

## Chapitre 23

# Ondes électromagnétiques dans le vide

**Théorème 23.1** - *formule du double rotationnel*

Pour  $A$  une fonction vectorielle de l'espace :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A})) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{A}) - \vec{\Delta}(\vec{A})$$

où intervient l'opérateur *laplacien vectoriel*, s'écrivant en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\Delta}(\vec{A}) = \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2}$$

**Théorème 23.2** - *équation de d'Alembert*

Dans le vide, les champs électrique et magnétique vérifient tous deux une même équation de propagation, dite *équation de d'Alembert* :

$$\vec{\Delta}(\vec{E}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{et} \quad \vec{\Delta}(\vec{B}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

où  $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$  est la célérité de l'onde électromagnétique.

**Définition 23.3** - *surface d'onde*

On appelle *surface d'onde* une surface de l'espace sur laquelle le champ électromagnétique est uniforme à tout instant.

Moralement, tous les points d'une surface d'onde sont dans le même état vibratoire à tout instant.

**Définition 23.4** - onde plane

Une onde est dite *plane* si ses surfaces d'onde sont des plans parallèles.

**Proposition 23.5** - ondes planes

Une onde plane ne dépend que du temps et d'une dimension cartésienne, puisque tous les plans d'ondes sont parallèles et que la perturbation est la même sur ces plans.

**Définition 23.6** - onde plane progressive

Une onde plane est dite *progressive* lorsqu'elle se propage :

1. dans un sens bien déterminé
2. sans étalement
3. sans déformation

En pratique, l'expression du signal doit présenter un couplage linéaire entre les variables temporelle et spatiale.

**Définition 23.7** - onde plane progressive sinusoïdale

Une onde plane progressive est dite *sinusoïdale*, ou bien *harmonique* si son signal physique réel s'écrit :

$$\vec{A}(x, t) = A_0 \cos(\omega t \pm kx + \varphi) \vec{e}_p$$

Son signal physique complexe s'écrit :

$$\begin{aligned} \underline{\vec{A}}(x, t) &= A_0 e^{i(\omega t \pm kx + \varphi)} \vec{e}_p \\ &= \underline{\vec{A}}_0 e^{i(\omega t \pm kx)} \end{aligned}$$

où  $\underline{\vec{A}}_0 = A_0 e^{i\varphi} \vec{e}_p$ .

**Théorème 23.8** - équation de dispersion dans le vide

L'équation de dispersion lie les pulsations spatiale et temporelle d'une onde plane progressive harmonique. Pour une OPPH électromagnétique dans le vide, la relation de dispersion est la suivante :

$$\omega = kc \quad \text{soit} \quad \lambda = \frac{c}{f}$$

**Définition 23.9** - vecteur d'onde d'une OPPH

On appelle *vecteur d'onde* d'une OPPH le vecteur de norme  $k$ , de direction et sens ceux de la propagation de l'onde :

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u}$$

**Définition 23.10** - opérateur nabla appliqué à une représentation complexe d'OPPH

Pour  $\vec{E}(x, t) = \underline{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM})} \vec{e}_p$ , on a :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{E}}{dx} = -ik_x \vec{E} \\ \frac{d\vec{E}}{dy} = -ik_y \vec{E} \\ \frac{d\vec{E}}{dz} = -ik_z \vec{E} \end{cases}$$

On identifie alors  $\vec{\nabla} = -i \vec{k}$ .