Étude du Rubik's cube

TIPE

Soeung Raphaël,
candidat n°10019

Année scolaire 2023-2024

Summary

1. Modélisation
   - Deux paradigmes : les états et les mélanges
   - Dévissage du groupe des mélanges du Rubik's cube
2. Cardinal de l'ensemble des états possibles du Rubik's cube
3. Merci pour votre attention

Vocabulaire

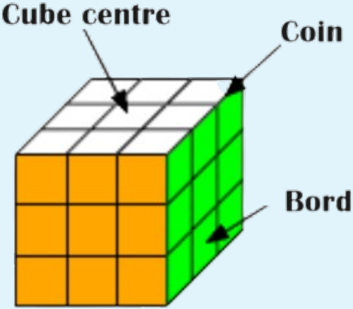

Figure 1 – Image éditée à partir d'une illustration de l'article de Matthieu Barreau.

Sur les états du Rubik's cube

- X : ensemble des coins ;
- Y : ensemble des bords ;
- E_X : ensemble des états des coins ;
- E_Y : ensemble des états des bords ;
- $E = E_X \times E_Y$: ensemble des états du Rubik's cube.

Dénombrement :

- $|E_X| = 8! \times 3^8$;
- $|E_Y| = 12! \times 2^{12}$;
- $|E| = |E_X| \times |E_Y| = 5.19024039 \times 10^{20}$.

Sur les mélanges du Rubik's cube

- $(G_X, \circ)$: groupe des mélanges des coins ;
- $(G_Y, \circ)$: groupe des mélanges des bords ;
- $(G, \circ)$: groupe des mélanges du Rubik's cube, produit direct de G_X et G_Y.
- (π_X, π_Y) : on définit pour tout $g \in G$, $\pi_X(g) \in G_X$ et $\pi_Y(g) \in G_Y$ par $g = (\pi_X(g), \pi_Y(g))$.

G et E sont en bijection.

π_X et π_Y sont des morphismes de groupe.

1. Modélisation
   - Deux paradigmes : les états et les mélanges
   - Dévissage du groupe des mélanges du Rubik's cube
2. Cardinal de l'ensemble des états possibles du Rubik's cube
3. Merci pour votre attention

Le groupe des mélanges des coins

- $(Perm_X, \circ)$: groupe des permutations de X ;
- $(Rot_X, \circ)$: groupe des rotations des coins ;

Il existe un morphisme $g : G_X \longrightarrow Perm_X$ surjectif.

$$Rot_X = \mathrm{Ker}(g).$$

$$Rot_X \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^X.$$

$$\forall g \in G_X, \exists!(\rho, \sigma) \in Rot_X \times Perm_X, g = \rho \circ \sigma.$$

Le groupe des mélanges des bords

- $(Perm_Y, \circ)$: groupe des permutations de Y ;
- $(Rot_Y, \circ)$: groupe des retournements des bords ;

Il existe un morphisme $g : G_Y \longrightarrow Perm_Y$ surjectif.

$$Rot_Y = \mathrm{Ker}(g).$$

$$Rot_Y \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^Y.$$

$$\forall g \in G_Y, \exists!(\rho, \sigma) \in Rot_Y \times Perm_Y, g = \rho \circ \sigma.$$

1. Modélisation
2. Cardinal de l'ensemble des états possibles du Rubik's cube
   - Notion de rotation totale
   - Signature de la permutation des faces des bords
   - Le groupe de Rubik
3. Merci pour votre attention

Rotation totale des coins

Pour tout $g = \rho \circ \sigma \in G_X$ ($\rho \in Rot_X$ et $\sigma \in Perm_X$), il existe, avec l'isomorphisme ϕ de G_X à $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^X$, $\tilde{\rho} \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^X$ tel que $\tilde{\rho} = \phi(\rho)$.

On définit alors rt_X la rotation totale du mélange des coins g par :

$$rt_X(g) = \sum_{x \in X} \tilde{g}(x).$$

$rt_X : G_X \longrightarrow (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ est un morphisme de groupe.

Rotation totale des bords

Pour tout $g = \rho \circ \sigma \in G_Y$ ($\rho \in Rot_Y$ et $\sigma \in Perm_Y$), il existe, avec l'isomorphisme ϕ de G_Y à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^Y$, $\tilde{\rho} \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^Y$ tel que $\tilde{\rho} = \phi(\rho)$.

On définit alors rt_Y la rotation totale du mélange des bords g par :

$$rt_Y(g) = \sum_{y \in Y} \tilde{g}(y).$$

$rt_X : G_Y \longrightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est un morphisme de groupe.

- F : ensemble des faces visibles des bords ;
- $(Perm_F, \circ)$: groupe des permutations de F.

Il existe un morphisme de groupe $\sigma_F : G_Y \longrightarrow Perm_F$.

Signature de la permutation des faces des bords pour un mélange des bords g

Théorème 1.

Pour tout $g \in G_Y$, on a :

$$(-1)^{rt_Y(g)} = \mathrm{sign}(\sigma_F(g)).$$

Mouvements élémentaires du Rubik's cube

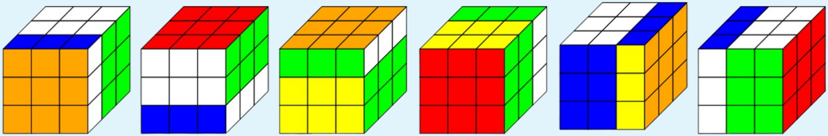

Figure 2 – Image éditée à partir d'une illustration de l'article de Matthieu Barreau

Le groupe de Rubik

- *Rub* : sous-groupe de G engendré par les 6 mouvements élémentaires, appelé groupe de Rubik ;
- ε : on définit $\varepsilon : G \longrightarrow \{-1, 1\}$ par :

$$\forall g \in G, \varepsilon(g) = \mathrm{sign}(\sigma_X \circ \pi_X(g)) \times \mathrm{sign}(\sigma_Y \circ \pi_Y(g))\,;$$

- rt : on définit $rt : G \longrightarrow (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \{-1, 1\}$ par :

$$\forall g \in G, rt(g) = (rt_X \circ \pi_X(g), rt_Y \circ \pi_Y(g), \varepsilon(g)).$$

- H : $H = \mathrm{Ker}(rt)$

Le groupe du Rubik comme noyau de *rt*

Théorème 2.
$Rub = H$

rt étant surjectif, H est d'indice 12 dans G.

Donc Rub est d'indice 12 dans G.

Ce faisant :

$$|Rub| = \frac{1}{12} \times |G|.$$

1. Modélisation
2. Cardinal de l'ensemble des états possibles du Rubik's cube
3. Merci pour votre attention