Proposition 4.2 (6) - *intersection finie de voisinage*

Soit E un espace vectoriel normé. L'intersection finie de voisinages d'un élément $x \in E$ est un voisinage de x.

Définition 4.4 - *ouvert*

Soit E un espace vectoriel normé. On appelle ouvert de E une partie O de E qui est un *voisinage de chacun de ses points*, *i.e.* :

$$\forall x \in O, \exists r > 0, \mathcal{B}(x, r) \subset O$$

Proposition 4.5 (5) - *intersection finie de voisinage*

Soit E un espace vectoriel normé. L'intersection finie d'ouverts de E est un ouvert de E.

Définition 4.6 - *fermé*

Soit E un espace vectoriel normé. On appelle fermé de E *le complémentaire dans E d'un ouvert O de E*.

Définition 4.9 - *point adhérent à une partie*

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E. Un point $x \in E$ est dit *adhérent à A* si tout voisinage de x rencontre A :

$$\forall V \in \mathcal{V}_E(x), V \cap A \neq \varnothing$$

On appelle *adhérence de A l'ensemble $\overline{A}$ des éléments de E adhérents à A*.

Proposition 4.10 - *caractérisation de l'adhérence d'une partie*

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E. Pour tout $x \in E$, les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. x est adhérent à A ;
2. Toute boule ouverte de centre x contient au moins un élément de A ;
3. la distance de x à A est nulle.

Définition 4.12 (1) - *point d'accumulation d'une partie*

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E. Un point x est un *point d'accumulation de A* si tout voisinage de x rencontre A en au moins un autre point que x :

$$\forall V \in \mathcal{V}_E(x),\, (V \setminus \{x\}) \cap A \neq \varnothing$$

Définition 4.12 (2) - *point isolé d'une partie*

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E. Un point x est un *point isolé de A* s'il existe un voisinage de x qui ne rencontre A qu'en x :

$$\exists V \in \mathcal{V}_E(x),\, V \cap A = \{x\}$$

Définition 4.15 - *partie dense*

Soit E un espace vectoriel normé et A et B des parties de E. On dit que *A est dense dans B* si $\overline{A} = B$

Théorème 4.17 - *caractérisation de l'adhérence par l'inclusion*

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E. $\overline{A}$ est le plus petit fermé de E contenant A.

Théorème 4.18 - *caractérisation de l'adhérence par l'intersection*

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E. $\overline{A}$ est l'intersection de tous les fermés de E contenant A.

Théorème 4.20 - *caractérisation séquentielle de l'adhérence*

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E. $\overline{A}$ est l'ensemble des limites des suites convergentes d'éléments de A.