

Théorème 6.31 - caractérisation de la bonne fondation d'un ordre

Soit (E, \leq) un ensemble ordonné. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. \leq est un ordre bien fondé.
2. Il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante d'éléments de E .
3. Pour tout prédicat P sur E ,

$$\left(\forall x \in E, \left(\forall y \in E, x > y \implies P(y) \right) \implies P(x) \right) \implies \left(\forall x \in E, P(x) \right)$$

Démonstration

(1) \implies (2) : Supposons que \leq est un ordre bien fondé, et par l'absurde, que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite infinie strictement décroissante d'éléments de E . Alors l'ensemble non vide $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} \subset E$ admet un élément minimal x_k ; Ainsi, par décroissance stricte de (x_n) , $x_{k+1} < x_k$, ce qui contredit la minimalité de x_k .

Démonstration

(2) \implies (3) : Soit P un prédicat sur E . On suppose par l'absurde :

(2) et $\neg(3)$

donc (2) et $\left(\forall x \in E, \left(\forall y \in E, x > y \implies P(y) \right) \implies P(x) \right)$ et $\left(\exists x \in E, \neg P(x) \right)$

donc (2) et $\left(\forall x \in E, \neg P(x) \implies \left(\exists y \in E, x > y \text{ et } \neg P(y) \right) \right)$ et $\left(\exists x \in E, \neg P(x) \right)$

Soit $x \in E$ tel que $\neg P(x)$. On choisit $y \in E$ tel que $x > y$ et $\neg P(y)$. De même, on peut encore choisir $z \in E$ tel que $y > z$ et $\neg P(z)$. D'après le principe de récurrence, on construit ainsi une suite strictement décroissante $(x_i) \in E^{\mathbb{N}}$, telle que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\neg P(x_i)$. Ce qui contredit la propriété (2).

Démonstration

(3) \implies (1) : Remarquons d'abord que :

$$\begin{aligned}
 & (3) \implies (1) \\
 \Leftrightarrow & \left(\left[\left(\forall x \in E, \left(\forall y \in E, x > y \implies P(y) \right) \implies P(x) \right) \implies \left(\forall x \in E, P(x) \right) \right] \implies (1) \right) \\
 \Leftrightarrow & \left(\left[\left(\exists x \in E, \neg P(x) \right) \implies \left(\exists x \in E, \left(\forall y \in E, x > y \implies P(y) \right) \text{ et } \neg P(x) \right) \right] \implies (1) \right)
 \end{aligned}$$

Soit $A \subset E$, tel que $A \neq \emptyset$. On note P le prédicat de E tel que $A \neq \emptyset$. Pour tout $x \in E$ on note $P(x)$: " $x \notin A$ ". Nécessairement, il existe $x \in E$ tel que

$$\begin{aligned}
 & x \in A \\
 \text{donc} & \neg P(x)
 \end{aligned}$$

On choisit alors $m \in A$ tel que :

$$\begin{aligned}
 & \neg P(m) \text{ et } (\forall y \in E, y < m \implies P(y)) \\
 \text{alors} & m \in A \text{ et } (\forall y \in E, y < m \implies y \notin A)
 \end{aligned}$$

m est alors l'élément minimal de A . donc \leq est un ordre bien fondé.

Théorème 6.48 - preuve par induction structurelle

Soit $X \subset E$ un ensemble défini de manière inductive par un ensemble de base B et un ensemble de constructeurs \mathcal{K} . Soit \mathcal{P} un prédicat sur E .

si on a :

1. $\forall b \in B, \mathcal{P}(b)$
2. $\forall f : E^p \rightarrow E \in \mathcal{K}, \forall x_1, \dots, x_p \in X, \left(\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \mathcal{P}(x_i) \right) \implies \left(\mathcal{P}(f(x_1, \dots, x_p)) \right)$

Alors,

$$\forall x \in X, \mathcal{P}(x)$$

Démonstration

On définit la suite (Y_n) par $\begin{cases} Y_0 = B \\ \forall n \in \mathbb{N}, Y_{n+1} = Y_n \cup \mathcal{K}(Y_n) \end{cases}$

alors $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$.

Définition temporaire - hauteur d'un élément d'ensemble inductif défini récursivement

Pour tout $x \in X$ on définit alors la *hauteur* de x par $h(x) = \min\{n \in \mathbb{N}, x \in Y_n\}$.

On suppose que :

1. $\forall b \in B, \mathcal{P}(b)$
2. $\forall f : E^p \rightarrow E \in \mathcal{K}, \forall x_1, \dots, x_p \in X, \left(\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \mathcal{P}(x_i) \right) \implies \left(\mathcal{P}(f(x_1, \dots, x_p)) \right)$

Montrons par récurrence forte sur la hauteur n des éléments de X que $\forall x \in X, \mathcal{P}(x)$.

- Si $n = 0$:
Soit $x \in X$ tel que $h(x) = 0$, i.e. tel que $x \in Y_0 = B$. Alors d'après la propriété (1), $\mathcal{P}(x)$
- Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que

$$\forall y \in X, h(y) \leq n \implies \mathcal{P}(y)$$

Soit $x \in X$ tel que $h(x) = n + 1$. Montrons que $\mathcal{P}(x)$ est encore vraie.

Par définition de la hauteur, $x \in Y_{n+1} = Y_n \cup \mathcal{K}(Y_n)$. De plus, $x \notin Y_n$ ($h(x) = n + 1$).

Alors, $x \in \mathcal{K}(Y_n)$.

Soit donc $f : E^p \rightarrow E \in \mathcal{K}$ et $y_1, \dots, y_p \in Y_n$ tels que $x = f(y_1, \dots, y_p)$.

Donc $\mathcal{P}(y_i)$ est vraie par hypothèse de récurrence ($\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, h(y_i) \leq n$).

D'après la proposition (2), on a donc $\mathcal{P}(x)$.

- Ainsi, par récurrence forte sur n ,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X \text{ de hauteur } n, \mathcal{P}(x)$$