Définition 17.1 - *fraction rationnelle*

Dans $\mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X]\backslash\{0\})$ On définit la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ en posant :

$$\begin{aligned} & (P,Q)\mathcal{R}(R,S) \\ \Leftrightarrow\ & P/Q = R/S \qquad \text{(Cette étape n'est qu'à titre explicatif dans la mesure où l'opération / n'est pas définie)} \\ \Leftrightarrow\ & PS = RQ \end{aligned}$$

On appelle *fraction rationnelle* à coefficients dans $\mathbb{K}$ toute classe d'équivalence pour la relation $\mathcal{R}$. La classe de (P,Q) est alors notée $\dfrac{P}{Q}$. On a donc :

$$\frac{P}{Q} = \{(R,S) \in \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X]\backslash\{0\}), PS = RQ\}$$

On dit que (P,Q) est un *représentant* de la fraction $\dfrac{P}{Q}$. L'ensemble des fractions rationnelles est noté $\mathbb{K}(X)$ et la relation $\mathcal{R}$ est appelée *égalité des fractions rationnelles*.

Proposition 16.4 - *structure de* $\mathbb{K}(X)$

$(\mathbb{K}(X),+,\times)$ est un corps commutatif et $(\mathbb{K}(X),+,\times,\cdot)$ (où $\cdot$ est la loi externe) est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative.

L'application $\varphi : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}(X)$ définie par $\varphi(P) = \dfrac{P}{1}$ est un morphisme d'algèbres injectif.

Définition 17.7 - *représentant irréductible*

Soit $F = \dfrac{P}{Q}$ une fraction. On dit que $\dfrac{P}{Q}$ est un *représentant irréductible* lorsque $P \wedge Q = 1$ et que Q est unitaire. Toute fration rationnelle de $\mathbb{K}(X)$ admet un <u>unique</u> (dénominateur unitaire) représentant irréductible.

Théorème 17.34 - *décomposition en éléments simples*

Soit $F = \dfrac{A}{B}$ une fraction sous forme irréductible, et $B = \prod_{i=1}^{k} P_i^{\alpha_i}$ sa décomposition en produit de polynômes irréductibles. Il existe des polynômes $(U_i)_{i\in[\![1,k]\!]}$ tels que

$$F = E + \sum_{i=1}^{k} \frac{U_i}{P_i^{\alpha_i}} \quad \text{avec } \deg(\frac{U_i}{P_i}) < 0$$

De plus, pour $n \in \mathbb{N}^*$, Si $T \in \mathcal{I}_{\mathbb{K}[X]}$ et $\deg(\dfrac{A}{T^n}) < 0$, alors il existe des polynômes $V_1, \dots, V_n$ tels que

$$\frac{A}{T^n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{V_k}{T^k} \quad \text{avec } \deg(\frac{V_k}{T^k}) < 0$$

Finalement, Il existe des polynômes $(U_{i,j})_{i\in[\![1,k]\!],j\in[\![1,\alpha_i]\!]}$ tels que

$$F = E + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{U_{i,j}}{P_i^j} \quad \text{avec } \deg(\frac{U_{i,j}}{P_i}) < 0$$

Cette décomposition est unique.