Chapitre 2

Vecteurs aléatoires

I Introduction

Définition 2.1 - *variable aléatoire*

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. On appelle *vecteur aléatoire* sur Ω une application de Ω dans $\mathbb{R}^n$. Pour $n = 1$, on parle de *variable aléatoire*.

Remarque 2.2 - *notation associée*

Pour $A \in \mathbb{R}^n$, on notera $\{X \in A\}$ l'évènement :

$$\{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \in A\}$$

Définition 2.3 - *vecteur aléatoire discret*

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Un vecteur aléatoire X sur Ω est dit *discret* s'il existe $F \subset \mathbb{R}^n$ au plus dénombrable tel que :

$$\mathbb{P}\Big(\{X \in F\}\Big) = 1$$

Nous émettrons dans le cadre du cours l'hypothèse suivante.

Remarque 2.4 - *en lien avec la définition*

Si X est un vecteur aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, pour tout ouvert A de $\mathbb{R}^n$:

$$\{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \in A\} = \{X \in A\} \in \mathcal{T}$$

Définition 2.5 - *vecteur aléatoire à densité*

X est un vecteur aléatoire définie sur $(\Omega,\, \mathcal{T},\, \mathbb{P})$ à valeurs dans F s'il il existe $p : F \to \mathbb{R}_+$ qui vérifie pour tout A ouvert de F :

$$\mathbb{P}\Big(\{X \in A\}\Big) = \int_A p(x)\,\mathrm{d}x$$

Remarque 2.6 - *à ce propos*

Pour $A = F,$ la probabilité précédemment évoquée vaut :

$$\mathbb{P}\big(\{X \in F\}\big) = 1$$

II Lois usuelles

Définition 2.7 - *loi d'une variable aléatoire*

La loi d'une variable aléatoire discrète X à valeurs dans F (*i.e.* $\mathbb{P}\Big(\{X \in F\}\Big) = 1$) est entièrement définie par la famille de réels positifs :

$$\Bigg(\mathbb{P}\big(\{X = x\}\big)\Bigg)_{x \in F}$$

de somme 1.

Exemple 2.8 - *loi de Bernoulli*

Pour une loi de Bernoulli :

- $F = \{0, 1\}$
- $\mathbb{P}\big(\{X = 1\}\big) = p$ et $\mathbb{P}\big(\{X = 0\}\big) = 1 - p$

Une telle variable aléatoire mesure la probabilité de succès d'une épreuve de Bernoulli (succès de probabilité p, échec de probabilité $1 - p$).

Exemple 2.9 - *loi binomiale*

Pour une loi binomiale :

- $F = [\![0,\, n]\!]$ où $n \in \mathbb{N}^*$
- $\forall k \in [\![0,\, n]\!],\, \mathbb{P}\big(\{X = k\}\big) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Une telle variable aléatoire mesure le nombre de succès au terme de la répétition indépendante de n épreuves de Bernoulli du même paramètre p.

Exemple 2.10 - *loi géométrique*

Pour une loi géométrique :

- $F = \mathbb{N}^*$.
- $\forall k \in \mathbb{N}^*,\, \mathbb{P}\big(\{X = k\}\big) = p(1-p)^{k-1}$

En numérotant à partir de 1 une suite d'épreuves de Bernoulli répétées indépendamment et indéfiniment, une telle variable aléatoire mesure l'indice du premier succès.

Exemple 2.11 - *loi de Poisson*

Pour une loi de Poisson :

- $F = \mathbb{N}$
- $\forall k \in \mathbb{N},\, \mathbb{P}\big(\{X = k\}\big) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

Une loi de Poisson a des intérêts multiples, comme celui d'approximer sous certaines conditions une loi binomiale.

Remarque 2.12 - *sur ces lois*

On retrouve par dénombrement l'expression de telles lois. Par exemple dans le cas de la loi géométrique, $\{X = k\}$ correspond à l'évènement "La k-ème épreuve est la première à réussir.". Cela revient à avoir vu échouer les $k-1$ épreuves précédentes :

$$\mathbb{P}\big(\{X = k\}\big) = p(1-p)^{k-1}$$

III Lois marginales

Proposition 2.13 - *formule des lois marginales*

Soit X et Y deux vecteurs aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, respectivement à valeurs dans F et G. On a :

1. $\forall x \in F,\ \mathbb{P}\big(\{X = x\}\big) = \displaystyle\sum_{g \in G} \mathbb{P}\big(\{Y = g\}\big)$

2. $\forall g \in G,\ \mathbb{P}\big(\{Y = g\}\big) = \displaystyle\sum_{x \in F} \mathbb{P}\big(\{X = x\}\big)$

Remarque 2.14 - *démonstration*

On doit ceci à la formule des probabilités totales appliquée aux systèmes complets d'évènements $\Big(Y = g\Big)_{g \in G}$ et $\Big(X = x\Big)_{x \in F}$.

IV Variables aléatoires à densité

Pour une *variable aléatoire à densité*, on dira que la densité caractérise la loi de cette variable aléatoire :

Définition 2.15 - *variable aléatoire à densité*

Soit X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ à valeurs dans F. X est qualifiée de *variable aléatoire à densité* s'il existe $p : F \to [0\,;\,1]$, dite *densité de probabilité*, vérifiant pour toute partie A de F :

$$\mathbb{P}\big(\{X \in A\}\big) = \int_A p(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque 2.16 - *sur cette définition*

La donnée de X est alors entièrement caractérisée par sa densité de probabilité p.

Exemple 2.17 - *loi de densité uniforme*

Pour une loi uniforme de paramètres $a < b$ dans $\mathbb{R}$:

- $F = [a\,;\,b]$
- $\forall x \in [a\,;\,b]$, $\mathbb{P}\big(\{X = x\}\big) = \dfrac{\mathbb{1}_{[a\,;\,b]}(x)}{b-a}$

La fonction `rand` en `C` suit une loi uniforme sur $[0\,;\,1]$.

Exemple 2.18 - *loi de densité gaussienne*

Pour une loi gaussienne de paramètres $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$:

- $F = \mathbb{R}$
- $\forall x \in [a\,;\,b]$, $p(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 \right)$

Exemple 2.19 - *loi de densité exponentielle*

Pour une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$:

- $F = \mathbb{R}$
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $p(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$

Proposition 2.20 - *formule des lois marginales de densité*

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à densité sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $F \times G$. On note $p_{(X,Y)}$ la densité de probablité du couple (X, Y).
Alors p_X et p_Y vérifient :

1. $\forall x \in F$, $p_X(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} p_{(X,Y)}(x, y)\,\mathrm{d}y$
2. $\forall y \in G$, $p_Y(y) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} p_{(X,Y)}(x, y)\,\mathrm{d}x$

Démonstration

On montre le premier résultat. Montrons que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\, p_X(x) = \int_{\mathbb{R}} p_{(X,Y)(x,y)}\, \mathrm{d}y$$

Ce qui revient par définition à montrer que :

$$\forall A \subset F,\, \mathbb{P}\big(\{X \in A\}\big) = \int_A \underbrace{\int_{\mathbb{R}} p_{(X,Y)}(x,y)\, \mathrm{d}y}_{:=p_X(x)}\, \mathrm{d}x$$

Soit $A \subset F$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \in A) &= \mathbb{P}\Big((X,Y) \in A \times G\Big) \\
&= \int_{A \times G} p_{(X,Y)}(x,y)\, \mathrm{d}(x,y) \\
&= \int_A \left(\int_G p_{(X,Y)}(x,y)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

V Espérance d'une variable aléatoire

V.1 Variable aléatoire discrète

Définition 2.21 - *famille sommable de réels positifs*

On dit qu'une *famille $(u_i)_{i\in I}$ de nombres réels positifs est sommable* lorsqu'il existe $M \geq 0$ tel que, pour toute partie finie $J \subset I$, on ait $\sum_{j\in J} u_j \leq M$. On définit alors *la somme de la famille* par :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sup_{\substack{J \subset I \\ J \text{ finie}}} \sum_{j \in J} u_j$$

Définition 2.22 - *espérance d'une variable aléatoire discrète*

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $F \subset \mathbb{R}$. X est dite *sommable* si elle admet un moment d'ordre 1 *i.e.* si la famille $\Big(x\mathbb{P}\big(\{X = x\}\big)\Big)_{x \in X}$ est sommable. On notera alors $\mathbb{E}(X)$ son espérance définie ainsi :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in F} x\mathbb{P}\big(\{X = x\}\big)$$

Exemple 2.23 - *espérance d'une fonction indicatrice*

Si A est un évènement de Ω, alors $\mathbb{1}_A : \Omega \to \{0, 1\}$ est une variable aléatoire sommable (car $\mathbb{1}_A(\Omega)$ est fini). Puis :

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$$

Théorème 2.24 - *formule de transfert pour une variable aléatoire discrète*

Soit X une variable aléatoire discrète sommable à valeurs dans $F \subset \mathbb{R}$ et $g : F \to G$. Alors $g(X)$ est également une variable aléatoire sommable et :

$$\mathbb{E}\Big(g(X)\Big) = \sum_{x \in F} g(x)\mathbb{P}\big(\{X = x\}\big)$$

V.2 variable aléatoire à densité

Définition 2.25 - *intégrabilité d'une variable aléatoire à densité*

Soit X une variable aléatoire à densité à valeurs dans F un espace vectoriel de dimension n. On dit de X qu'elle est *intégrable* si l'intégrale :

$$\int_F \|x\| p(x)\,\mathrm{d}x$$

converge. Le cas échéant on dit que X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ vérifiant :

$$\mathbb{E}(X) = \underbrace{\int_F \underbrace{x}_{\in F} \underbrace{p(x)}_{\in \mathbb{R}_+} \mathrm{d}x}_{\in F}$$

Remarque 2.26 - *sur cette définition*

Il est commun d'avoir $F = \mathbb{R}$ muni de la valeur absolue classique ou $F = \mathbb{R}^n$ peu importe la norme (*cf.* dimension finie).

V.3 exemples

Exemple 2.27 - *espérance d'une loi de Bernoulli*

Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0\,;\,1]$, alors $X(\Omega) = \{0, 1\}$ est fini, X est donc sommable et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= 0 \times (1-p) + 1 \times p \\ &= p\end{aligned}$$

Exemple 2.28 - *espérance d'une loi binomiale*

Si X suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0\,;\,1]$, alors $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ est fini, X est donc sommable et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} && \text{premier terme nul} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k} \\ &= np \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{j!(n-j-1)!} p^j (1-p)^{n-1-j} && \text{changement d'indice} \\ &= np \Big(p + (1-p)\Big)^{n-1} && \text{formule du binôme de Newton} \\ &= np\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Exemple 2.29 - *espérance d'une loi de Poisson*

Si X suit une loi de Poisson de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0\,;\,1]$, alors $X(\Omega) = \mathbb{N}$ est dénombrable, X est donc sommable seulement si la quantité suivante admet une limite finie quand N tend vers $+\infty$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{N} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\
&\qquad = \sum_{k=1}^{N} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} \\
&\qquad = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{N} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&\qquad = \lambda e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\lambda^j}{j!} \\
&\qquad \xrightarrow[N \to +\infty]{} \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda
\end{aligned}$$

X est donc effectivement sommable, et son espérance vaut :

$$\mathbb{E}(X) = \lambda$$

Exemple 2.30 - *espérance d'une loi géométrique*

Si X suit une loi de géométrique de paramètre $p \in]0;1[$ (on évite les cas pathologiques), alors $X(\Omega) = \mathbb{N}$ est dénombrable, X est donc sommable seulement si la quantité suivante admet une limite finie quand N tend vers $+\infty$:

$$\sum_{k=1}^{N} kp(1-p)^{k-1}$$
$$= p\sum_{k=1}^{N} k(1-p)^{k-1}$$

Ceci implique la dérivée d'une somme géométrique de raison $(1-p)$, valant :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(1-p)^k = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}$$

Par dérivation terme à terme on a bien sommabilité de X, et on trouve :

$$\mathbb{E}(X) = p\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} = \frac{1}{p}$$

VI Indépendance de variables aléatoires

Définition 2.31 - *indépendance de variables aléatoires*

Soit X et Y une famille de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ à valeurs dans F et G respectivement. On dit que X et Y sont *indépendantes* si pour tous $x \in F$ et $y \in G$:

$$\mathbb{P}\big(\{X = x\}\big) = \mathbb{P}\big(\{x_j\}\big)\mathbb{P}\big(\{X_j = x_j\}\big)$$

Questions de cours

1. Lois discrètes usuelles (de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson)

2. Lois de densité usuelles

3. Espérance d'une variable aléatoire discrète

$$v_n = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\varphi^n + \left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\phi^n - 2$$

$\begin{cases} \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \text{le nombre d'or} \\ \phi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 - \varphi = -\frac{1}{\varphi} \end{cases}$

$$v_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ v_{n-1} + v_{n-2} + 2 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

$$x^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ x^{\frac{n}{2}} \times x^{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ est pair} \\ x^{\frac{n-1}{2}} \times x^{\frac{n-1}{2}} \times x & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$