)\big)$ est libre.

Théorème 7.33 - *majoration de l'indice de nilpotence en dimension finie*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme nilpotent d'indice p de E. On a les résultat suivants :

1. $p \leq n$
2. Si $p = n$, alors dans une certaine base de E la matrice de u est *la matrice de Jordan de taille n* :

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$