Définition 15.1 - *tribu*

Pour un univers Ω au plus dénombrable, on appelle *tribu sur* Ω une partie $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ tel que :

1. $\Omega \in \mathcal{T}$
2. Pour tout $A \in \mathcal{T}, \overline{A} \in \mathcal{T}$
3. Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{T}$, $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$

Les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés *évènements*.

Définition 15.4 - *espace probabilisable*

Soit Ω un univers au plus dénombrable et $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω. Le couple $(\Omega, \mathcal{T})$ est appelé *espace probabilisable*.

Définition 15.5 - *système complet d'évènements*

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable associé à un univers Ω au plus dénombrable. On dit qu'une famille au plus dénombrable $(A_i)_{i\in I} \in \mathcal{T}^I$ d'évènements constitue un *système complet d'évènements* si :

$$\Omega = \bigsqcup_{i\in I} A_i$$

Définition 15.7 - *probabilité sur un univers*

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable associé à un univers Ω au plus dénombrable. On appelle *probabilité sur* $(\Omega, \mathcal{T})$ une application $\mathbb{P} : \mathcal{T} \to [0\,;\,1]$ telle que :

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
2. *σ-additivité* : Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'évènements deux à deux incompatibles, la série de terme général $\mathbb{P}(A_n)$ converge et :
$$\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

On dit alors que $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ constitue un *espace probabilisé*.

Théorème 15.17 - *de la limite monotone*

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ une suite croissante d'évènements ($\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$). Alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Proposition 15.20 - *inégalité de Boole*

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ une suite d'événements telle que la série de terme général $\mathbb{P}(A_n)$ converge. Alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Définition 15.21 - *événements négligeable, presque sûr*

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

- Un événement A est dit *négligeable* si $\mathbb{P}(A) = 0$.
- Un événement A est dit *presque sûr* si $\mathbb{P}(A) = 1$.

Proposition 15.22 (3) - *intersection, union avec un événement négligeable*

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $A \in \mathcal{T}$ un événement négligeable. Alors :

$$\forall B \in \mathcal{T}, \begin{cases} \mathbb{P}(A \cap B) = 0 \\ \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(B) \end{cases}$$

Définition 15.24 - *probabilité conditionnelle*

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $A \in \mathcal{T}$ un événement non négligeable. Alors l'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_A : \mathcal{T} &\longrightarrow [0\,;\,1] \\ B &\longmapsto \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \end{aligned}$$

est une probabilité, appelée *probabilité conditionnelle sachant A*.

Théorème 15.26 - *formule des probabilités composées*

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_k)_{k\in[\![1,\,n]\!]} \in \mathcal{T}^n$ une famille d'évènements telle que $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ ne soit pas négligeable. Alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_k \,\middle|\, \bigcap_{i=1}^{k-1} A_j\right)$$

Théorème 15.28 - *formule de probabilités totales*

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'évènement de probabilités non nulles, où I est au plus dénombrable. Pour tout $B \in \mathcal{T}$:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(B \cap A_i)$$

Théorème 15.32 - *formule de Bayes*

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'évènement de probabilités non nulles, où I est au plus dénombrable. Pour tout $B \in \mathcal{T}$ de probabilité non nulle :

$$\forall j \in I,\, \mathbb{P}_B(A_j) = \frac{\mathbb{P}_{A_j}(B)}{\sum_{i\in I} \mathbb{P}_{A_i}(B)\mathbb{P}(A_i)}$$

Définition 15.37 - *évènements mutuellement indépendants*

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'évènement, où I est au plus dénombrable. $(A_i)_{i\in I}$ est une *famille d'évènements mutuellement indépendants* si :

$$\forall J \in \mathcal{P}_f(I),\, \mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(A_j)$$

Définition 15.38 - *prédicat vrai sur un ensemble au plus dénombrable*

Soit P un prédicat sur I un ensemble au plus dénombrable. On dit que *P est vrai sur I* si :

$$\forall J \in \mathcal{P}_f(I),\, \forall x \in J,\, P(x)$$