

**Définition 7.1** - système de preuve

Un système de preuve est un cadre formel permettant de dériver des énoncés logiques à partir de règles bien définies et d'hypothèses. On le caractérise par :

1. *un ensemble d'axiomes* : propositions admises comme vraies.
2. *un ensemble de règles d'inférence*.

On représente une preuve par un arbre dont *les feuilles sont des instances d'axiomes* et *les noeuds internes des instances de règles d'inférence*.

**Définition 7.2** - instance d'un axiome, d'une règle d'inférence

Une *instance d'un axiome ou d'une règle d'inférence* est obtenue à partir de l'axiome ou de la règle, en choisissant pour chaque variable une formule logique et en remplaçant chaque occurrence de la variable par la formule.

**Définition 7.3** - séquent

Un séquent (également jugement), est une *affirmation qui exprime que, sous certaines hypothèses, une conclusion peut être déduite*. Il est généralement écrit sous la forme :

$$\Gamma \vdash C$$

où :  $\begin{cases} \Gamma & \text{est un ensemble d'hypothèses (formules de la logique propositionnelle supposées vraies)} \\ C & \text{est la conclusion qui peut être déduite à partir des hypothèses de } \Gamma \end{cases}$

Intuitivement, cela signifie : "Si les hypothèses de  $\Gamma$  sont vérifiées, alors  $C$  peut être démontrée"

**Définition 7.4** - règle d'inférence

Dans un système de preuve, une *règle d'inférence* est constituée d'une *famille de prémisses*  $P_1, \dots, P_k$ , et d'une *conclusion*  $C$ . On représente une règle d'inférence par :

$$\frac{P_1 \quad \dots \quad P_k}{C}$$

**Définition 7.5** - règle d'inférence de l'axiome

En déduction naturelle, Pour un ensemble  $\Gamma$  de formules de la logique propositionnelle, pour toute formule  $A \in \Gamma$ , le séquent  $\Gamma \vdash A$  est prouvable :

$$\frac{(\text{axiome})}{\Gamma \vdash A}$$

en constitue une démonstration.

**Définition 7.6** - séquent prouvable

Un séquent est dit *prouvable* lorsqu'il existe un *un arbre de preuve* de celui-ci. Plus précisément, le séquent  $\Gamma \vdash A$  est prouvable si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

- **cas de base** :  $A \in \Gamma$ .  $\frac{(\text{axiome})}{\Gamma \vdash A}$  est alors une démonstration
- **cas inductif** : il existe  $\Gamma_1 \vdash C_1, \dots, \Gamma_k \vdash C_k$  des séquents prouvables, ainsi qu'une règle d'inférence  $(\gamma)$  dont :

$$\frac{\Gamma_1 \vdash C_1 \quad \dots \quad \Gamma_k \vdash C_k}{\Gamma \vdash A}(\gamma)$$

est une instance. Le cas échéant  $\Gamma \vdash A$  est prouvable via la règle  $(\gamma)$ .

**Définition 7.7** - inductive d'un séquent prouvable

L'ensemble des séquents prouvables en déduction naturelle est défini inductivement à partir des règles de déduction naturelle :

- Pour  $\Gamma$  un ensemble de formules de la logique propositionnelle, et  $A \in \Gamma$  :

$$\Gamma \vdash A \text{ prouvable par axiome}$$

- Pour  $\Gamma$  un ensemble de formules de la logique propositionnelle, et  $A \in \Gamma$  :

**Définition 7.8** - règle d'introduction du "et"

En déduction naturelle, Pour un ensemble  $\Gamma$  de formules de la logique propositionnelle, pour toutes formules  $A, B$  et  $C$  :

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}(\text{i}\wedge)$$

telle est la *règle d'introduction du "et"*.

**Définition 7.9** - règle d'élimination du "et"

En déduction naturelle, Pour un ensemble  $\Gamma$  de formules de la logique propositionnelle, pour toutes formules  $A$  et  $B$  :

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} (e \wedge g) \quad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B} (e \wedge d)$$

telle est la *règle d'élimination du "et"*.

**Définition 7.10** - règle d'introduction du "ou"

En déduction naturelle, Pour un ensemble  $\Gamma$  de formules de la logique propositionnelle, pour toutes formules  $A$  et  $B$  :

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} (i \vee d) \quad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} (i \vee g)$$

telle est la *règle d'introduction du "ou"*.

**Définition 7.11** - règle d'élimination du "ou"

En déduction naturelle, Pour un ensemble  $\Gamma$  de formules de la logique propositionnelle, pour toutes formules  $A$ ,  $B$  et  $C$  :

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C} (e \vee)$$

telle est la *règle d'élimination du "ou"*.

**Définition 7.12** - règle d'introduction du "non"

En déduction naturelle, Pour un ensemble  $\Gamma$  de formules de la logique propositionnelle, pour toute formule  $A$  :

$$\frac{\Gamma, A \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg A} (i \neg)$$

telle est la *règle d'introduction du "non"*.

**Définition 7.13** - règle d'élimination du "non"

En déduction naturelle, Pour un ensemble  $\Gamma$  de formules de la logique propositionnelle, pour toute formule  $A$  :

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash \perp} (e \neg)$$

telle est la *règle d'élimination du "non"*.

**Définition 7.14** - règle d'introduction du "implique"

En déduction naturelle, Pour un ensemble  $\Gamma$  de formules de la logique propositionnelle, pour toutes formules  $A$  et  $B$  :

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} (i \rightarrow)$$

telle est la règle d'introduction du "implique".

**Définition 7.15** - règle d'élimination du "implique"

En déduction naturelle, Pour un ensemble  $\Gamma$  de formules de la logique propositionnelle, pour toutes formules  $A$  et  $B$  :

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} (e \rightarrow)$$

telle est la règle d'élimination du "implique".

**Théorème 7.16** - propriété d'affaiblissement

En déduction naturelle, pour des ensembles  $\Gamma$  et  $\Delta$  de formules de la logique propositionnelle, pour toute formule  $A$  de la logique propositionnelle, si  $\Gamma \vdash A$  est prouvable, alors il en est de même pour  $\Gamma, \Delta \vdash A$ .

**Définition 7.17** - relation "être conséquence logique"

Soit  $A$  et  $B$  deux formules de la logique propositionnelle. On dit que  $B$  est une conséquence logique de  $A$ , noté  $A \models B$  si tout modèle de  $A$  (valuation satisfaisant  $A$ ) est un modèle de  $B$ .

Par extension si  $\Gamma$  est un ensemble de formules de la logique propositionnelle,  $\Gamma \models A$  signifie :

$$\forall C \in \Gamma, C \models A$$

**Définition 7.18** - règle correcte

En déduction naturelle, on dit qu'une règle :

$$\frac{\Delta_1 \vdash C_1 \quad \dots \quad \Delta_k \vdash C_k}{\Gamma \vdash A} (\gamma)$$

est *correcte* si le fait que pour tout  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$  toute valuation satisfaisant les formules de  $\Delta_i$  satisfasse  $C_i$  implique que toute valuation satisfaisant les formules de  $\Gamma$  satisfait  $A$ .

En d'autres termes, la règle est *correcte* si :

$$\left( \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \Delta_i \models C_i \right) \implies \Gamma \models A$$

**Définition 7.19** - *séquent valide*

On dit qu'un séquent  $\Gamma \vdash A$  est *valide* si toute valuation satisfaisant les formules de  $\Gamma$  satisfait  $A$  i.e.  $\Gamma \models A$ .

**Définition 7.20** - *logique du premier ordre, langage du premier ordre*

La *logique du premier ordre* est une extension de la logique propositionnelle, dans laquelle on travaille sur un *langage du premier ordre*, défini par :

- des symboles de constante (comme 0,  $\emptyset$ ,  $\pi$ ,...)
- des symboles de fonctions, comme  $+(5, 3)$
- des symboles de relations, comme  $=, \neq, \geq, >$ .

Les constantes et images des symboles de fonctions sont des éléments d'un ensemble d'étude, appelé *domaine*, qui dépend du langage du premier ordre

**Définition 7.21** - *terme en logique du premier ordre*

L'ensemble des *termes pour un langage du premier ordre* est défini inductivement :

- un symbole de constante est un terme.
- une variable, inconnue impliquée dans les quantificateurs entre autres, est un terme.
- pour  $t_1, \dots, t_n$  des termes et  $f$  un symbole de fonction d'arité  $n$ ,  $f(t_1, \dots, t_n)$  est un terme.

**Définition 7.22** - *formule de la logique du premier ordre*

L'ensemble des *formules de la logique du premier ordre pour un langage du premier ordre* est défini inductivement :

1. les formules suivantes, appelées *formules atomiques* sont de telles formules :
  - $\top$  et  $\perp$  sont des formules atomiques
  - pour  $t_1, \dots, t_k$  des termes et  $\mathcal{R}$  un symbole de relation d'arité  $k$ ,  $\mathcal{R}(t_1, \dots, t_k)$  est une formule atomique
2. pour  $F_1$  et  $F_2$  deux formules de la logique du premier ordre :
  - $F_1 \wedge F_2$  en est une.
  - $F_1 \vee F_2$  en est une.
  - $F_1 \rightarrow F_2$  en est une.
  - $F_1 \leftrightarrow F_2$  en est une.
  - $\neg F_1$  en est une.
3. pour  $F$  une formule de la logique du premier ordre faisant intervenir la variable  $x$  :
  - $\forall x.F(x)$  en est une.
  - $\exists x.F(x)$  en est une.

**Définition 7.23** - *portée d'une variable, caractères libre et lié d'une variable*

En logique du premier ordre, pour  $P$  une formule, et  $x$  une variable (inconnue impliquée dans les quantificateurs entre autres), on dit que *dans les formules  $\forall x.P$  et  $\exists x.P$ , la portée de la variable  $x$  est  $P$*  et on dit que  *$x$  est dans la portée du quantificateur* qui lui précède.

Une *occurrence d'une variable libre* est une variable ne se trouvant dans la portée d'aucun quantificateur, autrement elle est dite *liée*.

**Définition 7.24** - *caractères libre et lié d'une occurrence d'une variable*

En logique du premier ordre, pour  $F$  une formule, une occurrence précise d'une variable est :

- *libre* si elle n'est dans la portée d'aucun quantificateur.
- *liée* si elle est dans la portée d'au moins quantificateur.

**Définition 7.25** - *caractères libre et lié d'un variable dans une formule*

En logique du premier ordre, pour  $F$  une formule, une variable  $x$  :

- *libre dans  $F$*  s'il existe une occurrence de  $x$  libre dans  $F$
- *liée dans  $F$*  s'il existe une occurrence de  $x$  libre dans  $F$ .

**Définition 7.24** - *règle d'introduction du quantificateur universel*

En déduction naturelle munie de la logique du premier ordre, Pour un ensemble  $\Gamma$  de formules de la logique propositionnelle, pour toutes formules  $A$  et  $B$  :

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi(x)}{\Gamma \vdash \forall x. \varphi(x)} (\text{i}\forall)$$

valable si toutes les occurrences de  $x$  sont non libres. telle est la *règle d'élimination du quantificateur universel*.