Définition 12.1 - *intégrale impropre*

Soit $f \in \mathcal{CM}\Big([a;\, b[, \mathbb{K}\Big)$. On dit que *l'intégrale impropre* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge* lorsque la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ possède une limite finie en b.

Autrement, on dit que *l'intégrale impropre* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *diverge*.

Définition 12.5 - *reste d'une intégrale impropre convergente*

Soit $f \in \mathcal{CM}\Big([a;\, b[, \mathbb{K}\Big)$ telle que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. L'application :

$$\begin{aligned} R : [a;\, b[&\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

est appelée *reste de l'intégrale impropre convergente*.

Théorème 12.6 - *de la limite monotone*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. Quand x tend vers la borne supérieure de I (au sens large), $f(x)$ tend vers la borne supérieure (au sens large) de f sur I :

$$\lim_{x \to \sup I} f(x) = \sup\{f(x),\, x \in I\}$$

Proposition 12.8 - *caractérisation de la convergence d'une intégrale impropre*

Soit $f \in \mathcal{CM}\Big([a;\, b[, \mathbb{R}_+\Big)$. L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a;\, b[$.

Définition 12.14 - *fonction intégrable*

Soit $f : [a;\, b[\to \mathbb{C}$ un fonction continue par morceaux. On dit que *f est intégrable* lorsque l'intégrale impropre $\int_a^b |f|(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente. Le cas échéant on dit aussi que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

Théorème 12.16 - *convergence absolue implique convergence*

Soit $f : [a; b[\to \mathbb{C}$ un fonction continue par morceaux. Si f est intégrable sur $[a; b[$, alors l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Théorème 12.19 - *fonction de Riemann*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction de Riemann $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ définie sur $]0; +\infty[$ est :

1. intégrable en 0 si et seulement si $\alpha < 1$

2. intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$

Théorème 12.20 - *fonction de référence*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto e^{-\alpha x}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 0$. Le cas échéant :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}$$