Définition 12.1 - *intégrale impropre*

Soit $f \in \mathcal{CM}\Big([a;\, b[, \mathbb{K}\Big)$. On dit que *l'intégrale impropre* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge* lorsque la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ possède une limite finie en b.

Autrement, on dit que *l'intégrale impropre* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *diverge*.

Définition 12.5 - *reste d'une intégrale impropre convergente*

Soit $f \in \mathcal{CM}\Big([a;\, b[, \mathbb{K}\Big)$ telle que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. L'application :

$$\begin{aligned} R : [a;\, b[&\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

est appelée *reste de l'intégrale impropre convergente*.

Théorème 12.6 - *de la limite monotone*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. Quand x tend vers la borne supérieure de I (au sens large), $f(x)$ tend vers la borne supérieure (au sens large) de f sur I :

$$\lim_{x \to \sup I} f(x) = \sup\{f(x),\, x \in I\}$$

Proposition 12.8 - *caractérisation de la convergence d'une intégrale impropre*

Soit $f \in \mathcal{CM}\Big([a;\, b[, \mathbb{R}_+\Big)$. L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a;\, b[$.

Définition 12.14 - *fonction intégrable*

Soit $f : [a;\, b[\to \mathbb{C}$ un fonction continue par morceaux. On dit que *f est intégrable* lorsque l'intégrale impropre $\int_a^b |f|(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente. Le cas échéant on dit aussi que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

Théorème 12.16 - *convergence absolue implique convergence*

Soit $f : [a; b[\to \mathbb{C}$ un fonction continue par morceaux. Si f est intégrable sur $[a; b[$, alors l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Théorème 12.19 - *fonction de Riemann*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction de Riemann $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ définie sur $]0; +\infty[$ est :

1. intégrable en 0 si et seulement si $\alpha < 1$
2. intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$

Théorème 12.20 - *fonction de référence*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto e^{-\alpha x}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 0$. Le cas échéant :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}$$

Théorème 12.55 - *de convergence dominée pour une suite de fonctions définies sur un intervalle*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. Sous réserve des hypothèses suivantes,

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$.
2. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I et sa limite y est continue par morceaux.
3. *hypothèse de domination* : il existe $\varphi \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R}_+)$ une fonction intégrable telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq \varphi$

les fonctions f_n sont intégrables, ainsi que leur limite simple et on peut échanger les symboles "lim" et "$\int$" :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n$$

Théorème 12.59 - *de convergence dominée pour une série de fonctions définies sur un intervalle*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. Sous réserve des hypothèses suivantes,

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{CM}(I,\mathbb{K})$ et f_n est intégrable.
2. $\sum_n f_n$ converge simplement sur I et sa somme y est continue par morceaux.
3. la série $\sum_n \int_I |f_n(t)|$ converge.

la fonction $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I et on peut échanger les symboles "$\sum$" et "$\int$" :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n = \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$$

Théorème 12.61 - *théorème de convergence dominée à paramètre continu*

Soit $A \subset \mathbb{R}^m$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{F}(A\times I,\, \mathbb{K})$. Sous réserve des hypothèses suivantes :

1. $\forall x \in A$, $f(x,\cdot) \in \mathcal{CM}(I,\mathbb{K})$ où $f(x,\cdot) : t \mapsto f(x,t)$.
2. Pour un certain $x_0 \in \overline{A}$ la fonction $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x,\cdot)$ est continue par morceaux sur I.
3. *hypothèse de domination* : il existe $\varphi \in \mathcal{CM}(I,\mathbb{R}_+)$ intégrable, majorant $f(x,\cdot)$ pour tout $x \in A$.

Pour tout $x \in A$ la fonction $f(x,\cdot)$ est intégrable sur I, de même pour $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x,\cdot)$, et on peut échanger les symboles "lim" et "$\int$" :

$$\int_I \lim_{x\to x_0} f(x,\cdot) = \lim_{x\to x_0} \int_I f(x,\cdot)$$

Théorème 12.63 - *théorème de continuité sous le signe $\int$*

Soit $A \subset \mathbb{R}^m$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{F}(A\times I,\, \mathbb{K})$. Sous réserve des hypothèses suivantes :

1. $\forall x \in A$, $f(x,\cdot) \in \mathcal{CM}(I,\mathbb{K})$ où $f(x,\cdot) : t \mapsto f(x,t)$
2. $\forall t \in I$, $f(\cdot,t) \in \mathcal{C}^0(A,\mathbb{K})$ où $f(\cdot,t) : x \mapsto f(x,t)$
3. *hypothèse de domination* : il existe $\varphi \in \mathcal{CM}(I,\mathbb{R}_+)$ intégrable, majorant $f(x,\cdot)$ pour tout $x \in A$.

Pour tout $x \in A$ la fonction $f(x,\cdot)$ est intégrable sur I, et la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur A.

Théorème 12.69 - *de classe $\mathcal{C}^1$ sous le signe $\int$*

Soit A et I deux intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{F}(A \times I, \mathbb{K})$. Sous réserve des hypothèses suivantes :

1. $\forall t \in I,\ f(\cdot, t) \in \mathcal{C}^1(A, \mathbb{K})$.
2. $\forall x \in A,\ f(x, \cdot) \in \mathcal{CM}(I, K)$ et est intégrable.
3. $\forall x \in A,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot) \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$
4. *hypothèse de domination* : il existe $\varphi \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R}_+)$ intégrable, majorant $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot)\right|$ pour tout $x \in A$.

pour tout $x \in A$, la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot)$ est intégrable sur I et la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A avec :

$$F^{(k)} : x \mapsto \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

Théorème 12.74 - *de classe $\mathcal{C}^k$ sous le signe $\int$, avec hypothèses minimales*

Soit A et I deux intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{F}(A \times I, \mathbb{K})$. Sous réserve des hypothèses suivantes :

1. $\forall t \in I,\ f(\cdot, t) \in \mathcal{C}^k(A, \mathbb{K})$.
2. $\forall i \in [\![0,\, k-1]\!],\ \forall x \in A,\ \dfrac{\partial^i f}{\partial x^i}(x, \cdot) \in \mathcal{CM}(I, K)$ et est intégrable.
3. $\forall x \in A,\ \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, \cdot) \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$
4. *hypothèse de domination* : il existe $\varphi \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R}_+)$ intégrable, majorant $\left|\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, \cdot)\right|$ pour tout $x \in A$.

pour tout $x \in A$, la fonction $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, \cdot)$ est intégrable sur I et la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur A avec :

$$F^{(k)} : x \mapsto \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\,\mathrm{d}t$$