Définition 8.1 - *ensemble dénombrable*

Un ensemble est dit *dénombrable* s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$, ce qui revient à pouvoir *numéroter chacun de ses éléments* (sans pour autant manipuler de "dernier élément", ce qui supposerait qu'il soit fini).

Proposition 8.5 - *parties infinies de* $\mathbb{N}$

Toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

Proposition 8.10 - *réunion d'ensembles dénombrables*

Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Théorème 8.13 - $\mathbb{R}$ *n'est pas dénombrable*

L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Définition 8.14 - *famille sommable de réels positifs*

On dit qu'une *famille* $(u_i)_{i\in I}$ *de nombres réels positifs est sommable* lorsqu'il existe $M \geq 0$ tel que, pour toute partie finie $J \subset I$, on ait $\sum_{j\in J} u_j \leq M$. On définit alors *la somme de la famille* par :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sup_{\substack{J\subset I \\ J \text{ finie}}} \sum_{j\in J} u_j$$

Proposition 8.15 - *sommabilité d'une famille de réels positifs*

Une famille $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de réels positifs indexée par $\mathbb{N}$ est sommable si et seulement si la série $\sum_n u_n$ est convergente.

Théorème 8.17 - *de Fubini positif*

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels positifs et $I = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ une partition dénombrable de I. La famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ (u_i)_{i\in I_n} & \text{est sommable} \\ \sum_n \left(\sum_{i\in I_n} u_i\right) & \text{est convergente} \end{cases}$$

Le cas échéant,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i\in I_n} u_i\right) = \sum_{i\in I} u_i$$

Définition 8.20 - *famille sommable de réels ou de complexes*

Une *famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable* si la famille $(|u_i|)_{i\in I}$ l'est.

Proposition 8.21 - *inégalité triangulaire*

Soit $(u_i)_{i\in I}$ un famille sommable de nombres complexes. On a :

$$\left|\sum_{i\in I} u_i\right| \leq \sum_{i\in I} |u_i|$$

Théorème 8.25 - *de Fubini complexe*

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes et $I = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ une partition dénombrable de I. La famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ (u_i)_{i\in I_n} & \text{est sommable} \\ \displaystyle\sum_n \sum_{i\in I_n} |u_i| & \text{est convergente} \end{cases}$$

Le cas échéant,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i\in I_n} u_i = \sum_{i\in I} u_i$$

Théorème 8.28 - *interversion des sommations de complexes*

Soit $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est une famille nombres complexes. La famille $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall q \in \mathbb{N}, \sum_p |u_{p,q}| & \text{est convergente} \\ \sum_q \sum_{p=0}^{+\infty} |u_{p,q}| & \text{est convergente} \end{cases}$$

si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall p \in \mathbb{N}, \sum_q |u_{p,q}| & \text{est convergente} \\ \sum_p \sum_{q=0}^{+\infty} |u_{p,q}| & \text{est convergente} \end{cases}$$

et le cas échéant :

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q} = \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} = \sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}$$

Proposition 8.29 - *produit de familles sommables de nombres complexes*

Soit $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(b_q)_{q\in\mathbb{N}}$ deux familles sommables de nomnbres complexes. Alors la famille $(a_p b_q)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et :

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} a_p b_q = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_p\right) \times \left(\sum_{q=0}^{+\infty} b_q\right)$$