TD 7-Relations et classes d'équivalence

1-Relations et ensembles

1) R={(a,b):a<b} c A*B
=\{(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(3,4),(3,5),(3,6),(5,6)\}
2) S={(a,b):a<=b}
=R U {(3,3),(5,5)}
3) T={(a,b):a divise b} *a divise b dans Z<=>Ek €Z:b=a*k*
=\{(1,1),(1,4),(1,5),(1,6),(3,3),(3,6),(5,5)\}

R^{-1} est dite la relation récirpoque de R si et seulement si (b,a) € R^{-1} <=>(a,b)€R

1) R^{-1}={(3,1),(4,1),(5,1),(6,1),(4,3),(5,3),(6,3),(6,5)}

2) S^{-1}=R^{-1} U {(3,3),(5,5)]}

3) T^{-1}={(3,1),(4,1),(5,1),(6,1),(3,3),(6,3),(5,5)}

---

1. f : N->N, définie par f(x)=x
G_f:={(x,f(x)} c N*N

Soit R une relation sur A :
R est réfléxive ssi aRa pour tout a€A
R est symétrique ssi aRb=>bRa pour tout a,b€A
R est transitive ssi (aRb) et (bRc) =>aRc pour tout a,b,c€A

G_f:={(0,0),(1,1),(2,2),...} G_f est réfléxive, car pour tout x€N, (x,x)€G_f
G_f est symétrique. Soit (x,y)€G_f. Forcément y=x. Alors (y,x)=(x,x)€G_f
G_f est transitive. Soit (x,y),(y,z)€G_f. Forcément y=x et z=y=x Alors (x,z)=(x,x)€G_f

2. f ; N->N, définie par f(n)=2n
G_f={x,f(x),x€N}={(x,2x),x€N}
Non réfléxive : (1,1)∉G_f
Non symétrique : x=1 : (1,2) €G_f mais (2,1)∉ G_f
Non transitive, car (1,2),(2,4)€G_f mais (1,4)∉ G_f
3. f : R*->R* f(x)=1/x
G_f={(x,f(x)),x€R*}={(x,1/x),x€R*}
x€A : (x,x)€G_f
Pas réfléxive, car par ex. (4,4)∉ G_f
G_f est symétrique. Soit (x,1/x)€G_f Est ce que (1/x,x)€G_f? Si on prends l'inverse de 1/x qui est donc x
Pas transitive, car (2,1/2),(1/2,2)€G_f mais (2,2)€G_f

2-Diagrammes de Hasse

A={O,A,B,AB} x->y une personne de groupe sanguin x peut donner son sang à une personne du groupe y

R={(O,O),(A,A),(B,B),(AB,AB),(O,A),(O,B),(O,AB),(A,AB),(B,AB)}

Réfléxive : Car pour tout x€{O,A,B,AB}, (x,x)€R
Transitive : Car pour tout x,y,z€{O,A,B,AB}
si x->y et y->z alors x->z
(si (x,y),(y,z)€R alors (x,z)€R)
Non symétrique : Car A->AB mais il n'est pas vrai que AB->A

Soit R une relation sur A. R est dite anti-symétrique si :
(a,b)€R et (b,a)€R alors a=b
Exemple : si (1,2)€R et (2,1)€R alors R n'est pas anti-symétrique car 1!=2

Ici, pas de contre-exemple à la définition donc c'est une relation anti-symétrique.

Comme la relation est transitive, réfléxive et anti-symétrique alors c'est une relation d'ordre.

3-Propriétés des relations

1) On considère sur Z la relation :
R:={(x,y) : |x-y|<=1}
Réfléxive : car pour tout x€Z : |x-x|=0<=1 et donc (x$_1$x)€R
Symétrique : car pour tout x,y€Z : si |x-y|<=1 alors |y-x|=|x-y|<=1
Non transitive : pour x=1, y=2, z=3 on a que |x-y|=1=|y-z| mais |x-z|=|1-3|=2>1

2) On définit la relation S sur Z :
S:={(a,b) : a<=b}
Réfléxive, car pour tout a€Z, a<=a
Transitive, car pour tout a,b,c€Z si a<=b et b<=c alors a<=c
Non symétrique, car 1<=2 mais 2>1

Remarque : N'importe quelle relation d'ordre marche ici.

3)

On définit sur R la relation suivante :
T={(x,y) : x*y!=0}
La relation T est symétrique car si (x,y) tel que x*y!=0
alors y*x=x*y!=0
La relation T est transitive car si x*y!=0 et y*z!=0=>
x,y,z!=0. Donc x*z!=0
La relation T n 'est pas réfléxive car pour x=0 on que x*x=0

---

1) xPy ssi x<=y

Rappel : Une relation est une relation d'ordre si elle :
réfléxive, transitive, anti-symétrique-> elle est antisymétrique car si x<=y et y<=x, alors forcément x=y
Donc c'est bien une relation d'ordre

2) xQy ssi x<y Pas une relation d'ordre car pas réfléxive. Si x€Z
il n'est pas vrai que x<x

3) xRy ssi x est un multiple de y,(c'est à dire Ek€Z x=ky)
Réfléxive : pour tout x€Z : x=1x donc x est un multiple de lui-même
Transitive : on suppose que x est un multiple de y et y est un multiple de Z. Donc, En.x=n*y et Em.y=mz x=n*y=n(m*z)=n*m*z Donc x=k*z, k€Z
Anti-symétrique : Est ce que c'est vrai que si En.x=n*y et Em.y=m*x alors x=y ?
Contre-exemple : x=6, y=-6
6=(-1)*6 mais -!=(-6)   -6=(-1)*6 Donc la relation n'est pas anti-symétrique

<u>Remarque :</u> Si on se restreint sur N, la relation devient anit-symétrique et est donc une relation d'ordre.

xSy Réfléxive, Transitive, anti-symétrique. Donc c'est une relation d'ordre