Définition 4.1 - *jeu sans mémoire*

On appelle *jeu sans mémoire* un jeu dans lequel à tout instant de la partie, il est possible de déterminer si un joueur a gagné ou si un coup est valide, *indépendament des précédents coups joués*.

Définition 4.2 - *jeu à information complète*

On appelle *jeu à information complète* un jeu dans lequel il n'y *aucune information cachée* que les joueurs ne puissent *savoir ou prévoir*.

Définition 4.3 - *graphe associé à un jeu à deux joueurs*

Un jeu à deux joueurs J_1 et J_2, sans mémoire, à information complète peut être *représenté par un graphe orienté biparti* :

$$G = (S, A) \quad \text{où } S = S_1 \sqcup S_2,\ A \subset (S_1 \times S_2) \cup (S_2 \times S_1)$$

Les sommets de S_1 sont appelés les *états contrôlés par* J_1 et ceux de S_2 les *états conrôlés par* J_2.

Définition 4.4 - *coup possible pour un joueur*

Soit un jeu à deux joueurs J_1 et J_2, sans mémoire, à information complète, de graphe associé $G = (S_1 \sqcup S_2, A)$.
Pour $a \neq b$ dans $\{1; 2\}$, on appelle l'arc $(s_a, s_b) \in A \cap (S_a \times S_b)$ *un coup possible pour* J_a *depuis l'état* s_a *vers un état* s_b *contrôlé par* J_b.

Définition 4.5 - *jeu d'accessiblité*

Un jeu à deux joueurs J_1 et J_2, sans mémoire, à information complète de graphe associé $G = (S_1 \sqcup S_2, A)$ est dit *d'accessibilité* s'il est possible de définir pour chaque joueur J_a ($a \in \{1; 2\}$), *un ensemble* $F_a \subset S_a$ *d'états gagnants pour* J_a.
F_a est alors appelé *condition de gain du joueur* J_a.

Définition 4.6 - *état final d'un jeu d'accessiblité*

Soit $G = (S, A)$ le graphe associé à un jeu d'accessiblité de conditions de gain F_1 et F_2. Un *état* $s \in S$ *final du jeu* est un *état depuis lequel il n'existe aucun coup possible*, *i.e.* $\deg_+(s) = 0$.

Définition 4.7 - *partie partielle*

Soit $G = (S, A)$ le graphe associé à un jeu d'accessiblité. On appelle *partie partielle du jeu* tout chemin de G partant de l'état inital de G à un état quelconque de G. *L'ensemble des parties partielles du jeu est noté* S^w.

Définition 4.8 - *stratégie*

Soit $G = (S, A)$ le graphe associé à un jeu d'accessiblité. Une stratégie est une *application* $\varphi : S^w \to S$ *qui à une partie partielle* $(s_0, \ldots, s_p)$ *associe un sommet la prolongeant* : $\Big(s_p, \varphi\big((s_0, \ldots, s_p)\big)\Big) \in A$. On dit alors qu'*un joueur suit une stratégie*.
Pour un jeu sans mémoire, l'image d'une stratégie ne dépend que du dernier sommet de la partie partielle : $\varphi\big((s_0, \ldots, s_p)\big) = \varphi(s_p)$ moralement.

Définition 4.9 - *stratégie gagnante*

Soit $G = (S, A)$ le graphe associé à un jeu d'accessiblité. Une *stratégie* φ *est gagnante depuis un état* s lorsque depuis s, le joueur qui la suit gagne peu importe le choix de l'adversaire.

Définition 4.10 - *suite convergeant vers l'attracteur*

Soit $G = (S, A)$ le graphe associé à un jeu d'accessiblité. Pour $a \neq b$ dans $\{1; 2\}$, on définit $(\mathcal{A}_j^a)_{j \in \mathbb{N}}$ *l'ensemble des positions permettant au joueur* J_a *de gagner en au plus* j *coups*. On a bien sûr $\mathcal{A}_0^a = F_a$, puis pour gagner en au plus $j \in \mathbb{N}^*$ coups :

- ou bien J_a peut gagner en au plus $j - 1$ coups,
- ou bien J_a dispose d'un coup le permettant ensuite de gagner en au plus $j - 1$ coups,
- ou bien enfin, J_b se trouvant sur une position non finale, ne dispose que de coups permettant ensuite à J_a de gagner en au plus $j - 1$ coups.

En conclusion :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_j^a = \mathcal{A}_{j-1}^a \cup & \\ & \Big\{s \in S_a,\ \exists t \in \mathcal{A}_{j-1}^a,\ (s,t) \in A\Big\} \cup \\ & \Big\{s \in S_b,\ s \text{ non final et } \forall t \in S,\ (s,t) \in A \implies t \in \mathcal{A}_{j-1}^a\Big\}\end{aligned}$$

Définition 4.11 - *attracteur d'un joueur*

Soit $G = (S, A)$ le graphe associé à un jeu d'accessiblité. Pour $a \neq b$ dans $\{1; 2\}$, la suite $(\mathcal{A}^a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion ($\mathcal{A}^a_0 \subset \mathcal{A}^a_1 \subset \dots$) et majorée par S. C'est d'après le théorème de la limite monotone une suite convergente, on note $\mathcal{A}^a$ *sa limite, appelée attracteur du joueur* J_a :

$$\mathcal{A}^a = \lim_{j\to+\infty} \mathcal{A}^a_j$$

Il s'agit de l'ensemble des positions gagnantes pour le joueur J_a.

Théorème 4.12 - *de Zermelo*

Dans un jeu à **deux joueurs fini** (à parties finies), à **information complète** et **sans match nul**, pour tout état du jeu, il existe une stratégie gagnante pour l'un des joueurs partant de cet état.