MATHÉMATIQUES EN MP

COURS COMPLET

SOEUNG Raphaël

15 décembre 2024

Sommaire

I Topologie des espaces vectoriels normés

Contexte
Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps et $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

A Structure d'espace vectoriel normé

Définition — Norme
Est dite norme sur E toute application N de E dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant :

$\longrightarrow$ axiome de séparation : $\forall x \in E,\ N(x) = 0 \implies x = 0_E$;

$\longrightarrow$ absolue homogénéité : $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ N(\lambda \cdot x) = |\lambda| \times N(x)$;

$\longrightarrow$ sous-additivité : $\forall (x, y) \in E^2,\ N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$.

Une application de E dans $\mathbb{R}_+$ sous-additive vérifiant l'absolue homogénéité est dite semi-norme sur E.

Définition — Espace vectoriel normé
On définit un espace vectoriel normé par la donnée d'un couple (E, N) où E est un espace vectoriel et N une norme sur E.

Exemple

(i) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $((E_i, N_i))_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille finie d'espaces vectoriels normés. On appelle $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$ l'espace vectoriel produit. On peut définir une norme sur E en notant N l'application de E dans $R+$ définie par :

$$\forall (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in E, N((x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}) = \max\left(\{x \in R_+ | \exists i \in [\![1, n]\!], x = N(x_i)\}\right).$$

Démonstration

(i) $\longrightarrow$ axiome de séparation :
Soit tout $x = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in E$ tel que $N(x) = 0$.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$\begin{aligned} & 0 \leqslant N_i(x_i) \leqslant N(x) \\ \iff & 0 \leqslant N_i(x_i) \leqslant 0 \\ \iff & N_i(x_i) = 0 \end{aligned}$$

Alors $x = 0$ par axiome de séparation.

$\longrightarrow$ absolue homogénéité :
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in E$.
Il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $N_i(x_i) = N(x)$.
Ainsi, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$:

$$\begin{aligned} & N_j(x_j) \leqslant N_i(x_i) \\ \iff & |\lambda| \times N_j(x_j) \leqslant |\lambda| \times N_i(x_i) \\ \iff & N_j(\lambda \cdot x_j) \leqslant N_i(\lambda \cdot x_i) \end{aligned}$$

Donc $N_i(\lambda \cdot x_i) = N(\lambda \cdot x)$.

$\longrightarrow$ sous-additivité :
Soit $x = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in E$ et $y = (y_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in E$.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, avec la sous-additivité de la norme :

$$\begin{aligned} & N_i(x_i + y_i) \leqslant N_i(x_i) + N_i(y_i) \leqslant N(x) + N(y) \\ \Longrightarrow\ & N(x+y) \leqslant N(x) + N(y) \end{aligned}$$

Définition — Vecteur unitaire
Dans un espace vectoriel normé, tout vecteur de norme 1 est dit vecteur unitaire.

Dans un espace vectoriel normé (E, N), nous pouvons construire un vecteur unitaire à partir de tout vecteur non nul :

$$\forall x \in E, N\left(\frac{1}{N(x)} \cdot x\right) = \frac{1}{N(x)} \times N(x) = 1.$$

Proposition — Continuité de la norme
La norme est 1-lipschitzienne donc continue. Soit N une norme sur E.

$$\forall (x, y) \in E^2, |N(x) - N(y)| \leqslant N(x - y).$$

Démonstration Soit $(x, y) \in E^2$. Par sous-additivité de la norme :

$$\begin{aligned} & N(x) = N(x - y + y) = N((x - y) + y) \leqslant N(x - y) + N(y) \\ \Longleftrightarrow\ & N(x) - N(y) \leqslant N(x - y). \end{aligned}$$

Alors, par absolue homogénéité de la norme :

$$\begin{aligned} & N(y) - N(x) \leqslant N(y - x) \\ \Longleftrightarrow\ & -(N(x) - N(y)) \leqslant N(x - y). \end{aligned}$$

Donc : $|N(x) - N(y)| \leqslant N(x - y)$.

B Distance associée à une norme, boules et sphères

Définition — Distance
Soit X un ensemble. Une application $d\colon X^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est dite distance sur X lorsque les propriétés suivantes sont vérifiées :

(i) axiome de séparation : $\forall (x, y) \in X^2, d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$;
(ii) symétrie : $\forall t(x, y) \in X^2, d(x, y) = d(y, x)$;
(iii) inégalité triangulaire : $\forall (x, y, z) \in X^3, d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.

Définition — Espace métrique
On définit un espace métrique par la donnée d'un couple (X, d) où X est un ensemble non vide et d une distance sur X.

Définition — Distance associée à une norme
Soit (E, N) un sous-espace vectoriel normé. On appelle distance associée à N l'application d_N de E^2 dans $\mathbb{R}_+$ définie par : $\forall (x, y) \in E^2, d_N(x, y) = N(x - y)$.

Proposition — La distance associée à une norme est une distance
Soit (E, N) un espace vectoriel normé, d_N la distance associée à N. Alors d_N est une distance sur E.

Démonstration

(i) Soit $(x, y) \in E^2$. Par axiome de séparation :

$$d_N(x, y) = 0 \iff N(x - y) = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y;$$

(ii) Soit $(x, y) \in E^2$. Par absolue homogénéité de la norme :

$$\begin{aligned} d_N(x, y) = N(x - y) &= N((-1) \cdot (y - x)) = |-1| \times N(y - x) \\ &= 1 \times N(y - x) = N(y - x) = d_N(y, x); \end{aligned}$$

(iii) Soit $(x, y, z) \in E^3$. Par sous-additivité de la norme :

$$\begin{aligned} & d_N(x, z) = N(x - z) = N(x - y + y - z) \\ & \qquad = N((x - y) + (y - z)) \leqslant N(x - y) + N(y - z) \\ \iff \quad & d_N(x, z) \leqslant d_N(x - y) + d_N(y - z). \end{aligned}$$

Définition — Distance d'un point à une partie
Soit (X, d) un espace métrique, A une partie non vide de X et $x \in X$. On définit la distance de x à A par : $d(x, A) = \inf(\{\delta \in \mathbb{R}_+ | \exists y \in X, d(x, y) = \delta\})$.

L'existence de la $d(x, A)$ est assurée par la propriété de la borne inférieure sur $\mathbb{R}$ et le fait que A est non vide.

Définition — Boules et sphères
Soit (X, d) un espace métrique, $a \in X$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$. On définit les ensembles suivants :

$\longrightarrow$ boule ouverte de centre a et de rayon r : $B(a, r) = \{x \in X | d(a, x) < r\}$;

$\longrightarrow$ boule fermée de centre a et de rayon r : $\overline{B}(a, r) = \{x \in X | d(a, x) \leqslant r\}$;

$\longrightarrow$ sphère de centre a et de rayon r : $S(a, r) = \{x \in X | d(a, x) = r\}$.

Définition — Partie bornée
Soit (X, d) un espace métrique, A une partie de X. On dit que A est bornée lorsqu'il existe une boule qui la contient, ou plus formellement, si l'assertion suivante est vraie :

$$\exists (a, r) \in X \times \mathbb{R}_+^*, \forall x \in A, d(a, x) < r.$$

Proposition — Caractérisations d'une partie bornée
Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A est bornée : $\exists (a, r) \in X \times \mathbb{R}_+^*, \forall x \in A, d(a, x) < r$;

(ii) $\{\delta \in \mathbb{R} + | \exists (x, y) \in A^2, d(x, y) = \delta\}$ est une partie bornée de R_+ ;

(iii) $\forall a \in X, \exists r \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in A, d(a, x) < r$.

Démonstration

(i) $\implies$ (ii)

Soit $(a,r) \in X \times \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x \in A$, $d(a,x) < r$. Pour tout $(x,y) \in A^2$, par symétrie de la distance et inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} & d(x,y) \leqslant d(x,a) + d(a,y) \\ \iff & d(x,y) \leqslant d(a,x) + d(a,y) \leq 2r. \end{aligned}$$

Donc $\{\delta \in \mathbb{R}+ | \exists (x,y) \in A^2, d(x,y) = \delta\}$ est une partie bornée de R_+.

(ii) $\implies$ (iii)

Si $\{\delta \in \mathbb{R}+ | \exists (x,y) \in A^2, d(x,y) = \delta\}$ est une partie bornée de R_+, alors il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $(x,y) \in A^2$, $d(x,y) \leqslant M$.

Si A est vide alors (iii) est vraie par principe du tiers exclu car sa négation est fausse.

Supposons alors que A est non vide. Soit $y \in a$. Pour tout $(a,x) \in X \times A$:

$$d(a,x) \leqslant d(a,y) + d(y,x) \leqslant d(a,y) + M.$$

Ainsi, en notant $r = d(a,y) + M + 1$, on a $A \subset B(a,r)$.

Donc (iii) est vraie.

(iii) $\implies$ (i)

Si (iii) est vraie, alors puisque X est non vide, (i) est vraie.

Proposition — Caractérisation d'une partie bornée dans un espace vectoriel normé

Soit (E,N) un espace vectoriel normé et $A \subset E$.

$$\exists (a,r) \in E \times \mathbb{R}_+^*, \forall x \in A, d_N(a,x) < r \iff \exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in A, N(x) \leqslant M.$$

Démonstration

$\boxed{\implies}$ Supposons qu'il existe $(a,r) \in E \times \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x \in A$, $d_N(a,x) < r$.

Pour tout $x \in A$, par homogénéité et sous-additivité de la norme :

$$\begin{aligned} d_N(a,x) < r & \iff N(a-x) < r \\ & \iff N(x-a) + N(a) < r + N(a) \\ & \implies N(x) < r + N(a) \end{aligned}$$

$\boxed{\impliedby}$ Supposons qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in A$, $N(x) \leqslant M$.

Pour tout $x \in A$:

$$N(x - 0_E) = N(x) < M + 1 \iff x \in B(0_E, M+1).$$

Donc $A \subset B(0_E, M+1)$. A est donc bornée.

Définition — Application bornée

Soit (X,d) un espace métrique, une application à valeurs dans X est dite bornée lorsque son image est une partie bornée de X.

C Convexité dans les espaces vectoriels normés

Définition — Segment
Pour tout $(a, b) \in E^2$, on appelle segment d'extrémités a et b l'ensemble noté $[a, b]$ défini par :

$$[a, b] = \{m \in E | \exists t \in [0, 1], m = (1 - t) \cdot a + t \cdot b\}.$$

Définition — Partie convexe
Une partie C non vide de E est dite convexe lorsque pour tout $(a, b) \in C^2$, $[a, b] \subset C$, ou plus formellement, lorsque l'assertion suivante est vraie :

$$\forall (a, b) \in C^2, \forall t \in [0, 1], (1 - t) \cdot a + t \cdot b \in C.$$

Proposition — Convexité et symétrie centrale des boules dans un espace vectoriel normé
Soit (E, N) un espace vectoriel normé, toute boule associée à la distance d_N est symétrique par rapport à son centre et convexe ; c'est-à-dire, pour tout $(c, r) \in E \times \mathbb{R}_+^*$:

(i) $\forall u \in B(c, r), c - (u - c) = 2 \cdot c - u \in B(c, r)$

(ii) $\forall (a, b) \in B(c, r)^2, \forall t \in [0, 1], (1 - t) \cdot a + t \cdot b \in B(c, r)$

Démonstration

(i) Soit $u \in B(c, r)$. Alors :

$$\begin{aligned} & d_N(c, 2 \cdot c - u) = N(c - (2 \cdot c - u) = N(c - u) \\ \iff & d_N(c, 2 \cdot c - u) = d_N(c, u) \end{aligned}$$

Ainsi, $d_N(c, 2 \cdot c - u) \leqslant r$.
Ce faisant, $2 \cdot c - u \in B(c, r)$. Donc $B(c, r)$ est symétrique par rapport à son centre c.

(ii) Soit $(a, b) \in B(c, r)^2$ et $t \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} & d_N(c, (1 - t) \cdot a + t \cdot b) = N(c - ((1 - t) \cdot a + t \cdot b)) \\ & \qquad = N((1 - t) \cdot (c - a) + t \cdot (c - b)) \\ \implies & d_N(c, (1 - t) \cdot a + t \cdot b) \leqslant (1 - t) \times N(c - a) + t \times N(c - b) \\ \implies & d_N(c, (1 - t) \cdot a + t \cdot b) < r \end{aligned}$$ [1]

Ainsi, $(1 - t) \cdot a + t \cdot b \in B(c, r)$.
Donc $B(c, r)$ est convexe.

D Suites à valeurs dans un espace vectoriel normé

Définition — Convergence d'une suite à valeurs vectorielles
Soit (E, N) un espace vectoriel normé, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ et $l \in E$. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente

1. $(1 - t)$ et t ne pouvant être simultanément nuls, on a : $(1 - t) \times N(c - a) < (1 - t) \times r$ ou $t \times N(c - a) < t \times r$.

vers l pour la norme N lorsque la suite numérique $(d_N(u_n, l))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite nulle ; ou plus formellement, lorsque l'assertion suivante est vraie :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant n_0) \implies d_N(u_n, l) < \varepsilon$$

On dit alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente lorsqu'il existe un vecteur $l \in E$ tel que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers l, et divergente lorsqu'elle n'est pas convergente.

Proposition — Unicité de la limite pour une même norme des suite à valeurs vectorielles convergentes
Soit (E, N) un espace vectoriel normé, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ et $(l, l') \in E^2$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l et l' pour la norme N, alors $l = l'$.

Démonstration
Avec l'inégalité triangulaire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, d_N(l, l') \leqslant d_N(l, u_n) + d_N(u_n, l').$$

Alors, comme $(d_N(l, u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(d_N(u_n, l'))_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites à valeurs réelles, avec la symétrie de la distance :

$$\lim_{n\to\infty} d_N(l - l') = \lim_{n\to\infty} d_N(u_n, l) + \lim_{n\to\infty} d_N(u_n, l') = 0.$$

Ainsi $d_N(l - l') = 0$.
Donc $l = l'$ par axiome de séparation de la distance.

Proposition — Bornitude des suites à valeurs vectorielles convergentes
Toute suite à valeurs vectorielles convergentes est bornée.

Démonstration
Soit (E, N) un espace vectoriel normé, $l \in E$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers l.
Soit $r \in R_+^*$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant n_0$ alors $d_N(u_n, l) < r$.
On pose $H = \{d \in R_+ | \exists n \in [\![0, n_0]\!], d_N(u_n, l) = d\}$, et $M = \max(H \cup \{r\}) + 1$.
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_N(l, u_n) < M$ par symétrie de la distance.
Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Proposition — Caractérisation de la convergence d'une suite à valeurs vectorielles pour la norme produit
Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $((E_i, N_i))_{i\in[\![1,p]\!]}$ une famille finie d'espaces vectoriels normés. On note (E, N) l'espace vectoriel produit muni de sa norme produit associé à la famille $((E_i, N_i))_{i\in[\![1,p]\!]}$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \Big((u_{i,n})_{i\in[\![1,p]\!]}\Big)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$.
Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $(u_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, auquel cas l'égalité suivante est vérifiée :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = (\lim_{n\to\infty})u_{i,n})_{1\leqslant i\leqslant p}.$$

Démonstration

$\boxed{\implies}$ Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite $l = (l_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0$ et $i \in [\![1, p]\!]$.

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant & N(u_{i,n} - l_i) \leqslant N(u_n - l) \\
\Longrightarrow \; & 0 \leqslant \lim_{n\to\infty} N(u_{i,n} - l) \leqslant \lim_{n\to\infty} N(u_n - l) \\
\Longrightarrow \; & \lim_{n\to\infty} N(u_{i,n} - l) = 0
\end{aligned}$$

Donc pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $(u_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l_i.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $(u_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l_i.
Alors :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant & N(u_n - l) \leqslant \sum_{i=1}^{p} N_i(u_{i,n}) \\
\Longrightarrow \; & 0 \leqslant \lim_{n\to\infty} N(u_n - l) \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{p} N_i(u_{i,n}) \\
\Longrightarrow \; & 0 \leqslant \lim_{n\to\infty} N(u_n - l) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \lim_{n\to\infty} N_i(u_{i,n}) \\
\Longrightarrow \; & 0 \leqslant \lim_{n\to\infty} N(u_n - l) \leqslant 0 \\
\Longrightarrow \; & \lim_{n\to\infty} N(u_n - l) = 0
\end{aligned}$$

II Espaces préhilbertiens réels

A Produit scalaire

Définition — Produit scalaire
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle produit scalaire sur E toute forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est-à-dire toute application $\langle\cdot|\cdot\rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$:

- $\longrightarrow$ bilinéaire : $\forall(x, y, z) \in E^3,\ \forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \langle\lambda \cdot x + \mu \cdot y, z\rangle = \lambda \times \langle x, z\rangle + \mu \times \langle y, z\rangle$;
- $\longrightarrow$ absolue homogénéité : $\forall x \in E,\ \forall\lambda \in \mathbb{K},\ N(\lambda \cdot x) = |\lambda| \times N(x)$;
- $\longrightarrow$ sous-additivité : $\forall(x, y) \in E^2,\ N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$.