Définition 3.1 - *caractérisation de norme sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel*

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. une *norme sur E* est une application $||.|| : E \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tout $(x, y) \in E^2$:

1. *positivité* :
$$||x|| \geq 0$$
2. *Axiome de séparation* :
$$||x|| = 0 \implies x = 0$$
3. *Absolue homogénéité* :
$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ ||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$$
4. *Inégalité triangulaire* :
$$||x|| + ||y|| \geq ||x + y||$$

Exemple 3.3 (1) - *normes de $\mathbb{K}^n$*

Les applications suivantes sont des normes sur $\mathbb{K}^n$:

1. $||.||_1 : (x_1,\, \dots,\, x_n) \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|$
2. la *norme euclidienne associée au produit scalaire canonique sur $\mathbb{K}^n$* :
$$||.||_2 : (x_1,\, \dots,\, x_n) \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$
3. la *norme infinie* $||.||_\infty : (x_1,\, \dots,\, x_n) \mapsto \displaystyle\max_{i \in [\![1,\, n]\!]} (|x_i|)$

Exemple 3.3 (2) - *normes de $\mathcal{C}^0([a\,;\, b], \mathbb{R})$*

Les applications suivantes sont des normes sur $\mathcal{C}^0([a\,;\, b], \mathbb{R})$:

1. la *norme de la convergence en moyenne* $||.||_1 : f \mapsto \displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$
2. la *norme euclidienne associée au produit scalaire canonique sur $\mathcal{C}^0([a\,;\, b], \mathbb{R})$* :
$$||.||_2 : f \mapsto \sqrt{\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t}$$
3. la *norme infinie* $||.||_\infty : f \mapsto \displaystyle\sup_{x \in [a\,;\, b]} (|f(x)|)$

Théorème 3.7 - *norme euclidienne associée à un produit scalaire*

Soit $(E, (.|.))$ un espace préhilbertien réel. L'application $||.|| : x \mapsto \sqrt{(x|x)}$ est une norme, appelée *norme euclidienne associée à* $(.|.)$.

Définition 3.12 - *espace métrique*

Soit E un ensemble. Une application $d : E \times E \to \mathbb{R}$ est appelée *distance* si elle vérifie ces propriétés :

1. $\forall (x, y) \in E^2$, $\mathrm{d}(x,\, y) \geq 0$
2. $\forall (x, y) \in E^2$, $\mathrm{d}(x,\, y) = 0 \implies x = y$
3. $\forall (x, y) \in E^2$, $\mathrm{d}(x,\, y) = d(y,\, x)$
4. $\forall (x, y, z) \in E^3$, $\mathrm{d}(x,\, z) \leq \mathrm{d}(x,\, y) + \mathrm{d}(y,\, z)$

Une telle application munit E d'une structure d'*espace métrique*.

Définition 3.14 - *distance d'un point à une partie non vide*

Soit (E, d) un espace métrique. Étant donnée une partie A de E et x un élément de E, on appelle *distance de x à A* la borne inférieure des distances de x à tous les éléments de A :

$$\mathrm{d}(x,\, A) = \inf_{a \in A} \mathrm{d}(x,\, a)$$

Définition 3.15 - *sphère d'un espace vectoriel normé*

Soit E un espace vectoriel normé. On appelle *sphère de centre $a \in E$ et de rayon $r \geq 0$* de E l'ensemble $\mathcal{S}(a,\, r) = \{x \in E,\, ||x - a|| = r\}$.

Définition 3.16 - *partie bornée d'un espace vectoriel normé*

Soit E un espace vectoriel normé. On dit qu'une partie A de E est *bornée* lorsqu'il existe une boule fermée la contenant :

$$\exists a \in E,\, \exists r \geq 0,\, A \subset \overline{B}(a,\, r)$$

Soit :

$$\exists r \geq 0,\, \forall x \in A,\, ||x|| \leq r$$

Définition 3.19 - *application bornée*

Soit E un espace vectoriel normé et X un ensemble fini. Une application $\varphi : X \to E$ est dite bornée lorsque l'ensemble $\mathrm{Im}(\varphi)$ est borné :

$$\exists r \geq 0, \forall x \in X, ||\varphi(x)||_E < r$$

Définition 3.20 - *applications bornées sur un espace vecotriel normé*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et X un ensemble fini. L'ensemble $\mathcal{B}(X, E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et l'application :

$$f \mapsto \sup_{x \in X} ||f(x)||$$

est une norme sur $\mathcal{B}(X, E)$, appelée *norme infinie*.

Définition 3.21 - *application lipschitzienne*

Soit E et F deux espaces vectoirles normés, $A \subset E$ et $k \geq 0$. Une application $f : A \to F$ est dite k-lipschitzienne sur A lorsque :

$$\forall (x, y) \in A^2, ||f(x) - f(y)||_F \leq k||x - y||_E$$

L'ensemble des applications k-lipschitziennes de A dans F est noté $\mathrm{Lip}_k(A, F)$.

Définition 3.30 - *normes équivalentes*

Soit N et N' deux normes sur un espace vectoriel E. On dit que *N et N' sont équivalentes* lorsque :

$$\exists (\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \alpha N \leq N' \leq \beta N$$

Il s'agit d'une relation d'équivalence.

Proposition 3.31 - *normes équivalentes et convergence de suites*

Deux normes sur un espace vectoriel sont équivalentes si et seulement si toute suite qui converge pour l'une vers $x \in E$ converge pour l'autre, également vers x.

Proposition 3.32 - *normes équivalentes et boules incluses*

Deux normes sur un espace vectoriel sont équivalentes si et seulement si toute boule pour l'une contient une boule pour l'autre.

Définition 3.37 - *valeur d'adhérence d'une suite*

Un élément $a \in E$ est appelé valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ s'il existe une suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers a.

Proposition 3.38 - *caractérisation de l'adhérence*

Soit E un espace vectoriel normé. L'élément a est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ si et seulement si pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, toute boule centrée en a contient au moins un terme de la suite de rang supérieur ou égal à n_0 :

$$\forall n_0 \in \mathbb{N},\, \forall r > 0,\, \exists N \geq n_0,\, ||u_N - a|| < r$$