Chapitre 23

Ondes électromagnétiques dans le vide

Théorème 23.1 - *formule du double rotationnel*

Pour A une fonction vectorielle de l'espace :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{A})\right) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\,\overrightarrow{A}) - \overrightarrow{\Delta}(\overrightarrow{A})$$

où intervient l'opérateur *laplacien vectoriel*, s'écrivant en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\Delta}(\overrightarrow{A}) = \frac{\partial^2 \overrightarrow{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overrightarrow{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \overrightarrow{A}}{\partial z^2}$$

Théorème 23.2 - *équation de d'Alembert*

Dans le vide, les champs électrique et magnétique vérifient tous deux une même équation de propagation, dite *équation de d'Alembert* :

$$\overrightarrow{\Delta}(\overrightarrow{E}) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\Delta}(\overrightarrow{B}) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \overrightarrow{B}}{\partial t^2}$$

où $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ est la célérité de l'onde électromagnétique.

Définition 23.3 - *surface d'onde*

On appelle *surface d'onde* une surface de l'espace sur laquelle le champ électromagnétique est uniforme à tout instant.
Moralement, tous les points d'une surface d'onde sont dans le même état vibratoire à tout instant.

Définition 23.4 - *onde plane*

Une onde est dite *plane* si ses surfaces d'onde sont des plans parallèles.

Proposition 23.5 - *ondes planes*

Une onde plane ne dépend que du temps et d'une dimension cartésienne, puisque tous les plans d'ondes sont parallèles et que la perturbation est la même sur ces plans.

Définition 23.6 - *onde plane progressive*

Une onde plane est dite *progressive* lorsqu'elle se propage :

1. dans un sens bien déterminé
2. sans étalement
3. sans déformation

En pratique, l'expression du signal doit présenter un couplage linéaire entre les variables temporelle et spatiale.

Définition 23.7 - *onde plane progressive sinusoïdale*

Une onde plane progressive est dite *sinusoïdale*, ou bien *harmonique* si son signal physique réel s'écrit :

$$\overrightarrow{A}(x,t) = A_0 \cos(\omega t \pm kx + \varphi)\overrightarrow{e_p}$$

Son signal physique complexe s'écrit :

$$\begin{aligned}\underline{\overrightarrow{A}}(x,t) &= A_0 e^{i(\omega t \pm kx + \varphi)}\overrightarrow{e_p} \\ &= \underline{\overrightarrow{A_0}} e^{i(\omega t \pm kx)}\end{aligned}$$

où $\underline{\overrightarrow{A_0}} = A_0 e^{i\varphi}\overrightarrow{e_p}$.

Théorème 23.8 - *équation de dispersion dans le vide*

L'équation de dispersion lie les pulsations spatiale et temporelle d'une onde plane progressive harmonique. Pour une OPPH électromagnétique dans le vide, la relation de dispersion est la suivante :

$$\omega = kc \qquad \text{soit} \qquad \lambda = \frac{c}{f}$$

Définition 23.9 - *vecteur d'onde d'une OPPH*

On appelle *vecteur d'onde* d'une OPPH le vecteur de norme k, de direction et sens ceux de la propagation de l'onde :

$$\overrightarrow{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\overrightarrow{u}$$

Définition 23.10 - *opérateur nabla appliqué à une représentation complexe d'OPPH*

Pour $\overrightarrow{\underline{E}}(x,t) = \underline{E_0}e^{i(\omega t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{OM})}\overrightarrow{e_p}$, on a :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overrightarrow{\underline{E}}}{\partial x} = -ik_x\overrightarrow{\underline{E}} \\ \dfrac{\partial \overrightarrow{\underline{E}}}{\partial y} = -ik_y\overrightarrow{\underline{E}} \\ \dfrac{\partial \overrightarrow{\underline{E}}}{\partial z} = -ik_z\overrightarrow{\underline{E}} \end{cases}$$

On identifie alors $\overrightarrow{\nabla} = -i\overrightarrow{k}$.

Théorème 23.11 - *équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Thomson en représentation complexe*

En représentation complexe d'une OPPH électromagnétique, les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Thomson s'écrivent :

$$\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{\underline{E}} = 0 \qquad \text{(M.G.)}$$

$$\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{\underline{B}} = 0 \qquad \text{(M.T.)}$$

Théorème 23.12 - *équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère en représentation complexe*

En représentation complexe d'une OPPH électromagnétique, les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère s'écrivent :

$$\overrightarrow{k}\wedge\overrightarrow{\underline{E}} = \omega\overrightarrow{\underline{B}} \qquad \text{(M.F.)}$$

$$\overrightarrow{k}\wedge\overrightarrow{\underline{B}} = -\varepsilon_0\mu_0\omega\overrightarrow{\underline{E}} \qquad \text{(M.A.)}$$

Théorème 23.13 - *relation de structure d'une OPPH et d'une OPP*

Pour une OPPH, d'après les équations de Maxwell en représentation complexe (avec passage en partie réelle) :

$$\overrightarrow{B} = \frac{\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{E}}{c}$$

Pour une OPP, en tant que somme d'OPPH de même sens de propagation, on a par linéarité la même relation.

Définition 23.14 - *polarisation d'une OPP électromagnétique*

On appelle *polarisation* d'une OPP la direction du vecteur champ électrique de l'onde.

Définition 23.15 - *OPP électromagnétique non polarisée*

Une OPP électromagnétique est dite *non polarisée* si sa direction de polarisation fluctue rapidement et aléatoirement.

Définition 23.16 - *OPP électromagnétique polarisée rectilignement*

Par opposition aux OPP électromagnétiques non polarisées, une OPP électromagnétique est dite *polarisée rectilignement* si la direction du vecteur champ électrique est constante.