Relatório Técnico

Análise de estrutura reticulada pelo método dos elementos finitos

1. Introdução

A análise estrutural é uma etapa fundamental no desenvolvimento de projetos de engenharia mecânica e civil, pois permite prever o comportamento das estruturas quando submetidas a diferentes condições de carregamento, garantindo segurança, eficiência e confiabilidade. Entre os diversos sistemas estruturais, as estruturas reticuladas destacam-se pela sua eficiência estrutural no que diz respeito à relação entre resistência mecânica e peso.

Entretanto, à medida que o número de barras, nós e vínculos aumenta, a resolução analítica dessas estruturas torna-se excessivamente trabalhosa, complexa ou até mesmo inviável. Diante desse cenário, métodos numéricos passam a ser indispensáveis para a análise estrutural. O método dos elementos finitos (MEF) consolida-se como uma das ferramentas mais robustas e confiáveis para esse tipo de análise, permitindo a discretização da estrutura em elementos simples e a obtenção de soluções aproximadas com elevado grau de precisão.

Neste contexto, o presente trabalho tem como objetivo aplicar a regra de Cramer para solucionar um sistema linear de equações obtido pelo método dos elementos finitos, responsável por descrever matematicamente o comportamento estrutural da treliça plana reticulada, ilustrada na Figura 1, em termos de deslocamentos nodais e reações de apoio. Nesse sentido, empregou-se elementos de barra (treliça) para uma análise estrutural estática linear.

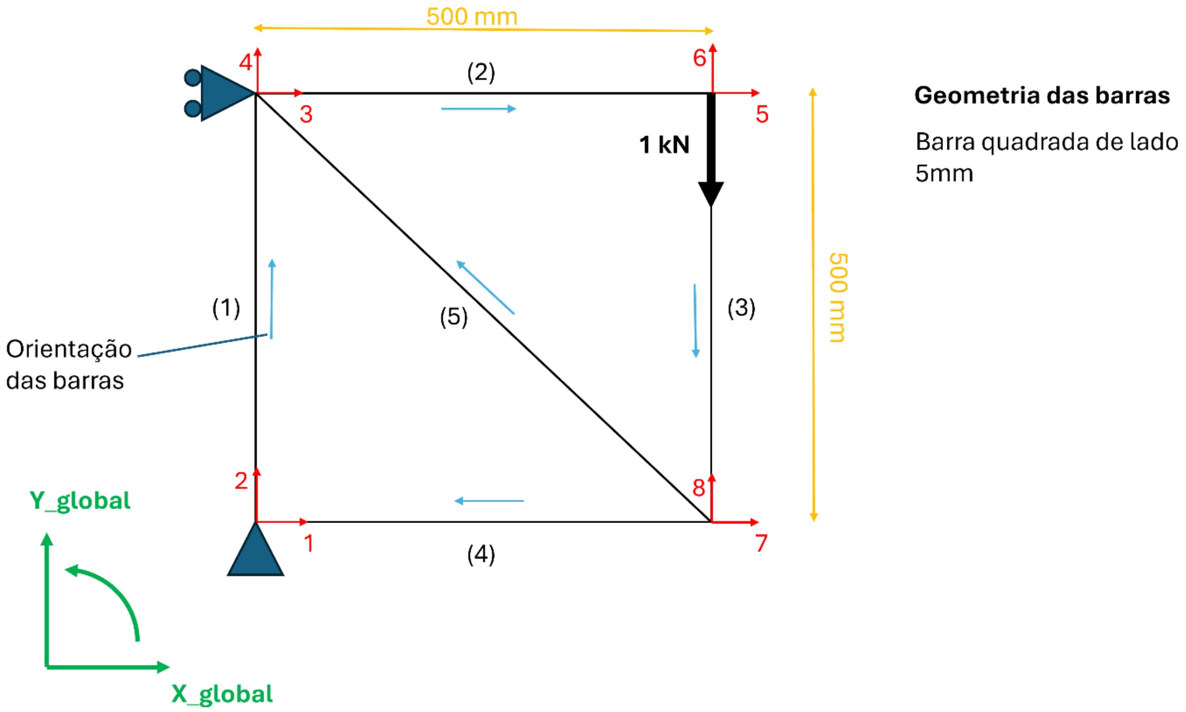

Figura 1 – Geometria da treliça analisada

Inicialmente, foi estabelecida a matriz de rigidez local de cada elemento, levando em consideração propriedades mecânicas e geométricas para o aço (módulo de elasticidade (E), igual a 200.000 Mpa; área da seção transversal (A) de 25 mm² e comprimento do elemento (L)) e a orientação do elemento no plano, definida a partir do ângulo θ em relação a um sistema de coordenadas global. Considerou-se

Em seguida, as matrizes de rigidez dos elementos foram transformadas para o sistema de coordenadas global e devidamente assembladas na matriz de rigidez global da estrutura, respeitando os graus de liberdade (GDLs) associados a cada nó.

Posteriormente, foram aplicadas as condições de contorno do problema, com a imposição de deslocamentos prescritos nulos em determinados nós, bem como a atuação de uma força concentrada de −1000 N em um nó da estrutura em um de seus graus de liberdade.

2. Fundamentação Teórica

No Método dos Elementos Finitos (MEF), uma estrutura originalmente contínua é discretizada em um número finito de elementos interligados por nós, permitindo a obtenção de soluções aproximadas para problemas de engenharia estrutural. Essa abordagem possibilita a análise de sistemas complexos por meio da resolução de equações algébricas, em substituição às equações diferenciais do meio contínuo.

No caso das estruturas reticuladas, a discretização é realizada por meio de elementos de barra, os quais são capazes de resistir exclusivamente a esforços axiais. Para a formulação desses elementos, assume-se comportamento elástico linear do material, pequenas deformações, bem como material homogêneo e isotrópico.

A relação constitutiva entre tensão e deformação é descrita pela Lei de Hooke, enquanto a relação geométrica estabelece o vínculo entre as deformações axiais e os deslocamentos nodais do elemento. A combinação dessas relações, conduz à obtenção da matriz de rigidez local do elemento de barra, a qual pode ser expressa por:

$$\overline{\mathrm{K_e}} = \frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{L}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Uma vez que os elementos da estrutura podem estar orientados em diferentes direções no plano, torna-se necessária a utilização de uma matriz de transformação, definida a partir do ângulo de inclinação do elemento. Essa matriz permite a conversão da matriz de rigidez do sistema local para o sistema global.

Após esse procedimento, as matrizes de rigidez dos elementos são devidamente combinadas para compor a matriz de rigidez global da estrutura, em função dos graus de liberdade associados a cada nó. Ou seja, a partir do comportamento de cada elemento, determina-se o comportamento de toda a estrutura quando submetida à ação de carregamentos externos e condições de contorno. Para isso, deve-se respeitar o equilíbrio estático, descrito pelo seguinte sistema de equações lineares:

$$[K] \cdot \{d\} = \{f\}$$

3. Método numérico utilizado

A imposição das condições de contorno na estrutura garante que o determinante da matriz de rigidez global não seja nulo, de modo a travar os movimentos de corpo rígido na estrutura. A resolução desse sistema constitui uma etapa fundamental da análise pelo Método dos Elementos Finitos e pode ser realizada por meio de diferentes métodos numéricos, possibilitando a comparação entre desempenho e robustez.

Entre diversos métodos disponíveis para solução de sistemas lineares de equações, optou-se neste trabalho pela utilização do Método de Cramer, em função da reduzida dimensão do sistema analisado e de seu caráter didático, o que possibilita uma compreensão clara do procedimento de resolução do sistema linear e dos deslocamentos nodais obtidos.

4. Resultados e Análises

Os deslocamentos nodais obtidos a partir da regra de Cramer foram aproximadamente iguais aos deslocamentos nodais modelados na ferramenta Ftool (Figura 2), confirmando a consistência do modelo estrutural e da implementação computacional.

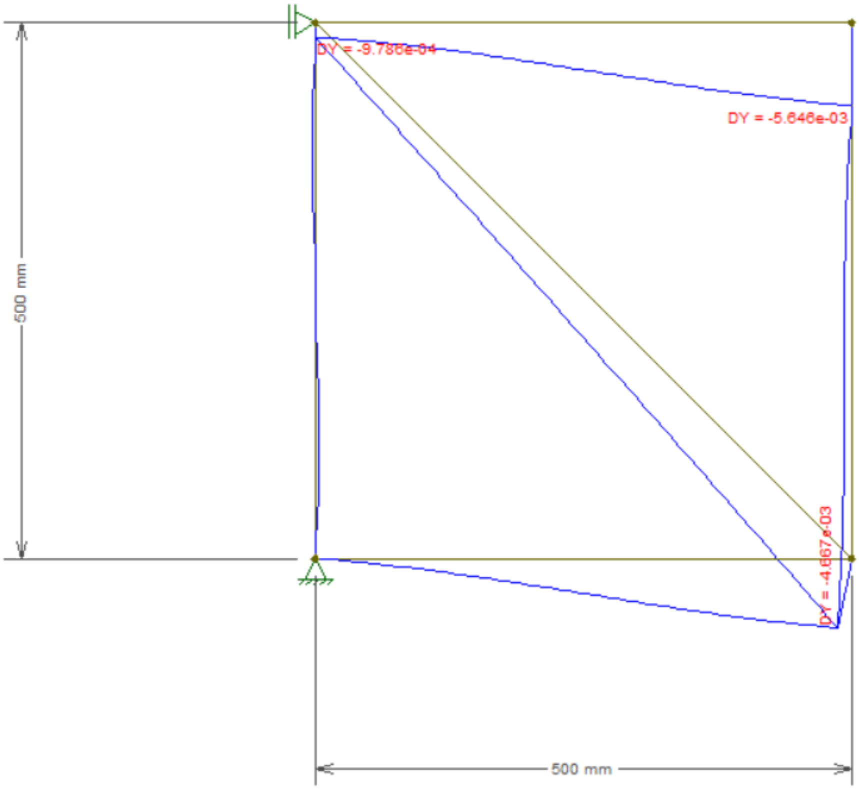

Figura 2 - Deslocamentos verticais obtidos no Ftool

Os deslocamentos nodais obtidos indicaram que apenas um grau de liberdade apresentou deslocamento significativo, coerente com o carregamento aplicado e as condições de contorno impostas.

Os resultados obtidos para os graus de liberdade desconhecidos são apresentados a seguir:

```
{d4: -0.100000000000002,
 d5: -6.12323399573677e-18,
 d6: -0.582842712474629,
 d7: -0.100000000000002,
 d8: -0.482842712474629,
 f1: 1000.00000000002,
 f2: 1000.00000000002,
 f3: -1000.00000000002}
```

5. Conclusão

O presente trabalho demonstrou a aplicação do Método dos Elementos Finitos na análise de uma estrutura reticulada plana, desde a formulação teórica até a solução numérica do sistema linear de equações pelo método de Cramer que, mesmo sendo menos viável computacionalmente que vários outros métodos (decomposição LU, Cholesky, entre outros), mostrou ser um bom exemplo para fins didáticos.

REFERÊNCIAS

BATHE, K. J. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, 1996.

GERE, J. M.; GOODNO, B. J. *Mechanics of Materials*. Cengage Learning, 2012.

SYMPY DEVELOPMENT TEAM. *SymPy: Python Library for Symbolic Mathematics*.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. *The Finite Element Method*. Butterworth-Heinemann, 2000.