Définition 11.1 - *série entière*

On appelle *série entière* de la variable complexe x de coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la série de fonctions $\sum_n a_n x^n$.

Théorème 11.3 - *lemme d'Abel*

Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière et z_0 un nombre complexe non nul tel que $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum_n a_n z^n$ est absolument convergente.

Définition 11.4 - *rayon de convergence d'une série entière*

On appelle *rayon de convergence de la série entière* $\sum_n a_n z^n$ la borne supérieure (au sens large) de cet intervalle :

$$R = \sup\{r \geq 0,\ (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$$

Théorème 11.5 - *propagation sur le cercle de convergence des caractères forts*

Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence.

1. Si la série converge absolument en un point du cercle, alors elle converge absolument sur tout le cercle.

2. Si la série diverge grossièrement en un point du cercle, alors elle diverge grossièrement sur tout le cercle.

Proposition 11.8 - *rayon de convergence de* $\sum_n n^\alpha z^n$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, le rayon de convergence de la série entière $\sum_n n^\alpha z^n$ vaut 1.

Proposition 11.11 (1) - *comparaison de séries entières par inégalité*

Soit $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. Si à partir d'un certain rang $|a_n| \leq |b_n|$, alors $R_a \geq R_b$.

Proposition 11.11 (2) - *comparaison de séries entières par domination*

Soit $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.
Si $a_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(b_n\right)$, alors $R_a \geq R_b$.

Proposition 11.11 (3) - *comparaison de séries entières par équivalence*

Soit $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.
Si $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, alors $R_a = R_b$.

Théorème 11.13 - *règle de d'Alembert pour les séries entières*

Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière telle que $\left(\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie à partir d'un certain rang et admette une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Le rayon de convergence R de la série $\sum_n a_n z^n$ vaut $\begin{cases} 0 & \text{si } \ell = +\infty \\ \ell^{-1} & \text{si } \ell > 0 \\ +\infty & \text{si } \ell = 0 \end{cases}$.

Proposition 11.14 - *rayon de convergence d'une somme de séries entières*

Soit $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. En notant R_{a+b} le rayon de convergence de la série entière $\sum_n (a_n + b_n) z^n$, on a :

$$R_{a+b} \geq \min(R_a, R_b)$$

avec égalité si et seulement si les rayons sont distincts.

Proposition 11.15 - *rayon de convergence d'un produit de Cauchy de séries entières*

Soit $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. En notant $R_{a\star b}$ le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_n \left((a_i)_{i\in\mathbb{N}} \star (b_i)_{i\in\mathbb{N}}\right)_n z^n$, on a :

$$R_{a\star b} \geq \min(R_a, R_b)$$

sans aucun cas d'égalité.

Théorème 11.19 - *convergence normale dans tout segment de l'intervalle ouvert de convergence*

Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit :

$$\begin{aligned} f_n :]-R; R[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \end{aligned}$$

La série de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est normalement convergente sur tout segment de $]-R; R[$.