Chapitre 13

Espaces préhilbertiens réels

Définition 13.1 - *matrice d'une forme bilinéaire symétrique*

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Pour $\varphi \in \mathcal{BS}(E)$ une forme bilinéaire symétrique sur E, on appelle *matrice associée à φ* la matrice :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \big(\varphi(e_i, e_j)\big)_{(i,j) \in [\![1,\, n]\!]^2}$$

De cette sorte, pour X et Y dans $\mathbb{R}^n$ les coordonnées respectives dans $\mathcal{B}$ de x et y :

$$\varphi(x, y) = X^{\top} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) Y$$

En particulier la matrice du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ est I_n.

Proposition 13.45 - *relation de Pythagore*

Soit $(E, \big(\cdot|\cdot\big))$ un espace préhilbertien réel et $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille orthogonale de vecteurs de E. Alors :

$$\left\| \sum_{k=1}^{p} x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{p} \|x_k\|^2$$

Théorème 13.50 - *expression d'une projection dans une base orthonormée*

Soit $(E, \big(\cdot|\cdot\big))$ un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de dimension finie. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base orthonormée de F. Alors :

$$\forall x \in E,\, p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} (x|e_i) e_i$$