

Définition 25.13 - développement de Taylor de f

Soit $f \in \mathcal{D}^n(\{x_0\})$. Un *développement de Taylor à l'ordre n de f en x_0* est un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad P^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0)$$

donc un polynôme dont la courbe est, en x_0 , *tangente à l'ordre n* à celle de f . Ce polynôme existe, est unique et donné par :

$$P = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (X - x_0)^k$$

Définition 25.16 - reste de Taylor à l'ordre n

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{D}^n sur $\{x_0\}$. On appelle *reste de Taylor à l'ordre n de f en x_0* la fonction :

$$R_{n,x_0} : I \rightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad x \mapsto f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Proposition 25.18 - fonction développable en série de Taylor

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^∞ sur I , $x_0 \in I$. Alors :

$$\left(\forall x \in I, \lim_{n \rightarrow +\infty} R_{n,x_0}(x) = 0 \right) \implies \left(\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (X - x_0)^k \right)$$

Dans ce cas, on dit que f est *développable en série de Taylor en x_0* .

Théorème 25.20 - formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n au point a

Soit $a < b$ et $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^{n+1} sur $[a; b]$. Alors

$$\forall x \in [a; b], f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n dt$$

Théorème 25.27 - formule de Taylor-Young à l'ordre n en x_0

Soit I ouvert, $x_0 \in I$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^n au voisinage de x_0 . Alors :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$$

Proposition 25.34 - formule de Taylor pour les polynômes

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$, on a :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Définition 25.36 - développement limité

Soit I ouvert, $x_0 \in I$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que le polynôme $P = \sum_{k=0}^n a_k (X - x_0)^k \in \mathbb{R}_n[X]$ est un *développement limité* à l'ordre n de f en x_0 si on a :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} P(x) + o((x - x_0)^n)$$

Si f est de classe \mathcal{C}^n au voisinage de x_0 , un tel polynôme existe, est unique et donné par la formule de Taylor-Young:

$$P = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (X - x_0)^k$$

Proposition 25.41 - DL de fonctions paires ou impaires

Soit I ouvert tel que $0 \in I$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

- Si f est paire, alors si existence, ses développements limités en 0 ne présentent que des monômes de degré pair.
- Si f est impaire, alors si existence, ses développements limités en 0 ne présentent que des monômes de degré impair.

Proposition 25.42 - classe d'une fonction admettant un DL

Soit I ouvert, $x_0 \in I$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Si f admet un DL à l'ordre 0 en x_0 , alors f est continue en x_0 .
2. Si f admet un DL à l'ordre 1 en x_0 , alors f est dérivable en x_0 .

Définition 25.44 - DL au sens fort

Soit I ouvert, $x_0 \in I$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que le polynôme $P = \sum_{k=0}^n a_k (X - x_0)^k \in \mathbb{R}_n[X]$ est un *développement limité au sens fort à l'ordre n de f en x_0* si on a :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} P(x) + \mathcal{O}((x - x_0)^{n+1})$$

Définition 25.46 - troncature

Soit $m \leq n$ dans \mathbb{N} , et $P = \sum_{k=0}^n a_k (X - x_0)^k \in \mathbb{R}_n[X]$. La troncature de P à l'ordre m au voisinage de x_0 est le polynôme :

$$T_{m,x_0}(P) = \sum_{k=0}^m a_k (X - x_0)^k$$

Ainsi, si :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} P(x) + o((x - x_0)^n)$$

alors,

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} T_{m,x_0}(P)(x) + o((x - x_0)^m)$$

Proposition 25.55 - somme de DL

Soit I et J ouverts tel que $(0, 0) \in I \times J$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ et $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$. Si on a :

$$\begin{cases} f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} P(x) + o(x^n) \\ g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} Q(x) + o(x^n) \end{cases}$$

Alors,

$$(f + g)(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} P(x) + Q(x) + o(x^n)$$

Proposition 25.56 - produit de DL

Soit I et J ouverts tel que $(0, 0) \in I \times J$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ et $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$. Si on a :

$$\begin{cases} f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} P(x) + o(x^n) \\ g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} Q(x) + o(x^n) \end{cases}$$

Alors,

$$(fg)(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} T_{n,0}(PQ)(x) + o(x^n)$$

Proposition 25.59 - composition de DL

Soit I et J ouverts tel que $(0, 0) \in I \times J$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ et $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$. Si on a :

$$\begin{cases} f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} P(x) + o(x^n) \\ g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} Q(x) + o(x^n) \end{cases}$$

Alors,

$$g \circ f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} T_{n,0}(Q \circ P)(x) + o(x^n)$$

Proposition 25.62 - DL d'une réciproque

Soit I ouvert tel que $0 \in I$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que :

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} P(x) + o(x^n)$$

Si f est bijective (ou au moins injective) au voisinage de 0, alors il existe $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} Q(x) + o(x^n)$$

Ce polynôme Q s'identifie en résolvant :

$$x \underset{x \rightarrow 0}{=} f^{-1} \circ f(x) + o(x^n)$$

Proposition 25.65 - *DL d'un inverse*

Soit I ouvert tel que $0 \in I$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que :

$$f(0) \neq 0 \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} P(x) + o(x^n)$$

Comme $f(0) \neq 0$, on a également $P(0) \neq 0$. On peut alors écrire :

$$P = a_0(1 + Q) \quad \text{avec} \quad Q = a_0^{-1} \sum_{k=1}^n a_k X^k$$

où ici $Q(0) = 0$. En remarquant que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{P(x)} = \frac{1}{a_0(1 + Q(x))}$$

on peut appliquer la formule de composition des développements limités sur $h \circ Q$ avec $h : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ ($Q(0) = 0$), on a :

$$\frac{1}{f(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{a_0} \times T_{n,0} \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k Q^k \right) + o(x^n)$$

Proposition 25.65 - *primitive de DL*

Soit I ouvert tel que $0 \in I$, $f \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$, $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tels que :

$$f'(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} P(x) + o(x^{n-1})$$

Alors f admet un développement limité à l'ordre n , en 0, donné par :

$$\begin{aligned} f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} f(0) + \sum_{k=1}^n \frac{a_{k-1}}{k} x^k + o(x^n) \\ \underset{x \rightarrow 0}{=} f(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \cdots + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + o(x^n) \end{aligned}$$

Proposition 25.87 (1) - DL de $x \mapsto e^x$

Le développement limité au rang $n \in \mathbb{N}$ de $x \mapsto e^x$ en 0 est :

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \end{aligned}$$

Proposition 25.87 (2) - DL de $x \mapsto \ln(1+x)$

Le développement limité au rang $n \in \mathbb{N}$ de $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0 est :

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} + o(x^n) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n!} + o(x^n) \end{aligned}$$

Proposition 25.87 (3) - DL de $x \mapsto \cos(x)$

Le développement limité au rang $n \in \mathbb{N}$ de $x \mapsto \cos(x)$ en 0 est :

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^n) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} x^{(2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)}}{(2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)!} + o(x^n) \end{aligned}$$

Proposition 25.87 (4) - DL de $x \mapsto \sin(x)$

Le développement limité au rang $n \in \mathbb{N}$ de $x \mapsto \sin(x)$ en 0 est :

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^n) \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} x^{(2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1)}}{(2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1)!} + o(x^n) \end{aligned}$$

Proposition 25.87 (5) - DL de $x \mapsto \tan(x)$

Le développement limité au rang 10 de $x \mapsto \tan(x)$ en 0 est :

$$\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{63}{2835}x^9 + o(x^{10})$$

Proposition 25.87 (6) - DL de $x \mapsto \arctan(x)$

Le développement limité au rang $n \in \mathbb{N}$ de $x \mapsto \arctan(x)$ en 0 est :

$$\begin{aligned} \arctan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} & \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^n) \\ & \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} x^{(2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1)}}{(2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1)} + o(x^n) \end{aligned}$$

Proposition 25.87 (7) - DL de $x \mapsto \cosh(x)$

Le développement limité au rang $n \in \mathbb{N}$ de $x \mapsto \cosh(x)$ en 0 est :

$$\begin{aligned} \cosh(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} & \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^n) \\ & \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{(2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)}}{(2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)!} + o(x^n) \end{aligned}$$

Proposition 25.87 (8) - DL de $x \mapsto \sinh(x)$

Le développement limité au rang $n \in \mathbb{N}$ de $x \mapsto \sinh(x)$ en 0 est :

$$\begin{aligned} \sinh(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} & \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^n) \\ & \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^{(2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1)}}{(2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1)!} + o(x^n) \end{aligned}$$

Proposition 25.87 (9) - DL de $x \mapsto \tanh(x)$

Le développement limité au rang 10 de $x \mapsto \tanh(x)$ en 0 est :

$$\tanh(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + o(x^{10})$$

Proposition 25.87 (10) - DL de $x \mapsto (1+x)^\alpha$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Le développement limité au rang $n \in \mathbb{N}$ de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ en 0 est :

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (\alpha - i) + o(x^n) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2} + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \prod_{i=0}^{n-1} (\alpha - i) + o(x^n) \end{aligned}$$

Proposition 25.87 (11) - DL de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$

Le développement limité au rang $n \in \mathbb{N}$ de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ en 0 est :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \end{aligned}$$

Proposition 25.87 (12) - DL de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$

Le développement limité au rang $n \in \mathbb{N}$ de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ en 0 est :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n) \end{aligned}$$