

**Définition 3.1** - caractérisation de norme sur un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. une *norme sur  $E$*  est une application  $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant pour tout  $(x, y) \in E^2$  :

1. *positivité* :

$$\|x\| \geq 0$$

2. *Axiome de séparation* :

$$\|x\| = 0 \implies x = 0$$

3. *Absolue homogénéité* :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$$

4. *Inégalité triangulaire* :

$$\|x\| + \|y\| \geq \|x + y\|$$

**Exemple 3.3 (1)** - normes de  $\mathbb{K}^n$

Les applications suivantes sont des normes sur  $\mathbb{K}^n$  :

1.  $\|\cdot\|_1 : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n |x_i|$

2. la *norme euclidienne associée au produit scalaire canonique sur  $\mathbb{K}^n$*  :

$$\|\cdot\|_2 : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$$

3. la *norme infinie*  $\|\cdot\|_\infty : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} (|x_i|)$

**Exemple 3.3 (2)** - normes de  $\mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$

Les applications suivantes sont des normes sur  $\mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$  :

1. la *norme de la convergence en moyenne*  $\|\cdot\|_1 : f \mapsto \int_a^b |f(t)| dt$

2. la *norme euclidienne associée au produit scalaire canonique sur  $\mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$*  :

$$\|\cdot\|_2 : f \mapsto \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt}$$

3. la *norme infinie*  $\|\cdot\|_\infty : f \mapsto \sup_{x \in [a; b]} (|f(x)|)$

**Théorème 3.7** - *norme euclidienne associée à un produit scalaire*

Soit  $(E, (\cdot|\cdot))$  un espace préhilbertien réel. L'application  $\|\cdot\| : x \mapsto \sqrt{(x|x)}$  est une norme, appelée *norme euclidienne associée à  $(\cdot|\cdot)$* .

**Définition 3.12** - *espace métrique*

Soit  $E$  un ensemble. Une application  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  est appelée *distance* si elle vérifie ces propriétés :

1.  $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) \geq 0$
2.  $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = 0 \implies x = y$
3.  $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = d(y, x)$
4.  $\forall (x, y, z) \in E^3, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Une telle application munit  $E$  d'une structure d'*espace métrique*.

**Définition 3.14** - *distance d'un point à une partie non vide*

Soit  $(E, d)$  un espace métrique. Étant donnée une partie  $A$  de  $E$  et  $x$  un élément de  $E$ , on appelle *distance de  $x$  à  $A$*  la borne inférieure des distances de  $x$  à tous les éléments de  $A$  :

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$$

**Définition 3.15** - *sphère d'un espace vectoriel normé*

Soit  $E$  un espace vectoriel normé. On appelle *sphère de centre  $a \in E$  et de rayon  $r \geq 0$*  de  $E$  l'ensemble  $\mathcal{S}(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| = r\}$ .

**Définition 3.16** - *partie bornée d'un espace vectoriel normé*

Soit  $E$  un espace vectoriel normé. On dit qu'une partie  $A$  de  $E$  est *bornée* lorsqu'il existe une boule fermée la contenant :

$$\exists a \in E, \exists r \geq 0, A \subset \overline{B}(a, r)$$

Soit :

$$\exists r \geq 0, \forall x \in A, \|x\| \leq r$$

**Définition 3.19** - *application bornée*

Soit  $E$  un espace vectoriel normé et  $X$  un ensemble fini. Une application  $\varphi : X \rightarrow E$  est dite bornée lorsque l'ensemble  $\text{Im}(\varphi)$  est borné.

**Définition 3.20** - *applications bornées sur un espace vectoriel normé*

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé et  $X$  un ensemble fini. L'ensemble  $\mathcal{B}(X, E)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et l'application :

$$f \mapsto \sup_{x \in X} \|f(x)\|$$

est une norme sur  $\mathcal{B}(X, E)$ , appelée *norme infinie*.

**Définition 3.21** - *application lipschitzienne*

Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels normés,  $A \subset E$  et  $k \geq 0$ . Une application  $f : A \rightarrow F$  est dite  $k$ -lipschitzienne sur  $A$  lorsque :

$$\forall (x, y) \in A^2, \|f(x) - f(y)\|_F \leq k \|x - y\|_E$$

L'ensemble des applications  $k$ -lipschitziennes de  $A$  dans  $F$  est noté  $\text{Lip}_k(A, F)$ .

**Définition 3.30** - *normes équivalentes*

Soit  $N$  et  $N'$  deux normes sur un espace vectoriel  $E$ . On dit que  $N$  et  $N'$  sont équivalentes lorsque :

$$\exists (\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \alpha N \leq N' \leq \beta N$$

Il s'agit d'une relation d'équivalence.

**Proposition 3.31** - *normes équivalentes et convergence de suites*

Deux normes sur un espace vectoriel sont équivalentes si et seulement si toute suite qui converge pour l'une vers  $x \in E$  converge pour l'autre, également vers  $x$ .