Définition 34.1 - *espaces préhilbertien réel, euclidien*

Un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire est appelé *espace préhilbertien réel*. Un espace préhilbertien réel de dimension finie est appelé *espace euclidien*.

Définition 34.11 (1) - *norme associée à un produit scalaire*

Soit E un espace préhilbertien réel. On appelle *norme euclidienne sur E* l'application :

$$||.|| \quad : \quad \begin{array}{l} E \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto \sqrt{\langle x,\, x\rangle} \end{array}$$

Définition 34.11 (2) - *vecteur unitaire*

Soit E un espace préhilbertien réel. On dit qu'un vecteur $x \in E$ est *unitaire* si $||x|| = 1$.

Définition 34.11 (3) - *distance euclidienne*

Soit E un espace préhilbertien réel. On appelle *distance euclidienne sur E* l'application :

$$d \quad : \quad \begin{array}{l} E^2 \to \mathbb{R}_+ \\ (x, y) \mapsto ||x - y|| = \sqrt{\langle x - y,\, x - y\rangle} \end{array}$$

Proposition 34.15 - *identité de polarisation*

Soit E un espace vectoriel. Si existence, le produit vectoriel associé à une norme sur E vérifie :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \langle x,\, y\rangle = \frac{||x + y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2}{2}$$

Théorème 34.16 (0) - *inégalité de Cauchy-Schwarz*

Soit E un espace préhilbertien réel, $(x, y) \in E^2$.

$$|\,\langle x,\, y\rangle\,| \leq ||x|| \times ||y||$$

avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Théorème 34.16 (1) - *inégalité triangulaire*

Soit E un espace préhilbertien réel, $(x, y) \in E^2$.

$$||\,||x|| - ||y||\,|| \leq ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$$

De plus,

$$||x + y|| = ||x|| + ||y|| \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}_+,\, x = \alpha y$$

Définition 34.19 (1) - *vecteurs orthogonaux*

Soit E un espace préhilbertien réel, $(x, y) \in E^2$. On dit que x et y sont *orthogonaux* si $\langle x,\, y \rangle = 0$. On note alors $x \perp y$.

Définition 34.19 (2) - *parties orthogonales*

Soit E un espace préhilbertien réel, $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$. On dit que X et Y sont *orthogonales* si :

$$\forall (x, y) \in X \times Y,\, \langle x,\, y \rangle = 0$$

On note alors $X \perp Y$.

Définition 34.19 (3) - *famille orthogonale*

Soit E un espace préhilbertien réel, $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E. On dit que $(x_i)_{i \in I}$ est *orthogonale* si :

$$\forall (i, j) \in I^2,\, i \neq j \implies \langle x_i,\, x_j \rangle = 0$$

Définition 34.19 (4) - *famille orthonormée*

Soit E un espace préhilbertien réel, $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E. On dit que $(x_i)_{i \in I}$ est *orthonormée* si elle est orthogonale et constituée de vecteurs unitaires, *i.e.* :

$$\forall (i, j) \in I^2,\, \langle x_i,\, x_j \rangle = \delta_{ij}$$

Proposition 34.bonus - *caractérisation de norme sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel*

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Une application $\varphi : E \to \mathbb{R}$ est une norme sur E si et seulement si elle vérifie pour tout $(x, y) \in E^2$:

1. *Séparation* :
$$\varphi(x) = 0 \implies x = 0$$

2. *Absolue homogénéité* :
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \, \varphi(\lambda x) = |\lambda| \varphi(x)$$

3. *Inégalité triangulaire* :
$$\varphi(x) + \varphi(y) \geq \varphi(x + y)$$

Théorème 34.25 - *CS de liberté*

Soit E un espace préhilbertien réel. Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls de E est libre.

Théorème 34.26 - *coordonnées dans une base orthonormale*

Soit E un espace euclidien de dimension $n \neq 0$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E (une famille orthonormale de n éléments).
Les coordonnées de tout vecteur $x \in E$ dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ sont $(\langle x, \, e_1 \rangle, \ldots, \langle x, \, e_n \rangle)$.

Théorème 34.27 - *expression du produit scalaire dans une base orthonormale*

Soit E un espace euclidien de dimension $n \neq 0$. Soit $x, y \in E$ de coordonnées respectives $X = (x_1, \ldots, x_n)$ et $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ dans une certaine base orthonormale de E. On a alors :

$$\langle x, \, y \rangle = k = 1nx_k y_k$$

Théorème 34.28 - *algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt*

Soit E un espace préhilbertien réel et $F = (f_1, \ldots, f_n)$ une famille libre de E. À partir de F, il est possible de construire une famille orthonormale $(u_1, \ldots u_n)$, telle que :

$$\forall k \in [\![1, \, n]\!], \, \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_k) = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_k)$$

Pour tout $k \in [\![1, \, n]\!]$, le vecteur u_k est donné par :

$$u_k = \pm \frac{f_k - i = 1k - 1 \, \langle f_k, \, u_i \rangle \, u_i}{||f_k - i = 1k - 1 \, \langle f_k, \, u_i \rangle \, u_i||}$$

Théorème 34.38 (0) - *supplémentaire orthogonal d'un sev de dimension finie*

Soit E un espace préhilbertien réel et F un sev de dimension finie de E.
$F^{\perp}$ est l'unique supplémentaire de F dans E, orthogonal à E. On l'appelle le *supplémentaire orthogonal* de F dans E.

Théorème 34.38 (1) - *supplémentaire orthogonal d'un sev de dimension finie*

Soit E un espace préhilbertien réel et F un sev de dimension finie de E. On a :

$$F = F^{\perp\perp}$$

Définition 34.39 - *vecteurs normaux à un hyperplan*

Soit E un espace euclidien de dimension $n \neq 0$ et H un hyperplan de E. Le sous-espace $H^{\perp}$ est une droite dont tout vecteur non nul est dit *vecteur normal à H*.