Théorème 6.31 - *caractérisation de la bonne fondation d'un ordre*

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\leq$ est un ordre bien fondé.
2. Il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante d'élements de E.
3. Pour tout prédicat P sur E,

$$\Big(\forall x \in E, \Big(\forall y \in E, x > y \implies P(y)\Big) \implies P(x)\Big) \implies \Big(\forall x \in E, P(x)\Big)$$

Démonstration

(1) $\implies$ (2) : Supposons que $\leq$ est un ordre bien fondé, et par l'absurde, que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite infinie strictement décroissante d'éléments de E. Alors l'ensemble non vide $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} \subset E$ admet un élément minimal x_k ; Ainsi, par décroissance stricte de (x_n), $x_{k+1} < x_k$, Absurde, x_k est l'élément minimal de E.

Démonstration

(2) $\implies$ (3) : Soit P un prédicat sur E. On suppose par l'absurde :

$$\begin{aligned}
& (2) \text{ et } \neg(3) \\
\Leftrightarrow\quad & (2) \text{ et } \Big(\forall x \in E, \Big(\forall y \in E, x > y \implies P(y)\Big) \implies P(x)\Big) \text{ et } \Big(\exists x \in E, \neg P(x)\Big) \\
\Leftrightarrow\quad & (2) \text{ et } \Big(\forall x \in E, \neg P(x) \implies \Big(\exists y \in E, x > y \text{ et } \neg P(y)\Big)\Big) \text{ et } \Big(\exists x \in E, \neg P(x)\Big)
\end{aligned}$$

Soit $x \in E$ tel que $\neg P(x)$. On choisit $y \in E$ tel que $x > y$ et $\neg P(y)$. De même, on peut encore choisir $z \in E$ tel que $y > z$ et $\neg P(z)$. De par le principe de récurrence, on construit ainsi une suite strictement décroissante $(x_i) \in E^{\mathbb{N}}$, telle que pour tout $i \in \mathbb{N}, \neg P(x_i)$. Or on a (2), Absurde.

Démonstration

(3) $\implies$ (1) : Remarquons d'abord que :

$$\begin{aligned} & (3) \implies (1) \\ \Leftrightarrow \quad & \left(\left[\left(\forall x \in E, \left(\forall y \in E, x > y \implies P(y)\right) \implies P(x)\right) \implies \left(\forall x \in E, P(x)\right)\right] \implies (1)\right) \\ \Leftrightarrow \quad & \left(\left[\left(\exists x \in E, \neg P(x)\right) \implies \left(\exists x \in E, \left(\forall y \in E, x > y \implies P(y)\right) \text{ et } \neg P(x)\right)\right] \implies (1)\right) \end{aligned}$$

Soit $A \subset E$, tel que $A \neq \varnothing$. On note P le prédicat de E tel que $P(x) : \ll \ x \notin A \ \gg$. Nécessairement, il existe $x \in E$ tel que

$$\begin{aligned} & x \in A \\ \text{donc} \quad & \neg P(x) \end{aligned}$$

On choisit alors $m \in A$ tel que :

$$\begin{aligned} & \neg P(m) \text{ et } \left(\forall y \in E, y < m \implies P(y)\right) \\ \Leftrightarrow \quad & m \in A \text{ et } \left(\forall y \in E, y < m \implies y \notin A\right) \end{aligned}$$

m est alors l'élément minimal de A. donc $\leq$ est un ordre bien fondé.

Théorème 6.48 - *preuve par induction structurelle*

Soit $X \subset E$ un ensemble défini de manière inductive par un ensemble de base B et un ensemble de constructeurs $\mathcal{K}$. Soit $\mathcal{P}$ un prédicat sur E.
si on a :

1. $\forall b \in B, \mathcal{P}(b)$

2. $\forall f : E^p \to E \in \mathcal{K}, \forall x_1, \dots, x_p \in X, \quad \left(\forall i \in [\![1, p]\!], \mathcal{P}(x_i)\right) \implies \left(\mathcal{P}\big(f(x_1, \dots, x_p)\big)\right)$

Alors,

$$\forall x \in X, \mathcal{P}(X)$$

Démonstration

On définit la suite (Y_n) par $\begin{cases} Y_0 = B \\ \forall n \in \mathbb{N}, Y_{n+1} = Y_n \cup \mathcal{K}(Y_n) \end{cases}$

alors $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$.
Pour tout $x \in X$

> **Définition temporaire** - *hauteur d'un élément d'ensemble inductif défini récursivement*
>
> on définit alors la *hauteur* de x par $h(x) = \min\{n \in \mathbb{N}, x \in Y_n\}$.

On suppose que :

1. $\forall b \in B, \mathcal{P}(b)$
2. $\forall f : E^p \to E \in \mathcal{K}, \forall x_1, \dots, x_p \in X, \quad \Big(\forall i \in [\![1,p]\!], \mathcal{P}(x_i)\Big) \implies \Big(\mathcal{P}\big(f(x_1,\dots,x_p)\big)\Big)$

Montrons par récurrence forte sur la hauteur n des éléments de X que $\forall x \in X, \mathcal{P}(X)$.

- Si $n = 0$:
  Soit $x \in X$ tel que $h(x) = 0$, i.e. tel que $x \in Y_0 = B$. Alors d'après la propriété (1), $\mathcal{P}(x)$
- Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que
  $$\forall y \in X, h(y) \leq n \implies \mathcal{P}(y)$$
  Soit $x \in X$ tel que $h(x) = n + 1$. Montrons que $\mathcal{P}(x)$ est encore vraie.
  Par définition de la hauteur, $x \in Y_{n+1} = Y_n \cup \mathcal{K}(Y_n)$. De plus, $x \notin Y_n$ $(h(x) = n + 1)$.
  Alors, $x \in \mathcal{K}(Y_n)$.
  Soit donc $f : E^p \to E \in \mathcal{K}$ et $y_1, \dots, y_p \in Y_n$ tels que $x = f(y_1, \dots y_p)$.
  Donc $P(y_i)$ est vraie par hypothèse de récurrence $(\forall i \in [\![1,p]\!], h(y_i) \leq n)$.
  D'après la proposition (2), on a donc $\mathcal{P}(x)$.
- Ainsi, par récurrence forte sur n,
  $$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X \text{ de hauteur } n, \mathcal{P}(x)$$