Planche d'oral de Mathématiques de l'ENSEA

MPI Session 2025

Premier exercice - Énoncé

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_n a_n z^n$ lorsque pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{n^2+1}{3^n}$

2. Pour $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, en supposant qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la série $\sum_n a_n z^n$ semi-converge, déterminer le rayon R de la série entière associée à $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Premier exercice - Corrigé

1. Le rayon vaut 3 par critère de d'Alembert.

2. On conjecture facilement que $R = |z_0|$ car intuitivement le seul moyen d'avoir convergence simple et non absolue est de se trouver sur le cercle de convergence. La démonstration est la suivante :

— $\boxed{R \leq |z_0|}$ - Soit $|z| > |z_0|$. Par opérations :

$$|a_n||z|^n \geq |a_n||z_0|^n$$

Par hypothèse, $|a_n||z_0|^n$ est le terme général d'une série divergente. Par théorème de comparaison de séries à termes positifs on a le résultat.

— $\boxed{R \geq |z_0|}$ - Soit $|z| < |z_0|$. La suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Par Lemme d'Abel il en est de même pour $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a le résultat.

Second exercice

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $(\cdot|\cdot) : (A,B) \mapsto \mathrm{tr}(A^\top B)$.

1. Montrer que $(\cdot|\cdot)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des matrices symétriques réelles et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des matrices antisymétriques sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque, déterminer la distance de M à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

4. Calculer la distance à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n & \dots & n \end{pmatrix}$$

Second exercice - Corrigé

1. On montre la *symétrie* par invariance de la trace par transposition. La linéarité selon la première variable découle de la linéarité de la trace et de la bilinéarité du produit matriciel, puis on a la *bilinéarité* par symétrie. Par calcul on montre que :

$$(A|A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2$$

Le caractère *défini positif* en découle.

2. Premièrement, tout matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit :

$$M = \underbrace{\frac{M + M^\top}{2}}_{\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})} + \underbrace{\frac{M - M^\top}{2}}_{\in\mathcal{A}_n(\mathbb{R})}$$

Deuxièmement, Si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$(A|S) = \begin{cases} \mathrm{tr}(A^\top S) = \mathrm{tr}(-AS) = -\mathrm{tr}(AS) \\ \mathrm{tr}(AS^\top) = \mathrm{tr}(AS) \end{cases}$$

D'où $(A|S) = 0$. Finalement, on a la supplémentarité orthogonale ($\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{0\}$ découle de l'orthogonalité).

3. Cette distance $\mathrm{d}(M)$ vaut la norme de la projection orthogonale sur $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ de M qui vaut comme vu précédemment :

$$p_{\mathcal{A}_n(\mathbb{R})}(M) = \frac{M - M^\top}{2}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(M)^2 &= \mathrm{tr}\left(\frac{M - M^\top}{2}\left(\frac{M - M^\top}{2}\right)^\top\right) \\ &= \frac{\mathrm{tr}(MM^\top) - \mathrm{tr}(M^2)}{2} \end{aligned}$$

4. On calcule :

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(MM^T) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i^2 \\ &= n\sum_{i=1}^{n} i^2 \\ &= \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{2} \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}(M^2)_{i,i} &= \sum_{k=1}^{n} m_{i,k} m_{k,i} \\ &= \sum_{k=1}^{n} ik \\ &= \frac{in(n+1)}{2}\end{aligned}$$

donc $\mathrm{tr}(M^2) = \dfrac{n^2(n+1)}{2}$. Après calcul (sans oublier la racine carrée) :

$$\mathrm{d}(M) = \sqrt{\frac{n}{2}}$$

Remarques personnelles

Examinateur rassurant, alerte à la moindre erreur commise par le candidat et favorable à sa rectification (ce n'est pas le cas de tous les examinateurs).