Définition 5.1 - *vecteur élémentaire*

Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle vecteur élémentaire d'indice $i \in [\![1,\, n]\!]$ le vecteur :

$$E_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \xleftarrow{\text{indice } i} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

La famille $(E_i)_{i \in [\![i,\, n]\!]}$ est alors la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Puis, en remarquant que :

$$\forall (i, j) \in [\![1,\, n]\!]^2,\, E_i \times E_j^\top = E_{i,j},$$

On retrouve la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 5.2 - *produit de matrices élémentaires*

Soit $(i, j, k, l) \in [\![1,\, n]\!]^4$. On a :

$$E_{i,j} \times E_{k,l} = \delta_{j,k} E_{i,l}$$

Définition 5.3 - *somme directe d'espaces vectoriels*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(F_1, \ldots, F_p)$ une famille d'au moins deux sous-espaces vectoriels de E. La *somme $\sum_{i=1}^p F_i$ est directe* lorsque la décomposition d'un élément de cette somme en somme d'élements de chaque sous-espace vectoriel existe et est unique :

$$\bigoplus_{i=1}^{p} F_i = \{x \in E,\, \exists ! (x_1,\, \ldots,\, x_p),\, x = x_1 + \cdots + x_p\}$$

Proposition 5.4 - *caractérisation du caractère direct par la décomposition du neutre additif*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(F_1, \ldots, F_p)$ une famille d'au moins deux sous-espaces vectoriels de E. La somme $\sum_{i=1}^p F_i$ est directe si et seulement si 0_E se décompose de manière unique en la somme des neutres additifs des sous-espaces vectoriels (qui sont tous 0_E) :

$$\forall (x_1,\, \ldots,\, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p,\, \sum_{i=1}^{p} x_i = 0_E \implies x_1 = \cdots = x_p = 0_E$$

Proposition 5.5 - *caractérisation du caractère direct*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(F_1, \ldots, F_p)$ une famille d'au moins deux sous-espaces vectoriels de E. La somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe si et seulement si :

$$\left(\bigoplus_{i=1}^{p-1} F_i\right) \cap F_p = \{0_E\}.$$

Proposition 5.9 - *dimension d'une somme d'espaces vectoriels de dimiension finie*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(F_1, \ldots, F_p)$ une famille d'au moins deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E. Alors :

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \leq \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$$

De plus l'égalité est vérifiée si et seulement si la somme est directe.

Proposition 5.38 - *stabilité des sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par prise d'inverse*

Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Toute matrice M inversible de $\mathcal{A}$ a pour inverse un élément de $\mathcal{A}$.

Définition 5.41 - *sous-algèbre engendrée par un endomorphisme*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. L'image du morphisme d'algèbres $P \mapsto P(u)$ est appelée *sous-algèbre engendrée par u* et notée $\mathbb{K}[u]$.

Définition 5.42 - *polynôme caractéristique d'un endomorphisme*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle *polynôme caractéristique de u* le polynôme :

$$\chi_u = \det(X\mathrm{id}_E - u)$$

On dispose d'une définition tout à fait analogue pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\chi_u = \det(XI_n - A)$$

Proposition 5.44 - *expression du polynôme caractéristique d'un endomorphisme*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$. On a :

$$\chi_u = X^n - \operatorname{tr}(u)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(u)$$

Théorème 5.47 - *de décomposition des noyaux*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $P \wedge Q = 1$. On a :

$$\ker\big(A(u)\big) \oplus \ker\big(B(u)\big) = \ker\big(AB(u)\big)$$

Définition 5.49 - *sous-espace propre associé à une valeur propre*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et λ une valeur propre de u. On appelle *sous-espace propre associé à λ* l'espace $\ker(u - \lambda \mathrm{id}_E)$, supposément non réduit à $\{0_E\}$, sans quoi λ ne serait valeur propre.

Théorème 5.52 - *lien entre valeurs propres et racines du polynôme caractéristique*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Les valeurs propres de u sont exactement les racines de χ_u :

$$\mathrm{Sp}(u) = Z(\chi_u)$$

Définition 5.53 - *multiplicité d'une valeur propre*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$. La *multiplicité m_λ d'une valeur propre λ* de u est sa multiplicité en tant que racine de χ_u.

Théorème 5.63 - *spectres de u et $P(u)$*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. pour toute valeur propre λ de u, $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(u)$:

$$P\big(\mathrm{Sp}(u)\big) \subset \mathrm{Sp}\big(P(u)\big)$$

Proposition 5.64 - *lien entre valeurs propres et racines d'un polynôme annulateur*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ annulateur de u. Les valeurs propres de u sont à rechecher parmi les racines de P :

$$\mathrm{Sp}(u) \subset Z(P)$$

Ce résultat ne tient pas compte de la multiplicité.

Proposition 5.64 - *lien entre valeurs propres et racines du polynôme minimal*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. Les valeurs propres de u sont exactement les racines de μ_u :

$$\mathrm{Sp}(u) = Z(\mu_u)$$

Ce résultat ne tient pas compte de la multiplicité.

Théorème 5.70 - *de Cayley-Hamilton*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. χ_u est annulateur de u.