Définition 34.11 (1) - *norme associée à un produit scalaire*

Soit E un espace préhilbertien réel. On appelle *norme euclidienne sur E* l'application :

$$\begin{aligned} ||.|| \quad : \quad & E \to \mathbb{R}_+ \\ & x \mapsto \sqrt{\langle x,\, x\rangle} \end{aligned}$$

Définition 34.11 (2) - *vecteur unitaire*

Soit E un espace préhilbertien réel. On dit qu'un vecteur $x \in E$ est *unitaire* si $||x|| = 1$.

Définition 34.11 (3) - *distance euclidienne*

Soit E un espace préhilbertien réel. On appelle *distance euclidienne sur E* l'application :

$$\begin{aligned} d \quad : \quad & E^2 \to \mathbb{R}_+ \\ & (x, y) \mapsto ||x - y|| = \sqrt{\langle x - y,\, x - y\rangle} \end{aligned}$$

Proposition 34.15 - *identité de polarisation*

Soit E un espace vectoriel. Si existence, le produit vectoriel associé à une norme sur E vérifie :

$$\forall (x, y) \in E^2,\, \langle x,\, y\rangle = \frac{||x + y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2}{2}$$

Théorème 34.16 (0) - *inégalité de Cauchy-Schwarz*

Soit E un espace préhilbertien réel, $(x, y) \in E^2$.

$$|\langle x,\, y\rangle| \leq ||x|| \times ||y||$$

avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Théorème 34.16 (1) - *inégalité triangulaire*

Soit E un espace préhilbertien réel, $(x, y) \in E^2$.

$$||x|| - ||y|| \leq ||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$$

De plus,

$$||x+y|| = ||x|| + ||y|| \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}_+,\, x = \alpha y$$

Définition 34.19 (1) - *vecteurs orthogonaux*

Soit E un espace préhilbertien réel, $(x, y) \in E^2$. On dit que x et y sont *orthogonaux* si $\langle x,\, y\rangle = 0$. On note alors $x \perp y$.

Définition 34.19 (2) - *parties orthogonales*

Soit E un espace préhilbertien réel, $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$. On dit que X et Y sont *orthogonales* si :

$$\forall (x, y) \in X \times Y,\, \langle x,\, y\rangle = 0$$

On note alors $X \perp Y$.

Définition 34.19 (3) - *famille orthogonale*

Soit E un espace préhilbertien réel, $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E. On dit que $(x_i)_{i\in I}$ est *orthogonale* si :

$$\forall (i, j) \in I^2,\, i \neq j \implies \langle x_i,\, x_j\rangle = 0$$

Définition 34.19 (4) - *famille orthonormée*

Soit E un espace préhilbertien réel, $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E. On dit que $(x_i)_{i\in I}$ est *orthonormée* si elle est orthogonale et constituée de vecteur unitaire, *i.e.* :

$$\forall (i, j) \in I^2,\, \langle x_i,\, x_j\rangle = \delta_{ij}$$