

Définition 3.1 - caractérisation de norme sur un \mathbb{K} -espace vectoriel

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. une *norme sur E* est une application $||\cdot|| : E \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant pour tout $(x, y) \in E^2$:

1. *positivité* :

$$||x|| \geq 0$$

2. *Axiome de séparation* :

$$||x|| = 0 \implies x = 0$$

3. *Absolue homogénéité* :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, ||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$$

4. *Inégalité triangulaire* :

$$||x|| + ||y|| \geq ||x + y||$$

Exemple 3.3 (1) - normes de \mathbb{K}^n

Les applications suivantes sont des normes sur \mathbb{K}^n :

1. $||\cdot||_1 : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n |x_i|$

2. la *norme euclidienne associée au produit scalaire canonique sur \mathbb{K}^n* :

$$||\cdot||_2 : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$$

3. la *norme infinie* $||\cdot||_\infty : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} (|x_i|)$

Exemple 3.3 (2) - normes de $\mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$

Les applications suivantes sont des normes sur $\mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$:

1. la *norme de la convergence en moyenne* $||\cdot||_1 : f \mapsto \int_a^b |f(t)| dt$

2. la *norme euclidienne associée au produit scalaire canonique sur $\mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$* :

$$||\cdot||_2 : f \mapsto \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt}$$

3. la *norme infinie* $||\cdot||_\infty : f \mapsto \sup_{x \in [a; b]} (|f(x)|)$

Théorème 3.7 - *norme euclidienne associée à un produit scalaire*

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel. L'application $\|\cdot\| : x \mapsto \sqrt{(x|x)}$ est une norme, appelée *norme euclidienne associée à $(\cdot|\cdot)$* .

Définition 3.12 - *espace métrique*

Soit E un ensemble. Une application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée *distance* si elle vérifie ces propriétés :

1. $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) \geq 0$
2. $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = 0 \implies x = y$
3. $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = d(y, x)$
4. $\forall (x, y, z) \in E^3, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Une telle application munit E d'une structure d'*espace métrique*.

Définition 3.14 - *distance d'un point à une partie non vide*

Soit (E, d) un espace métrique. Étant donnée une partie A de E et x un élément de E , on appelle *distance de x à A* la borne inférieure des distances de x à tous les éléments de A :

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$$

Définition 3.15 - *sphère d'un espace vectoriel normé*

Soit E un espace vectoriel normé. On appelle *sphère de centre $a \in E$ et de rayon $r \geq 0$* de E l'ensemble $\mathcal{S}(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| = r\}$.

Définition 3.16 - *partie bornée d'un espace vectoriel normé*

Soit E un espace vectoriel normé. On dit qu'une partie A de E est *bornée* lorsqu'il existe une boule fermée la contenant :

$$\exists a \in E, \exists r \geq 0, A \subset \overline{B}(a, r)$$

Soit :

$$\exists r \geq 0, \forall x \in A, \|x\| \leq r$$