TD 11 : Déterminants

christina.boura@uvsq.fr

30 novembre 2020

1 Matrices inversibles

1. Relier entre elles chaque matrice avec son inverse.

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 6 & 4\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad \frac{1}{14}\begin{pmatrix}4 & -6\\ 1 & 2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}2 & 6\\ -1 & 4\end{pmatrix}, \quad -\frac{1}{8}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -6 & 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}-1 & 4 & -2\\ 2 & -5 & 3\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

- $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 6 & 4\end{pmatrix}$ est l'inverse de $-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -6 & 1\end{pmatrix}$.
- $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ est son propre inverse.
- $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ est son propre inverse également.
- $\frac{1}{14}\begin{pmatrix}4 & -6\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ est l'inverse de $\begin{pmatrix}2 & 6\\ -1 & 4\end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix}$ est l'inverse de $\begin{pmatrix}-1 & 4 & -2\\ 2 & -5 & 3\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$.
- $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ est l'inverse de $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

2. En vous servant de l'exercice précédent, résolvez le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{llll} x & & +2z & = 3\\ x & +y & -z & = -1\\ x & +2y & -3z & = 0\end{array}\right.$$

Ce système peut s'écrire sous forme matricielle comme $A \cdot X = B$ avec

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix}3\\ -1\\ 0\end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}.$$

On a que

$$A \cdot X = B \Rightarrow (A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B.$$

La solution est donc donnée en multipliant A^{-1} par B :

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-4\cdot 3 \\ 2\cdot 3+5 \\ 3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 11 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

On conclut alors que $x = -7, y = 11$ et $z = 5$.

3. Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont inversibles ?

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a que $\det(A) = 1 \neq 0$ la matrice est donc bien inversible.
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ On voit directement que $\det(A) = 0$ car la 3ième colonne est nulle. La matrice n'est donc pas inversible.
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A'}$. On a donc que $\det(A) = \det(A') = 0$. La matrice n'est pas inversible.
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 8 \\ -3 & 0 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A'}$. On a donc que $\det(A) = \det(A') = 0$. La matrice n'est pas inversible.
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 0 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}}_{A'} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A''}$.
  On a donc que $\det(A) = \det(A') = \det(A'') = 0$. La matrice n'est donc pas inversible.

2 Calcul de déterminants

Calculer les déterminants des matrices suivantes.

1. $\det \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = 10 \cdot 1 + 3 \cdot 4 = 22.$
2. $\det \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 = 23.$
3. $\det \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = 0 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = -2.$
4.

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 4 & 4 & -1 \\ -4 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & -2 \end{pmatrix} &= -\det \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} - 2\det \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -(-4 \cdot 7 - 3) - 2(4 + 16) \\ &= -(-31) - 40 = -9. \end{aligned}$$

5. $\det\begin{pmatrix}1&3&-3&1\\10&-2&1&0\\1&-1&0&1\\2&3&-4&1\end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix}10&-2&1\\1&-1&0\\2&3&-4\end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix}1&3&-3\\10&-2&1\\2&3&-4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1&3&-3\\10&-2&1\\1&-1&0\end{pmatrix}$

On calcule chacun des determinants indépendamment.

- $\det\begin{pmatrix}10&-2&1\\1&-1&0\\2&3&-4\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix} - 4\det\begin{pmatrix}10&-2\\1&-1\end{pmatrix} = (3+2)-4(-10+2) = 5+32 = 37.$
- $\det\begin{pmatrix}1&3&-3\\10&-2&1\\2&3&-4\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}-2&1\\3&-4\end{pmatrix} - 10\det\begin{pmatrix}3&-3\\3&-4\end{pmatrix} + 2\det\begin{pmatrix}3&-3\\-2&1\end{pmatrix} = 5-10\cdot(-3)+$ $2\cdot(-3) = 29.$
- $\det\begin{pmatrix}1&3&-3\\10&-2&1\\1&-1&0\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}3&-3\\-2&1\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}1&-3\\10&1\end{pmatrix} = -3+31 = 28.$

On conlut alors que $\det\begin{pmatrix}1&3&-3&1\\10&-2&1&0\\1&-1&0&1\\2&3&-4&1\end{pmatrix} = -37-29+28 = -38.$

6.

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}0&3&0&1&-1\\-4&0&1&0&1\\0&0&1&-1&0\\2&0&-2&3&0\\0&-1&1&0&0\end{pmatrix} &= -\det\begin{pmatrix}-4&0&1&0\\0&0&1&-1\\2&0&-2&3\\0&-1&1&0\end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix}0&3&0&1\\0&0&1&-1\\2&0&-2&3\\0&-1&1&0\end{pmatrix}\\ &= \det\begin{pmatrix}-4&1&0\\0&1&-1\\2&-2&3\end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix}3&0&1\\0&1&-1\\-1&1&0\end{pmatrix}\\ &= -4(3-2)+2\cdot(-1)-2[3-(-1)] = -4-2-8 = -14.\end{aligned}$$

7. $\det\begin{pmatrix}10&3&2&1\\0&1&-7&11\\0&0&3&11/7\\0&0&0&-2\end{pmatrix} = 10\cdot 1\cdot 3\cdot(-2) = -60.$

Calculer les déterminants des matrices élémentaires suivantes, où λ est un paramètre

- $\det\begin{pmatrix}1&&&&&\\&1&&&&\\&&\ddots&&&\\&&&\ddots&&\\&&\lambda&&\ddots&\\&&&&&1\end{pmatrix} = 1\cdots 1 = 1.$
- $\det\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&&\lambda&&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix} = 1\cdots 1\cdot\lambda\cdot 1\cdots 1 = \lambda.$

- $\det\begin{pmatrix} 1 &&&&&&& \\ & \ddots &&&&&& \\ && 1 &&&&& \\ &&& 0 & 1 &&& \\ &&& 1 & 0 &&& \\ &&&&& 1 && \\ &&&&&& \ddots & \\ &&&&&&& 1 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 &&&&&&& \\ & \ddots &&&&&& \\ && 1 &&&&& \\ &&& 1 & 0 &&& \\ &&& 0 & 1 &&& \\ &&&&& 1 && \\ &&&&&& \ddots & \\ &&&&&&& 1 \end{pmatrix} = -1.$

3 Algorithme de Gauss

À l'aide de l'algorithme de Gauss, calculer les déterminants des matrices suivantes.

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}}_{A'}$. On a donc que $\det(A) = \det(A') = 16$.

- $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftarrow aL_2]{L_1 \leftarrow cL_1} \underbrace{\begin{pmatrix} ac & bc \\ ac & ad \end{pmatrix}}_{A'} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \underbrace{\begin{pmatrix} ac & bc \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix}}_{A''}$.

  On a donc que $\det(A'') = \det(A') = ac\det(A)$. Par conséquent,

$$\det(A) = \frac{1}{ac}\det(A'') = \frac{1}{ac}[ac(ad - bc)] = ad - bc.$$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 + L_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{A'}$.

  On a donc que $\det(A) = \det(A') = 1 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot 3 = -6$.

-

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -9 & -9 & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \leftarrow 2L_4]{L_3 \leftarrow 9L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 18 & -9 & 27 \\ 0 & -18 & -18 & -22 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 + L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 18 & -9 & 27 \\ 0 & 0 & -27 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 18 & -9 & 27 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -27 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 \leftrightarrow L_4 + 9L_3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 18 & -9 & 27 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 86 \end{pmatrix}}_{A'}.$$

  On a que

$$\det(A') = -2 \cdot 9\det(A) \Rightarrow \det(A) = -\frac{1}{2 \cdot 9}\det(A') = -\frac{1}{2 \cdot 9}(18 \cdot 3 \cdot 86) \Rightarrow \det(A) = -258.$$

-

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & 0 & -38 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 + 4L_2]{L_5 \leftarrow L_5 - L_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & -10 & 0 & -34 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & -10 & 0 & -34 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_4} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -10 & 0 & -34 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_4} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -10 & 0 & -34 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 + 3L_3} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -10 & 0 & -34 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_5 \leftarrow L_5 + 1/3 L_4} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -10 & 0 & -34 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}}_{A'}.$$

On a que

$$\det(A') = -\det(A) \Rightarrow \det(A) = -\det(A') = 10.$$

4 Décomposition LU

Soit A la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Par la méthode du pivot de Gauß, mettre A sous la forme $L_0 \dots L_i U = A$, où U est une matrice triangulaire supérieure et $L_0, \dots, L_i$ sont des matrices élémentaires.

Par une suite de multiplications, donner une écriture $LU = A$, où L est une matrice triangulaire inférieure et U est une matrice triangulaire supérieure.

Calculer les déterminants de L, U et A et comparer les résultats.

5 Matrices de permutation

Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont des matrices de permutation ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer les déterminants des matrices ci-dessus.

Uniquement pour les matrices de permutation, calculer la permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ qui correspond à la multiplication (à gauche) par ces matrices, et sa décomposition en cycles.

En vous aidant avec ce que vous savez sur les permutations, calculez les inverses des matrices de permutation.

Récrivez les matrices de permutation comme un produit de matrices correspondant à leur décomposition en cycles.