Proposition 4.2 (6) - *intersection finie de voisinage*

Soit E un espace vectoriel normé. L'intersection finie de voisinages d'un élément $x \in E$ est un voisinage de x.

Définition 4.4 - *ouvert*

Soit E un espace vectoriel normé. On appelle ouvert de E une partie O de E qui est un *voisinage de chacun de ses points*, *i.e.* :

$$\forall x \in O,\, \exists r > 0,\, \mathcal{B}(x, r) \subset O$$

Proposition 4.5 (5) - *intersection finie de voisinage*

Soit E un espace vectoriel normé. L'intersection finie d'ouverts de E est un ouvert de E.

Définition 4.6 - *fermé*

Soit E un espace vectoriel normé. On appelle fermé de E *le complémentaire dans E d'un ouvert O de E*.

Définition 4.9 - *point adhérent à une partie*

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E. Un point $x \in E$ est dit *adhérent à A* si tout voisinage de x rencontre A :

$$\forall V \in \mathcal{V}_E(x),\, V \cap A \neq \varnothing$$

On appelle *adhérence de A l'ensemble $\overline{A}$ des éléments de E adhérents à A*.

Proposition 4.10 - *caractérisation de l'adhérence d'une partie*

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E. Pour tout $x \in E$, les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. x est adhérent à A ;

2. Toute boule ouverte de centre x contient au moins un élément de A ;

3. la distance de x à A est nulle.

Définition 4.12 (1) - *point d'accumulation d'une partie*

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E. Un point x est un *point d'accumulation de A* si tout voisinage de x rencontre A en au moins un autre point que x :

$$\forall V \in \mathcal{V}_E(x),\ (V \setminus \{x\}) \cap A \neq \varnothing$$

Définition 4.12 (2) - *point isolé d'une partie*

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E. Un point x est un *point isolé de A* s'il existe un voisinage de x qui ne rencontre A qu'en x :

$$\exists V \in \mathcal{V}_E(x),\ V \cap A = \{x\}$$

Définition 4.15 - *partie dense*

Soit E un espace vectoriel normé et A et B des parties de E. On dit que *A est dense dans B* si $\overline{A} = B$

Théorème 4.17 - *caractérisation de l'adhérence par l'inclusion*

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E. $\overline{A}$ est le plus petit fermé de E contenant A.

Théorème 4.18 - *caractérisation de l'adhérence par l'intersection*

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E. $\overline{A}$ est l'intersection de tous les fermés de E contenant A.

Théorème 4.19 - *caractérisation du caractère fermé*

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E. A est fermée si et seulement si elle contient tous ses points adhérents :

$$\overline{A} = A$$

Théorème 4.20 - *caractérisation séquentielle de l'adhérence*

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E. $\overline{A}$ est l'ensemble des limites des suites convergentes d'éléments de A.

Définition 4.22 - *intérieur d'une partie*

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E. *$x \in A$ est intérieur à A* lorsque A est un voisinage de x :

$$\exists \epsilon > 0, \mathcal{B}(x, \epsilon) \subset A$$

l'ensemble des éléments de E intérieurs à A est appelé *intérieur $\mathring{A}$ de A*.

Théorème 4.24 - *caractérisation de l'intérieur d'une partie*

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E. $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert de E inclus dans A.

Théorème 4.25 - *lien entre adhérence et intérieur*

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E.

1. Le complémentaire de l'adhérence de A est l'intérieur du complémentaire de A : $\complement_E \overline{A} = \overset{\circ}{\left(\complement_E A\right)}$

2. Le complémentaire de l'intérieur de A est l'adhérence du complémentaire de A : $\complement_E \mathring{A} = \overline{\left(\complement_E A\right)}$

Définition 4.26 - *frontière d'une partie*

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E. On appelle *point frontière de A* un point adhérent à A qui n'est pas intérieur à A. L'ensemble des points frontières est appelé *frontière $\mathrm{Fr}(A)$ de A* :

$$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \overline{A} \cap \overline{\left(\complement_E A\right)}$$

Définition 4.29 - *voisinage relatif à une partie*

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E. On appelle *voisinage de $a \in \overline{A}$ relatif à A* l'intersection de A avec un voisinage de a.

Définition 4.30 - *ouvert, fermé relatifs à une partie*

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E.

1. On appelle *ouvert relatif de A* l'intersection de A avec un ouvert de E.

2. On appelle *fermé relatif de A* l'intersection de A avec un fermé de E.

Théorème 4.46 - *caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction*

Soit E, F deux espaces vectoriels normés, A une partie de E et $f : A \to F$. f admet une limite $l \in F$ en $a \in \overline{A}$ si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A convergeant vers a, la suite $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

Théorème 4.47 - *caractérisation séquentielle de la continuité d'une fonction*

Soit E, F deux espaces vectoriels normés, A une partie de E et $f : A \to F$. f est continue en $a \in \overline{A}$ si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A convergeant vers a, la suite $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

Théorème 4.55 - *applications coïncidant sur une partie dense*

Soit E et F deux espaces vectoriels normés et A une partie de E. Deux applications continues de A dans F qui coïncident sur une partie B dense dans A sont égales.

Théorème 4.56 - *caractérisation de la continuité par l'image réciproque*

Soit E, F deux espaces vectoriels normés, A une partie de E et $f : A \to F$. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est continue.
2. L'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé relatif de A.
3. L'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert relatif de A.