

Arbres H-équilibrés / arbres AVL

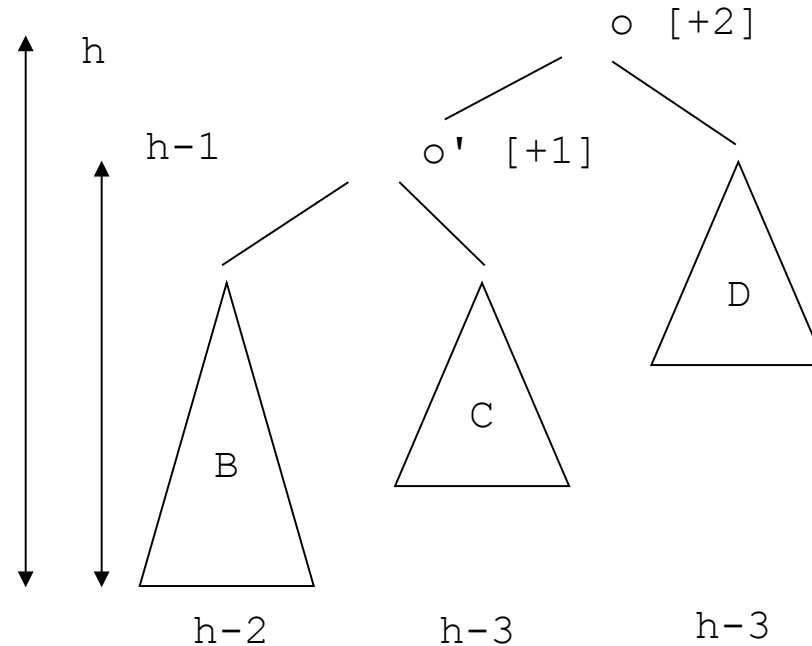
■ Définitions

- déséquilibre(a) = $h(g(a)) - h(d(a))$
- un arbre a est **H-équilibré** si pour tous ses sous-arbres b, on a :
 - déséquilibre(b) $\in \{-1, 0, 1\}$
- un **arbre AVL** est un arbre de recherche qui est H-équilibré
 - les propriétés et les opérations définies sur les arbres de recherche peuvent s'appliquer aux arbres AVL

Opérations de rotation

- Le problème est d'essayer de rééquilibrer un arbre déséquilibré afin de le ramener à un arbre H-équilibré.
- Cas d'un déséquilibre +2
 - on suppose que les sous-arbres droit et gauche sont H-équilibrés
 - hauteur du sous-arbre gauche supérieure de 2 à la hauteur du sous-arbre droit
 - opération à pratiquer dépend du déséquilibre du sous-arbre gauche qui peut être +1, 0, -1

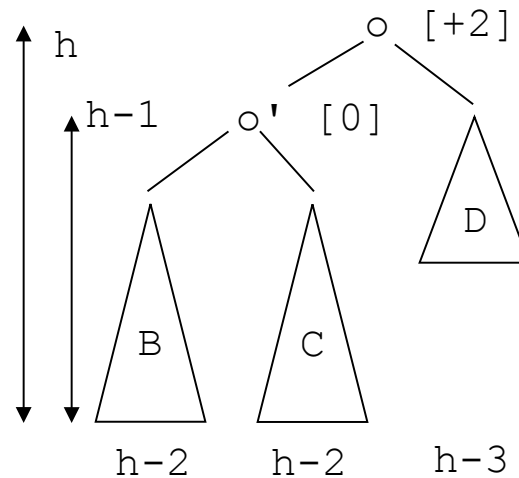
Déséquilibre +1 sur le fils gauche



■ rotation à droite :

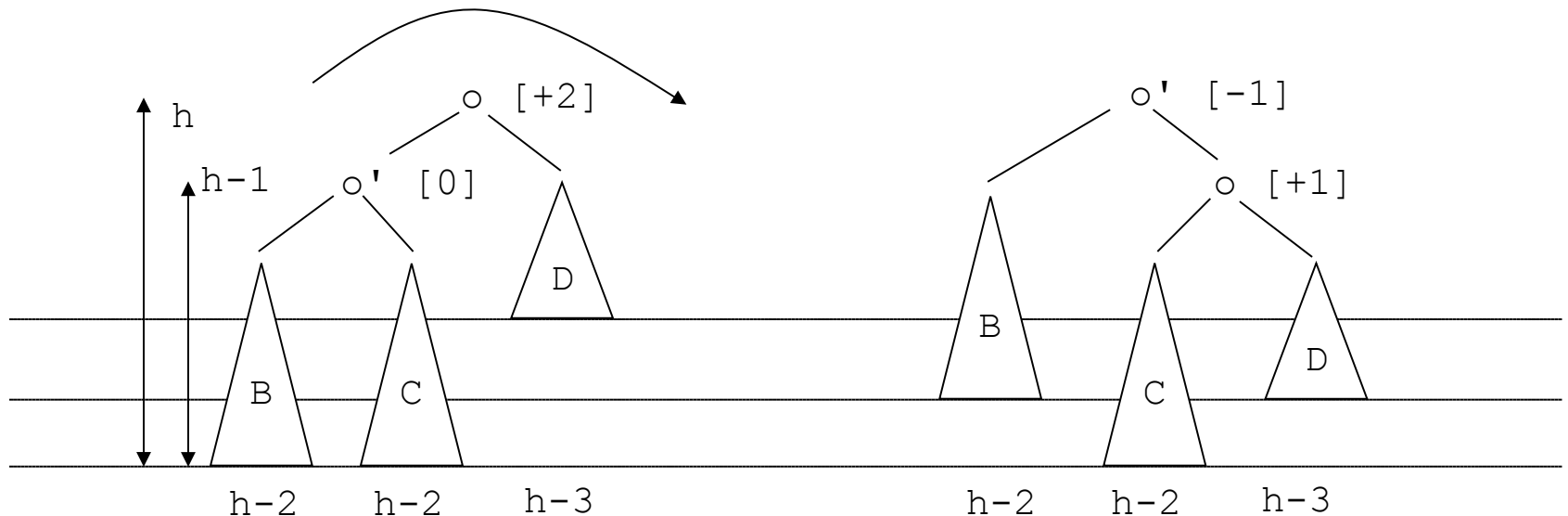
- \circ' devient la racine de l'arbre
- Le fils droit de \circ' devient le fils gauche de \circ
- \circ devient le fils droit de \circ'

Déséquilibre 0 sur le fils gauche



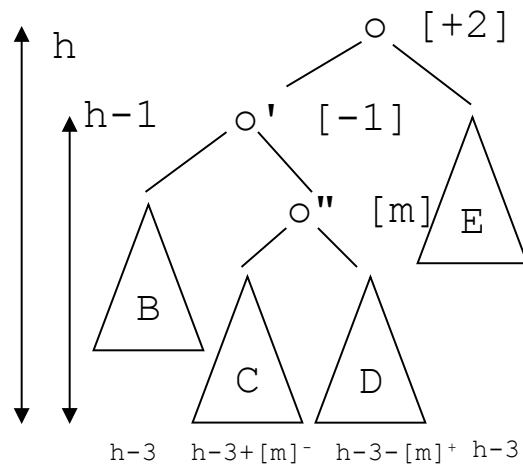
- rotation à droite :
 - o' devient la racine de l'arbre
 - Le fils droit de o' devient le fils gauche de o
 - o devient le fils droit de o'

Déséquilibre 0 sur le fils gauche



- Si l'arbre A est un arbre binaire de recherche, le résultat est un arbre binaire de recherche
 - le déséquilibre de l'arbre résultant est de -1
 - arbre H-équilibré dont la hauteur est identique

Déséquilibre -1 sur le fils gauche



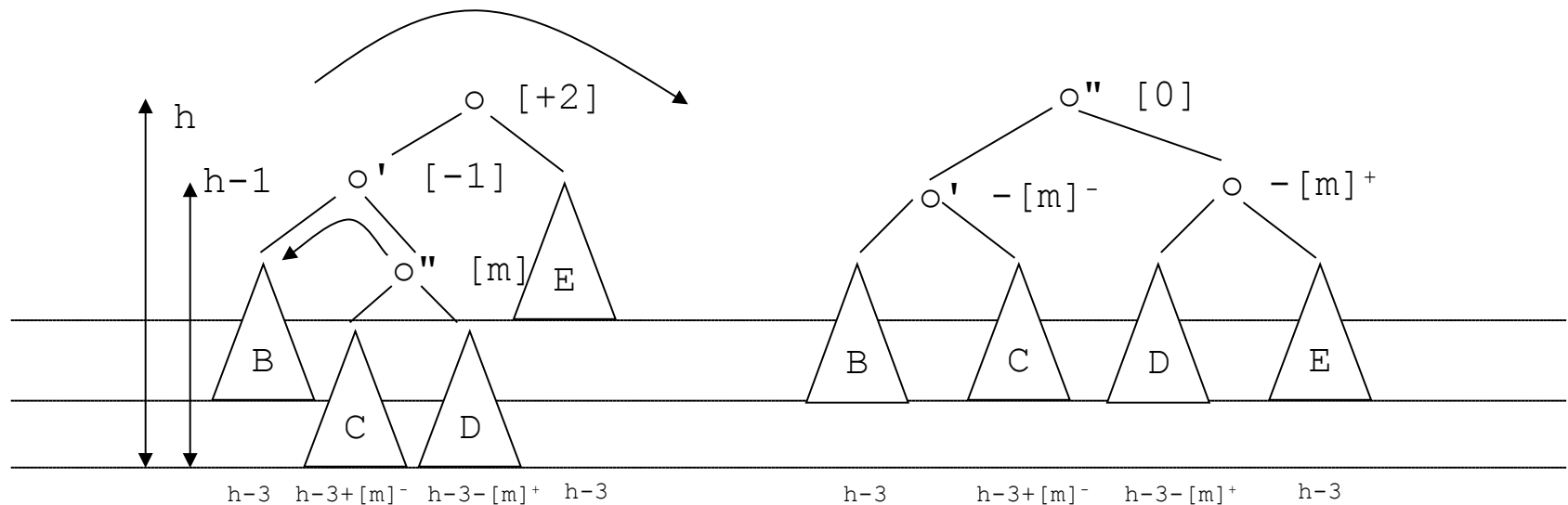
Avec m le déséquilibre de o''

▶ $[m]^+ = \max(0, m)$

▶ $[m]^- = \min(0, m)$

- rotation gauche-droite
 - Rotation à gauche sur le fils gauche
 - Rotation à droite sur la racine

Déséquilibre -1 sur le fils gauche



- Si l'arbre A est un arbre binaire de recherche, le résultat est un arbre binaire de recherche
 - le déséquilibre de l'arbre résultant est de 0
 - arbre H-équilibré dont la hauteur est diminuée d'1

Opérations de rééquilibrage

arbre origine	opération	résultat	hauteur
	rotation droite		diminution
	rotation droite		identique
	rotation gauche droite		diminution
	rotation gauche droite		diminution
	rotation gauche droite		diminution
	rotation gauche		diminution
	rotation gauche		identique
	rotation droite gauche		diminution
	rotation droite gauche		diminution
	rotation droite gauche		diminution

Opération d'ajout

■ Principe :

- ajout du nœud par l'opération ajouter-f
- rééquilibrage de l'arbre en partant de la feuille et en remontant vers la racine

■ Complexité :

- complexité au pire en $O(\log_2 n)$ en nb de comparaisons
- au plus une rotation
- expérimentalement : en moyenne une rotation pour 2 ajouts