Chapitre 19

Calcul différentiel

Définition 19.1 - *application différentiable*

Soit E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie, U un ouvert de E, $f : U \to F$ une fonction.

On dit que *f est différentiable* en un point a de U lorsqu'il existe $L_a \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que :

$$f(x+a) \underset{x\to 0}{=} f(a) + L_a(x) + o(x)$$

L'application L_a est alors appelée *différentielle $\mathrm{d}f_a$ de f en a*.

Proposition 19.7 - *différentielle d'une fonction d'une seule variable réelle*

Soit F un espace vectoriel normé de dimension finie, U un ouvert de $\mathbb{R}$, $f : U \to F$ une fonction.

f est différentiable en a si seulement si f est dérivable en a. Le cas échéant :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f_a : \mathbb{R} &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto x f'(a) \end{aligned}$$

et en particulier, $\mathrm{d}f_a(1) = f'(a)$.

Définition 19.8 - *dérivée selon un vecteur*

Soit E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie, U un ouvert de E, $f : U \to F$ une fonction. Soit $u \in E$, $a \in U$. Il existe $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(0)$ tel que pour tout $t \in V$, $a + tu \in U$

On dit que *f admet une dérivée selon le vecteur u au point a* lorsque la fonction $t \mapsto f(a + tu)$, définie de V à valeurs dans F, est dérivable en $0_{\mathbb{R}}$.
Le vecteur dérivé correspondant est appelé la *dérivée de f suivant le vecteur u*, et noté :

$$D_u f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tu) - f(a)}{t}$$

Théorème 19.9 - *différentiabilité $\implies$ existence de dérivée selon tout vecteur*

Soit E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie, U un ouvert de E, $f : U \to F$ une fonction.

Si f est différentiable en a, alors pour tout vecteur $u \in E$, f admet une dérivée selon u en a et :

$$D_u f(a) = \mathrm{d}f_a(u)$$

Définition 19.13 - *matrice jacobienne*

Soit E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie, U un ouvert de E, $f : U \to F$ une fonction différentiable en $a \in U$.

On appelle *matrice jacobienne de f en un point $a \in U$ relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$* la matrice :

$$J_f(a) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{d}f_a)$$

Proposition 19.13 bis - *expression de la matrice jacobienne*

Soit E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie, U un ouvert de E, $f : U \to F$ une fonction différentiable en $a \in U$.

La matrice jacobienne de f en a prend la forme :

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Définition 19.14 - *déterminant jacobien*

Soit E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie *commune*, U un ouvert de E, $f : U \to F$ une fonction différentiable en $a \in U$.

Puisqu'ici E et F sont de même dimension, la matrice $J_f(a)$ est carrée. On appelle *déterminant jacobien* son déterminant, noté :

$$\frac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}(a) = \det J_f(a)$$

Théorème 19.18 - *composition d'applications différentiables*

Soit E, F et G trois espaces vectoriels normés de dimension finie. Soit f une application d'un ouvert U de E vers F, g une application d'un ouvert V de F vers G, telles que $f(U) \subset V$. Supposons que f est différentiable en $a \in U$ et que g est différentiable en $f(a)$.

Alors $g \circ f$ est différentiable en a avec :

$$\mathrm{d}(g \circ f)_a = \mathrm{d}g_{f(a)} \circ \mathrm{d}f_a$$

Théorème 19.19 - *règle de la chaîne*

Soit E, F et G trois espaces vectoriels normés de dimension finie. Soit f une application d'un ouvert U de E vers F, g une application d'un ouvert V de F vers G, telles que $f(U) \subset V$. Supposons que f est différentiable en $a \in U$ et que g est différentiable en $f(a)$.

La matrice jacobienne de $g \circ f$ en a est le produit des matrices jacobiennes de g en $f(a)$ et de f en a. Plus précisément, en manipulant les bases $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ appropriées, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G}\Big(\mathrm{d}(g \circ f)_a\Big) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G}\Big(\mathrm{d}g_{f(a)}\Big) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}\Big(\mathrm{d}g_a\Big)$$