Théorème 10.11 - *dérivée d'une composée par une application linéaire*

Soit E, F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimension finie, u une application linéaire de E dans F, et f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans E. Alors $u \circ f$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1(I, F)$ et :

$$(u \circ f)' = u \circ f'$$

Théorème 10.12 - *dérivée d'une composée par une application bilinéaire*

Soit E, F et G trois espaces vectoriels normés de dimension finie, B une application bilinéaire de $E \times F$ vers G, et f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs respectives dans E et F. Alors $B(f, g)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1(I, G)$, et :

$$\Big(B(f, g)\Big)' = B(f', g) + B(f, g')$$

Théorème 10.29 - *construction de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux*

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, $f \in \mathcal{CM}([a\,;\,b], E)$. Si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f, alors la suite $\left(\displaystyle\int_{[a\,;\,b]} \varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Définition 10.30 - *intégrale d'une fonction continue par morceaux*

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, $f \in \mathcal{CM}([a\,;\,b], E)$. Il existe par densité de $\mathcal{E}([a\,;\,b], E)$ dans $\mathcal{CM}([a\,;\,b], E)$ une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathcal{E}([a\,;\,b])$ convergeant uniformément vers f. On appelle *intégrale de f sur $[a\,;\,b]$* le vecteur :

$$\int_{[a\,;\,b]} f = \lim_{n\to+\infty} \int_{[a\,;\,b]} \varphi_n$$

Cette intégrale ne dépend pas de la suite de $\mathcal{E}([a\,;\,b])^{\mathbb{N}}$ choisie.

Théorème 10.35 - *fondamental du calcul intégral*

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, à valeurs dans un espace vectoriel E de dimension finie. Pour tout $a \in I$, l'application :

$$\begin{aligned} F : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

est l'unique primitive de f (sa dérivée est f) s'annulant en a. F est donc de classe $\mathcal{C}^1$.

Théorème 10.39 - *changement de variable*

Soit $f : [a\,;\,b] \to E$ continue et φ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $[a\,;\,b]$ sur $[\varphi(a)\,;\,\varphi(b)]$.

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f\Big(\varphi(t)\Big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

Théorème 10.42 - *intégration d'un o*

Soit I un intervalle et E de dimension finie. Soit $f : I \to E$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $g : I \to \mathbb{R}_+$ de classe $\mathcal{C}^1$. Supposons pour $a \in I$ que $f' \underset{a}{=} o(g')$. Alors :

$$\|f(x) - f(a)\|_E \underset{x \to a}{=} o\Big(\big|g(x) - g(a)\big|\Big)$$