

**Théorème 10.11** - *dérivée d'une composée par une application linéaire*

Soit  $E, F$  deux  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels normés de dimension finie,  $u$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ , et  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $E$ . Alors  $u \circ f$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1(I, F)$  et :

$$(u \circ f)' = u \circ f'$$

**Théorème 10.12** - *dérivée d'une composée par une application bilinéaire*

Soit  $E, F$  et  $G$  trois espaces vectoriels normés de dimension finie,  $B$  une application bilinéaire de  $E \times F$  vers  $G$ , et  $f$  et  $g$  deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  à valeurs respectives dans  $E$  et  $F$ . Alors  $B(f, g)$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1(I, G)$ , et :

$$\left( B(f, g) \right)' = B(f', g) + B(f, g')$$

**Théorème 10.29** - *construction de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux*

Soit  $E$  un espace vectoriel normé de dimension finie,  $f \in \mathcal{CM}([a; b], E)$ . Si  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de fonctions en escalier convergeant uniformément vers  $f$ , alors la suite  $\left( \int_{[a; b]} \varphi_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente.

**Définition 10.30** - *intégrale d'une fonction continue par morceaux*

Soit  $E$  un espace vectoriel normé de dimension finie,  $f \in \mathcal{CM}([a; b], E)$ . Il existe par densité de  $\mathcal{E}([a; b], E)$  dans  $\mathcal{CM}([a; b], E)$  une suite  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions de  $\mathcal{E}([a; b])$  convergeant uniformément vers  $f$ . On appelle *intégrale de  $f$  sur  $[a; b]$*  le vecteur :

$$\int_{[a; b]} f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a; b]} \varphi_n$$

Cette intégrale ne dépend pas de la suite de  $\mathcal{E}([a; b])^{\mathbb{N}}$  choisie.

**Théorème 10.35** - *fondamental du calcul intégral*

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ , à valeurs dans un espace vectoriel  $E$  de dimension finie. Pour tout  $a \in I$ , l'application :

$$\begin{aligned} F : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_a^x f(t) \, dt \end{aligned}$$

est l'unique primitive de  $f$  (sa dérivée est  $f$ ) s'annulant en  $a$ .  $F$  est donc de classe  $\mathcal{C}^1$ .

**Théorème 10.39** - *changement de variable*

Soit  $f : [a; b] \rightarrow E$  continue et  $\varphi$  un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $[a; b]$  sur  $[\varphi(a); \varphi(b)]$ .

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt$$

**Théorème 10.42** - *intégration d'un o*

Soit  $I$  un intervalle et  $E$  de dimension finie. Soit  $f : I \rightarrow E$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  avec  $g' \geq 0$ . Supposons pour  $a \in I$  que  $f' \underset{a}{=} o(g')$ . Alors :

$$\|f(x) - f(a)\|_E \underset{x \rightarrow a}{=} o(|g(x) - g(a)|)$$

**Théorème 10.47** - *formule de Taylor avec reste intégral*

Soit  $f \in \mathcal{D}^{n+1}(I, E)$  telle que  $f^{(n+1)}$  est continue par morceaux sur l'intervalle  $I$ . Pour  $a \in I$  :

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n \, dt$$

**Théorème 10.48** - *inégalité de Taylor-Lagrange*

Soit  $f \in \mathcal{D}^{n+1}(I, E)$  telle que  $f^{(n+1)}$  est continue par morceaux sur l'intervalle  $I$ . Soit  $[a; b] \subset I$  et  $M$  un majorant de  $\|f^{(n+1)}\|_E$  sur  $[a; b]$ . Alors :

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right\|_E \leq M \left| \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right|$$

**Théorème 10.57** - *échange limite-intégrale*

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{CM}([a; b], E)^{\mathbb{N}}$  convergeant uniformément vers  $f \in \mathcal{CM}([a; b], E)$  sur  $[a; b]$ . Alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a; b]} f_n = \int_{[a; b]} f$$

**Théorème 10.62** - *de convergence dominée pour une suite de fonctions*

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}([a; b], \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ . Sous réserve des hypothèses suivantes,

1.  $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{CM}([a; b], \mathbb{K})$ .
2.  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement sur  $[a; b]$  et sa limite  $y$  est continue par morceaux.
3. *hypothèse de domination* : il existe  $\varphi \in \mathcal{CM}([a; b], \mathbb{R}_+)$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|f_n| \leq \varphi$

on peut échanger les symboles "lim" et "∫" :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a; b]} f_n = \int_{[a; b]} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$$

**Théorème 10.63** - de convergence dominée pour une série de fonctions

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}([a; b], \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ . Sous réserve des hypothèses suivantes,

1.  $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{CM}([a; b], \mathbb{K})$ .
2.  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement sur  $[a; b]$  et sa somme  $y$  est continue par morceaux.
3. la série  $\sum_n \int_a^b |f_n(t)| dt$  converge

on peut échanger les symboles " $\sum$ " et " $\int$ " :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{[a; b]} f_n = \int_{[a; b]} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$$

**Théorème 10.66** - primitivation d'une limite uniforme de suite de fonctions

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}([a; b], E)^{\mathbb{N}}$ . Sous réserve des hypothèses suivantes,

1.  $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^0([a; b], E)$ .
2.  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers une fonction  $f$  sur  $[a; b]$ , alors continue.

Pour tout  $\alpha \in [a; b]$ , la suite  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des primitives des  $f_n$  respectives s'annulant en  $\alpha$  converge uniformément vers la primitive de  $f$  s'annulant en  $\alpha$  :

$$\left\| \int_{\alpha}^{\cdot} f_n(t) dt - \int_{\alpha}^{\cdot} f(t) dt \right\|_{\infty}^{[a; b]} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

**Théorème 10.66** - dérivation d'une limite uniforme de suite de fonctions

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, E)^{\mathbb{N}}$ . Sous réserve des hypothèses suivantes,

1.  $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^1(I, E)$ .
2.  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers une fonction  $f \in \mathcal{CM}(I, E)$
3.  $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers une fonction  $g$  sur  $I$ .

la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1(I, E)$  et  $f' = g$ .

**Théorème 10.73** - *dérivation  $k$  fois d'une limite uniforme de suite de fonctions*

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, E)^{\mathbb{N}}$ . Sous réserve des hypothèses suivantes,

1.  $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^k(I, E)$ .
2. pour tout  $i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ , la suite  $(f_n^{(i)})_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers une fonction  $h_i \in \mathcal{CM}(I, E)$
3.  $(f_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers une fonction  $g$  sur  $I$ .

la fonction  $h_0$  est de classe  $\mathcal{C}^k(I, E)$  et  $h_0^{(k)} = g$ .