Définition 7.1 - *système de preuve*

Un système de preuve est un cadre formel permettant de dériver des énoncés logiques à partir de règles bien définies et d'hypothèses. On le caractérise par :

1. *un ensemble d'axiomes* : propositions admises comme vraies.
2. *un ensemble de règles d'inférence*.

On représente une preuve par un arbre dont *les feuilles sont des instances d'axiomes* et *les noeuds internes des instances de règles d'inférence*.

Définition 7.2 - *instance d'un axiome, d'une règle d'inférence*

Une *instance d'un axiome ou d'une règle d'inférence* est obtenue à partir de l'axiome ou de la règle, en choisissant pour chaque variable une formule logique et en remplaçant chaque occurrence de la variable par la formule.

Définition 7.3 - *séquent*

Un séquent (également jugement), est une *affirmation qui exprime que, sous certaines hypothèses, une conclusion peut être déduite*. Il est généralement écrit sous la forme :

$$\Gamma \vdash C$$

où : $\begin{cases} \Gamma & \text{est un ensemble d'hypothèses (formules de la logique propositionnelle supposées vraies)} \\ C & \text{est la conclusion qui peut être déduite à partir des hypothèses de } \Gamma \end{cases}$

Intuitivement, cela signifie : *"Si les hypothèses de Γ sont vérifiées, alors C peut être démontrée"*

Définition 7.4 - *règle d'inférence*

Dans un système de preuve, une *règle d'inférence* est constituée d'une *famille de prémisses $P_1, \ldots, P_k$*, et d'une *conclusion C*. On représente une règle d'inférence par :

$$\frac{P_1 \quad \ldots \quad P_k}{C}$$

Définition 7.5 - *règle d'inférence de l'axiome*

En déduction naturelle, Pour un ensemble Γ de formules de la logique propositionnelle, pour toute formule $A \in \Gamma$, le séquent $T \vdash A$ est prouvable :

$$\frac{\text{(axiome)}}{\Gamma \vdash A}$$

en constitue une démonstration.

Définition 7.6 - *séquent prouvable*

Un séquent est dit *prouvable* lorsqu'il existe un *un arbre de preuve* de celui-ci. Plus précisément, le séquent $\Gamma \vdash A$ est prouvable si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

- **cas de base** : $A \in \Gamma$. $\dfrac{\text{(axiome)}}{\Gamma \vdash A}$ est alors une démonstration
- **cas inductif** : il existe $\Gamma_1 \vdash C_1, \ldots, \Gamma_k \vdash C_k$ des séquents prouvables, ainsi qu'une règle d'inférence (γ) dont :

  $$\frac{\Gamma_1 \vdash C_1 \quad \ldots \quad \Gamma_k \vdash C_k}{\Gamma \vdash A}(\gamma)$$

  est une instance. Le cas échéant $\Gamma \vdash A$ est prouvable via la règle (γ).

Définition 7.7 - *inductive d'un séquent prouvable*

L'ensemble des séquents prouvables en déduction naturelle est défini inductivement à partir des règles de déduction naturelle :

- Pour Γ un ensemble de formules de la logique propositionnelle, et $A \in \Gamma$:

  $$\Gamma \vdash A \text{ prouvable par axiome}$$

- Pour Γ un ensemble de formules de la logique propositionnelle, et $A \in \Gamma$:

Définition 7.8 - *règle d'introduction du "et"*

En déduction naturelle, Pour un ensemble Γ de formules de la logique propositionnelle, pour toutes formules A, B et C :

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \land B}(\text{i}\land)$$

telle est la *règle d'introduction du "et"*.

Définition 7.9 - *règle d'élimination du "et"*

En déduction naturelle, Pour un ensemble Γ de formules de la logique propositionnelle, pour toutes formules A et B :

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}(\mathrm{e} \wedge \mathrm{g}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}(\mathrm{e} \wedge \mathrm{d})$$

telle est la *règle d'élimination du "et"*.

Définition 7.10 - *règle d'introduction du "ou"*

En déduction naturelle, Pour un ensemble Γ de formules de la logique propositionnelle, pour toutes formules A et B :

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}(\mathrm{i} \vee \mathrm{d}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}(\mathrm{i} \vee \mathrm{g})$$

telle est la *règle d'introduction du "ou"*.

Définition 7.11 - *règle d'élimination du "ou"*

En déduction naturelle, Pour un ensemble Γ de formules de la logique propositionnelle, pour toutes formules A, B et C :

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}(\mathrm{e}\vee)$$

telle est la *règle d'élimination du "ou"*.

Définition 7.12 - *règle d'introduction du "non"*

En déduction naturelle, Pour un ensemble Γ de formules de la logique propositionnelle, pour toute formule A :

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}(\mathrm{i}\neg)$$

telle est la *règle d'introduction du "non"*.

Définition 7.13 - *règle d'élimination du "non"*

En déduction naturelle, Pour un ensemble Γ de formules de la logique propositionnelle, pour toute formule A :

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash \bot}(\mathrm{e}\neg)$$

telle est la *règle d'élimination du "non"*.

Définition 7.14 - *règle d'introduction du "implique"*

En déduction naturelle, Pour un ensemble Γ de formules de la logique propositionnelle, pour toutes formules A et B :

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}(\mathrm{i} \to)$$

telle est la *règle d'introduction du "implique"*.

Définition 7.15 - *règle d'élimination du "implique"*

En déduction naturelle, Pour un ensemble Γ de formules de la logique propositionnelle, pour toutes formules A et B :

$$\frac{\Gamma \vdash A \to B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}(\mathrm{e} \to)$$

telle est la *règle d'élimination du "implique"*.

Théorème 7.16 - *propriété d'affaiblissement*

En déduction naturelle, pour des ensembles Γ et Δ de formules de la logique propositionnelle, pour toute formule A de la logique propositionnelle, si $\Gamma \vdash A$ est prouvable, alors il en est de même pour $\Gamma, \Delta \vdash A$.