Définition 6.16 - *prédécesseur, successeur immédiats*

Soit E un ensemble ordonné non vide et $e \in E$. On dit que :

- $p \in E$ est un *prédécesseur immédiat* de e si $p < e$ et il n'existe pas d'élement $a \in E$ tel que $p < a < e$
- $s \in E$ est *successeur immédiat* de e si $e < s$ et il n'existe pas d'élement $a \in E$ tel que $e < a < s$

Exemples 6.17 - *prédécesseur, successeur immédiats*

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $n + 1$ est le successeur immédiat de n pour l'ordre usuel.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n - 1$ est le prédécesseur immédiat de n pour l'ordre usuel.
- 0 n'a pas de prédécesseur (en particulier immédiat) pour l'ordre usuel.

Exemples 6.18 - *prédécesseur, successeur immédiats*

- Dans $\mathbb{R}$ muni de l'ordre usuel, aucun élément e n'a de prédécesseur (resp.successeur) immédiat puisque si $a < e$ alors en particulier $a < \frac{a+e}{2} < e$.

Définition 6.19 - *éléments minimal, maximal*

Soit E un ensemble ordonné non vide et $e \in E$. On dit que

- e est un *élément minimal* de E s'il n'admet pas de prédécesseur.
- e est un *élément maximal* de E s'il n'admet pas de successeur.

Exemples 6.20 - *éléments minimal, maximal*

- Soit E un ensemble. L'ensemble $A = \mathcal{P}(E)\ \{\varnothing\}$ des parties non vides de E muni de l'inclusion et ordonné. Si $E \neq \varnothing$, E est l'élément maximal de A, et $\forall e \in E$, $\{e\}$ est un élément maximal de A.

Remarque 6.21 - *sur le dernier exemple*

- L'ensemble précédent montre en particulier qu'un ensemble peut tout à fait avoir plusieurs éléments minimaux ou maximaux.

Définition 6.22 - *plus grand, plus petit éléments*

Soit E un ensemble ordonné non vide et $e \in E$. On dit que :

- e est le *plus grand élément* de E si $\forall x \in E, x \leq e$.
- e est le *plus petit élément* de E si $\forall x \in E, x \geq e$.

demonstration : (preuve de l'unicité) Supposons par l'absurde, qu'il n'y a pas unicité du plus petit élément. Soit e et e' deux plus petits éléments distincts de E. Alors, par définition, (e est un plus petit élément E, $e \leq e'$). de même, $e' \leq e$. Par antisymétrie de $\leq$, $e = e'$. Absurde. On montre de même l'unicité du plus grand élément, s'il existe.

Définition 6.23 : *Ordre bien fondé* Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné. On dit que $\leq$ est un ordre bien fondé si toute partie non vide de E admet au moins un élément minimal.

Exemple 6.24 : *Ordres bien fondés*

- l'ordre usuel sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels est bien fondé.
- l'inclusion sur les parties d'un ensemble fini est bien fondée.
- la relation de divisibilité sur l'ensemble $\mathbb{N}^*$ est un ordre bien fondé.

Exemple 6.25 *Ordres non bien fondés*

- l'ordre usuel sur $\mathbb{Z}$ ou sur $\mathbb{R}_+$
- L'inclusion sur les parties d'un ensemble infini n'est pas bien fondée.

Propriété 6.26 Soit $(A, \leq_A) et (B, \leq_B)$ deux ensembles ordonnés. Si $\leq_A$ et $\leq_B$ sont bien fondées, l'ordre lexicographique défini sur $A \times B$ est bien fondé.

demonstration : Soit X une partie non vide de $A \times B$. Montrons qu'elle admet un élément minimal. On note $A_X = \{a \in A, \exists b \in B, (a, b) \in X\}$. X est non vide, donc A_X l'est également. De plus, comme $\leq_A$ est bien fondé, A_X admet un élément minimal. Soit donc $a_0 \in A$ un élément minimal de A_X. On considère alors l'ensemble $B_0 = \{b \in B, (a_0, b) \in X\}$. Par définition de a_0, B_0 est non vide, alors, $\leq_B$ étant aussi bien fondé, B_0 admet un élément minimal b_0. l'élémet $x_0 = (a_0, b_0)$ est alors un élément minimal de X. En effet, Soit $(a, b) \in X$ tel que $(a, b) \leq (a_0, b_0)$ i.e. tel que $a < a_0 ou (a = a_0 et b \leq_B b_0)$. $a \in A_X$ donc, par minimalité de a_0, $a \not< a_0$, on a donc $a = a_0$ et $b \leq_B b_0$. De même, $b \in B_0$ puisque $(a, b) = (a_0, b)$. Par minimalité de b_0 dans B_0, on a donc $b = b_0$ d'où $(a, b) = (a_0, b_0)$.

Propriété 6.27 Soit $((E_i, \leq_i))_{\{} i \in [\![1, n]\!]\}$ une famille finie d'ensembles munis d'ordres bien fondés. $(n \geq 2)$. L'ordre produit défini sur $\prod_{i=1}^{n} E_i = E_1 \times \ldots \times E_n$ est bien fondé.

demonstration Soit A une partie non vide de $E_1 \times \ldots \times E_n$. On pose $A_1 = \{a_1 \in E_1, \exists (x_1, \ldots, x_n) \in A^n, x_1 = a_1\}$. Comme A est non vide, A_1 est une partie non vide de E_1 qui admet donc un élément minimal m_1. On pose $A_2 = \{a_2 \in E_2, \exists (x_1, \ldots, x_n) \in A^n, x_2 = a_2 \text{ et } x_1 = m_1\}$. Comme A est non vide, A_2 est une partie non vide de E_2 qui admet donc un élément minimal m_2.

On construit ainsi n ensembles non vides définis pour tout $i \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} A_{i+1} = \{a_{i+1} \in E_{i+1}, \exists (x_1, \dots, x_n) \in A^n, \forall j \in [\![1, i]\!], x_j = m_j \text{ et } x_{i+1} = a_{i+1}\} \\ m_i \text{ est un élément minimal de } A_i, \forall i \in [\![1, n]\!] \end{cases}$$

L'élément $m = (m_1, \dots, m_n)$ est alors, par construction, un élément minimal de A.

Remarque 6.28 Si E est muni d'un ordre total et bien fondé, alors toute partie non vide de E admet un plus petit élément. On parle alors de bon ordre et d'ensemble bien ordonné.

Définition 6.29 Soit E un ensemble. On appelle prédicat sur E toute propriété P dépendant d'éléments de E. Lorsque P dépend de n paramètres, on dit que P est d'arité n. On note alors $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n$.

- $P(x_1, ..., x_n)$ lorsque la propriété est vraie.
- $\neg P(x_1, ..., x_n)$ lorsque la propriété est fausse.

Remarque 6.30 Une relation bianire est en fait un prédicat d'arité 2.

Théorème 6.31 Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\leq$ est un ordre bien fondé.
2. Il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante d'élements de E.
3. Pour tout prédicat P sur E, si:
$$\forall (x, y) \in E^2, x > y \implies P(x)$$

Démonstration

- (1) $\implies$ (2) : Supposons que $\leq$ est un ordre bien fondé, et par l'absurde, que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite infinie strictement décoissante d'éléments de E. Alors l'ensemble non vide $\{x_n, \in \mathbb{N}\} \subset E$ admet un élément minimal x_k; Ainsi, par décroissance stricte de (x_n), $x_{k+1} < x_k$, ce qui contredit la minimalité de x_k
- (2) $\implies$ (3) : Soit P un prédicat sur E. On suppose que

$$(\forall (x,y) \in E^2, y < x \implies P(y)) \quad \implies \quad P(x)$$

.On note (A) cette propriété. Montrons que

$$\forall x \in E, P(x)$$

. Pour cela, on considère l'ensemble $A = \{x \in E, \neg P(x)\} \subset E$.
Supposons, par l'absurde que A est non vide : soit x_0 tel que $\neg P(x_0)$.
Alors par contraposée de (A), il existe $x_1 \in E$ tel que $x_1 < x_0$ et $\neg P(x_1)$.
En itérant ce raisonnement, on construit une suite infinie, strictement décroissante d'éléments $x_i \in E$ telle que $\forall i, \neg P(x_i)$, ce qui contredit la propriété (2).
- (3) $\implies$ (1) Soit A une partie non vide de E. on note $P(x)$ le prédicat $x \notin A$. Puisque $A \neq \emptyset$, la proposition "$\forall x \in E, P(x)$ est fausse.
Par contraposée de la proposition (3), on en déduit que :

$$\exists m \in E, y < m, P(y) et \neg P(m)$$

Donc on choisit $m \in A$ tel que

$$\forall y \in E, y < m \implies y \notin A$$

m est alors minimal dans A
donc $\leq$ est bien fondée.

Remarque 6.32 - *À propos du théorème 6.31*

- La propriété (2) peut permettre de justifier la terminaison de d'un algorithme en utilisant un ordre produit, par exemple, bien fondé, sur l'ensemble des valeurs que peuvent prendre les variables de l'algorithme (on retrouve la notion de variant).

Remarque 6.33 : La proposition (3) définit un principe de récurrence sur n'importe quel ensemble d'un ordre bien fondé. dans le cas où $E = \mathbb{N}$, on retrouve le principe de récurrrence forte.

Définition 6.35 - *stabilité*

Soit E un ensemble et $f : E^n \to E$ (pour $n \in \mathbb{N}$) une application.
On dit que $X \subset E$ est *stable* par f si

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in X, f(x_1, \ldots, x_n) \in X$$

Définition 6.36 - *constructeurs*

Soit E un ensemble. On se donne au plus :

- une partie $B \subset E$ correspondant aux éléments de base
- un ensemble de *constructeurs* $\mathcal{K} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{F}(E^n, E)$ i.e. un ensemble d'applications $f : E^n \to E$ où $n \in \mathbb{N}^*$ est appelé *arité* de f.

L'*ensemble inductif* associé est alors le plus petit ensemble $X \subset E$ contenant B est stable par les constructeurs de $\mathcal{K}$.

Remarque 6.37 -

▶ L'ensemble B peut être défini par un ensemble d'*assertions* et l'ensemble $\mathcal{K}$ par des *règles d'inférence*

Exemples 6.38 - *arithmétique de Péano*

▶ L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels est défini de manière inductive :

- $\{0\} \subset \mathbb{N}$ (assertion)
- si $n \in \mathbb{N}$, alors son successeur $S(n)$ appartient à $\mathbb{N}$ (règle d'inférence)

Remarque 6.39 -

▶ L'ensemble $\mathcal{P}(e)$ des parties d'un ensemble E n'est pas nécessairement bien ordonné, l'existence d'un ensemble inductif n'est alors pas immédiate et découle de la propriété suivante.

Propriété 6.40 - *Caractérisation d'un ensemble inductif*

Soit E un ensemble. Soit $B \subset E$ un ensemble d'élements de base et $\mathcal{K}$ un ensemble de constructeurs sur E.
On note A l'ensemble des parties de E contenant B et stables par les constructeurs de $\mathcal{K}$. L'ensemble inductif défini par B et $\mathcal{K}$ est alors :

$$X = \bigcap_{Y \in A} Y$$

Démonstration

- On a :
$$\forall Y \in A, B \text{ Donc } B \subset \bigcap_{Y \in A} Y$$
- Montrons que $\bigcap_{Y \in A} Y$ est stable par les constructeurs de $\mathcal{K}$.
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $f : E^N \to E$ un constructeur de $\mathcal{K}$ et $x_1, \dots, x_n \in \bigcap_{Y \in A} Y$
  Soit $Y \in A$. Alors $x_1, \dots, x_n \in Y$. Comme, par définition de A, Y est stable par f,
$$f(x_1, \dots, x_n) \in Y$$
  et ce, indépendamment du choix de Y. On en déduit que $f(x_1, \dots, x_n) \in \bigcap_{Y \in A} Y$, i.e. que $\bigcap_{Y \in A} Y$ est stable par f.
- Les deux points précédents justifient que $\bigcap_{Y \in A} Y \in A$.

De plus, pour tout $X \in A, \bigcap_{Y \in A} Y \subset X$.
$\bigcap_{Y \in A} Y$ est donc le plus petit élément de A, il s'agit ainsi de l'ensemble inductif recherché.

Exemples 6.41 -

- On considère l'ensemble $E = \mathcal{P}(\mathbb{R})$. On pose $B = \{[0, 2], [1, 3]\}$ et $\mathcal{K} = \{\cap, \cup\}$.
  L'ensemble inductif associé est alors $\{[0, 2], [1, 3], [0, 3], [1, 2]\}$.

Propriété 6.42 -

soit E un ensemble, $B \subset E$ un ensemble d'éléments de base et $\mathcal{K}$ un ensemble de constructeurs sur E.
On définit la suite (Y_n) de parties de E par : $\begin{cases} Y_0 = B \\ \forall n \in \mathbb{N}, Y_{n+1} = \mathcal{Y}_\backslash \cup \mathcal{K}(\mathcal{Y}_\backslash) \end{cases}$ L'ensemble inductif défini par B et $\mathcal{K}$ et alors :

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$$

Démonstration

Soit X l'ensemble inductif défini par B et $\mathcal{K}$.
$B = Y_0 \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$. Montrons que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$ est stable par les constructeurs de $\mathcal{K}$. Soit $f : E^p \to E (p \in \mathbb{N}^*)$ un constructeur de $\mathcal{K}$ et $x_1, \ldots, x_p \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$.
Soit $n_1, \ldots, n_p \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall i \in [\![1, p]\!], x_i \in Y_{n_i}$$

On note $n_0 = \max\{n_i, i \in [\![1, p]\!]\}$. Alors,

$$\forall i \in [\![1, p]\!]$$

, $x_i \in Y_{n_0}$ $(\supset Y_{n_i})$.
Par construction, on a donc $f(x_1, \ldots, x_p) \subset \mathcal{K}(Y_{n_0}) \subset Y_{n_0+1} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$.
Par ailleurs, par récurrence immédiate,

$$\forall n \in \mathbb{N}, Y_n \subset X$$

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$ est donc une partie de X, contenant B, et stable par les constructeurs de $\mathcal{K}$. Or X est le plus petit ensemble vérifiant cette propriété, on en déduit que $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$.

Remarque 6.43 -

- Cette dernière propriété montre que l'ensemble E n'a finalement pas d'importance. En pratique, on définit le plus souvent des objets de manière inductive en indiquant uniquement un ensemble de base et des constructeurs.

Exemples 6.44 - *Définition inductive des listes OCaml*

- `[]` est la liste vide
- si `e` est un élément `q` une liste, alors `e::q` est une liste d'élément en tête `e`. C'est cette construction qui justifie le filtrage de motif sur les listes OCaml.

Définition 6.45 - *non ambiguïté d'une définition*

Soit $X \subset E$ un ensemble défini de manière inductive par un ensemble de base B et un ensemble de constructeurs $\mathcal{K}$.
On dit que la définition de X est *non ambiguë* si es deux propriétés suviantes sont vérifiées :

- $\forall f \in \mathcal{K}(\text{arité } p), \forall x_1, \ldots, x_p \in X, f(x_1, \ldots, x_p) \notin B$
- $\forall f, g \in \mathcal{K}(\text{arité } p), \forall x_1, \ldots, x_p, \quad y_1, \ldots, y_p \in X, (f(x_1, \ldots, x_p) = g(y_1, \ldots, y_p)) \implies (f = g \text{ et } \forall i \in [\![1, p]\!], x_i = y_i)$

La définition non ambiguë d'un ensemble inductif permet de définir des fonctions de manière inductive sur cet ensemble.

Exemples 6.46 - *Définition inductive de la taille d'une liste OCaml*

- $\begin{cases} |\texttt{[]}| = 0 \\ |\texttt{[e::q]}| = 1 + |\texttt{q}| \end{cases}$

Définition 6.47 - *ordre induit*

Dans un ensemble inductif $X \subset E$, l'*ordre induit* $<$ est défini à partir des constructeur (ou règles d'inférence): pour $n \in \mathbb{N}^*$, si $f : E^n \to E$ est un constructeur et étant donné les éléments $x_1, \ldots, x_n \in E$, alors :

$$\forall i \in [\![1, p]\!], x_i < f(x_1, \ldots, x_p)$$

Propriété 6.48 - *preuve par induction structurelle*

Soit $X \subset E$ un ensemble défini de manière inductive par un ensemble de base B et un ensemble de constructeurs $\mathcal{K}$. Soit $\mathcal{P}$ un prédicat sur E.
si on a :

- $\forall b \in B, \mathcal{P}$
- $\forall f \in \mathcal{K}(\text{arité } p), \forall x_1, \ldots, x_p \in X, (\forall i \in [\![1, p]\!], \mathcal{P}(x_i)) \implies (\mathcal{P}(f(x_1, \ldots, x_p)))$

Alors,

$$\forall x \in X, \mathcal{P}(X)$$

Démonstration

On définit la suite (Y_n) par $\begin{cases} Y_0 = B \\ \forall n \in \mathbb{N}, Y_{n+1} = Y_n \cup \mathcal{K}(Y_n) \end{cases}$ On a vu (6.42) qu'alors $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$.

Pour tout $x \in X$, on définit alors la *hauteur* de x : $h(x) = \min\{n \in \mathbb{N}, x \in Y_n\}$ On suppose que :

- $\forall b \in B, \mathcal{P}$ (1)
- $\forall f \in \mathcal{K}(\text{arité } p), \forall x_1, \dots, x_p \in X, (\forall i \in [\![1, p]\!], \mathcal{P}(x_i)) \implies (\mathcal{P}(f(x_1, \dots, x_p)))$ (2)

Montrons par récurrence forte sur la hauteur n des éléments de X que $\forall x \in X, \mathcal{P}(X)$.

- Si $n = 0$:
  Soit $x \in X$ tel que $h(x) = 0$, i.e. tel que $x \in Y_0 = B$. Alors d'après la propriété (1), $\mathcal{P}(x)$
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que

$$\forall y \in X, h(y) \leq n \implies P(y)$$

  Soit $x \in X$ tel que $h(x) = n + 1$
  Montrons que $\mathcal{P}(x)$ est encore vraie.
  Par définition de la hauteur, $x \in Y_{n+1} = Y_n \cup \mathcal{K}(Y_n)$. De plus, $x \notin Y_n$ (sinon on aurait $h(x) \leq n$).
  Alors, $x \in \mathcal{K}(Y_n)$. Soit donc $f \in \mathcal{K}(\text{arité } p)$ et $y_1, \dots, y_p \in Y_n$ tels que $x = f(y_1, \dots y_p)$.
  Alors $\forall i \in [\![1, p]\!], h(y_i) \leq n$ donc $P(y_i)$ est vrai par hypothèse de récurrence.
  D'après la proposition (2), on a donc $\mathcal{P}(x)$. Ainsi, par récurrence forte sur n,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X \text{ de hauteur } n, \mathcal{P}(x)$$