Feuille n°4 : Variables aléatoires à densité

Exercice 1 :

Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$.

1. Déterminer la loi de $1-U$.
2. Quelle la loi de la variable aléatoire $X=\sqrt{U}$? celle de $Y=U^2$?

Correction :

Si U suit une loi uniforme sur $[0,1]$ alors sa densité est :

$$f_U(x)=\begin{cases} 0 & si \quad x<0 \\ 1 & si \quad x\in[0,1] \\ 0 & si \quad x>1 \end{cases}$$

Pour trouver la fonction de répartition de U, on utilise la formule suivante :

$$F_U(x)=\mathbb{P}(U\leq x)=\int_{-\infty}^{x} f_U(t)dt \tag{1}$$

La fonction de répartition est la distribution cumulative. Ce qui donne $F_U(x)=0$ si $x<0$ et $F_U(x)=1$ si $x>1$ (puisque la fonction vaut 0 si x est négatif et s'intègre à 1). Si $x\in[0,1]$:

$$\begin{aligned} F_U(x)=\mathbb{P}(U\leq x)&=\int_{-\infty}^{x} f_U(t)dt \\ &=\int_0^x 1\ dt=[t]_0^x=x-0=x \end{aligned}$$

On a donc

$$F_U(x)=\begin{cases} 0 & si \quad x<0 \\ x & si \quad x\in[0,1] \\ 1 & si \quad x>1 \end{cases}$$

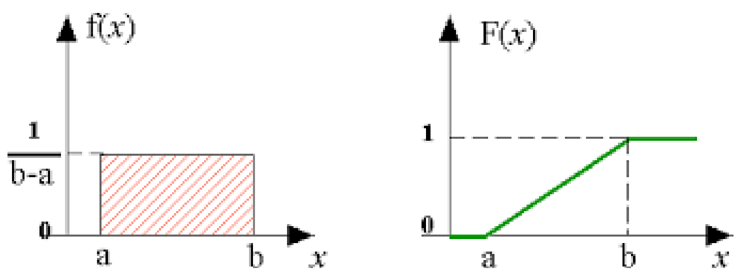

FIGURE 1 – Loi de densité et fonction de répartition de la loi uniforme.

Chercher la loi d'une variable aléatoire X continue consiste à chercher sa densité de probabilité $f_X(x)$ ou sa fonction de répartition $F_X(x)$ sachant que l'on passe de l'une à l'autre en utilisant l'équation (1) ou l'égalité suivante :

$$F_X{}'(x)=f_X(x) \tag{2}$$

***1.** Loi de $1-U$:*

$$\begin{aligned} F_{1-U}(x)&=\mathbb{P}(1-U\leq x)=\mathbb{P}(U\geq 1-x) \\ &=1-\mathbb{P}(U\leq 1-x)=1-F_U(1-x) \\ &=1-\begin{cases} 0 & si \quad 1-x<0 \\ 1-x & si \quad 1-x\in[0,1] \\ 1 & si \quad 1-x>1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & si \quad x<0 \\ x & si \quad x\in[0,1] \\ 1 & si \quad x>1 \end{cases} \end{aligned}$$

On reconnaît la fonction de répartition de la loi uniforme $[0,1]$.

Remarque. L'intuition nous donnait déjà cette propriété. D'une part U prend ses valeurs entre 0 et 1 donc $1-U$ également. Les deux lois U et Z ont donc le même support. D'autre part, U étant uniformément distribuée, $-U$ l'est également (attention pas avec le même support) et ajouter une constante ($+1$ ici) ne change pas la distribution qui est toujours uniforme (seulement le support). Or on a vu juste avant que U et $1-U$ partageaient le même support. De fait, U et Z sont de même loi.

2. *On va donner la correction en détail pour $Y = U^2$. L'autre cas peut être résolu exactement de la même façon. On va généraliser au cas où U est uniforme sur $[a, b]$, $0 < a < b < \infty$. Dans la suite, on note F_U la fonction de répartition de U.*

On va dans un premier temps donner la fonction de répartition de Y que l'on note F_Y. Ici encore, il faut pour se faire dissocier différents cas selon les valeurs prises par y.

Si $y < 0$, on a

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(U^2 \leq y) = 0$$

car U^2 est nécessairement positive est donc prend des valeurs négatives avec une probabilité nulle. Maintenant, si $y \geq 0$, on a

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(-\sqrt{y} \leq U \leq \sqrt{y}) = \mathbb{P}(U \leq \sqrt{y}) = F_U(\sqrt{y})$$

La première égalité provient de la définition de la fonction de répartition. La deuxième de la définition de Y qui vaut U^2 (bien penser à ne pas oublier qu'avec la fonction carrée, on a $x^2 \leq a$ est équivalent à $-\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a}$ avec $a \geq 0$). La troisième inégalité provient du fait que le support de U est positif. La quatrième inégalité est immédiate, c'est la définition de F_U.

Il faut maintenant calculer la fonction de répartition de U. Ce qui est facile. On dissocie une fois de plus les différents cas (voir Exercice 7) selon les valeurs prises par u (en fonction du support de U). Il vient que $F_U(u) = 0$ si $u < a$, $F_U(u) = 1$ si $u \geq b$ et

$$F_U(u) = \frac{u-a}{b-a}$$

si $a \leq u \leq b$.

On en déduit alors directement la fonction de répartition de Y. Si $y < a^2$ on a $F_Y(y) = 0$ et si $y > b^2$ alors $F_Y(y) = 1$. Enfin,

$$F_Y(y) = \frac{\sqrt{y}-a}{b-a} \tag{3}$$

si $y \in [a^2, b^2]$.

Compléments pour aller plus loin : En dérivant la fonction de répartition F_Y de Y, on peut s'amuser à calculer la densité f_Y (attention à la dérivabilité aux points a^2 et b^2) . On a alors $f_Y(y) = 0$ si $y < a^2$. De même $f_Y(y) = 0$ si $y > b^2$. Enfin, on a

$$f_Y(y) = \frac{1}{2(b-a)\sqrt{y}}$$

si $y \in [a^2, b^2]$.

Remarque : grâce à la densité, on peut calculer les moments de Y. Mais en fait, il vaut mieux utiliser la propriété $Y = U^2$ qui simplifie les calculs. En effet, le calcul du moment d'ordre 2 de U donne l'espérance de Y et le calcul du moment d'ordre 4 de U donne le moment d'ordre 2 de Y et ces calculs sont faciles à réaliser. Il vient :

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[U^2] = \int_a^b \frac{u^2}{b-a}du = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)}$$

et de façon similaire on obtient

$$\mathbb{E}[Y^2] = \mathbb{E}[U^4] = \int_a^b \frac{u^4}{b-a}du = \frac{b^5-a^5}{5(b-a)}$$

On a alors la variance de Y en utilisant $Var[Y] = \mathbb{E}[Y]^2 - \mathbb{E}[Y^2]$ (à finir à la maison).

Remarque : On retrouve évidemment la loi de U uniforme sur $[0, 1]$ de l'énoncé en prenant $a = 0$ et $b = 1$ ce qui simplifie considérablement les expressions (à finir à la maison).

Exercice 2 :

Soit X une v.a.r. de loi uniforme sur l'intervalle $[-1, 1]$. Déterminez la loi de $Y = |X|$, puis la loi de $Z = X^2$.

Correction :

Contrairement à l'exercice 1, X suit une loi uniforme mais ici définie sur $[-1, 1]$ (au lieu de $[0, 1]$). Toutefois, la loi de $Z = X^2$ s'obtient exactement de la façon. Attention toutefois au fait que a était positif dans les calculs de l'exercice 1, ce qui n'est plus le cas ici. La fonction de répartition caractérise entièrement la loi donc on ne s'intéressera ici qu'à déterminer les fonctions de répartition.

Quant à la loi de $Y = |X|$ on procède également comme l'exercice 1 en dissociant les cas selon les valeurs de y. Si $y \geq 1$ alors il est immédiat que

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(|X| \leq y) = 1$$

D'autre part, pour $y \leq 1$, on a

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(|X| \leq y) = \mathbb{P}(-y \leq X \leq y) = F_X(y) - F_X(-y)$$

Il ne reste plus qu'à calculer la fonction de répartition F_X de X, ce qui est très facile (se référer à l'exercice 1) et en déduire $F_X(-y)$ en effectuant le changement de variable $z = -y$.

Exercice 3

On dispose d'un lot d'ampoules électriques, toutes de fabrication identique. On suppose que la durée de vie (exprimé en heures) de chaque ampoule est une variable aléatoire de loi exponentielle $\mathcal{E}(\mu)$. Pour les applications numériques on prendra $\mu = 0.001$ et $T = 200$.

a) Calculer la durée de vie moyenne de chaque ampoule $\mathbb{E}(X)$, ainsi que la variance de X.

b) Quelle est la probabilité qu'une ampoule s'éteigne avant un temps T de fonctionnement ? Utiliser l'expression obtenue pour calculer cette probabilité pour $T = 200$.

c) On branche 2 ampoules simultanément à un instant noté 0. Quelles sont les probabilités qu'à un instant T :

A_1 : les deux ampoules soient encore allumées ?
A_2 : au moins l'une des deux ampoules soit encore allumée ?
A_3 : les deux ampoules soient éteintes ?

d) On branche 10 ampoules simultanément. Quelles sont les probabilités qu'à un instant T : toutes les ampoules soient encore en vie ? toutes les ampoules soient éteintes ?

Correction :

X suit une loi exponentielle donc $\forall \mu > 0$:

$$f_X(x) = \mu e^{-\mu x} 1_{\mathbb{R}^+}(x)$$

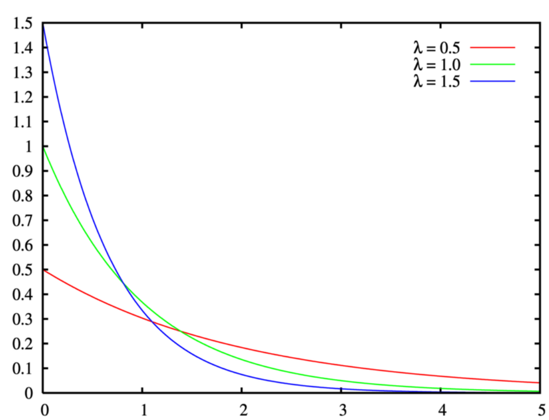

Figure 2 – Densité de probabilité de la loi exponentielle pour trois valeurs de son paramètre.

a) *Calcul de l'espérance :*

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)dx = \int_0^{+\infty} x\mu e^{-\mu x}dx$$

$$\text{Intégration par parties (IPP) avec } u = x \text{ et } v' = \mu e^{-\mu x}$$

$$= \left[-xe^{-\mu x}\right]_0^L + \int_0^{+\infty} e^{-\mu x}dx \text{ avec } L \to +\infty$$

$$= \left[-xe^{-\mu x}\right]_0^L - \frac{1}{\mu}\left[e^{-\mu x}\right]_0^L$$

$$= -Le^{-\mu L} + 0 - \frac{1}{\mu}(e^{-\mu L} - e^0)$$

$$= -Le^{-\mu L} - \frac{1}{\mu}e^{-\mu L} + \frac{1}{\mu}$$

$$\underset{L\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\mu} \text{ car } e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Calcul de $\mathbb{E}\left(X^2\right)$ *:*

$$\mathbb{E}\left(X^2\right) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)dx = \int_0^{+\infty} x^2\mu e^{-\mu x}dx$$

$$\text{IPP avec } u = x^2 \text{ et } v' = \mu e^{-\mu x}$$

$$= \left[-x^2e^{-\mu x}\right]_0^L + \int_0^{+\infty} 2xe^{-\mu x}dx \text{ avec } L \to +\infty$$

$$= \left[-x^2e^{-\mu x}\right]_0^L + \frac{2}{\mu}\int_0^{+\infty} \mu xe^{-\mu x}dx \quad \text{je divise et multiplie par } \mu$$

$$= \left[-x^2e^{-\mu x}\right]_0^L + \frac{2}{\mu}\mathbb{E}(X)$$

$$= -L^2e^{-\mu L} + 0 + \frac{2}{\mu} \times \frac{1}{\mu}$$

$$\underset{L\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{\mu^2}$$

D'où

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{2}{\mu^2} - \left(\frac{1}{\mu}\right)^2 = \frac{1}{\mu^2}$$

Application numérique : $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{0.001} = 1000$ *heures et* $\mathbb{V}(X) = \frac{1}{0.001^2}$.

b) *On cherche* $\mathbb{P}(X \leq T)$. *Cela revient à chercher la fonction de répartition de la variable aléatoire* X.

$$F_X(T) = \mathbb{P}(X \leq T)$$

$$= \begin{cases} \int_0^T \mu e^{-\mu x}dx & \text{si } \quad T > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= 1 - e^{-\mu T} \, 1_{\mathbb{R}+}(T)$$

car $\int_0^T \mu e^{-\mu x}dx = \left[-e^{-\mu x}\right]_0^T = -e^{-\mu T} + e^0$.

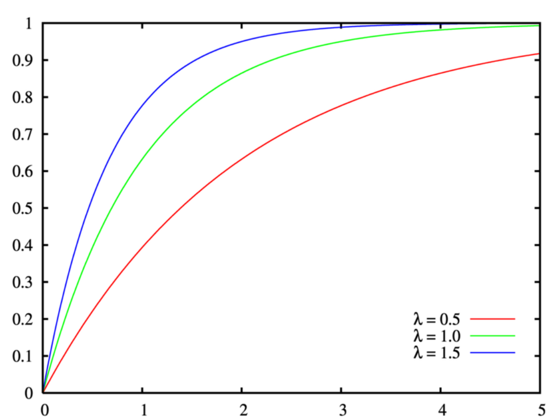

FIGURE 3 – Fonction de répartition de la loi exponentielle pour trois valeurs de son paramètre.

Application numérique : $F_X(200) = 1 - e^{-0.001\times 200} \approx 18\%$.
c) *Soit* X_i *la durée de vie de l'ampoule* i. $X_1 \sim \mathcal{E}(\mu)$ *et* $X_2 \sim \mathcal{E}(\mu)$. *Prenons* $T > 0$.

$$\begin{aligned}
\bullet\ \mathbb{P}(A_1) &= \mathbb{P}(X_1 \geq T \cap X_2 \geq T)\\
&= \mathbb{P}(X_1 \geq T)\mathbb{P}(X_2 \geq T) \quad \textit{par indépendance des durées de vie des deux ampoules}\\
&= [1 - \mathbb{P}(X_1 \leq T)]\,[1 - \mathbb{P}(X_2 \leq T)]\\
&= [1 - \mathbb{P}(X_1 \leq T)]^2 \quad \textit{car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ suivent la même loi}\\
&= (1 - (1 - e^{-\mu T}))^2 = e^{-\mu T^2} = e^{-2\mu T}
\end{aligned}$$

Application numérique : $\mathbb{P}(A_1) = e^{-2\times 0.001\times 200} \approx 0.67$.

$$\begin{aligned}
\bullet\ \mathbb{P}(A_2) &= 1 - \mathbb{P}(A_3) = 1 - \mathbb{P}(X_1 \leq T \cap X_2 \leq T)\\
&= 1 - \mathbb{P}(X_1 \leq T)\mathbb{P}(X_2 \leq T) \quad \textit{par indépendance des durées de vie des deux ampoules}\\
&= 1 - \mathbb{P}(X_1 \leq T)^2 \quad \textit{car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ suivent la même loi}\\
&= 1 - (1 - e^{-\mu T})^2
\end{aligned}$$

Application numérique : $\mathbb{P}(A_2) = 1 - (1 - e^{-0.001\times 200})^2 \approx 0.97$.

$$\bullet\ \mathbb{P}(A_3) = 1 - \mathbb{P}(A_2) = (1 - e^{-\mu T})^2$$

Application numérique : $\mathbb{P}(A_3) = (1 - e^{-0.001\times 200})^2 \approx 0.03$.
d) *Soient* $A_4 =$ *"les 10 ampoules sont encore allumées" et* $A_5 =$ *"les 10 ampoules sont éteintes".*

$$\mathbb{P}(A_4) = e^{-10\mu T}$$
$$\mathbb{P}(A_5) = (1 - e^{-\mu T})^{10}$$

Application numérique : $\mathbb{P}(A_4) \approx 0.13$ *et* $\mathbb{P}(A_5) \approx 3.8 \times 10^{-8}$.

Exercice 4 :

1. Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Calculer son moment d'ordre 4, c'est-à-dire $\mathbb{E}(X^4)$.
2. On pose $Y = \sigma X + m$, où $m \in \mathbb{R}, \sigma > 0$. Montrer que Y suit une loi $\mathcal{N}(m, \sigma)$. En déduire $\mathbb{E}(X)$ et la variance de X.

Remarque : Cette propriété de la loi gaussienne est très importante, elle permet d'exprimer la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ *en fonction de la fonction de répartition* Φ *de la loi* $\mathcal{N}(0,1)$.

Correction :
1. *X suit une loi normale centrée réduite donc :*

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

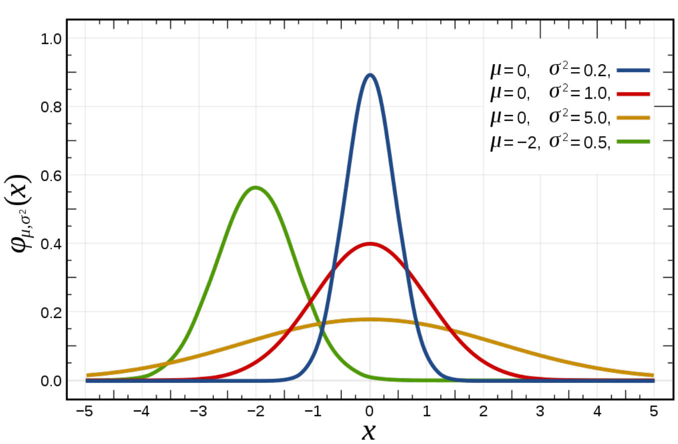

FIGURE 4 – Densité de probabilité de la loi normale pour plusieurs valeurs d'espérance et de variance (la loi centrée réduite est en rouge).

Soit, $\forall n > 0$,

$$m_n = \mathbb{E}(X^n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^n \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

- *Si n est impaire, m_n est l'intégrale d'une fonction impaire ($m_n = -m_n$) donc $m_n = 0$*
- *Si $n = 0$, $m_0 = 1$*
- *Si $n = 2p$ (n est paire) alors $m_n = \frac{(2p)!}{2^p p!}$ Calculs pour le dernier cas :*

$$\begin{aligned}
m_{2p} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^{2p} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^{2p-1} x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \\
& \textit{IPP avec } u = x^{2p-1} \textit{ et } v' = x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\left[-x^{2p-1} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \right]_{-L}^{L} + (2p-1) \int_{\mathbb{R}} x^{2p-2} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \right) \quad \textit{avec } L \to +\infty \\
& \underset{L \to +\infty}{\longrightarrow} (2p-1) m_{2p-2}
\end{aligned}$$

D'où par récurrence

$$\begin{aligned}
m_{2p} &= (2p-1)m_{2p-2} = (2p-1)(2p-3)m_{2p-4} = (2p-1)(2p-3)\dots 3 \times m_0 \\
&= (2p-1)(2p-3)\dots 3 \times 1 \;\; \textit{car } m_0 = 1 \\
&= \frac{(2p)!}{2^p p!}
\end{aligned}$$

Pour $n = 4$ ($p = 2$),

$$m_4 = \frac{(2 \times 2)!}{2^2 \times 2!} = \frac{4!}{4 \times 2!} = \frac{3 \times 4}{4} = 3$$

2. *Soit $Y = \sigma X + m$, $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. Calculons la fonction de répartition de Y :*

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(\sigma X + m \leq y) = \mathbb{P}(X \leq \tfrac{y-m}{\sigma}) = F_X(\tfrac{y-m}{\sigma}) \tag{4}$$

Pour trouver la densité de Y, $f_Y(y)$, il suffit de dériver l'expression trouvé dans (4) (par rapport à y). On a donc :

$$\begin{aligned}
f_Y(y) = F_Y'(y) &= \frac{d}{dy}\left[F_X\left(\frac{y-m}{\sigma}\right) \right] \\
&= F_X'\left(\frac{y-m}{\sigma}\right) \times \frac{1}{\sigma} \quad \textit{(attention à la dérivée d'une composition !)} \\
&= \frac{1}{\sigma} f_X\left(\frac{y-m}{\sigma}\right) \quad \textit{où } f_X(\cdot) \textit{ est la densité de } X \sim \mathcal{N}(0,1) \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{(y-m)^2}{\sigma^2}\right) \quad \rightsquigarrow \textit{densité d'une loi normale } \mathcal{N}(m,\sigma) \textit{ !}
\end{aligned}$$

Donc, on a montré que $Y \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$.
Pour la deuxième partie de la question on utilise des propriétés de l'espérance et de la variance des variables aléatoires.

<u>*Espérance de X :*</u>

$$\mathbb{E}(Y) = m = \mathbb{E}(\sigma X + m)$$

alors :

$$\sigma\mathbb{E}(X) + m = m \Leftrightarrow \mathbb{E}(X) = 0 \quad \textit{car } \sigma > 0.$$

<u>*Variance de X :*</u>

$$\mathbb{V}ar(Y) = \sigma^2 = \mathbb{V}ar(\sigma X + m)$$

alors :

$$\sigma^2\mathbb{V}ar(X) = \sigma^2 \Leftrightarrow \mathbb{V}ar(X) = 1$$

Exercice 5

Un tube électronique a une durée de vie qui, exprimée en heures est une variable aléatoire X suivant une loi normale $\mathcal{N}(160, 30^2)$.

1) Trouver la valeur de $p = \mathbb{P}(X \geq 200)$.

2) Trouver réels c et d vérifiant $\mathbb{P}(X \leq c) \geq 0.95$; $\mathbb{P}(X \geq d) \geq 0.8$.

3) Calculer la probabilité conditionnelle $q = \mathbb{P}(X \geq 200 | X \geq 160)$. Comparer p et q.

Correction :

1. *La variable aléatoire* $Z = (X - 160)/30$ *suit la loi* $\mathcal{N}(0, 1)$. *Donc on a*

$$\begin{aligned} p = \mathbb{P}(X \geq 200) &= 1 - \mathbb{P}(X \leq 200) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\frac{X-160}{30} \leq \frac{200-160}{30}\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{4}{3}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{4}{3}\right) \\ &= 1 - 0.9082 \ \textit{(voir table loi normale centrée réduite)} \\ &= 0.0918, \end{aligned}$$

où $\Phi(x)$ *est la fonction de répartition de la loi* $\mathcal{N}(0, 1)$ *:*

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

2.

$$\mathbb{P}(X \leq c) = \mathbb{P}\left(\frac{X-160}{30} \leq \frac{c-160}{30}\right) = \Phi\left(\frac{c-160}{30}\right)$$

A l'aide de la table, on trouve que $\Phi(x) \geq 0.95$ *pour tout* $x \geq 1.65$. *Donc*

$$\frac{c-160}{30} \geq 1.65 \qquad \Rightarrow \qquad c \geq 209.5$$

Pour trouver d, on utilise la symétrie de la courbe de Φ, *ce qui donne l'égalité*

$$\mathbb{P}\left(Z \geq x\right) = \mathbb{P}\left(Z \leq -x\right).$$

On obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geq d) &= \mathbb{P}\left(\frac{X-160}{30} \geq \frac{d-160}{30}\right) = \mathbb{P}\left(Z \geq \frac{d-160}{30}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(Z \leq -\frac{d-160}{30}\right) = \Phi\left(-\frac{d-160}{30}\right). \end{aligned}$$

Ainsi $\mathbb{P}(X \geq d) \geq 0.8$, *si et seulement si* $\Phi\left(-(d-160)/30\right) \geq 0.8$. *A l'aide de la table, on trouve que* $\Phi(x) \geq 0.8$ *pour tout* $x \geq 0.85$. *On conclut que*

$$-\frac{d-160}{30} \geq 0.85 \qquad \Rightarrow \qquad d \leq 134.5.$$

3. *Comme* X *suit la loi normale centrée en* 160, *on a* $\mathbb{P}\left(X \geq 160\right) = 0.5$. *En utilisant ceci et le résultat de la question 1, on obtient*

$$q = \frac{\mathbb{P}(X \geq 200)}{\mathbb{P}(X \geq 160)} = \frac{0.0918}{0.5} = 2 \cdot 0.0918 = 0.1836.$$

Ainsi q *est deux fois plus grand que* p.

Exercice 6

Une machine destinée à remplir automatiquement des boîtes de sucre en poudre est telle que le poids du sucre mis dans une boîte et exprimé en kilos est une variable aléatoire X suivant une loi normale $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$. On désire que le poids du sucre contenu dans une boîte dépasse $980g = 0.98kg$ avec une probabilité supérieure à 99%.

1. Lorsque $\sigma = 0.01kg$, quelle valeur faut-il donner à a ?
2. Lorsque $a = 1$, quelle valeur maximale faut-il donner à σ ?

Correction :

1. *Le but est de trouver les valeurs de a pour lesquelles $\mathbb{P}(X \geq 0.98) \geq 0.99$. Comme dans l'exercice précédent, on écrit*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 0.98) &= \mathbb{P}\left(\frac{X-a}{0.01} \geq \frac{0.98-a}{0.01}\right) = \mathbb{P}\left(Z \geq \frac{0.98-a}{0.01}\right)\\ &= \mathbb{P}\left(Z \leq -\frac{0.98-a}{0.01}\right) = \Phi\left(-\frac{0.98-a}{0.01}\right) \geq 0.99\end{aligned}$$

A l'aide de la table, on voit que $\Phi(x) \geq 0.99$ pour tout $x \geq 2.33$. Donc

$$-\frac{0.98-a}{0.01} \geq 2.33 \quad \Rightarrow \quad a \geq 1.0033$$

2.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 0.98) &= \mathbb{P}\left(\frac{X-1}{\sigma} \geq \frac{0.98-1}{\sigma}\right) = \mathbb{P}\left(Z \geq -\frac{0.02}{\sigma}\right)\\ &= \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{0.02}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{0.02}{\sigma}\right) \geq 0.99\end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{0.02}{\sigma} \geq 2.33 \quad \Rightarrow \quad \sigma \leq 0.0086$$

La valeur maximale de σ est 0.0086.

Exercice 7 *La station service*

Dans une station-service, la demande hebdomadaire en essence, en milliers de litres, est une variable aléatoire X de densité $f(x) = c(1-x)^4 \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$.

1) Déterminer c.

2) La station est réapprovisionnée chaque lundi à 20h. Quelle doit être la capacité de la cuve d'essence pour que la probabilité d'épuiser cette cuve soit inférieure à 10^{-5} ?

Correction :

1) *Ce type de question est très classique. On rappelle que $\mathbb{I}_{[0,1]}(x)$ vaut 0 si $x \notin [0,1]$ et 1 sinon. Par définition, f est une densité et a donc la propriété de sommer à 1. En d'autres termes, f doit satisfaire*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$$

Ici, on a intégré sur $\mathbb{R}$. En réalité on intègre uniquement sur le support de X (l'ensemble des valeurs sur lesquelles X est non nulle), c'est-à-dire $[0,1]$. On a alors

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} c(1-x)^4 \mathbb{I}_{\{[0,1]\}}(x)dx = c\left[\frac{-(1-x)^5}{5}\right]_0^1 = c/5$$

D'où l'on obtient $c = 5$.

2) *On va déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X que l'on note $F(\cdot)$. On rappelle (en toute généralité) que F est définie par*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Il s'agit maintenant de dissocier les cas selon les valeurs de x. En effet, si $x < 0$ alors $F(x) = 0$ car $f(x) = 5(1-x)^4 \mathbb{I}_{\{[0,1]\}}(x) = 0$ ($\mathbb{I}_{\{[0,1]\}}(x) = 0$ car $x \notin [0,1]$). Si $x \in [0,1]$ alors,

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = 1 - (1-x)^5$$

Si $x > 1$ alors

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt + \int_1^x f(t)dt.$$

Pour les mêmes raisons, $\int_1^x f(t)dt = 0$ car l'indicatrice est nulle sur $[1, x]$ car $x > 1$. On a alors :

$$F(x) = \int_0^1 f(t)dt = 1$$

On cherche maintenant x tel que la probabilité de consommer plus de x milliers de litres sur la semaine soit inférieur à 10^{-5}. En d'autres termes, on cherche le plus petit x tel que $F(x) > 1 - 10^{-5}$. On a alors :

$$(1-x)^5 \leq 10^{-5} \Longrightarrow 1 - x \leq 10^{-1} \Longrightarrow x \geq 0.9$$

On conclut donc que le réservoir doit contenir au moins 900 litres.

Exercice 8 *Loi log-normale*

Véronique vend des cuisines intégrées par téléphone. Soit T la durée d'une communication téléphonique de Véronique. La variable $X = ln\ T$ suit une loi normale $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$.

1. Exprimer la fonction de répartition $F_T(t)$ de T en fonction de a et σ^2 et de la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite.
2. En déduire la densité de probabilités de T.

Correction :

1. *Comme le logarithme est une fonction strictement croissante, pour tout $x \geq 0$ on a*

$$F_T(t) = \mathbb{P}(T \leq t) = \mathbb{P}(\ln T \leq \ln t) = \mathbb{P}(X \leq \ln t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_0^{\ln t} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$$

On fait le changement de variable $y = (x - a)/\sigma$ dans l'intégrale :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_0^{\ln t} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{\ln t - a}{\sigma}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \Phi\left(\frac{\ln t - a}{\sigma}\right)$$

Ainsi

$$F_T(t) = \begin{cases} \Phi\left(\frac{\ln t - a}{\sigma}\right) & si\ t > 0, \\ 0 & si\ t \leq 0 \end{cases}$$

2. *Dans la question précédente on a établi l'égalité*

$$F_T(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_0^{\ln t} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$$

On fait maintenant le changement de variable $x = \ln y$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_0^{\ln t} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_0^t \frac{1}{y} e^{-\frac{(\ln y - a)^2}{2\sigma^2}} dy$$

Ainsi la densité de la variable T est donnée par

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{t\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\ln t - a)^2}{2\sigma^2}} & si\ t > 0, \\ 0 & si\ t \leq 0 \end{cases}$$

La variable aléatoire T est dite suivre une loi log-normale de paramètres a et σ^2.