Théorème 10.11 - *dérivée d'une composée par une application linéaire*

Soit E, F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimension finie, u une application linéaire de E dans F, et f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans E. Alors $u \circ f$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1(I, F)$ et :

$$(u \circ f)' = u \circ f'$$

Théorème 10.12 - *dérivée d'une composée par une application bilinéaire*

Soit E, F et G trois espaces vectoriels normés de dimension finie, B une application bilinéaire de $E \times F$ vers G, et f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs respectives dans E et F. Alors $B(f, g)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1(I, G)$, et :

$$\Big(B(f, g)\Big)' = B(f', g) + B(f, g')$$

Théorème 10.29 - *construction de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux*

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, $f \in \mathcal{CM}([a\,;\,b], E)$. Si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f, alors la suite $\left(\displaystyle\int_{[a\,;\,b]} \varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Définition 10.30 - *intégrale d'une fonction continue par morceaux*

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, $f \in \mathcal{CM}([a\,;\,b], E)$. Il existe par densité de $\mathcal{E}([a\,;\,b], E)$ dans $\mathcal{CM}([a\,;\,b], E)$ une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathcal{E}([a\,;\,b])$ convergeant uniformément vers f. On appelle *intégrale de f sur $[a\,;\,b]$* le vecteur :

$$\int_{[a\,;\,b]} f = \lim_{n\to+\infty} \int_{[a\,;\,b]} \varphi_n$$

Cette intégrale ne dépend pas de la suite de $\mathcal{E}([a\,;\,b])^{\mathbb{N}}$ choisie.

Théorème 10.35 - *fondamental du calcul intégral*

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, à valeurs dans un espace vectoriel E de dimension finie. Pour tout $a \in I$, l'application :

$$\begin{aligned} F : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

est l'unique primitive de f (sa dérivée est f) s'annulant en a. F est donc de classe $\mathcal{C}^1$.

Théorème 10.39 - *changement de variable*

Soit $f : [a\,;\,b] \to E$ continue et φ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $[a\,;\,b]$ sur $[\varphi(a)\,;\,\varphi(b)]$.

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f\Big(\varphi(t)\Big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

Théorème 10.42 - *intégration d'un o*

Soit I un intervalle et E de dimension finie. Soit $f : I \to E$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $g : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ avec $g' \geq 0$. Supposons pour $a \in I$ que $f' \underset{a}{=} o(g')$. Alors :

$$\|f(x) - f(a)\|_E \underset{x \to a}{=} o\Big(\big|g(x) - g(a)\big|\Big)$$

Théorème 10.47 - *formule de Taylor avec reste intégral*

Soit $f \in \mathcal{D}^{n+1}(I, E)$ telle que $f^{(n+1)}$ est continue par morceaux sur l'intervalle I. Pour $a \in I$:

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,\mathrm{d}t$$

Théorème 10.48 - *inégalité de Taylor-Lagrange*

Soit $f \in \mathcal{D}^{n+1}(I, E)$ telle que $f^{(n+1)}$ est continue par morceaux sur l'intervalle I. Soit $[a\,;\,b] \subset I$ et M un majorant de $\|f^{(n+1)}\|_E$ sur $[a\,;\,b]$. Alors :

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right\|_E \leq M \left| \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right|$$

Théorème 10.57 - *échange limite-intégrale*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{CM}([a\,;b],E)^{\mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers $f \in \mathcal{CM}([a\,;b],E)$ sur $[a\,;b]$. Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[a\,;\,b]} f_n = \int_{[a\,;\,b]} f$$

Théorème 10.62 - *de convergence dominée pour une suite de fonctions*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}([a\,;b],\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. Sous réserve des hypothèses suivantes,

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n \in \mathcal{CM}([a\,;b],\mathbb{K})$.

2. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[a\,;b]$ et sa limite y est continue par morceaux.

3. *hypothèse de domination* : il existe $\varphi \in \mathcal{CM}([a\,;b],\mathbb{R}_+)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N},\ |f_n| \leq \varphi$

on peut échanger les symboles "lim" et "$\int$" :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[a\,;\,b]} f_n = \int_{[a\,;\,b]} \lim_{n\to+\infty} f_n$$

Théorème 10.63 - *de convergence dominée pour une série de fonctions*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}([a\,;b],\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. Sous réserve des hypothèses suivantes,

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n \in \mathcal{CM}([a\,;b],\mathbb{K})$.

2. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[a\,;b]$ et sa somme y est continue par morceaux.

3. la série $\sum_n \int_a^b |f_n(t)|\,\mathrm{d}t$ converge

on peut échanger les symboles "$\sum$" et "$\int$" :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{[a\,;\,b]} f_n = \int_{[a\,;\,b]} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$$

Théorème 10.66 - *primitivation d'une limite uniforme de suite de fonctions*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,E)^{\mathbb{N}}$. Sous réserve des hypothèses suivantes,

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n \in \mathcal{C}^0(I,E)$.

2. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une même fonction f sur tout segment inclus dans I.

Pour tout $a \in I$, sur tout segment de I, la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des primitives des f_n respectives s'annulant en a converge uniformément vers la primitive de f s'annulant en a.

Théorème 10.66 - *dérivation d'une limite uniforme de suite de fonctions*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,E)^{\mathbb{N}}$. Sous réserve des hypothèses suivantes,

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{C}^1(I,E)$.

2. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction $f \in \mathcal{CM}(I,E)$

3. $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction g sur I.

la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1(I,E)$ et $f' = g$.

Théorème 10.73 - *dérivation k fois d'une limite uniforme de suite de fonctions*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,E)^{\mathbb{N}}$. Sous réserve des hypothèses suivantes,

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{C}^k(I,E)$.

2. pour tout $i \in [\![0,\, k-1]\!]$, la suite $(f_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction $h_i \in \mathcal{CM}(I,E)$

3. $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction g sur I.

la fonction h_0 est de classe $\mathcal{C}^k(I,E)$ et $h_0^{(k)} = g$.