

**Définition 2.1** - *automate fini déterministe*

Un automate fini déterministe  $\mathcal{A}$  est défini par un quintuplet  $(\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$ , où :

1.  $\Sigma$  est un alphabet fini ;
2.  $Q$  est un *ensemble fini d'états* ;
3.  $q_0 \in Q$  est l'*état initial* ;
4.  $F \subset Q$  est un *ensemble d'états finaux* ;
5.  $\delta$  est une application d'une partie de  $Q \times \Sigma$  dans  $Q$  est la *fonction de transition*.

Il est commun de représenter par un tableau à double entrées, dit *table de transition*, les valeurs prises par  $\delta$ .

**Définition 2.2** - *chemin, étiquette d'un chemin*

Un *chemin* dans un automate est une suite finie d'états  $(q_1, \dots, q_n)$  telle qu'il existe  $a_1, \dots, a_{n-1}$  dans  $\Sigma$ , tel que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \delta(q_i, a_i) = q_{i+1}$$

Assertion que l'on notera :

$$q_1 \xrightarrow{a_1} q_2 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_{n-1}} q_n$$

L'*étiquette du chemin* est alors le mot  $a_1 \dots a_{n-1}$ .

**Définition 2.3** - *chemin acceptant*

Un chemin  $(q_1, \dots, q_n)$  d'un automate  $\mathcal{A}$  est *acceptant* lorsque  $q_1$  est l'état initial (ou un état initial si AFND) de  $\mathcal{A}$  et  $q_n$  est un état final de  $\mathcal{A}$ .

On dit alors que l'étiquette de  $(q_1, \dots, q_n)$ , qui est un mot, *est reconnue par  $\mathcal{A}$* .

**Définition 2.4** - *langage reconnu*

L'ensemble des mots reconnus par  $\mathcal{A}$  un automate fini est noté  $\mathcal{L}(\mathcal{A})$  et est appelé *langage reconnu par  $\mathcal{A}$* .

**Définition 2.5** - *état accessible*

Un état  $q$  d'un automate fini  $\mathcal{A}$  est dit accessible lorsqu'il existe un chemin de  $\mathcal{A}$  de l'état initial (ou d'un état initial) de  $\mathcal{A}$  menant à  $q$ .

**Définition 2.6** - *état co-accessible*

Un état  $q$  d'un automate fini  $\mathcal{A}$  est dit co-accessible lorsqu'il existe un chemin de  $\mathcal{A}$  reliant  $q$  à un état final de  $\mathcal{A}$ .

**Définition 2.7** - *état utile*

Un état d'un automate fini est dit utile s'il est accessible et co-accessible.

**Définition 2.8** - *automate fini émondé*

La présence d'états non utiles (non accessibles ou non co-accessibles) n'altère pas le langage reconnu par un automate fini  $\mathcal{A}$ .

On dit alors qu'un automate  $\mathcal{A}'$  est *émondé* s'il ne contient que des états utiles.

**Définition 2.9** - *automate des parties d'un AFND*

Soit  $\mathcal{A}_{\text{ND}} = (\Sigma, Q, I, F, \delta)$  un automate fini non déterministe. On appelle *automate des parties de  $\mathcal{A}_{\text{ND}}$* , noté  $\mathcal{A}_{\text{D}} = (\Sigma, Q_{\text{D}}, q_{0,\text{D}}, F_{\text{D}}, \delta_{\text{D}})$  tel que :

1.  $Q_{\text{D}} = \mathcal{P}(Q)$  ;
2.  $q_{0,\text{D}} = I$  ;
3.  $F_{\text{D}} = \{P \in Q_{\text{D}}, P \cap F \neq \emptyset\}$ , l'ensemble des états de  $\mathcal{A}_{\text{D}}$  contenant au moins un état final de  $\mathcal{A}_{\text{ND}}$ .
4.  $\delta_{\text{D}} : \begin{array}{ll} Q_{\text{D}} \times \Sigma & \rightarrow Q_{\text{D}} \\ (P, a) & \mapsto \{q \in Q, \exists p \in P, q \in \delta(p, a)\} = \bigcup_{p \in P} \{q \in Q, q \in \delta(p, a)\} \end{array}$

Pour  $P \in Q_{\text{D}}$  et  $a \in \Sigma$ ,  $\delta_{\text{D}}(P, a)$  est l'ensemble des états de  $Q$  accessibles en lisant  $a$  depuis un élément de  $P$ .  $\mathcal{A}_{\text{D}}$  est alors un automate fini déterministe.

**Définition 2.10** -  *$\epsilon$ -fermeture d'un état d'un  $\epsilon$ -AFND*

Soit  $(\Sigma, Q, I, F, \delta)$  un  $\epsilon$ -AFND. On appelle  $\epsilon$ -fermeture d'un état  $q$  est l'ensemble des états accessibles depuis un chemin dont l'étiquette est le mot vide. On la note  $\epsilon\text{-}F(q)$ .

**Définition 2.11** - *langage local*

Soit  $\Sigma$  un alphabet fini et  $L \in \Sigma^*$  un langage. On dit que  $L$  est *local* s'il existe  $P \in \Sigma$ ,  $S \in \Sigma$  et  $F \in \Sigma_2$  telles que :

$$L \setminus \{\epsilon\} = (P\Sigma^* \cap \Sigma^*S) \setminus (\Sigma^*(\Sigma_2 \setminus F)\Sigma^*)$$

**Définition 2.11** - *langages locaux d'un langage*

Soit  $\Sigma$  un alphabet fini et  $L \in \Sigma^*$  un langage. On définit les *langages locaux de  $L$*  :

1.  $\epsilon-(L) = \{\epsilon\} \cap L$  ;
2.  $P(L) = \{a \in \Sigma, \{a\}\Sigma^* \cap L \neq \emptyset\}$  ;
3.  $S(L) = \{\Sigma^* \{a\} \cap L \neq \emptyset\}$  ;
4.  $F(L) = \{ab \in \Sigma_2, \Sigma^* \{ab\} \Sigma^* \cap L \neq \emptyset\}$ .

**Proposition 2.12** - *caractérisation par les langages locaux*

Soit  $\Sigma$  un alphabet fini et  $L \in \Sigma^*$  un langage.  $L$  est local si et seulement si l'égalité suivante est vérifiée :

$$L = \left( \left( P(L)\Sigma^* \cap \Sigma^* S(L) \right) \setminus \left( \Sigma^* (\Sigma_2 \setminus F(L)) \Sigma^* \right) \right) \cup \epsilon(L)$$

**Définition 2.13** - *expression régulière linéaire*

Une expression régulière dans laquelle chaque lettre apparaît au plus une fois est dite *linéaire*.

**Proposition 2.14** - *concernant les expressions régulières linéaires*

Tout langage local régulier est dénoté par une expression régulière linéaire.

**Définition 2.15** - *automate local*

Un automate fini déterministe est *local* lorsque seules des transitions de même étiquette arrivent au même état.

**Définition 2.16** - *automate standard*

Un automate fini déterministe est dit *standard* si aucune transition n'arrive en son état initial.

**Proposition 2.17** - *concernant les automates locaux standards*

Tout langage local régulier est reconnu par un automate local standard.

**Définition 2.16** - *automate fini généralisé*

Un *automate fini généralisé*  $\mathcal{A}$  est d'abord défini par un quintuplet  $(\Sigma, Q, q_0, f_0, \delta)$ , avec :

1.  $\Sigma$  est un alphabet fini ;
2.  $Q$  est un *ensemble fini d'états* ;
3.  $q_0 \in Q$  est l'*état initial* ;
4.  $q_f \in Q$  est l'*état final* ;
5.  $\delta$ , la *fonction de transition*, est une application d'une partie de  $Q \times E(\Sigma)$  dans  $\mathcal{P}(Q)$ . Ici,  $E(\Sigma)$  désigne l'ensemble des expressions régulières sur  $\Sigma$ .

Puis :

1. dont aucune transition n'arrive en  $q_0$  ;
2. dont aucune transition ne part de  $q_f$ .