

Proposition 4.2 (6) - *intersection finie de voisinage*

Soit E un espace vectoriel normé. L'intersection finie de voisinages d'un élément $x \in E$ est un voisinage de x .

Définition 4.4 - *ouvert*

Soit E un espace vectoriel normé. On appelle ouvert de E une partie O de E qui est un *voisinage de chacun de ses points*, i.e. :

$$\forall x \in O, \exists r > 0, \mathcal{B}(x, r) \subset O$$

Proposition 4.5 (5) - *intersection finie de voisinage*

Soit E un espace vectoriel normé. L'intersection finie d'ouverts de E est un ouvert de E .

Définition 4.6 - *fermé*

Soit E un espace vectoriel normé. On appelle fermé de E le *complémentaire dans E d'un ouvert O de E* .

Définition 4.9 - *point adhérent à une partie*

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E . Un point $x \in E$ est dit *adhérent à A* si tout voisinage de x rencontre A :

$$\forall V \in \mathcal{V}_E(x), V \cap A \neq \emptyset$$

On appelle *adhérence de A* l'ensemble \overline{A} des éléments de E adhérents à A .

Proposition 4.10 - *caractérisation de l'adhérence d'une partie*

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E . Pour tout $x \in E$, les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. x est adhérent à A ;
2. Toute boule ouverte de centre x contient au moins un élément de A ;
3. la distance de x à A est nulle.

Définition 4.12 (1) - *point d'accumulation d'une partie*

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E . Un point x est un *point d'accumulation de A* si tout voisinage de x rencontre A en au moins un autre point que x :

$$\forall V \in \mathcal{V}_E(x), (V \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$$

Définition 4.12 (2) - *point isolé d'une partie*

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E . Un point x est un *point isolé de A* s'il existe un voisinage de x qui ne rencontre A qu'en x :

$$\exists V \in \mathcal{V}_E(x), V \cap A = \{x\}$$

Définition 4.15 - *partie dense*

Soit E un espace vectoriel normé et A et B des parties de E . On dit que *A est dense dans B* si $\overline{A} = B$

Théorème 4.17 - *caractérisation de l'adhérence par l'inclusion*

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E . \overline{A} est le plus petit fermé de E contenant A .

Théorème 4.18 - *caractérisation de l'adhérence par l'intersection*

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E . \overline{A} est l'intersection de tous les fermés de E contenant A .

Théorème 4.19 - *caractérisation du caractère fermé*

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E . A est fermée si et seulement si elle contient tous ses points adhérents :

$$\overline{A} = A$$

Théorème 4.20 - *caractérisation séquentielle de l'adhérence*

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E . \overline{A} est l'ensemble des limites des suites convergentes d'éléments de A .

Définition 4.22 - *intérieur d'une partie*

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E . $x \in A$ est *intérieur à A* lorsque A est un voisinage de x :

$$\exists \epsilon > 0, \mathcal{B}(x, \epsilon) \subset A$$

l'ensemble des éléments de E intérieurs à A est appelé *intérieur \mathring{A} de A* .

Théorème 4.24 - *caractérisation de l'intérieur d'une partie*

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E . \mathring{A} est le plus grand ouvert de E inclus dans A .

Théorème 4.25 - *lien entre adhérence et intérieur*

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E .

1. Le complémentaire de l'adhérence de A est l'intérieur du complémentaire de A : $\mathbb{C}_E \overline{A} = (\mathring{\mathbb{C}_E A})$
2. Le complémentaire de l'intérieur de A est l'adhérence du complémentaire de A : $\mathbb{C}_E \mathring{A} = \overline{(\mathbb{C}_E A)}$

Définition 4.26 - *frontière d'une partie*

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E . On appelle *point frontière de A* un point adhérent à A qui n'est pas intérieur à A . L'ensemble des points frontières est appelé *frontière $\text{Fr}(A)$ de A* :

$$\text{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \overline{A} \cap \overline{(\mathbb{C}_E A)}$$

Définition 4.29 - *voisinage relatif à une partie*

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E . On appelle *voisinage de $a \in \overline{A}$ relatif à A* l'intersection de A avec un voisinage de a .

Définition 4.30 - *ouvert, fermé relatifs à une partie*

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E .

1. On appelle *ouvert relatif de A* l'intersection de A avec un ouvert de E .
2. On appelle *fermé relatif de A* l'intersection de A avec un fermé de E .

Théorème 4.46 - caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction

Soit E, F deux espaces vectoriels normés, A une partie de E et $f : A \rightarrow F$. f admet une limite $l \in F$ en $a \in \overline{A}$ si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A convergeant vers a , la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l .

Théorème 4.47 - caractérisation séquentielle de la continuité d'une fonction

Soit E, F deux espaces vectoriels normés, A une partie de E et $f : A \rightarrow F$. f est continue en $a \in \overline{A}$ si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A convergeant vers a , la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

Théorème 4.55 - applications coïncidant sur une partie dense

Soit E et F deux espaces vectoriels normés et A une partie de E . Deux applications continues de A dans F qui coïncident sur une partie B dense dans A sont égales.

Théorème 4.56 - caractérisation de la continuité par l'image réciproque

Soit E, F deux espaces vectoriels normés, A une partie de E et $f : A \rightarrow F$. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est continue.
2. L'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé relatif de A .
3. L'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert relatif de A .

Définition 4.59 - homéomorphisme

Soit E et F deux espaces vectoriels normés. On appelle *homéomorphisme de E dans F* une application continue et bijective de E dans F dont la bijection réciproque est aussi continue.

Théorème 4.65 - caractérisation des applications linéaires continues

Soit E et F deux espaces vectoriels normés et f une application linéaire de E dans F . Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est continue sur E .
2. f est continue en 0_E .
3. f est bornée sur la boule unité fermée.
4. $\exists K \in \mathbb{R}_+, \forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq K\|x\|_E$.
5. f est lipschitzienne sur E .
6. f est uniformément continue sur E .

Théorème 4.69 - continuité des applications linéaires de source de dimension finie

Soit E et F deux espaces vectoriels normés. Si E est de dimension finie, alors toute application linéaire de E dans F est continue.

Théorème 4.71 - caractérisation des applications bilinéaires continues

Soit E , F et G trois espaces vectoriels normés et φ une application bilinéaire de $E \times F$ dans G . Alors l'application φ est continue sur $E \times F$ si et seulement si :

$$\exists K \in \mathbb{R}_+, \forall (x, y) \in E \times F, \|\varphi(x, y)\|_G \leq K\|x\|_E\|y\|_F$$

Définition 4.75 - norme subordonnée d'une application linéaire continue

Soit E et F deux espaces vectoriels normés. Pour toute application linéaire continue de E dans F , l'ensemble des normes des images des éléments de la boule unité fermée de E est une partie non vide et majorée de \mathbb{R} : elle admet une borne supérieure, notée :

$$|||f||| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\|$$

On appelle *norme subordonnée aux normes de E et F* l'application :

$$\begin{aligned} ||| \cdot ||| : \mathcal{LC}(E, F) &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ f &\longmapsto |||f||| \end{aligned}$$

C'est une norme.

Théorème 4.77 - caractérisation de la norme triple

Soit $f \in \mathcal{LC}(E, F)$, où E et F sont deux espaces vectoriels normés. La norme triple de f est le plus petit réel $K > 0$ tel que pour tout x , $\|f(x)\|_F \leq K\|x\|_E$:

$$|||f||| = \inf\{K > 0, \forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq K\|x\|_E\}$$

On a aussi :

$$|||f||| = \sup_{\|x\|_E \neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

Théorème 4.78 - sous-multiplicativité de la norme triple

Soit E , F et G trois espaces vectoriels normés. Si f est une application linéaire continue de E dans F et g une application linéaire continue de F dans G , alors $g \circ f$ est une application linéaire continue de E dans G et :

$$|||g \circ f||| \leq |||f||| \times |||g|||$$

Définition 4.79 - algèbre normée unitaire

On appelle *algèbre normée unitaire* une algèbre \mathcal{A} munie d'une norme $\|\cdot\|$ telle que :

$$\begin{cases} \|e\| = 1 \\ \forall (x, y) \in \mathcal{A}^2, \|x \times y\| \leq \|x\|\|y\| \end{cases}$$