

Chapitre 19

Calcul différentiel

Définition 19.1 - application différentiable

Soit E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie, U un ouvert de E , $f : U \rightarrow F$ une fonction.

On dit que f est différentiable en un point a de U lorsqu'il existe $L_a \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que :

$$f(x + a) \underset{x \rightarrow 0}{=} f(a) + L_a(x) + o(x)$$

L'application L_a est alors appelée différentielle df_a de f en a .

Proposition 19.7 - différentielle d'une fonction d'une seule variable réelle

Soit F un espace vectoriel normé de dimension finie, U un ouvert de \mathbb{R} , $f : U \rightarrow F$ une fonction.

f est différentiable en a si et seulement si f est dérivable en a . Le cas échéant :

$$\begin{aligned} df_a : \mathbb{R} &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto x f'(a) \end{aligned}$$

et en particulier, $df_a(1) = f'(a)$.

Définition 19.8 - *dérivée selon un vecteur*

Soit E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie, U un ouvert de E , $f : U \rightarrow F$ une fonction. Soit $u \in E$, $a \in U$. Il existe $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(0)$ tel que pour tout $t \in V$, $a + tu \in U$

On dit que f admet une *dérivée selon le vecteur u au point a* lorsque la fonction $t \mapsto f(a + tu)$, définie de V à valeurs dans F , est dérivable en $0_{\mathbb{R}}$.

Le vecteur dérivé correspondant est appelé la *dérivée de f suivant le vecteur u* , et noté :

$$D_u f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tu) - f(a)}{t}$$

Théorème 19.9 - *différentiabilité \implies existence de dérivée selon tout vecteur*

Soit E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie, U un ouvert de E , $f : U \rightarrow F$ une fonction.

Si f est différentiable en a , alors pour tout vecteur $u \in E$, f admet une dérivée selon u en a et :

$$D_u f(a) = \mathrm{d}f_a(u)$$