Principales méthodes pratiques de calculs de déterminants:

- Si la matrice a une ligne ou une colonne ne contenant que des zéros, alors le déterminant est nul

Ex : $\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = 0$

autres exemples : cf partie 1 du TD, exercice 3.

- Si la matrice est triangulaire (triangulaire inférieure, triangulaire supérieure ou diagonale), le déterminant vaut le produit des éléments diagonaux

Ex : $\det\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 \times 3 \times 2 = 24$

- Si la matrice est une matrice 2*2, on applique la formule

$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$ Ex : $\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 \times 1 - 2 \times (-1) = 1+2 = 3$

- Sinon, on peut :
    - soit appliquer un développement par rapport à une ligne ou une colonne (**choisir dans ce cas celle qui contient le plus de zéros possibles** pour limiter les calculs)

Ex :

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \times (-1)^{1+1} \times \det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{21} \times (-1)^{2+1} \times \det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{31} \times (-1)^{3+1} \times \det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

développement par rapport à la 1ère colonne

autres exemples : cf correction partie 2 du TD

- soit utiliser la méthode du pivot de Gauss pour se ramener au cas d'une matrice triangulaire (méthode à privilégier pour le cas d'une matrice de dimension importante). Dans ce cas **il faut bien veiller à prendre en compte l'impact des opérations effectuées sur le déterminant** :
    - Multiplier une ligne ou une colonne par lambda multiplie le déterminant par lambda
    - Echanger deux lignes multiplie le déterminant par -1
    - Remplacer la ligne L_i par $\lambda\, L_i + \mu\, L_j$ multiplie le déterminant par λ (remarquez bien que la multiplication de L_i par λ a un impact alors que μ n'en a pas)

Ex : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & -3 & -5 \end{pmatrix}$ $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$

$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -13 \end{pmatrix}$ $L_3 \leftarrow 5L_3 + 3L_2$

$\det(A'') = 1 \times 1 \times 5 \det(A)$

et $\det(A'') = 1 \times 5 \times (-13)$

Donc $\det(A) = -13.$

autres exemples : cf correction partie 3 du TD