

Définition 9.1 - convergence simple d'une suite de fonctions

Soit E un \mathbb{K} espace vectoriel de dimension finie, $A \subset E$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. On dit que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement si pour tout $x \in A$, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ converge. Ainsi la fonction :

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \end{aligned}$$

est appelée *limite simple de la suite* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Ainsi,

$$\forall x \in A, \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Définition 9.4 - convergence uniforme d'une suite de fonctions

Soit E un \mathbb{K} espace vectoriel de dimension finie, $A \subset E$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. On dit que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément si pour tout $x \in A$, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ converge. Ainsi la fonction :

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \end{aligned}$$

est appelée *limite uniforme de la suite* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Ainsi,

$$\forall x \in A, \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Théorème 9.15 - propriétés conservées par la limite uniforme

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, $A \subset E$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers $f : A \rightarrow E$.

1. Si les $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont bornées, alors il en est de même pour f .
2. Si les $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont continues, alors il en est de même pour f .

Théorème 9.17 - de la double limite

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, $A \subset E$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers $f : A \rightarrow E$. Soit $a \in A$.

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet en a limite l_n , alors la suite $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et f converge en a vers sa limite :

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right)$$

Définition 9.19 - *convergence uniforme d'une série de fonctions*

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, $A \subset E$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. La série $\sum_n f_n$ converge uniformément sur A si sa suite des sommes partielles converge uniformément, c'est-à-dire que la suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de ses restes converge vers 0 pour $\|\cdot\|_{\infty}^A$:

$$\|R_n\|_{\infty}^A \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

ou bien

$$\|S - S_n\|_{\infty}^A \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Définition 9.20 - *convergence normale d'une série de fonctions*

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, $A \subset E$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. La série $\sum_n f_n$ converge normalement sur A si la série $\sum_n \|f_n\|_{\infty}^A$ converge.

Proposition 9.25 - *conditions nécessaires à la convergence normale*

Soit $\sum_n f_n$ une série de fonctions normalement convergentes sur A . On a alors :

1. La série $\sum_n f_n$ converge absolument sur A et donc simplement sur A .
2. La série $\sum_n f_n$ converge uniformément sur A .

Définition 9.40 - *fonction continue par morceaux sur un intervalle*

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et f une fonction définie sur I . f est continue par morceaux si toute restriction de f à un segment est continue par morceaux.

Théorème 9.43 - *Esc($[a; b], F$) dense dans $\mathcal{CM}([a; b], F)$ pour $\|\cdot\|_{\infty}$*

Toute fonction continue par morceaux sur $[a; b]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier sur $[a; b]$:

$$\overline{\mathcal{E}([a; b], F)} = \mathcal{CM}([a; b], F)$$

Théorème 9.47 - *premier de Weierstrass*

Toute fonction continue sur $[a; b]$, à valeurs réelles ou complexes, est limite uniforme sur $[a; b]$ d'une suite de fonctions polynomiales.

Théorème 9.49 - *deuxième de Weierstrass*

Toute fonction continue sur \mathbb{R} , à valeurs réelles ou complexes, T -périodique est limite uniforme d'une suite de *fonctions polynomiales trigonométriques*, fonctions de la forme :

$$t \mapsto \sum_{k=1}^n \alpha_k e^{\frac{2ik\pi}{T}t}$$