Définition 6.16 - *ensemble $\ell^1(E)$*

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, on note $\ell^1(E)$ l'ensemble des séries à termes dans $E^{\mathbb{N}}$ absolument convergentes. L'application suivante est alors une norme de $\ell^1(E)$:

$$\begin{aligned} N_1 : \ell^1(E) &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ u &\longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|_E \end{aligned}$$

Définition 6.19 - *série géométrique en algèbre normée unitaire*

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre normée unitaire de dimension finie. Pour tout élément u de $\mathcal{A}$ tel que $\|u\|_{\mathcal{A}} < 1$, la série $\sum_n u^n$ est appelée *série géométrique*. Cette série est absolument convergente et sa somme vaut :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u^n = (1_{\mathcal{A}} - u)^{-1}$$

Définition 6.22 - *série exponentielle*

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre normée unitaire de dimension finie. Pour tout élément u de $\mathcal{A}$, la série $\displaystyle\sum_n \frac{u^n}{n!}$ est absolument convergente et appelée *série exponentielle*. On note sa somme :

$$\exp(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}$$

Définition 6.26 - *série alternée*

On appelle *série alternée* tout série $\displaystyle\sum_n u_n$ dont le terme général s'écrit $u_n = (-1)^n a_n$, où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de signe constant.

Théorème 6.27 - *critère spécial des séries alternées*

Soit $\displaystyle\sum_n u_n$ une série alternée. Si $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0, alors la série $\displaystyle\sum_n u_n$ converge.

Définition 6.30 - *produit de Cauchy de suites*

Soit $\mathcal{A}$ une $\mathbb{K}$-algèbre normée unitaire de dimension finie. On appelle *produit de Cauchy $u \star v$ de deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$* la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{i+j=n} u_i v_j$$

bien dans $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, qui est alors muni d'une structure de $\mathbb{K}$-algèbre.

Proposition 6.32 - *convergence du produit de Cauchy de STP*

Soit $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ deux séries réelles à termes positifs. Si $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ convergent, alors il en est de même pour la série de terme général $(u \star v)_n$. De plus :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i+j=n} u_i v_j = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

Proposition 6.32 - *convergence du produit de Cauchy de séries d'élements d'une algèbre normée*

Soit $\mathcal{A}$ une $\mathbb{K}$-algèbre normée unitaire de dimension finie. Soit $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ deux séries à termes dans $\mathcal{A}$. Si $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ convergent absolument, alors il en est de même pour la série de terme général $(u \star v)_n$. De plus :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i+j=n} u_i v_j = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

Théorème 6.34 - *propriété fondamentale de l'exponentielle*

Soit $\mathcal{A}$ une $\mathbb{K}$-algèbre normée unitaire de dimension finie. Si u et v sont deux éléments de $\mathcal{A}$ qui commutent, alors :

$$\exp(u + v) = \exp(u) \star \exp(v)$$