Définition 6.16 Soit E un ensemble ordonné non vide et $e \in E$. On dit que :

- $p \in E$ est un prédécesseur immédiat de e si $p < e$ et il n'existe pas d'élement $a \in e$ tel que $p < a < e$
- $s \in E$ est successeur immédiat de e si $e < s$ et il n'existe pas d'élement $a \in e$ tel que $e < a < s$

Exemple 6.17 Dans $\mathbb{N}$ muni de l'ordre usuel :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $n+1$ est le successeur immédiat de n.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n+1$ est le prédécesseur immédiat de n.
- 0 n'a pas de prédécesseur (en particulier immédiat).

Exemple 6.18 Dans $\mathbb{R}$ muni de l'ordre usuel, aucun élément e n'a de prédécesseur (resp.successeur) immédiat puisque si $a < e$ alors en particulier $a < \frac{a+e}{2} < e$.

Définition 6.19 Soit E un ensemble ordonné non vide et $e \in E$. On dit que

- e est un élément minimal de E s'il n'admet pas de prédécesseur.
- e est un élément maximal de E s'il n'admet pas de successeur.

Exemple 6.20 Soit E un ensemble. L'ensemble $A = \mathcal{P}(E)$
$\{\varnothing\}$ des parties non vides de E muni de l'inclusion et ordonné. Si $E \neq \varnothing$, E est l'élément maximal de A, et $\forall e \in E$, $\{e\}$ est un élément maximal de A.

Remarque 6.21 L'ensemble précédent montre en particulier qu'un ensemble peut tout à fait avoir plusieurs éléments minimaux ou maximaux.

Définition 6.22 Soit E un ensemble ordonné non vide et $e \in E$. On dit que :

- e est le **plus grand élément** de E si $\forall x \in E, x \leq e$.
- e est le **plus petit élément** de E si $\forall x \in E, x \geq e$.

Démonstration : (preuve de l'unicité) Supposons par l'absurde, qu'il n'y a pas unicité du plus petit élément. Soit e et e' deux plus petits éléments distincts de E. Alors, par définition, (e est un plus petit élément E, $e \leq e'$). de même, $e' \leq e$. Par antisymétrie de $\leq$, $e = e'$. Absurde. On montre de même l'unicité du plus grand élément, s'il existe.

Définition 6.23 : *Ordre bien fondé* Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné. On dit que $\leq$ est un ordre bien fondé si toute partie non vide de E admet au moins un élément minimal.

Exemple 6.24 : *Ordres bien fondés*

- l'ordre usuel sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels est bien fondé.
- l'inclusion sur les parties d'un ensemble fini est bien fondée.
- la relation de divisibilité sur l'ensemble $\mathbb{N}^*$ est un ordre bien fondé.

Exemple 6.25 *Ordres non bien fondés*

- l'ordre usuel sur $\mathbb{Z}$ ou sur $\mathbb{R}_+$
- L'inclusion sur les parties d'un ensemble infini n'est pas bien fondée.

Propriété 6.26 Soit $(A, \leq_A) et (B, \leq_B)$ deux ensembles ordonnés. Si $\leq_A$ et $\leq_B$ sont bien fondées, l'ordre lexicographique défini sur $A \times B$ est bien fondé.

Démonstration : Soit X une partie non vide de $A \times B$. Montrons qu'elle admet un élément minimal. On note $A_X = \{a \in A, \exists b \in B, (a,b) \in X\}$. X est non vide, donc A_X l'est également. De plus, comme $\leq_A$ est bien fondé, A_X admet un élément minimal. Soit donc $a_0 \in A$ un élément minimal de A_X. On considère alors l'ensemble $B_0 = \{b \in B, (a_0, b) \in X\}$. Par définition de a_0, B_0 est non vide, alors, $\leq_B$ étant aussi bien fondé, B_0 admet un élément minimal b_0. l'élémet $x_0 = (a_0, b_0)$ est alors un élément minimal de X. En effet, Soit $(a,b) \in X$ tel que $(a,b) \leq (a_0, b_0)$

i.e. tel que $a < a_0 ou(a = a_0 et b \leq_B b_0)$. $a \in A_X$ donc, par minimalité de a_0, $a \not< a_0$, on a donc $a = a_0$ et $b \leq_B b_0$. De même, $b \in B_0$ puisque $(a,b) = (a_0, b)$. Par minimalité de b_0 dans B_0, on a donc $b = b_0$ d'où $(a,b) = (a_0, b_0)$.

Propriété 6.27 Soit $((E_i, \leq_i))_{\{}i \in [\![1,n]\!]\}$ une famille finie d'ensembles munis d'ordres bien fondés. ($n \geq 2$). L'ordre produit défini sur $\prod_{i=1}^{n} E_i = E_1 \times \ldots \times E_n$ est bien fondé.

Démonstration Soit A une partie non vide de $E_1 \times \ldots \times E_n$. On pose $A_1 = \{a_1 \in E_1, \exists(x_1, \ldots, x_n) \in A^n, x_1 = a_1\}$. Comme A est non vide, A_1 est une partie non vide de E_1 qui admet donc un élément minimal m_1. On pose $A_2 = \{a_2 \in E_2, \exists(x_1, \ldots, x_n) \in A^n, x_2 = a_2 \text{ et } x_1 = m_1\}$. Comme A est non vide, A_2 est une partie non vide de E_2 qui admet donc un élément minimal m_2.

On construit ainsi n ensembles non vides définis pour tout $i \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} A_{i+1} = \{a_{i+1} \in E_{i+1}, \exists(x_1, \ldots, x_n) \in A^n, \forall j \in [\![1,i]\!], x_j = m_j \text{ et } x_{i+1} = a_{i+1}\} \\ m_i \text{ est un élément minimal de } A_i, \forall i \in [\![1,n]\!] \end{cases}$$

L'élément $m = (m_1, \ldots, m_n)$ est alors, par construction, un élément minimal de A.

Remarque 6.28 Si E est muni d'un ordre total et bien fondé, alors toute partie non vide de E admet un plus petit élément. On parle alors de bon ordre et d'ensemble bien ordonné.

Définition 6.29 Soit E un ensemble. On appelle prédicat sur E toute propriété P dépendant d'éléments de E. Lorsque P dépend de n paramètres, on dit que P est d'arité n. On note alors $\forall(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$.

- $P(x_1, ..., x_n)$ lorsque la propriété est vraie.
- $\neg P(x_1, ..., x_n)$ lorsque la propriété est fausse.

Remarque 6.30 Une relation bianire est en fait un prédicat d'arité 2.

Théorème 6.31 Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\leq$ est un ordre bien fondé.
2. Il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante d'élements de E.
3. Pour tout prédicat P sur E, si:

$$\forall(x,y) \in E^2, x > y \implies P(x)$$