

Définition 34.1 - *espaces préhilbertien réel, euclidien*

Un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire est appelé *espace préhilbertien réel*. Un espace préhilbertien réel de dimension finie est appelé *espace euclidien*.

Définition 34.11 (1) - *norme associée à un produit scalaire*

Soit E un espace préhilbertien réel. On appelle *norme euclidienne sur E* l'application :

$$\begin{aligned} \|\cdot\| &: E \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle} \end{aligned}$$

Définition 34.11 (2) - *vecteur unitaire*

Soit E un espace préhilbertien réel. On dit qu'un vecteur $x \in E$ est *unitaire* si $\|x\| = 1$.

Définition 34.11 (3) - *distance euclidienne*

Soit E un espace préhilbertien réel. On appelle *distance euclidienne sur E* l'application :

$$\begin{aligned} d &: E^2 \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\mapsto \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle} \end{aligned}$$

Proposition 34.15 - *identité de polarisation*

Soit E un espace vectoriel. Si existe, le produit vectoriel associé à une norme sur E vérifie :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle x, y \rangle = \frac{\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2}$$

Théorème 34.16 (0) - *inégalité de Cauchy-Schwarz*

Soit E un espace préhilbertien réel, $(x, y) \in E^2$.

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \times \|y\|$$

avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Théorème 34.16 (1) - *inégalité triangulaire*

Soit E un espace préhilbertien réel, $(x, y) \in E^2$.

$$|||x|| - ||y||| \leq ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$$

De plus,

$$||x + y|| = ||x|| + ||y|| \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}_+, x = \alpha y$$

Définition 34.19 (1) - *vecteurs orthogonaux*

Soit E un espace préhilbertien réel, $(x, y) \in E^2$. On dit que x et y sont *orthogonaux* si $\langle x, y \rangle = 0$. On note alors $x \perp y$.

Définition 34.19 (2) - *parties orthogonales*

Soit E un espace préhilbertien réel, $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$. On dit que X et Y sont *orthogonales* si :

$$\forall (x, y) \in X \times Y, \langle x, y \rangle = 0$$

On note alors $X \perp Y$.

Définition 34.19 (3) - *famille orthogonale*

Soit E un espace préhilbertien réel, $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E . On dit que $(x_i)_{i \in I}$ est *orthogonale* si :

$$\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \implies \langle x_i, x_j \rangle = 0$$

Définition 34.19 (4) - *famille orthonormée*

Soit E un espace préhilbertien réel, $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E . On dit que $(x_i)_{i \in I}$ est *orthonormée* si elle est orthogonale et constituée de vecteurs unitaires, i.e. :

$$\forall (i, j) \in I^2, \langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij}$$

Proposition 34.bonus - caractérisation de norme

Soit E un espace préhilbertien réel. Une application $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une norme sur E si et seulement si elle vérifie pour tout $(x, y) \in E^2$:

1. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \varphi(\lambda x) = |\lambda| \varphi(x)$
2. $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $\varphi(x) + \varphi(y) \geq \varphi(x + y)$

Théorème 34.25 - CS de liberté

Soit E un espace préhilbertien réel. Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls de E est libre.

Théorème 34.26 - coordonnées dans une base orthonormale

Soit E un espace euclidien de dimension $n \neq 0$ et (e_1, \dots, e_n) une base orthonormale de E (une famille orthonormale de n éléments).

Les coordonnées de tout vecteur $x \in E$ dans la base (e_1, \dots, e_n) sont $(\langle x, e_1 \rangle, \dots, \langle x, e_n \rangle)$.

Théorème 34.27 - expression du produit scalaire dans une base orthonormale

Soit E un espace euclidien de dimension $n \neq 0$. Soit $x, y \in E$ de coordonnées respectives $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)$ dans une certaine base orthonormale de E . On a alors :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

Théorème 34.28 - *algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt*

Soit E un espace préhilbertien réel et $F = (f_1, \dots, f_n)$ une famille libre de E . À partir de F , il est possible de construire une famille orthonormale (u_1, \dots, u_n) , telle que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{Vect}(f_1, \dots, f_k) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$$

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, le vecteur u_k est donné par :

$$u_k = \pm \frac{f_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle f_k, u_i \rangle u_i}{\|f_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle f_k, u_i \rangle u_i\|}$$

Théorème 34.38 (0) - *supplémentaire orthogonal d'un sev de dimension finie*

Soit E un espace préhilbertien réel et F un sev de dimension finie de E .

F^\perp est l'unique supplémentaire de F dans E , orthogonal à F . On l'appelle le *supplémentaire orthogonal* de F dans E .

Théorème 34.38 (1) - *supplémentaire orthogonal d'un sev de dimension finie*

Soit E un espace préhilbertien réel et F un sev de dimension finie de E . On a :

$$F = F^{\perp\perp}$$

Définition 34.39 - *vecteurs normaux à un hyperplan*

Soit E un espace euclidien de dimension $n \neq 0$ et H un hyperplan de E . Le sous-espace H^\perp est une droite dont tout vecteur non nul est dit *vecteur normal* à H .