Définition 17.1 - *fraction rationnelle*

Dans $\mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X]\backslash\{0\})$ On définit la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ en posant :

$$\begin{aligned} & (P,Q)\mathcal{R}(R,S) \\ \Leftrightarrow\ & P/Q = R/S \qquad \text{(Cette étape n'est qu'à titre explicatif dans la mesure où l'opération / n'est pas définie)} \\ \Leftrightarrow\ & PS = RQ \end{aligned}$$

On appelle *fraction rationnelle* à coefficients dans $\mathbb{K}$ toute classe d'équivalence pour la relation $\mathcal{R}$. La classe de (P,Q) est alors notée $\dfrac{P}{Q}$. On a donc :

$$\frac{P}{Q} = \{(R,S) \in \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X]\backslash\{0\}), PS = RQ\}$$

On dit que (P,Q) est un *représentant* de la fraction $\dfrac{P}{Q}$. L'ensemble des fractions rationnelles est noté $\mathbb{K}(X)$ et la relation $\mathcal{R}$ est appelée *égalité des fractions rationnelles*.

Proposition 16.4 - *structure de* $\mathbb{K}(X)$

$(\mathbb{K}(X),+,\times)$ est un corps commutatif et $(\mathbb{K}(X),+,\times,\cdot)$ (où $\cdot$ est la loi externe) est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative.

L'application $\varphi : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}(X)$ définie par $\varphi(P) = \dfrac{P}{1}$ est un morphisme d'algèbres injectif.

Définition 17.7 - *représentant irréductible*

Soit $F = \dfrac{P}{Q}$ une fraction. On dit que $\dfrac{P}{Q}$ est un *représentant irréductible* lorsque $P \wedge Q = 1$ et que Q est unitaire. Toute fration rationnelle de $\mathbb{K}(X)$ admet un <u>unique</u> (dénominateur unitaire) représentant irréductible.

Théorème 17.34 - *décomposition en éléments simples*

Soit $F = \dfrac{A}{B}$ une fraction sous forme irréductible, et $B = \prod_{i=1}^{k} P_i^{\alpha_i}$ sa décomposition en produit de polynômes irréductibles. Il existe des polynômes $(U_i)_{i\in[\![1,k]\!]}$ tels que

$$F = E + \sum_{i=1}^{k} \frac{U_i}{P_i^{\alpha_i}} \quad \text{avec } \deg(\frac{U_i}{P_i}) < 0$$

De plus, pour $n \in \mathbb{N}^*$, Si $T \in \mathcal{I}_{\mathbb{K}[X]}$ et $\deg(\dfrac{A}{T^n}) < 0$, alors il existe des polynômes $V_1, \ldots, V_n$ tels que

$$\frac{A}{T^n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{V_k}{T^k} \quad \text{avec } \deg(\frac{V_k}{T^k}) < 0$$

Finalement, Il existe des polynômes $(U_{i,j})_{i\in[\![1,k]\!],j\in[\![1,\alpha_i]\!]}$ tels que

$$F = E + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{U_{i,j}}{P_i^j} \quad \text{avec } \deg(\frac{U_{i,j}}{P_i}) < 0$$

Cette décomposition est unique.

Proposition 17.40 - *cas d'un pôle d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ pour une fraction de $\mathbb{C}(X)$*

Si $a \in \mathbb{C}$ est un pôle d'ordre de multiplicité $n \in \mathbb{N}^*$ de $F \in \mathbb{C}(X)$, alors la partie polaire de F relative à a est, en posant $H = (X-a)^n F$:

$$P_F(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{H^{(k-1)}(a)}{(X-a)^k} = \frac{H(a)}{X-a} + \frac{H'(a)}{(X-a)^2} + \cdots + \frac{H^{(n-1)}(a)}{(X-a)^n}$$

Remarque 17.51 - *primitives d'éléments simples de première espèce*

Un élément simple de première espèce est de la forme $\dfrac{1}{(X-a)^n}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\int^x \frac{1}{(t-a)^n} dt = \begin{cases} \ln|x-a| & \text{si } n = 1 \\ \\ \dfrac{-1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

Remarque 17.51 - *primitives d'éléments simples de deuxième espèce*

Un élément simple de seconde espèce est de la forme $\dfrac{aX+b}{(X^2+pX+c)^n}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. On ne traite que le cas $n=1$:

$$\frac{aX+b}{X^2+pX+q} = \frac{\frac{a}{2}2X}{X^2+pX+q} + \frac{b}{X^2+pX+q} \qquad \text{On fait apparaître la dérivée du trinôme au numérateur}$$

$$= \frac{\frac{a}{2}(2X+p-p)}{X^2+pX+q} + \frac{b}{X^2+pX+q}$$

$$= \frac{\frac{a}{2}(2X+p)}{X^2+pX+q} + \frac{b-\frac{a}{2}p}{X^2+pX+q}$$

$$= \frac{\frac{a}{2}(2X+p)}{X^2+pX+q} + \frac{b-\frac{a}{2}p}{(X+\frac{p}{2})^2+\frac{4q-p^2}{4}} \qquad \text{On passe le dénominateur sous forme canonique}$$

$$= \frac{\frac{a}{2}(2X+p)}{X^2+pX+q} + \frac{(b-\frac{ap}{2})(\frac{4}{4q-p^2})}{\frac{4}{4q-p^2}(X+\frac{p}{2})^2+1} \qquad \text{On divise par } 4q-p^2>0 \text{ pour avoir une forme } \alpha\frac{u'}{u^2+1}$$

$$= \frac{\frac{a}{2}(2X+b)}{X^2+bX+q} + \frac{(b-\frac{ap}{2})(\frac{4}{4q-p^2})}{(\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}X+\frac{p}{\sqrt{4q-p^2}})^2+1} \qquad \text{On fait rentrer } \frac{4}{4q-p^2}>0 \text{ dans } u \text{ avec } x\mapsto\sqrt{x}$$

$$\boxed{\frac{aX+b}{X^2+pX+q} = \frac{\frac{a}{2}(2X+b)}{X^2+pX+q} + \frac{\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}}{(\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}X+\frac{p}{\sqrt{4q-p^2}})^2+1}\,\frac{2b-ap}{\sqrt{4q-p^2}}}$$

Passage au calcul intégral :

$$\boxed{\int^x \frac{at+b}{t^2+pt+q}dt = \frac{a}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{2b-ap}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}})}$$