Théorème 14.50 (0) - *de la limite monotone*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, alors :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}(u_n) \\ \forall n\in\mathbb{N},\, u_n \leq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}(u_n) \end{cases}$$

2. si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et majorée, alors :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}(u_n) \\ \forall n\in\mathbb{N},\, u_n < \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}(u_n) \end{cases}$$

3. si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, alors :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}}(u_n) \\ \forall n\in\mathbb{N},\, u_n \geq \inf\limits_{n\in\mathbb{N}}(u_n) \end{cases}$$

4. si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, alors :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}}(u_n) \\ \forall n\in\mathbb{N},\, u_n > \inf\limits_{n\in\mathbb{N}}(u_n) \end{cases}$$

Proposition 14.50 (1) - *caractérisation de la convergence d'une suite monotone*

Une suite monotone est convergente si et seulement si elle est bornée.

Proposition 14.50 (2) - *limites de suites croissante non majorée, décroissante non minorée*

Une suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.
De même, Une suite décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.

Théorème 14.65 - *monotonie d'une suite récurrente définie par* $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit $D \subset \mathbb{R}$, $u_0 \in D$, $f : D \to D$ une fonction et $(u_n) \in D^{\mathbb{N}}$ l'unique suite définie par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Le signe de $x \mapsto f(x) - x$ renseigne sur la monotonie de (u_n) :

$$\begin{cases} \forall x \in D, f(x) \geq x \implies \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n \\ \forall x \in D, f(x) \leq x \implies \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n \end{cases}$$

2. Si f est croissante, alors (u_n) est :

- croissante si $u_1 \geq u_0$
- décroissante si $u_1 \leq u_0$

3. si f est décroissante, alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et de sens contraire :

- si $u_2 \geq u_0$ alors (u_{2n}) est croissante et (u_{2n+1}) est décroissante
- si $u_2 \leq u_0$ alors (u_{2n}) est décroissante et (u_{2n+1}) est croissante

Théorème 14.66 - *du point fixe*

Soit $D \subset \mathbb{R}$, $u_0 \in D$, $f : D \to D$ une fonction et $(u_n) \in D^{\mathbb{N}}$ l'unique suite définie par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si $\lim_{n \in \mathbb{N}} u_n = \ell \in D$ et si f est continue en ℓ, alors $f(\ell) = \ell$.