Chapitre 1

Probabilités

mail du prof : francois.dufour@math.u-bordeaux.fr

Pourquoi des probas ?

- modéliser des réseaux de télécommunication de façon aléatoires (nombre de clients, temps de traitement, etc.).
- théorie des algorithmes stochastiques : une grande partie des modèles d'IA ont un lien avec ceux-là.

I Espace de probabilité

Définition 1.1 - *ensemble des éventualités*

Dans la modélisation mathématique d'une expérience aléatoire, la première étape consiste à lister l'ensemble des résultats possibles de cette expérience. On note Ω un tel ensemble, appelé *univers*, ou *ensemble des réalisations*.

Exemple 1.2 - *Pile ou Face*

Dans un jeu de Pile ou Face, on a $\Omega = \{\text{Pile, Face}\}$.

Exemple 1.3 - *Jeu à dé à six faces*

Dans un jeu impliquant un dé à six faces, on a $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

II Notions d'évènements et de tribu

Définition 1.4 - *évènement*

On appelle *évènement* une partie $A \subset \Omega$.

Exemple 1.5 - *d'évènement*

Au jeu de dé à six faces, A décrit par "le résultat du jeu de dé vaut 4 ou 5" est un évènement de Ω.

Proposition 1.6 - *évènements axiomatiques*

Soit Ω un univers.

- l'évènement $\varnothing$ est un évènement de Ω appelé *évènement impossible*
- l'évènement Ω entier est un évènement.

Définition 1.7 - *tribu*

Pour un univers Ω au plus dénombrable, on appelle *tribu sur* Ω une partie $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant :

1. $\Omega \in \mathcal{T}$

2. Pour tout $A \in \mathcal{T}, \overline{A} \in \mathcal{T}$

3. Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{T}$, $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$

Le couple $(\Omega, \mathcal{T})$ est alors appelé *espace mesurable* (ou *espace probabilisable*).

Exemple 1.8 - *de tribus*

Pour Ω un univers quelconque :

- $\{\varnothing, \Omega\}$ est une tribu de Ω
- $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu, dite *tribu pleine de* Ω
- $\{\varnothing, A, \overline{A}, \Omega\}$ est une tribu pour $A \subset \Omega$. C'est la plus petite tribu de Ω qui contient A pour l'inclusion.

III Probabilité

Définition 1.9 - *probabilité*

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable. On appelle *probabilité sur* $(\Omega, \mathcal{T})$ une application $\mathbb{P} : \mathcal{T} \to [0\,;\,1]$ telle que :

1. *principe de normalisation* : $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
2. *σ-additivité* : Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'évènements deux à deux incompatibles, la série de terme général $\mathbb{P}(A_n)$ converge et :
$$\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

On dit alors que $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ constitue un *espace de probabilité* (ou *espace de probabilité*).

Définition 1.10 - *événements négligeable, certain*

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité.

- Un événement A est dit *négligeable* si $\mathbb{P}(A) = 0$.
- Un événement A est dit *certain* si $\mathbb{P}(A) = 1$.

Remarque 1.11

On munira souvent les univers Ω finis de leur tribu pleine $\mathcal{P}(\Omega)$

Exemple 1.12

Soit $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ un univers fini qu'on munit de la tribu pleine. On considère $\mathbb{P}$ une probabilité sur cet espace mesurable telle que :
$$\forall i \in [\![1,\, n]\!],\ \mathbb{P}(\omega_i) = p \in]0,\, 1]$$
$\mathbb{P}$ est alors appelée probabilité uniforme. On vérifie que nécessairement :
$$p = \frac{1}{|\Omega|}$$
et ainsi pour $A \in \mathcal{T} = \mathcal{P}(\mathcal{A})$:
$$\mathbb{P}(A) = \frac{|(|A)}{|\Omega|}$$

Proposition 1.13 - *règles de calcul*

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Pour A et B dans $\mathcal{T}$:

1. $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$
2. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
3. $\mathbb{P}(A \cap B) = ?$
4. Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

IV Probabilité conditionnelle

On cherche à évaluer la probabilité d'un évènement A sachant qu'un évènement B est réalisé.

Définition 1.14 - *probabilité conditionnelle*

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit $A \in \mathcal{T}$ un événement non négligeable. Alors l'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_A : \mathcal{T} &\longrightarrow [0\,;\,1] \\ B &\longmapsto \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \end{aligned}$$

est une probabilité, appelée *probabilité conditionnelle sachant A*.

Exemple 1.15 - *des deux enfants*

Un voisin a deux enfants. On note :

- A : "Il a au moins un garçon."
- B : "Il a au moins une fille."
- C : "Son deuxième enfant est une fille."

On a :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} \frac{|\Omega|}{|B|} = \frac{2}{3}$$

De même,

$$\mathbb{P}_C(A) = \frac{|A \cap C|}{|C|} = \frac{1}{2}$$

V Indépendance d'évènements

Définition 1.16 - *évènements indépendants*

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Deux évènements A et B sont indépendants si :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Définition 15.37 - *évènements indépendants*

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'évènement, où I est au plus dénombrable. $(A_i)_{i\in I}$ est une *famille d'évènements indépendants* (aussi appelée *famille d'évènements mutuellement indépendants*) si :

$$\forall J \in \mathcal{P}_f(I),\, \mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(A_j)$$

Proposition 1.17 - *relation entre indépendance d'évènements et probabilité conditionnelle*

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit A et B deux évènements. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. A et B sont indépendants.
2. $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$
3. $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$

VI Identités et définitions

Définition 1.18 - *partition*

Soit E un ensemble. On dit qu'une famille quelconque $(A_i)_{i\in I}$ de parties de E est une *partition* de E si :

$$E = \bigsqcup_{i\in I} A_i$$

Théorème 1.19 - *formule de Bayes*

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'évènement de probabilités non nulles, où I est au plus dénombrable. Pour tout $B \in \mathcal{T}$ de probabilité non nulle :

$$\forall j \in I,\, \mathbb{P}_B(A_j) = \frac{\mathbb{P}_{A_j}(B)}{\displaystyle\sum_{i\in I} \mathbb{P}_{A_i}(B)\mathbb{P}(A_i)}$$

Théorème 1.20 - *formule de probabilités totales*

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'évènement de probabilités non nulles, où I est au plus dénombrable. Pour tout $B \in \mathcal{T}$:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(B \cap A_i)$$

Remarque 1.21 - *formule des probabilités totales*

le système complet d'évènements peut n'être qu'une partition d'un évènement quelconque ! En effet, on peut écrire pour un tel évènement A :

$$A = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} (B_n \cap A)$$

La démonstration en découle alors.