Proposition 4.2 (6) - *intersection finie de voisinage*

Soit E un espace vectoriel normé. L'intersection finie de voisinages d'un élément $x \in E$ est un voisinage de x.

Définition 4.4 - *ouvert*

Soit E un espace vectoriel normé. On appelle ouvert de E une partie O de E qui est un *voisinage de chacun de ses points*, *i.e.* :

$$\forall x \in O,\, \exists r > 0,\, \mathcal{B}(x, r) \subset O$$

Proposition 4.5 (5) - *intersection finie de voisinage*

Soit E un espace vectoriel normé. L'intersection finie d'ouverts de E est un ouvert de E.

Définition 4.6 - *fermé*

Soit E un espace vectoriel normé. On appelle fermé de E *le complémentaire dans E d'un ouvert O de E*.

Définition 4.9 - *point adhérent à une partie*

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E. Un point $x \in E$ est dit *adhérent à A* si tout voisinage de x rencontre A :

$$\forall V \in \mathcal{V}_E(x),\, V \cap A \neq \varnothing$$

On appelle *adhérence de A l'ensemble $\overline{A}$ des éléments de E adhérents à A*.

Proposition 4.10 - *caractérisation de l'adhérence d'une partie*

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E. Pour tout $x \in E$, les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. x est adhérent à A ;

2. Toute boule ouverte de centre x contient au moins un élément de A ;

3. la distance de x à A est nulle.

Définition 4.12 (1) - *point d'accumulation d'une partie*

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E. Un point x est un *point d'accumulation de A* si tout voisinage de x rencontre A en au moins un autre point que x :

$$\forall V \in \mathcal{V}_E(x),\ (V \setminus \{x\}) \cap A \neq \varnothing$$

Définition 4.12 (2) - *point isolé d'une partie*

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E. Un point x est un *point isolé de A* s'il existe un voisinage de x qui ne rencontre A qu'en x :

$$\exists V \in \mathcal{V}_E(x),\ V \cap A = \{x\}$$

Définition 4.15 - *partie dense*

Soit E un espace vectoriel normé et A et B des parties de E. On dit que *A est dense dans B* si $\overline{A} = B$

Théorème 4.17 - *caractérisation de l'adhérence par l'inclusion*

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E. $\overline{A}$ est le plus petit fermé de E contenant A.

Théorème 4.18 - *caractérisation de l'adhérence par l'intersection*

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E. $\overline{A}$ est l'intersection de tous les fermés de E contenant A.

Théorème 4.19 - *caractérisation du caractère fermé*

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E. A est fermée si et seulement si elle contient tous ses points adhérents :

$$\overline{A} = A$$

Théorème 4.20 - *caractérisation séquentielle de l'adhérence*

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E. $\overline{A}$ est l'ensemble des limites des suites convergentes d'éléments de A.

Définition 4.22 - *intérieur d'une partie*

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E. *$x \in A$ est intérieur à A* lorsque A est un voisinage de x :

$$\exists \epsilon > 0,\, \mathcal{B}(x, \epsilon) \subset A$$

l'ensemble des éléments de E intérieurs à A est appelé *intérieur $\mathring{A}$ de A*.

Théorème 4.24 - *caractérisation de l'intérieur d'une partie*

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E. $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert de E inclus dans A.

Théorème 4.25 - *lien entre adhérence et intérieur*

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E.

1. Le complémentaire de l'adhérence de A est l'intérieur du complémentaire de A : $\complement_E \overline{A} = \overset{\circ}{\left(\complement_E A\right)}$

2. Le complémentaire de l'intérieur de A est l'adhérence du complémentaire de A : $\complement_E \mathring{A} = \overline{\left(\complement_E A\right)}$

Définition 4.26 - *frontière d'une partie*

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E. On appelle *point frontière de A* un point adhérent à A qui n'est pas intérieur à A. L'ensemble des points frontières est appelé *frontière $\mathrm{Fr}(A)$ de A* :

$$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \overline{A} \cap \overline{\left(\complement_E A\right)}$$

Définition 4.29 - *voisinage relatif à une partie*

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E. On appelle *voisinage de $a \in \overline{A}$ relatif à A* l'intersection de A avec un voisinage de a.

Définition 4.30 - *ouvert, fermé relatifs à une partie*

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E.

1. On appelle *ouvert relatif de A* l'intersection de A avec un ouvert de E.

2. On appelle *fermé relatif de A* l'intersection de A avec un fermé de E.

Théorème 4.46 - *caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction*

Soit E, F deux espaces vectoriels normés, A une partie de E et $f : A \to F$. f admet une limite $l \in F$ en $a \in \overline{A}$ si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A convergeant vers a, la suite $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

Théorème 4.47 - *caractérisation séquentielle de la continuité d'une fonction*

Soit E, F deux espaces vectoriels normés, A une partie de E et $f : A \to F$. f est continue en $a \in \overline{A}$ si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A convergeant vers a, la suite $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

Théorème 4.55 - *applications coïncidant sur une partie dense*

Soit E et F deux espaces vectoriels normés et A une partie de E. Deux applications continues de A dans F qui coïncident sur une partie B dense dans A sont égales.

Théorème 4.56 - *caractérisation de la continuité par l'image réciproque*

Soit E, F deux espaces vectoriels normés, A une partie de E et $f : A \to F$. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est continue.

2. L'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé relatif de A.

3. L'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert relatif de A.

Définition 4.59 - *homéomorphisme*

Soit E et F deux espaces vectoriels normés. On appelle *homéomorphisme de E dans F* une application continue et bijective de E dans F dont la bijection réciproque est aussi continue.

Théorème 4.65 - *caractérisation des applications linéaires continues*

Soit E et F deux espaces vectoriels normés et f une application linéaire de E dans F. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est continue sur E.
2. f est continue en 0_E.
3. f est bornée sur la boule unité fermée.
4. $\exists K \in \mathbb{R}_+, \forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq K\|x\|_E$.
5. f est lipschitzienne sur E.
6. f est uniformément continue sur E.

Théorème 4.69 - *continuité des applications linéaires de source de dimension finie*

Soit E et F deux espaces vectoriels normés. Si E est de dimension finie, alors toute application linéaire de E dans F est continue.

Théorème 4.71 - *caractérisation des applications bilinéaires continues*

Soit E, F et G trois espaces vectoriels normés et φ une application bilinéaire de $E \times F$ dans G. Alors l'application φ est continue sur $E \times F$ si et seulement si :

$$\exists K \in \mathbb{R}_+, \forall (x, y) \in E \times F, \|\varphi(x, y)\|_G \leq K\|x\|_E\|y\|_F$$

Définition 4.75 - *norme subordonnée d'une application linéaire continue*

Soit E et F deux espaces vectoriels normés. Pour toute application linéaire continue de E dans F, l'ensemble des normes des images des éléments de la boule unité fermée de E est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$: elle admet une borne supérieure, notée :

$$|||f||| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\|$$

On appelle *norme subordonnée aux normes de E et F* l'application :

$$\begin{aligned} |||\cdot||| : \mathcal{LC}(E, F) &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ f &\longmapsto |||f||| \end{aligned}$$

C'est une norme.

Théorème 4.77 - *caractérisation de la norme triple*

Soit $f \in \mathcal{LC}(E, F)$, où E et F sont deux espaces vectoriels normés. La norme triple de f est le plus petit réel $K > 0$ tel que pour tout x, $\|f(x)\|_F \leq K\|x\|_E$:

$$|||f||| = \inf\{K > 0, \forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq K\|x\|_E\}$$

On a aussi :

$$|||f||| = \sup_{\|x\|_E \neq 0_E} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

Théorème 4.78 - *sous-multiplicativité de la norme triple*

Soit E, F et G trois espaces vectoriels normés. Si f est une application linéaire continue de E dans F et g une application linéaire continue de F dans G, alors $g \circ f$ est une application linéaire continue de E dans G et :

$$|||g \circ f||| \leq |||f||| \times |||g|||$$

Définition 4.79 - *algèbre normée unitaire*

On appelle *algèbre normée unitaire* une algèbre $\mathcal{A}$ munie d'une norme $\|\cdot\|$ telle que :

$$\begin{cases} \|e\| = 1 \\ \forall (x, y) \in \mathcal{A}^2,\ \|x \times y\| \leq \|x\|\|y\| \end{cases}$$

Bonsoir monsieur,

À la suite d'un exercice de topologie (3.15 : densité de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$), vous nous aviez expliqué qu'il était possible de montrer qu'il existe une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ constituée d'éléments de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$. Vous nous aviez alors montré que $\overline{\mathrm{Vect}(\mathcal{GL}_n(\mathbb{C}))} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Cependant même après relecture, je n'ai pas réussi à comprendre votre démonstration aboutissant à l'égalité $\mathrm{Vect}(\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})) = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Auriez-vous un indice ? Pardonnez-moi pour ce message maculé de symboles dollar, il est difficile de parler de ces ensemble en français.

Merci d'avance, bonne soirée.

Raphaël JONTEF