Définition 7.1 - *système de preuve*

Un système de preuve est un cadre formel permettant de dériver des énoncés logiques à partir de règles bien définies et d'hypothèses. On le caractérise par :

1. *un ensemble d'axiomes* : propositions admises comme vraies.
2. *un ensemble de règles d'inférence*.

On représente une preuve par un arbre dont *les feuilles sont des instances d'axiomes* et *les noeuds internes des instances de règles d'inférence*.

Définition 7.2 - *instance d'un axiome, d'une règle d'inférence*

Une *instance d'un axiome ou d'une règle d'inférence* est obtenue à partir de l'axiome ou de la règle, en choisissant pour chaque variable une formule logique et en remplaçant chaque occurrence de la variable par la formule.

Définition 7.3 - *séquent*

Un séquent (également jugement), est une *affirmation qui exprime que, sous certaines hypothèses, une conclusion peut être déduite*. Il est généralement écrit sous la forme :

$$\Gamma \vdash C$$

où : $\begin{cases} \Gamma & \text{est un ensemble d'hypothèses (formules de la logique propositionnelle supposées vraies)} \\ C & \text{est la conclusion qui peut être déduite à partir des hypothèses de } \Gamma \end{cases}$

Intuitivement, cela signifie : *"Si les hypothèses de Γ sont vérifiées, alors C peut être démontrée"*

Définition 7.4 - *règle d'inférence*

Dans un système de preuve, une *règle d'inférence* est constituée d'une *famille de prémisses $P_1, \ldots, P_k$*, et d'une *conclusion C*. On représente une règle d'inférence par :

$$\frac{P_1 \quad \ldots \quad P_k}{C}$$

Définition 7.5 - *règle d'inférence de l'axiome*

En déduction naturelle, Pour un ensemble Γ de formules de la logique propositionnelle, pour toute formule $A \in \Gamma$, le séquent $T \vdash A$ est prouvable :

$$\frac{\text{(axiome)}}{\Gamma \vdash A}$$

en constitue une démonstration.

Définition 7.6 - *séquent prouvable*

Un séquent est dit *prouvable* lorsqu'il existe un *un arbre de preuve* de celui-ci. Plus précisément, le séquent $\Gamma \vdash A$ est prouvable si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

- **cas de base** : $A \in \Gamma$. $\dfrac{\text{(axiome)}}{\Gamma \vdash A}$ est alors une démonstration
- **cas inductif** : il existe $\Gamma_1 \vdash C_1, \ldots, \Gamma_k \vdash C_k$ des séquents prouvables, ainsi qu'une règle d'inférence (γ) dont :

  $$\frac{\Gamma_1 \vdash C_1 \quad \ldots \quad \Gamma_k \vdash C_k}{\Gamma \vdash A}(\gamma)$$

  est une instance. Le cas échéant $\Gamma \vdash A$ est prouvable via la règle (γ).

Définition 7.7 - *inductive d'un séquent prouvable*

L'ensemble des séquents prouvables en déduction naturelle est défini inductivement à partir des règles de déduction naturelle :

- Pour Γ un ensemble de formules de la logique propositionnelle, et $A \in \Gamma$:

  $$\Gamma \vdash A \text{ prouvable par axiome}$$

- Pour Γ un ensemble de formules de la logique propositionnelle, et $A \in \Gamma$:

Définition 7.8 - *règle d'introduction du "et"*

En déduction naturelle, Pour un ensemble Γ de formules de la logique propositionnelle, pour toutes formules A, B et C :

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}(\mathrm{i}\wedge)$$

telle est la *règle d'introduction du "et"*.

Définition 7.9 - *règle d'élimination du "et"*

En déduction naturelle, Pour un ensemble Γ de formules de la logique propositionnelle, pour toutes formules A et B :

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}(\mathrm{e} \wedge \mathrm{g}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}(\mathrm{e} \wedge \mathrm{d})$$

telle est la *règle d'élimination du "et"*.

Définition 7.10 - *règle d'introduction du "ou"*

En déduction naturelle, Pour un ensemble Γ de formules de la logique propositionnelle, pour toutes formules A et B :

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}(\mathrm{i} \vee \mathrm{d}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}(\mathrm{i} \vee \mathrm{g})$$

telle est la *règle d'introduction du "ou"*.

Définition 7.11 - *règle d'élimination du "ou"*

En déduction naturelle, Pour un ensemble Γ de formules de la logique propositionnelle, pour toutes formules A, B et C :

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}(\mathrm{e}\vee)$$

telle est la *règle d'élimination du "ou"*.

Définition 7.12 - *règle d'introduction du "non"*

En déduction naturelle, Pour un ensemble Γ de formules de la logique propositionnelle, pour toute formule A :

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}(\mathrm{i}\neg)$$

telle est la *règle d'introduction du "non"*.

Définition 7.13 - *règle d'élimination du "non"*

En déduction naturelle, Pour un ensemble Γ de formules de la logique propositionnelle, pour toute formule A :

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash \bot}(\mathrm{e}\neg)$$

telle est la *règle d'élimination du "non"*.

Définition 7.14 - *règle d'introduction du "implique"*

En déduction naturelle, Pour un ensemble Γ de formules de la logique propositionnelle, pour toutes formules A et B :

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}(\text{i} \to)$$

telle est la *règle d'introduction du "implique"*.

Définition 7.15 - *règle d'élimination du "implique"*

En déduction naturelle, Pour un ensemble Γ de formules de la logique propositionnelle, pour toutes formules A et B :

$$\frac{\Gamma \vdash A \to B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}(\text{e} \to)$$

telle est la *règle d'élimination du "implique"*.

Théorème 7.16 - *propriété d'affaiblissement*

En déduction naturelle, pour des ensembles Γ et Δ de formules de la logique propositionnelle, pour toute formule A de la logique propositionnelle, si $\Gamma \vdash A$ est prouvable, alors il en est de même pour $\Gamma, \Delta \vdash A$.

Définition 7.17 - *relation "être conséquence logique"*

Soit A et B deux formules de la logique propositionnelle. On dit que *B est une conséquence logique de A, noté $A \models B$* si tout modèle de A (valuation satisfaisant A) est un modèle de B.
Par extension si Γ est un ensemble de formules de la logique propoistionnelle, $\Gamma \models A$ signifie :

$$\forall C \in \Gamma,\ C \models A$$

Définition 7.18 - *règle correcte*

En déduction naturelle, on dit qu'une règle :

$$\frac{\Delta_1 \vdash C_1 \quad \dots \quad \Delta_k \vdash C_k}{\Gamma \vdash A}(\gamma)$$

est *correcte* si le fait que pour tout $i \in [\![1,\, k]\!]$ toute valuation satisfaisant les formules de Δ_i satisfasse C_i implique que toute valuation satisfaisant les formules de Γ satisfait A.
En d'autres termes, la règle est *correcte* si :

$$\left(\forall i \in [\![1,\, k]\!],\ \Delta_i \models C_i\right) \quad \Longrightarrow \quad \Gamma \models A$$

Définition 7.19 - *séquent valide*

On dit qu'un séquent $\Gamma \vdash A$ *est valide* si toute valuation satisfaisant les formules de Γ satisfait A *i.e.* $\Gamma \models A$.

Définition 7.20 - *logique du premier ordre, langage du premier ordre*

La *logique du premier ordre* est une extension de la logique propositionnelle, dans laquelle on travaille sur un *langage du premier ordre*, défini par :

- des symboles de constante (comme 0, $\varnothing$, π,...)
- des symboles de fonctions, comme $+(5, 3)$
- des symboles de relations, comme $=$, $\neq$, $\geq$, $>$.

Définition 7.21 - *terme en logique du premier ordre*

L'ensemble des *termes pour un langage du premier ordre* est défini inductivement :

- un symbole de constante est un terme.
- une variable, inconnue impliquée dans les quantificateurs entre autres, est un terme.
- pour $t_1, \ldots, t_n$ des termes et f un symbole de fonction d'arité n, $f(t_1, \ldots, t_n)$ est un terme.

Définition 7.22 - *formule de la logique du premier ordre*

L'ensemble des *formules de la logique du premier ordre pour un langage du premier ordre* est défini inductivement :

1. les formules suivantes, appelées *formules atomiques* sont de telles formules :
   - $\top$ et $\perp$ sont des formules atomiques
   - pour $t_1, \ldots, t_k$ des termes et $\mathcal{R}$ un symbole de relation d'arité k, $R(t_1, \ldots, t_k)$ est une formule atomique

2. pour F_1 et F_2 deux formules de la logique du premier ordre :
   - $F_1 \land F_2$ en est une.
   - $F_1 \lor F_2$ en est une.
   - $F_1 \to F_2$ en est une.
   - $F_1 \leftrightarrow F_2$ en est une.
   - $\neg F_1$ en est une.

3. $F(x)$ une formule de la logique du premier ordre faisant intervenir la variable x :
   - $\forall x.F(x)$ en est une.
   - $\exists x.F(x)$ en est une.

Définition 7.23 - *portée d'une variable, caractères libre et lié d'une variable*

En logique du premier ordre, pour P une formule, et x une variable (inconnue impliquée dans les quantificateurs entre autres), on dit que *dans les formules $\forall x.P$ et $\exists x.P$, la portée de la variable x est P* et on dit que *x est dans la portée du quantificateur* qui lui précède.
Une *occurrence d'une variable libre* est une variable ne se trouvant dans la portée d'aucun quantificateur, autrement elle est dite *liée*.