Définition 9.1 - *convergence simple d'une suite de fonctions*

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie, $A \subset E$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(A,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. On dit que *la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement* si pour tout $x \in A$, la suite $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ converge. Ainsi la fonction :

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \end{aligned}$$

est appelée *limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$*. Ainsi,

$$\forall x \in A,\ \forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Définition 9.4 - *convergence uniforme d'une suite de fonctions*

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie, $A \subset E$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(A,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. On dit que *la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément* si pour tout $x \in A$, la suite $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ converge. Ainsi la fonction :

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \end{aligned}$$

est appelée *limite uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$*. Ainsi,

$$\forall x \in A,\ \forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Théorème 9.15 - *propriétés conservées par la limite uniforme*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $A \subset E$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(A,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers $f : A \to E$.

1. Si les $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées, alors il en est de même pour f.
2. Si les $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont continues, alors il en est de même pour f.

Théorème 9.17 - *de la double limite*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $A \subset E$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(A,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers $f : A \to E$. Soit $a\overline{a}$.
Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet en a limite l_n, alors la suite $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et f converge en a vers sa limite :

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right)$$

Définition 9.19 - *convergence uniforme d'une série de fonctions*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $A \subset E$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. La série $\sum_n f_n$ *converge uniformément sur A* si sa suite des sommes partielles converge uniformément, c'est-à-dire que la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses restes converge vers 0 pour $\|\cdot\|_\infty^A$:

$$\|R_n\|_\infty^A \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

ou bien

$$\|S - S_n\|_\infty^A \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

Définition 9.20 - *convergence normale d'une série de fonctions*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $A \subset E$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. La série $\sum_n f_n$ *converge normalement sur A* si la série $\displaystyle\sum_n \|f_n\|_\infty^A$ converge.

Proposition 9.25 - *conditions nécessaires à la convergence normale*

Soit $\sum_n f_n$ une série fonctions de normalement convergentes sur A. On a alors :

1. La série $\sum_n f_n$ converge absolument sur A et donc simplement sur A.
2. La série $\sum_n f_n$ converge uniformément sur A.

Définition 9.40 - *fonction continue par morceaux sur un intervalle*

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I. *f est continue par morceaux* si toute restriction de f à un segment est continue par morceaux.

Théorème 9.43 - $\mathrm{Esc}([a\,;\,b], F)$ *dense dans* $\mathcal{CM}([a\,;\,b], F)$ *pour* $\|\cdot\|_\infty$

Toute fonction continue par morceaux sur $[a\,;\,b]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier sur $[a\,;\,b]$:

$$\overline{\mathcal{E}([a\,;\,b], F)} = \mathcal{CM}([a\,;\,b], F)$$

Théorème 9.47 - *premier de Weierstrass*

Toute fonction continue sur $[a\,;\,b]$, à valeurs réelles ou complexes, est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales sur $[a\,;\,b]$

Théorème 9.49 - *deuxième de Weierstrass*

Toute fonction continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes, T-périodique est limite uniforme d'une suite de *fonctions polynomiales trigonométriques*, fonctions de la forme :

$$t \mapsto \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e^{\frac{2ik\pi}{T}t}$$