Modélisation épidémique

TIPE 2022-2023

Soeung Raphaël

Année scolaire 2022-2023

Introduction

Figure 1 – Manille, capitale des Philippines

Plan

1. Modèle SIS homogène
2. Modèle SIS hétérogène

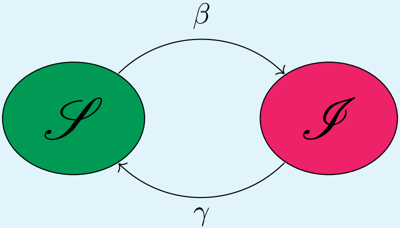
1 Modèle SIS homogène
Définition du modèle
Étude qualitative
Résolution numérique

2 Modèle SIS hétérogène

1 Modèle SIS homogène
Définition du modèle
Étude qualitative
Résolution numérique

2 Modèle SIS hétérogène

Graphe représentatif du modèle SIS homogène



Notations

$\mathscr{S}$: compartiment des individus sains,
$\mathscr{I}$: compartiment des individus infectieux,
β : taux d'infection,
γ : taux de guérison.

Équation différentielle non linéaire

On note I la proportion d'individus de la population totale qui sont dans le compartiment $\mathscr{I}$, S celle de ceux qui sont dans le compartiment $\mathscr{S}$. On suppose alors que l'équation différentielle non linéaire suivante décrit le modèle :

$$\begin{aligned} & I'(t) = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \\ \overset{S=(1-I)}{\Longleftrightarrow} \quad & I'(t) = \beta(1 - I(t))I(t) - \gamma I(t) \qquad (*). \end{aligned}$$

1 Modèle SIS homogène
Définition du modèle
Étude qualitative
Résolution numérique

2 Modèle SIS hétérogène

Contexte

On suppose $\beta > 0$ et $\gamma > 0$ et on note le champ de vecteurs $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(y) = \beta(1-y)y - \gamma y.$$

Théorème

Pour toute condition initiale $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times [0,1]$, l'équation différentielle $(*)$ vérifie :

(i) il existe une unique solution globale, notée I,

(ii) $\forall t \in \mathbb{R}, I(t) \in [0,1]$,

(iii) I est monotone,

(iv) si $R_0 \leqslant 1$, alors I est de limite nulle en $+\infty$,

(v) si $R_0 > 1$, alors I est de limite $1 - \frac{1}{R_0}$ en $+\infty$.

Outils mathématiques

Outils mathématiques

Théorème de Cauchy-Lipschitz,

Lemme des bouts ou de sortie des compacts.

1. Modèle SIS homogène
   - Définition du modèle
   - Étude qualitative
   - Résolution numérique

2. Modèle SIS hétérogène

Résolution numérique
Cas $\gamma > \beta$

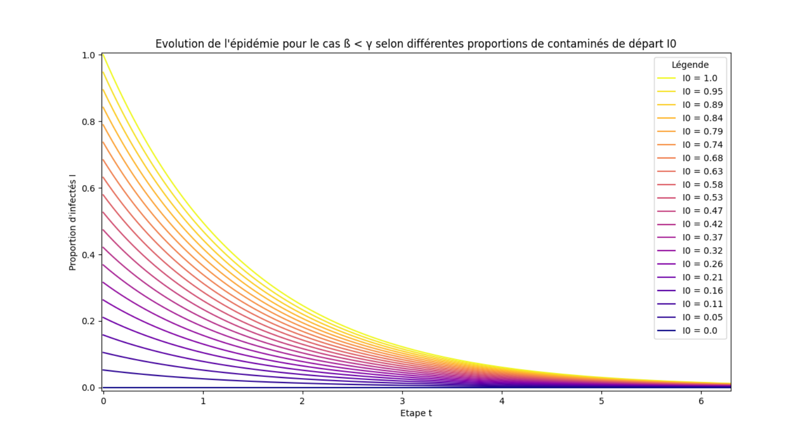


Figure 2 – Évolution de l'épidémie pour le cas $\gamma > \beta$

Résolution numérique

Cas $\gamma = \beta$

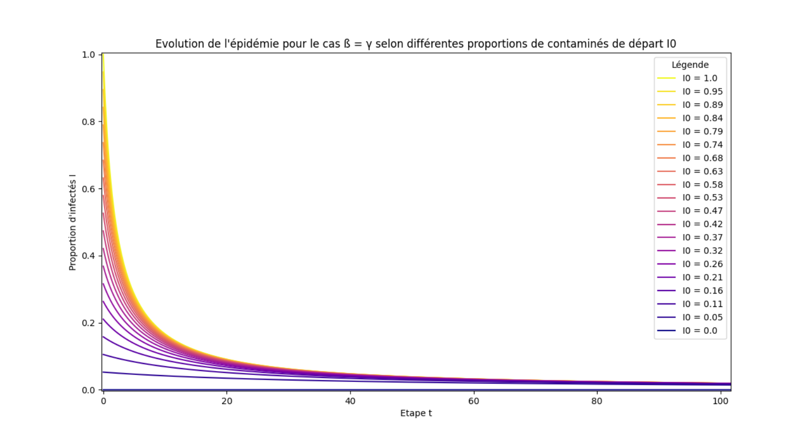


Figure 3 – Évolution de l'épidémie pour le cas $\gamma = \beta$

Résolution numérique

Cas $\gamma < \beta$

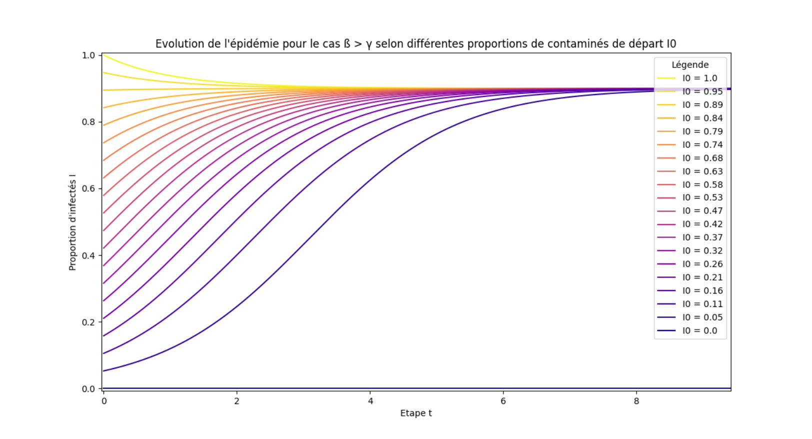


Figure 4 – Évolution de l'épidémie pour le cas $\gamma < \beta$

1. Modèle SIS homogène
2. Modèle SIS hétérogène
   - Définition du modèle
   - Matrice de la génération suivante et R_0
   - Étude de cas

Définition du modèle

Système d'équations différentielles

Pour une population divisée en $n \in \mathbb{N}^*$ classes, le modèle est décrit par un système de n équations différentielles défini par :

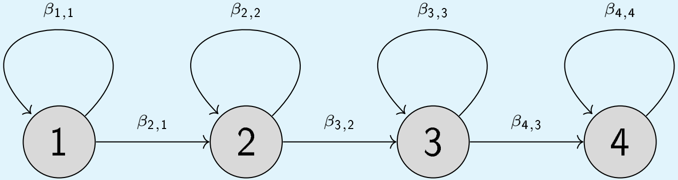
$$\forall k \in [\![1, n]\!], \frac{dI_k}{dt} = (1 - I_k) \sum_{l=1}^{n} \beta_{k,l}\gamma_l - \gamma_k I_k.$$

Matrice de la génération suivante et R_0

Définition — Matrice de la génération suivante
Pour un modèle à $n \in \mathbb{N}^*$ classes notées de 1 à n, on appelle matrice de la génération suivante la matrice carrée de taille n dont le coefficient d'indice $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ vaut $\frac{k(i,j)}{\gamma_j}$.

Définition — $\mathbf{R_0}$
Le R_0 est défini comme étant égal au rayon spectral de la matrice de la génération suivante.

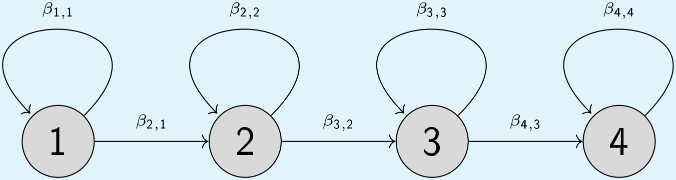
Étude de cas — Graphe



Étude de cas — Matrice de la génération suivante

$$\begin{bmatrix} \frac{\beta_{1,1}}{\gamma_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta_{2,1}}{\gamma_1} & \frac{\beta_{2,2}}{\gamma_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta_{2,3}}{\gamma_2} & \frac{\beta_{3,3}}{\gamma_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta_{4,3}}{\gamma_3} & \frac{\beta_{4,4}}{\gamma_4} \end{bmatrix}$$

Étude de cas — Graphe pour le premier cas

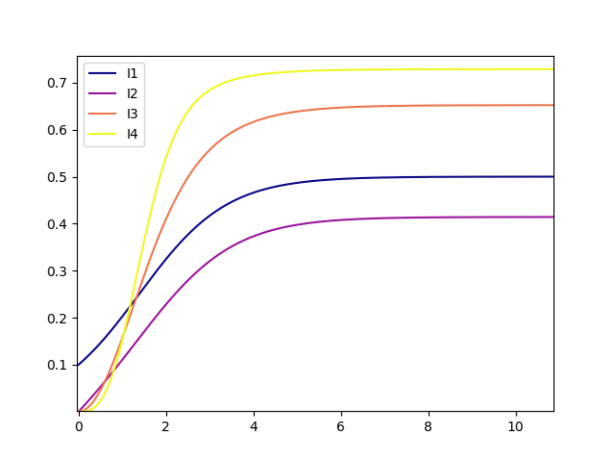


$R_0 > 1$ $R_0 \leqslant 1$ $R_0 \leqslant 1$ $R_0 \leqslant 1$

Étude de cas — Premier cas

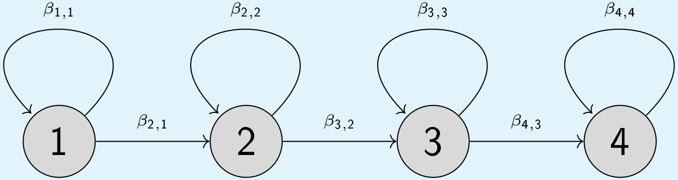
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 4 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Étude de cas — Premier cas



$$R_0 = 2$$

Étude de cas — Graphe pour le deuxième cas

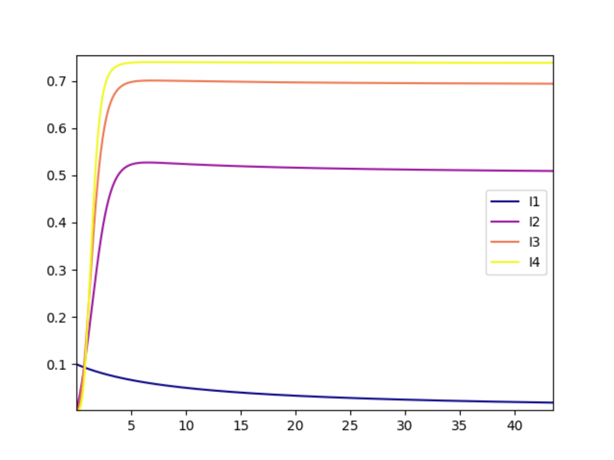


$R_0 \leqslant 1$ $R_0 > 1$ $R_0 \leqslant 1$ $R_0 \leqslant 1$

Étude de cas — Deuxième cas

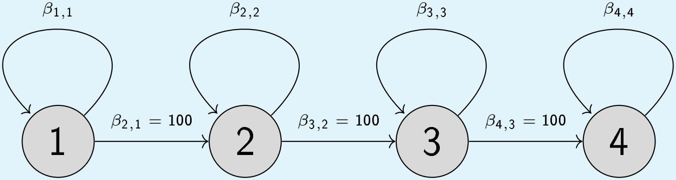
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Étude de cas — Deuxième cas



$$R_0 = 2$$

Étude de cas — Graphe pour le troisième cas

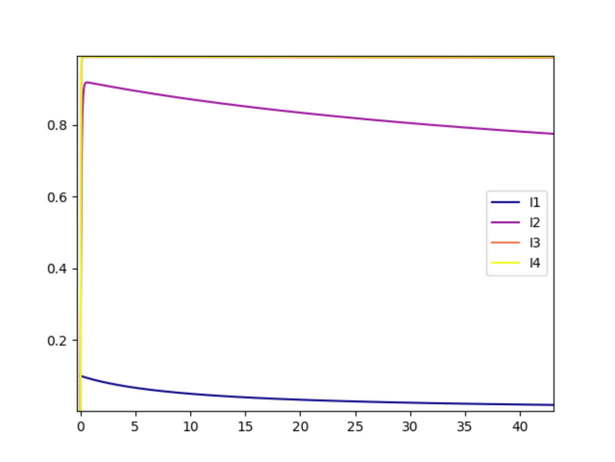


$R_0 \leqslant 1$ $\quad$ $R_0 > 1$ $\quad$ $R_0 \leqslant 1$ $\quad$ $R_0 \leqslant 1$

Étude de cas — Troisième cas

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 100 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 1 \end{bmatrix}$$

Étude de cas — Troisième cas



$$R_0 = 2$$