Définition 8.1 - *ensemble dénombrable*

Un ensemble est dit *dénombrable* s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$, ce qui revient à pouvoir *numéroter chacun de ses éléments* (sans pour autant manipuler de "dernier élément", ce qui supposerait qu'il soit fini).

Proposition 8.5 - *parties infinies de* $\mathbb{N}$

Toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

Proposition 8.10 - *réunion d'ensembles dénombrables*

Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Théorème 8.13 - $\mathbb{R}$ *n'est pas dénombrable*

L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Définition 8.14 - *famille sommable de réels positifs*

On dit qu'une *famille* $(u_i)_{i\in I}$ *de nombres réels positifs est sommable* lorsqu'il existe $M \geq 0$ tel que, pour toute partie finie $J \subset I$, on ait $\sum_{j\in J} u_j \leq M$. On définit alors *la somme de la famille* par :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sup_{\substack{J\subset I \\ J \text{ finie}}} \sum_{j\in J} u_j$$

Proposition 8.15 - *sommabilité d'une famille de réels positifs*

Une famille $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de réels positifs indexée par $\mathbb{N}$ est sommable si et seulement si la série $\sum_n u_n$ est convergente.

Théorème 8.17 - *de Fubini positif*

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels positifs et $I = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ une partition dénombrable de I. La famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\, (u_i)_{i\in I_n} & \text{est sommable} \\ \sum_n \left(\sum_{i\in I_n} u_i \right) & \text{est convergente} \end{cases}$$

Le cas échéant,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i\in I_n} u_i \right) = \sum_{i\in I} u_i$$

Définition 8.20 - *famille sommable de réels ou de complexes*

Une *famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable* si la famille $(|u_i|)_{i\in I}$ l'est.