

Chapitre 7

Déduction naturelle

Définition 7.1 - système de preuve

Un système de preuve est un cadre formel permettant de dériver des énoncés logiques à partir de règles bien définies et d'hypothèses. On le caractérise par :

1. *un ensemble d'axiomes* : propositions admises comme vraies.
2. *un ensemble de règles d'inférence*.

On représente une preuve par un arbre dont *les feuilles sont des instances d'axiomes* et *les noeuds internes des instances de règles d'inférence*.

Définition 7.2 - instance d'un axiome, d'une règle d'inférence

Une *instance d'un axiome ou d'une règle d'inférence* est obtenue à partir de l'axiome ou de la règle, en choisissant pour chaque variable une formule logique et en remplaçant chaque occurrence de la variable par la formule.

Définition 7.3 - séquent

Un séquent (également jugement), est une *affirmation qui exprime que, sous certaines hypothèses, une conclusion peut être déduite*. Il est généralement écrit sous la forme :

$$\Gamma \vdash C$$

où : $\begin{cases} \Gamma & \text{est un ensemble d'hypothèses (formules de la logique propositionnelle supposées vraies)} \\ C & \text{est la conclusion qui peut être déduite à partir des hypothèses de } \Gamma \end{cases}$

Intuitivement, cela signifie : *"Si les hypothèses de Γ sont vérifiées, alors C peut être démontrée"*

Définition 7.4 - règle d'inférence

Dans un système de preuve, une *règle d'inférence* est constituée d'une *famille de prémisses* P_1, \dots, P_k , et d'une *conclusion* C . On représente une règle d'inférence par :

$$\frac{P_1 \quad \dots \quad P_k}{C}$$

Définition 7.5 - règle d'inférence de l'axiome

En déduction naturelle, Pour un ensemble Γ de formules de la logique propositionnelle, pour toute formule $A \in \Gamma$, le séquent $\Gamma \vdash A$ est prouvable :

$$\frac{(\text{axiome})}{\Gamma \vdash A}$$

en constitue une démonstration.

Définition 7.6 - séquent prouvable

Un séquent est dit *prouvable* lorsqu'il existe un *un arbre de preuve* de celui-ci. Plus précisément, le séquent $\Gamma \vdash A$ est prouvable si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

- **cas de base** : $A \in \Gamma$. $\frac{(\text{axiome})}{\Gamma \vdash A}$ est alors une démonstration
- **cas inductif** : il existe $\Gamma_1 \vdash C_1, \dots, \Gamma_k \vdash C_k$ des séquents prouvables, ainsi qu'une règle d'inférence (γ) dont :

$$\frac{\Gamma_1 \vdash C_1 \quad \dots \quad \Gamma_k \vdash C_k}{\Gamma \vdash A}(\gamma)$$

est une instance. Le cas échéant $\Gamma \vdash A$ est prouvable via la règle (γ) .

Définition 7.7 - inductive d'un séquent prouvable

L'ensemble des séquents prouvables en déduction naturelle est défini inductivement à partir des règles de déduction naturelle :

- Pour Γ un ensemble de formules de la logique propositionnelle, et $A \in \Gamma$:

$$\Gamma \vdash A \text{ prouvable par axiome}$$

- Pour Γ un ensemble de formules de la logique propositionnelle, et $A \in \Gamma$:

Définition 7.8 - règle d'introduction du "et"

En déduction naturelle, Pour un ensemble Γ de formules de la logique propositionnelle, pour toutes formules A , B et C :

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} (i\wedge)$$

telle est la *règle d'introduction du "et"*.

Définition 7.9 - règle d'élimination du "et"

En déduction naturelle, Pour un ensemble Γ de formules de la logique propositionnelle, pour toutes formules A et B :

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} (e \wedge g) \quad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B} (e \wedge d)$$

telle est la *règle d'élimination du "et"*.

Définition 7.10 - règle d'introduction du "ou"

En déduction naturelle, Pour un ensemble Γ de formules de la logique propositionnelle, pour toutes formules A et B :

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} (i \vee d) \quad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} (i \vee g)$$

telle est la *règle d'introduction du "ou"*.

Définition 7.11 - règle d'élimination du "ou"

En déduction naturelle, Pour un ensemble Γ de formules de la logique propositionnelle, pour toutes formules A , B et C :

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C} (e \vee)$$

telle est la *règle d'élimination du "ou"*.

Définition 7.12 - règle d'introduction du "non"

En déduction naturelle, Pour un ensemble Γ de formules de la logique propositionnelle, pour toute formule A :

$$\frac{\Gamma, A \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg A} (i\neg)$$

telle est la *règle d'introduction du "non"*.

Définition 7.13 - règle d'élimination du "non"

En déduction naturelle, Pour un ensemble Γ de formules de la logique propositionnelle, pour toute formule A :

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash \perp} (e\neg)$$

telle est la *règle d'élimination du "non"*.

Définition 7.14 - règle d'introduction du "implique"

En déduction naturelle, Pour un ensemble Γ de formules de la logique propositionnelle, pour toutes formules A et B :

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} (i \rightarrow)$$

telle est la *règle d'introduction du "implique"*.

Définition 7.15 - règle d'élimination du "implique"

En déduction naturelle, Pour un ensemble Γ de formules de la logique propositionnelle, pour toutes formules A et B :

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} (e \rightarrow)$$

telle est la *règle d'élimination du "implique"*.

Théorème 7.16 - propriété d'affaiblissement

En déduction naturelle, pour des ensembles Γ et Δ de formules de la logique propositionnelle, pour toute formule A de la logique propositionnelle, si $\Gamma \vdash A$ est prouvable, alors il en est de même pour $\Gamma, \Delta \vdash A$.

Définition 7.17 - relation "être conséquence logique"

Soit A et B deux formules de la logique propositionnelle. On dit que B est une *conséquence logique* de A , noté $A \models B$ si tout modèle de A (valuation satisfaisant A) est un modèle de B .

Par extension si Γ est un ensemble de formules de la logique propositionnelle, $\Gamma \models A$ signifie :

$$\forall C \in \Gamma, C \models A$$

Définition 7.18 - règle correcte

En déduction naturelle, on dit qu'une règle :

$$\frac{\Delta_1 \vdash C_1 \quad \dots \quad \Delta_k \vdash C_k}{\Gamma \vdash A}(\gamma)$$

est *correcte* si le fait que pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ toute valuation satisfaisant les formules de Δ_i satisfasse C_i implique que toute valuation satisfaisant les formules de Γ satisfait A .

En d'autres termes, la règle est *correcte* si :

$$\left(\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \Delta_i \models C_i \right) \implies \Gamma \models A$$

Définition 7.19 - séquent valide

On dit qu'un séquent $\Gamma \vdash A$ est *valide* si toute valuation satisfaisant les formules de Γ satisfait A i.e. $\Gamma \models A$.

Définition 7.20 - logique du premier ordre, langage du premier ordre

La *logique du premier ordre* est une extension de la logique propositionnelle, dans laquelle on travaille sur un *langage du premier ordre*, défini par :

- des symboles de constante (comme 0, \emptyset , π ,...)
- des symboles de fonctions, comme $+(5, 3)$
- des symboles de relations, comme $=, \neq, \geq, >$.

Les constantes et images des symboles de fonctions sont des éléments d'un ensemble d'étude, appelé *domaine*, qui dépend du langage du premier ordre

Définition 7.21 - terme en logique du premier ordre

L'ensemble des *termes pour un langage du premier ordre* est défini inductivement :

- un symbole de constante est un terme.
- une variable, inconnue impliquée dans les quantificateurs entre autres, est un terme.
- pour t_1, \dots, t_n des termes et f un symbole de fonction d'arité n , $f(t_1, \dots, t_n)$ est un terme.

Définition 7.22 - *formule de la logique du premier ordre*

L'ensemble des *formules de la logique du premier ordre pour un langage du premier ordre* est défini inductivement :

1. les formules suivantes, appelées *formules atomiques* sont de telles formules :
 - \top et \perp sont des formules atomiques
 - pour t_1, \dots, t_k des termes et \mathcal{R} un symbole de relation d'arité k , $\mathcal{R}(t_1, \dots, t_k)$ est une formule atomique
2. pour F_1 et F_2 deux formules de la logique du premier ordre :
 - $F_1 \wedge F_2$ en est une.
 - $F_1 \vee F_2$ en est une.
 - $F_1 \rightarrow F_2$ en est une.
 - $F_1 \leftrightarrow F_2$ en est une.
 - $\neg F_1$ en est une.
3. pour F une formule de la logique du premier ordre faisant intervenir la variable x :
 - $\forall x.F(x)$ en est une.
 - $\exists x.F(x)$ en est une.

Définition 7.23 - *portée d'une variable*

En logique du premier ordre, pour P une formule, et x une variable (inconnue impliquée dans les quantificateurs entre autres), on dit que *dans les formules $\forall x.P$ et $\exists x.P$, la portée de la variable x est P* et on dit que *x est dans la portée du quantificateur* qui lui précède.

Définition 7.24 - *caractères libre et lié d'une occurrence d'une variable*

En logique du premier ordre, pour F une formule, une occurrence précise d'une variable est :

- *libre* si elle n'est dans la portée d'aucun quantificateur.
- *liée* si elle est dans la portée d'au moins quantificateur.

Définition 7.25 - caractères libre et lié d'un variable dans une formule

En logique du premier ordre, pour F une formule, une variable x :

- *libre dans F* s'il existe une occurrence de x libre dans F
- *liée dans F* s'il existe une occurrence de x liée dans F .

Définition 7.26 - règle d'introduction du quantificateur universel

En déduction naturelle munie de la logique du premier ordre, pour un ensemble Γ de formules, pour toute formule A :

$$\frac{\Gamma \vdash A(x)}{\Gamma \vdash \forall x.A(x)} (i\forall)$$

valable si x est non libre dans Γ *i.e.* si toutes les occurrences de x dans toutes les formules de Γ sont liées.
telle est la *règle d'introduction du quantificateur universel*.

Définition 7.27 - règle d'élimination du quantificateur universel

En déduction naturelle munie de la logique du premier ordre, pour un ensemble Γ de formules, pour toute formule A :

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x.A(x)}{\Gamma \vdash A(t)} (e\forall)$$

valable si toutes les variables libres du terme t ne sont pas des variables liées dans A .
telle est la *règle d'élimination du quantificateur universel*.

Définition 7.28 - règle d'introduction du quantificateur existentiel

En déduction naturelle munie de la logique du premier ordre, pour un ensemble Γ de formules, pour toute formule A :

$$\frac{\Gamma \vdash A(t)}{\Gamma \vdash \exists x.A(x)} (i\exists)$$

valable si x est une variable et t un terme.
telle est la *règle d'introduction du quantificateur existentiel*.

Définition 7.29 - règle d'élimination du quantificateur existentiel

En déduction naturelle munie de la logique du premier ordre, pour un ensemble Γ de formules, pour toutes formules A et B :

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x.A(x) \quad \Gamma, A(x) \vdash B}{\Gamma \vdash B} (e\exists)$$

valable si x est non libre dans Γ et dans B *i.e.* si toutes les occurrences de x dans B et les formules de Γ sont liées.

telle est la *règle d'élimination du quantificateur existentiel*.