

Théorème 10.11 - *dérivée d'une composée par une application linéaire*

Soit E, F deux \mathbb{R} -espaces vectoriels normés de dimension finie, u une application linéaire de E dans F , et f une fonction de classe \mathcal{C}^1 définie sur un intervalle I de \mathbb{R} à valeurs dans E . Alors $u \circ f$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1(I, F)$ et :

$$(u \circ f)' = u \circ f'$$

Théorème 10.12 - *dérivée d'une composée par une application bilinéaire*

Soit E, F et G trois espaces vectoriels normés de dimension finie, B une application bilinéaire de $E \times F$ vers G , et f et g deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle I de \mathbb{R} à valeurs respectives dans E et F . Alors $B(f, g)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1(I, G)$, et :

$$\left(B(f, g) \right)' = B(f', g) + B(f, g')$$

Théorème 10.29 - *construction de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux*

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, $f \in \mathcal{CM}([a; b], E)$. Si $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f , alors la suite $\left(\int_{[a; b]} \varphi_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Définition 10.30 - *intégrale d'une fonction continue par morceaux*

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, $f \in \mathcal{CM}([a; b], E)$. Il existe par densité de $\mathcal{E}([a; b], E)$ dans $\mathcal{CM}([a; b], E)$ une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathcal{E}([a; b])$ convergeant uniformément vers f . On appelle *intégrale de f sur $[a; b]$* le vecteur :

$$\int_{[a; b]} f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a; b]} \varphi_n$$

Cette intégrale ne dépend pas de la suite de $\mathcal{E}([a; b])^{\mathbb{N}}$ choisie.

Théorème 10.35 - *fondamental du calcul intégral*

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , à valeurs dans un espace vectoriel E de dimension finie. Pour tout $a \in I$, l'application :

$$\begin{aligned} F : I &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto \int_a^x f(t) \, dt \end{aligned}$$

est l'unique primitive de f (sa dérivée est f) s'annulant en a . F est donc de classe \mathcal{C}^1 .

Théorème 10.39 - *changement de variable*

Soit $f : [a ; b] \rightarrow E$ continue et φ un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de $[a ; b]$ sur $[\varphi(a) ; \varphi(b)]$.

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt$$

Théorème 10.42 - *intégration d'un o*

Soit I un intervalle et E de dimension finie. Soit $f : I \rightarrow E$ de classe \mathcal{C}^1 et $g : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ de classe \mathcal{C}^1 . Supposons pour $a \in I$ que $f' =_a o(g')$. Alors :

$$\|f(x) - f(a)\|_E =_{x \rightarrow a} o(|g(x) - g(a)|)$$

Théorème 10.47 - *formule de Taylor avec reste intégral*

Soit $f \in \mathcal{D}^{n+1}(I, E)$ telle que $f^{(n+1)}$ est continue par morceaux sur l'intervalle I . Pour $a \in I$:

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n \, dt$$

Théorème 10.48 - *inégalité de Taylor-Lagrange*

Soit $f \in \mathcal{D}^{n+1}(I, E)$ telle que $f^{(n+1)}$ est continue par morceaux sur l'intervalle I . Soit $[a ; b] \subset I$ et M un majorant de $\|f^{(n+1)}\|_E$ sur $[a ; b]$. Alors :

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right\|_E \leq M \left| \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right|$$

Théorème 10.57 - *échange limite-intégrale*

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}([a ; b], E)^{\mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers f sur $[a ; b]$. Alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a ; b]} f_n = \int_{[a ; b]} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$$

Théorème 10.62 - de convergence dominée pour une suite de fonctions

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}([a; b], \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. Sous réserve des hypothèses suivantes,

1. $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{CM}([a; b], \mathbb{K})$.
2. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[a; b]$ et sa limite y est continue par morceaux.
3. *hypothèse de domination* : il existe $\varphi \in \mathcal{CM}([a; b], \mathbb{R}_+)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq \varphi$

on peut échanger les symboles "lim" et " \int " :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a; b]} f_n = \int_{[a; b]} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$$

Théorème 10.62 - de convergence dominée pour une série de fonctions

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}([a; b], \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$. Sous réserve des hypothèses suivantes,

1. $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{CM}([a; b], \mathbb{K})$.
2. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[a; b]$ et sa somme y est continue par morceaux.
3. la série $\sum_n \int_a^b |f_n(t)| dt$ converge

on peut échanger les symboles " \sum " et " \int " :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{[a; b]} f_n = \int_{[a; b]} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$$

Théorème 10.66 - primitivation d'une limite uniforme de suite de fonctions

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, E)^{\mathbb{N}}$. Sous réserve des hypothèses suivantes,

1. $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^0(I, E)$.
2. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une même fonction f sur tout segment inclus dans I .

Pour tout $a \in I$, sur tout segment de I , la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des primitives des f_n respectives s'annulant en a converge uniformément vers la primitive de f s'annulant en a .

Théorème 10.66 - dérivation d'une limite uniforme de suite de fonctions

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, E)^{\mathbb{N}}$. Sous réserve des hypothèses suivantes,

1. $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^1(I, E)$.
2. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction $f \in \mathcal{CM}(I, E)$
3. $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une même fonction g sur tout segment inclus dans I .

la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1(I, E)$ et $f' = g$.

Théorème 10.73 - dérivation k fois d'une limite uniforme de suite de fonctions

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, E)^{\mathbb{N}}$. Sous réserve des hypothèses suivantes,

1. $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^k(I, E)$.
2. pour tout $i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, la suite $(f_n^{(i)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction $f_i \in \mathcal{CM}(I, E)$
3. $(f_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une même fonction g sur tout segment inclus dans I .

la fonction f est de classe $\mathcal{C}^k(I, E)$ et $f^{(k)} = g$.