

Relatório Técnico

Análise de estrutura reticulada pelo método dos elementos finitos

1. Introdução

A análise estrutural é uma etapa fundamental no desenvolvimento de projetos de engenharia mecânica e civil, pois permite prever o comportamento das estruturas quando submetidas a diferentes condições de carregamento, garantindo segurança, eficiência e confiabilidade. Entre os diversos sistemas estruturais, as estruturas reticuladas destacam-se pela sua eficiência estrutural no que diz respeito à relação entre resistência mecânica e peso.

Entretanto, à medida que o número de barras, nós e vínculos aumenta, a resolução analítica dessas estruturas torna-se excessivamente trabalhosa, complexa ou até mesmo inviável. Diante desse cenário, métodos numéricos passam a ser indispensáveis para a análise estrutural. O método dos elementos finitos (MEF) consolida-se como uma das ferramentas mais robustas e confiáveis para esse tipo de análise, permitindo a discretização da estrutura em elementos simples e a obtenção de soluções aproximadas com elevado grau de precisão.

Neste contexto, o presente trabalho tem como objetivo aplicar a regra de Cramer para solucionar um sistema linear de equações obtido pelo método dos elementos finitos, responsável por descrever matematicamente o comportamento estrutural da treliça plana reticulada, ilustrada na Figura 1, em termos de deslocamentos nodais e reações de apoio. Nesse sentido, empregou-se elementos de barra (treliça) para uma análise estrutural estática linear.

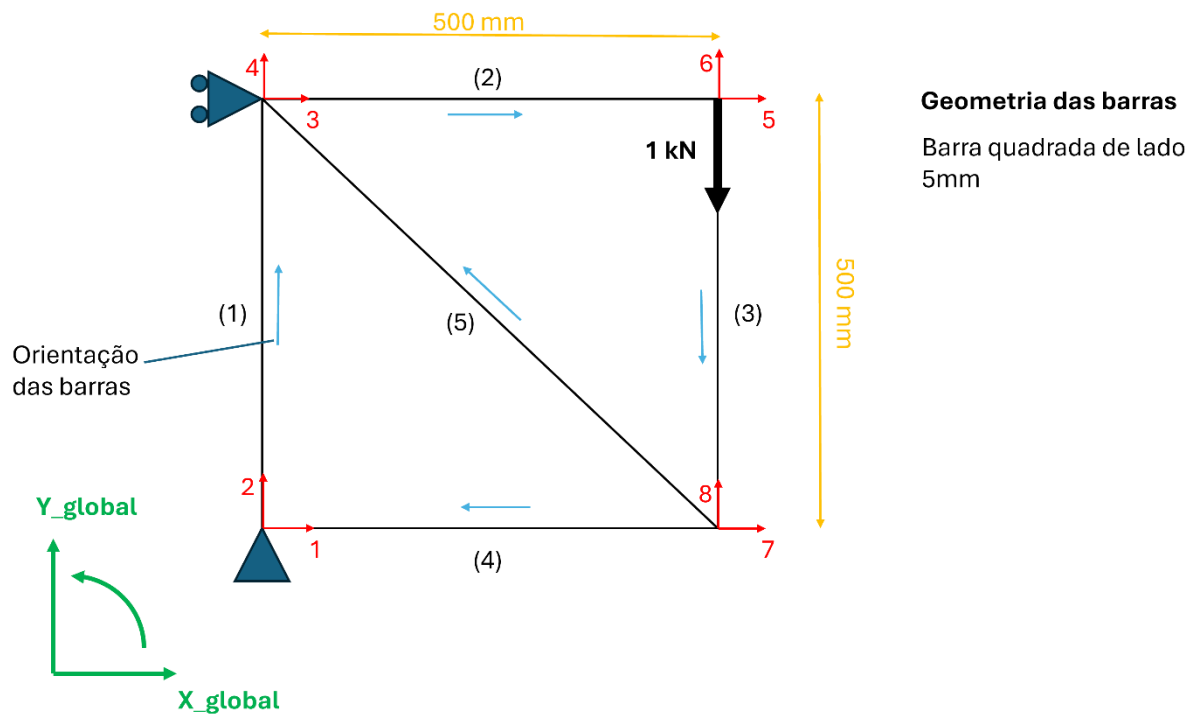


Figura 1 – Geometria da treliça analisada

Inicialmente, foi estabelecida a matriz de rigidez local de cada elemento, levando em consideração propriedades mecânicas e geométricas (módulo de elasticidade (E), área da seção transversal (A) e comprimento do elemento (L)) e a orientação do elemento no plano, definida a partir do ângulo θ em relação a um sistema de coordenadas global.

Em seguida, as matrizes de rigidez dos elementos foram transformadas para o sistema de coordenadas global e devidamente assembladas na matriz de rigidez global da estrutura, respeitando os graus de liberdade (GDLs) associados a cada nó.

Posteriormente, foram aplicadas as condições de contorno do problema, com a imposição de deslocamentos prescritos nulos em determinados nós, bem como a atuação de uma força concentrada de -1000 N em um nó da estrutura em um de seus graus de liberdade.

2. Fundamentação Teórica

No Método dos Elementos Finitos (MEF), uma estrutura originalmente contínua é discretizada em um número finito de elementos interligados por nós, permitindo a obtenção de soluções aproximadas para problemas de engenharia estrutural. Essa abordagem possibilita a análise de sistemas complexos por meio da resolução de equações algébricas, em substituição às equações diferenciais do meio contínuo.

No caso das estruturas reticuladas, a discretização é realizada por meio de elementos de barra, os quais são capazes de resistir exclusivamente a esforços axiais. Para a formulação desses elementos, assume-se comportamento elástico linear do material, pequenas deformações, bem como material homogêneo e isotrópico.

A relação constitutiva entre tensão e deformação é descrita pela Lei de Hooke, enquanto a relação geométrica estabelece o vínculo entre as deformações axiais e os deslocamentos nodais do elemento. A combinação dessas relações, conduz à obtenção da matriz de rigidez local do elemento de barra, a qual pode ser expressa por:

$$k_e = (EA/L) \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Uma vez que os elementos da estrutura podem estar orientados em diferentes direções no plano, torna-se necessária a utilização de uma matriz de transformação, definida a partir do ângulo de inclinação do elemento. Essa matriz permite a conversão da matriz de rigidez do sistema local para o sistema global.

Após esse procedimento, as matrizes de rigidez dos elementos são devidamente combinadas para compor a matriz de rigidez global da estrutura, na qual são considerados os graus de liberdade associados a cada nó. Esse processo garante a representação adequada das interações entre os elementos e o comportamento global do sistema estrutural.

O equilíbrio global da estrutura, sob a ação dos carregamentos externos e respeitadas as condições de contorno impostas, é então descrito pelo seguinte sistema de equações lineares:

$$K \cdot d = f$$

A solução desse sistema fornece os deslocamentos nodais da estrutura,

encerrando a fundamentação teórica necessária para o desenvolvimento da análise proposta.

3. Método numérico utilizado

A imposição das condições de contorno ao sistema global de equações resulta em um sistema linear reduzido, no qual permanecem apenas os deslocamentos nodais desconhecidos. A resolução desse sistema constitui uma etapa fundamental da análise pelo Método dos Elementos Finitos e pode ser realizada por meio de diferentes métodos numéricos, possibilitando a comparação entre desempenho e robustez.

Entre os métodos disponíveis, destaca-se inicialmente o Método de Cramer, o qual se baseia no cálculo de determinantes para a obtenção direta das incógnitas. Esse método possui aplicação essencialmente didática, sendo adequado para sistemas lineares de pequena dimensão, como o considerado neste trabalho.

Outro método amplamente empregado é a Eliminação Gaussiana, que consiste no escalonamento da matriz aumentada do sistema por meio de operações elementares de linha.

Já a Decomposição LU fundamenta-se na fatoração da matriz dos coeficientes em matrizes triangulares, sendo amplamente utilizada em aplicações computacionais e softwares de engenharia devido à sua eficiência computacional

Diante dessas alternativas, optou-se neste trabalho pela utilização do Método de Cramer, em função da reduzida dimensão do sistema analisado e de seu caráter didático, o que possibilita uma compreensão clara do procedimento de resolução do sistema linear e dos deslocamentos nodais obtidos.

4. Resultados e Análises

Os deslocamentos nodais obtidos a partir dos três métodos numéricos foram idênticos, confirmando a consistência do modelo estrutural e da implementação computacional.

Os deslocamentos nodais obtidos indicaram que apenas um grau de liberdade

apresentou deslocamento significativo, coerente com o carregamento aplicado e as condições de contorno impostas.

Os resultados obtidos para os graus de liberdade desconhecidos são apresentados a seguir:

```
{d4: -0.1000000000000002,  
d5: -6.12323399573677e-18,  
d6: -0.582842712474629,  
d7: -0.1000000000000002,  
d8: -0.482842712474629,  
f1: 1000.000000000002,  
f2: 1000.000000000002,  
f3: -1000.000000000002}
```

Observa-se que apenas o deslocamento associado ao grau de liberdade d_6 apresenta valor diferente de zero, indicando a região da estrutura mais solicitada. Esse comportamento é coerente com a aplicação da carga concentrada e com as restrições impostas aos demais nós.

5. Conclusão

O presente trabalho demonstrou a aplicação do Método dos Elementos Finitos na análise de uma estrutura reticulada plana, desde a formulação teórica até a solução numérica. A utilização de diferentes métodos de resolução permitiu validar os resultados obtidos e reforçar a confiabilidade do modelo. A Decomposição LU mostrou-se a abordagem mais eficiente do ponto de vista computacional, sendo recomendada para problemas de maior porte.

A análise demonstrou a eficácia do Método dos Elementos Finitos na modelagem de estruturas reticuladas. A Decomposição LU mostrou-se particularmente adequada para a solução do sistema linear, sendo amplamente utilizada em aplicações de engenharia.

REFERÊNCIAS

BATHE, K. J. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, 1996.

GERE, J. M.; GOODNO, B. J. *Mechanics of Materials*. Cengage Learning, 2012.

SYMPY DEVELOPMENT TEAM. *SymPy: Python Library for Symbolic Mathematics*.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. *The Finite Element Method*. Butterworth-Heinemann, 2000.