

Définition 5.1 - *vecteur élémentaire*

Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle vecteur élémentaire d'indice $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ le vecteur :

$$E_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \xleftarrow{\text{indice } i}$$

La famille $(E_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est alors la base canonique de \mathbb{R}^n . Puis, en remarquant que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, E_i \times E_j^\top = E_{i,j},$$

On retrouve la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 5.2 - *produit de matrices élémentaires*

Soit $(i, j, k, l) \in \llbracket 1, n \rrbracket^4$. On a :

$$E_{i,j} \times E_{k,l} = \delta_{j,k} E_{i,l}$$

Définition 5.3 - *somme directe d'espaces vectoriels*

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et (F_1, \dots, F_p) une famille d'au moins deux sous-espaces vectoriels de E . La somme $\sum_{i=1}^p F_i$ est *directe* lorsque la décomposition d'un élément de cette somme en somme d'éléments de chaque sous-espace vectoriel existe et est unique :

$$\bigoplus_{i=1}^p F_i = \{x \in E, \exists! (x_1, \dots, x_p), x = x_1 + \dots + x_p\}$$

Proposition 5.4 - *caractérisation du caractère direct par la décomposition du neutre additif*

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et (F_1, \dots, F_p) une famille d'au moins deux sous-espaces vectoriels de E . La somme $\sum_{i=1}^p F_i$ est directe si et seulement si 0_E se décompose de manière unique en la somme des neutres additifs des sous-espaces vectoriels (qui sont tous 0_E) :

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \dots \times F_p, \sum_{i=1}^p x_i = 0_E \implies x_1 = \dots = x_p = 0_E$$

Proposition 5.5 - caractérisation du caractère direct

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et (F_1, \dots, F_p) une famille d'au moins deux sous-espaces vectoriels de E . La

somme $\sum_{i=1}^p F_i$ est directe si et seulement si :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{p-1} F_i \text{ est directe ;} \\ \left(\bigoplus_{i=1}^{p-1} F_i \right) \cap F_p = \{0_E\}. \end{cases}$$

Proposition 5.9 - dimension d'une somme d'espaces vectoriels de dimension finie

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et (F_1, \dots, F_p) une famille d'au moins deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E . Alors :

$$\dim \left(\sum_{i=1}^p F_i \right) \leq \sum_{i=1}^p \dim(F_i)$$

De plus l'égalité est vérifiée si et seulement si la somme est directe.

Proposition 5.38 - stabilité des sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par prise d'inverse

Soit \mathcal{A} une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Toute matrice M inversible de \mathcal{A} a pour inverse un élément de \mathcal{A} .

Définition 5.41 - sous-algèbre engendrée par un endomorphisme

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. L'image du morphisme d'algèbres $P \mapsto P(u)$ est appelée *sous-algèbre engendrée par u* et notée $\mathbb{K}[u]$.

Définition 5.42 - polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle *polynôme caractéristique de u* le polynôme :

$$\chi_u = \det(X \text{Id}_E - u)$$

On dispose d'une définition tout à fait analogue pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\chi_u = \det(XI_n - A)$$

Proposition 5.44 - *expression du polynôme caractéristique d'un endomorphisme*

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$. On a :

$$\chi_u = X^n - \text{tr}(u)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$$

Théorème 5.47 - *de décomposition des noyaux*

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $P \wedge Q = 1$. On a :

$$\ker(A(u)) \oplus \ker(B(u)) = \ker(AB(u))$$

Définition 5.49 - *sous-espace propre associé à une valeur propre*

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et λ une valeur propre de u . On appelle *sous-espace propre associé à λ* l'espace $\ker(u - \lambda \text{id}_E)$, supposément non réduit à $\{0_E\}$, sans quoi λ ne serait valeur propre.

Théorème 5.52 - *lien entre valeurs propres et racines du polynôme caractéristique*

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Les valeurs propres de u sont exactement les racines de χ_u :

$$\text{Sp}(u) = Z(\chi_u)$$

Définition 5.53 - *multiplicité d'une valeur propre*

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$. La *multiplicité m_λ d'une valeur propre λ* de u est sa multiplicité en tant que racine de χ_u .

Théorème 5.63 - *spectres de u et $P(u)$*

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. pour toute valeur propre λ de u , $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(u)$:

$$P(\text{Sp}(u)) \subset \text{Sp}(P(u))$$

Proposition 5.64 - *lien entre valeurs propres et racines d'un polynôme annulateur*

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ annulateur de u . Les valeurs propres de u sont à rechercher parmi les racines de P :

$$\text{Sp}(u) \subset Z(P)$$

Ce résultat ne tient pas compte de la multiplicité.

Proposition 5.64 - *lien entre valeurs propres et racines du polynôme minimal*

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. Les valeurs propres de u sont exactement les racines de μ_u :

$$\text{Sp}(u) = Z(\mu_u)$$

Ce résultat ne tient pas compte de la multiplicité.

Théorème 5.70 - *de Cayley-Hamilton*

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. χ_u est annulateur de u .