-3cm-3cm

Définition 9.1 - *convergence simple d'une suite de fonctions*

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie, $A \subset E$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(A,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. On dit que *la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement* si pour tout $x \in A$, la suite $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ converge. Ainsi la fonction :

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \end{aligned}$$

est appelée *limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$*. Ainsi,

$$\forall x \in A,\, \forall \epsilon > 0,\, \exists N \in \mathbb{N},\, \forall n \geq N,\, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Définition 9.4 - *convergence uniforme d'une suite de fonctions*

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie, $A \subset E$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(A,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. On dit que *la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément* si pour tout $x \in A$, la suite $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ converge. Ainsi la fonction :

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \end{aligned}$$

est appelée *limite uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$*. Ainsi,

$$\forall x \in A,\, \forall \epsilon > 0,\, \exists N \in \mathbb{N},\, \forall n \geq N,\, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Théorème 9.15 - *propriétés conservées par la limite uniforme*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $A \subset E$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(A,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers $f : A \to E$.

1. Si les $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées, alors il en est de même pour f.
2. Si les $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont continues, alors il en est de même pour f.

Théorème 9.17 - *de la double limite*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $A \subset E$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(A,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers $f : A \to E$. Soit $a \in \overline{A}$.
Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet en a limite l_n, alors la suite $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et f converge en a vers sa limite :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right) = \lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) \qquad \Big(= f(a) \quad (\star)\Big)$$

$(\star)$: si f est continue.

Définition 9.19 - *convergence uniforme d'une série de fonctions*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $A \subset E$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(A,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. La série $\sum_n f_n$ *converge uniformément sur A* si sa suite des sommes partielles converge uniformément, c'est-à-dire que la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses restes converge vers 0 pour $\|\cdot\|_\infty^A$:

$$\|R_n\|_\infty^A \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

ou bien

$$\|S - S_n\|_\infty^A \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

Définition 9.20 - *convergence normale d'une série de fonctions*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $A \subset E$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(A,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. La série $\sum_n f_n$ *converge normalement sur A* si la série $\displaystyle\sum_n \|f_n\|_\infty^A$ converge.

Proposition 9.25 - *conditions nécessaires à la convergence normale*

Soit $\sum_n f_n$ une série fonctions de normalement convergentes sur A. On a alors :

1. La série $\sum_n f_n$ converge absolument sur A et donc simplement sur A.

2. La série $\sum_n f_n$ converge uniformément sur A.

Définition 9.40 - *fonction continue par morceaux sur un intervalle*

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I. f *est continue par morceaux* si toute restriction de f à un segment est continue par morceaux.

Théorème 9.43 - $\mathrm{Esc}([a\,;\,b],F)$ *dense dans* $\mathcal{CM}([a\,;\,b],F)$ *pour* $\|\cdot\|_\infty$

Toute fonction continue par morceaux sur $[a\,;\,b]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier sur $[a\,;\,b]$:

$$\overline{\mathcal{E}([a\,;\,b],F)} = \mathcal{CM}([a\,;\,b],F)$$

Théorème 9.47 - *premier de Weierstrass*

Toute fonction continue sur $[a\,;\,b]$, à valeurs réelles ou complexes, est limite uniforme sur $[a\,;\,b]$ d'une suite de fonctions polynomiales.

Théorème 9.49 - *deuxième de Weierstrass*

Toute fonction continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes, T-périodique est limite uniforme d'une suite de *fonctions polynomiales trigonométriques*, fonctions de la forme :

$$\left(t \mapsto \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e^{\frac{2ik\pi}{T}t}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Maître Corbeau, sur un arbre perché,
Tenait en son bec un fromage.
Les programmes de mathématiques des classes préparatoires scientifiques MPSI, PCSI, PTSI, MP2I, MP, PC, PSI, PT, MPI sont conçus comme un socle cohérent et ambitieux de connaissances et de capacités, avec l'objectif de préparer les étudiantes et étudiants à poursuivre avec succès dans les écoles et les universités un cursus de formation aux métiers de l'ingénierie, de l'enseignement, de la recherche.