Théorème 14.50 (0) - *de la limite monotone*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, alors :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}(u_n) \\ \forall n\in\mathbb{N},\, u_n \leq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}(u_n) \end{cases}$$

2. si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et majorée, alors :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}(u_n) \\ \forall n\in\mathbb{N},\, u_n < \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}(u_n) \end{cases}$$

3. si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, alors :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}}(u_n) \\ \forall n\in\mathbb{N},\, u_n \geq \inf\limits_{n\in\mathbb{N}}(u_n) \end{cases}$$

4. si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, alors :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}}(u_n) \\ \forall n\in\mathbb{N},\, u_n > \inf\limits_{n\in\mathbb{N}}(u_n) \end{cases}$$

Proposition 14.50 (1) - *caractérisation de la convergence d'une suite monotone*

Une suite monotone est convergente si et seulement si elle est bornée.

Proposition 14.50 (2) - *limites de suites croissante non majorée, décroissante non minorée*

Une suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.
De même, Une suite décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.

Théorème 14.65 - *monotonie d'une suite récurrente définie par $u_{n+1} = f(u_n)$*

Soit $D \subset \mathbb{R}$, $u_0 \in D$, $f : D \to D$ une fonction et $(u_n) \in D^{\mathbb{N}}$ l'unique suite définie par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Le signe de $x \mapsto f(x) - x$ renseigne sur la monotonie de (u_n) :

$$\begin{cases} \forall x \in D, f(x) \geq x \implies \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n \\ \forall x \in D, f(x) \leq x \implies \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n \end{cases}$$

2. Si f est croissante, alors (u_n) est :

- croissante si $u_1 \geq u_0$
- décroissante si $u_1 \leq u_0$

3. si f est décroissante, alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et de sens contraire :

- si $u_2 \geq u_0$ alors (u_{2n}) est croissante et (u_{2n+1}) est décroissante
- si $u_2 \leq u_0$ alors (u_{2n}) est décroissante et (u_{2n+1}) est croissante

Théorème 14.66 - *du point fixe*

Soit $D \subset \mathbb{R}$, $u_0 \in D$, $f : D \to D$ une fonction et $(u_n) \in D^{\mathbb{N}}$ l'unique suite définie par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si $\lim\limits_{n \in \mathbb{N}} u_n = \ell \in D$ et si f est continue en ℓ, alors $f(\ell) = \ell$.

Soit u € K" une suite telle que uo = a, u1 = B et pour tout entier naturel n, Un+2 + aUn+1 + bun = 0, avec b + 0. 1. Si x2 + ax + b = 0 admet une solution double r E K, alors 30, p) € K2, Vn € N. Un = Ar.n + unr". 2. Si x2 + ax + b = 0 admet deux solutions distinctes r1 E K et T2 E K, alors 3(X, p) € K', Vn E N, Un = ArR ur?. 3. De plus, si K = R et (a,b) E R2 (autrement dit si u est une suite récurrente linéaire double réelle), et S? 12 + ax + b = 0 admet deux solutions complexes conjuguées ri et T2 (c'est-à-dire lorsque a2 - 46 ¡ 0), alors r1 = peio avec p e R- et 0 E R, et : 3(a, b) € R2, Vn E N, un = p' (A cos(n6) + B sin(nt)).

Théorème 14.bonus - *suites récurrentes linéaires du deuxième ordre*

Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$ avec $(a, b) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^*$. On note $P = X^2 + aX + b$ le polynôme caractéristique associé à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. Si P admet une racine double $r \in \mathbb{K}$, alors :

$$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha r^n + \beta n r^n$$

2. Si P admet deux solutions distinctes r_1 et r_2 dans $\mathbb{K}$, alors :

$$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$$

3. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et P admet deux solutions complexes conjuguées $r_1 = \rho^{i\theta}$ et $r_2 = \rho^{-i\theta}$ dans $\mathbb{K}$, alors :

$$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \rho(\alpha\cos(n\theta) + \beta\sin(n\theta))$$