IN 303 – Structure de données

Exercices et Résumés de Cours

Ylène Aboulfath – Coline Gianfrotta – Maël Guiraud
Franck Quessette – Yann Strozecki – Sandrine Vial (resp. Cours)

2020-2021

Avant-Propos

Dans ce document vous trouverez 3 parties :

- une partie qui contient les exercices que vous ferez en TD. Chaque exercice fait en présentiel sera noté $\boxed{\mathcal{P}}$, chaque exercice qui sera fait en distanciel sera noté $\boxed{\mathcal{D}}$;
- une partie qui contient quelques conseils sur la rédaction des preuves et des algorithmes ainsi que quelques rappels mathématiques utiles pour le cours.
- une partie qui contient les résumés des cours ;

Table des matières

Chapitre 1

Exercices

1.1 Complexité

Exercice 1 – $\boxed{\mathcal{P}}$ **Un simple calcul**

1. Donner un algorithme qui calcule la somme des multiples de 3 ou 5 inférieur à n. Par exemple, si n vaut 17, alors l'algorithme doit retourner 60.
2. Calculer le nombre d'opérations arithmétiques de votre algorithme en fonction de n. Pouvez-vous le modifier afin de réduire sa complexité ?

Correction exercice 1

1. Un algorithme qui calcule la somme des entiers multiples de 3 ou 5 inférieur à n.

SommeMultiple_3_ou_5(n **: entier) : entier**

```
Debut
    i ← 1
    somme ← 0
    tant que (i ≤ n) faire
        si i mod 3 = 0 ou i mod 5 = 0
            somme ← somme + i
        i ← i + 1
    fin tant que
Fin
```

2. Le nombre d'opérations arithmétiques de cet algorithme en fonction de n est le suivant :
   - A chaque itération il y a :
     - 2 divisions (pour calculer $i \mod 3$ et $i \mod 5$)
     - 1 addition pour calculer $somme \leftarrow somme + i$ (cette addition n'est faite que lorsque la condition du Si est vrai. On va donc la compter à chaque fois dans le cas d'une évaluation dans le pire cas.
     - 1 addition pour calculer $i \leftarrow i + 1$

     Au total on aura donc 4 opérations arithmétiques par itération.
   - L'algorithme fera n itérations au total

   Cet algorithme fera au plus $4n$ opérations artihmétiques pour faire la somme des entiers multiples de 3 ou 5 inférieurs à n.

Pour améliorer la complexité on peut essayer d'écrire le problème sous forme mathématique à savoir : qu'il faut faire la somme de tous les multiples de 3 inférieur à n d'y ajouter la somme de tous les multiples de 5 et d'y retrancher tous les multiples de 15. On peut réécrire cette somme de la façon suivante :

$$Somme = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} 3i + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{5} \rfloor} 5i - \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{15} \rfloor} 15i$$

$$Somme = 3\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} i + 5\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{5} \rfloor} i - 15\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{15} \rfloor} i$$

$$Somme = 3 \times \frac{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor \times \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1}{2} + 5 \times \frac{\lfloor \frac{n}{5} \rfloor \times \lfloor \frac{n}{5} \rfloor + 1}{2} - 15 \times \frac{\lfloor \frac{n}{15} \rfloor \times \lfloor \frac{n}{15} \rfloor + 1}{2}$$

L'algorithme issu de la formule mathématique fait un nombre constant d'opérations arithmétiques quelle que soit la valeur de n.

Exercice 2 – $\mathcal{P}$ **Calcul du coût d'un algorithme**

1. Déterminer le nombre d'affectations, en fonction de n et m, dans les algorithmes suivants.

Algorithme 1.1 A(n : entier) : entier

Debut
$i \leftarrow 1$
tant que ($i \leq n$) **faire**
$i \leftarrow i + 2$
fin tant que
Fin

Algorithme 1.2 B(n : entier) : entier

Debut
$i \leftarrow 1$
$j \leftarrow n$
tant que ($i \leq j$) **faire**
$i \leftarrow i + 1$
$j \leftarrow j - 1$
fin tant que
Fin

Algorithme 1.3 C(n : entier) : entier

Debut
$i \leftarrow 1$
tant que ($i \leq n$) **faire**
$j \leftarrow 1$
tant que ($j \leq n$) **faire**
$j \leftarrow j + 1$
fin tant que
$i \leftarrow i + 1$
fin tant que
Fin

Algorithme 1.4 D(n : entier) : entier

Debut
$i \leftarrow 1$
tant que ($i \leq n$) **faire**
$j \leftarrow i + 1$
tant que ($j \leq n$) **faire**
$j \leftarrow j + 1$
fin tant que

$i \leftarrow i+1$

fin tant que

Fin

Algorithme 1.5 E(m, n **: entiers**) **: entier**

Debut

$i \leftarrow 1$

tant que ($i \leq m$ **et** $i \leq n$) **faire**

$i \leftarrow i+1$

fin tant que

Fin

Algorithme 1.6 F(m, n **: entiers**) **: entier**

Debut

$i \leftarrow 1$

tant que ($i \leq m$ **ou** $i \leq n$) **faire**

$i \leftarrow i+1$

fin tant que

Fin

Algorithme 1.7 G(m, n **: entiers**) **: entier**

Debut

$i \leftarrow 1$

$j \leftarrow 1$

tant que ($j \leq n$) **faire**

si ($i \leq m$)

$i \leftarrow i+1$

sinon

$j \leftarrow j+1$

fin si

fin tant que

Fin

Algorithme 1.8 H(m, n **: entiers**) **: entier**

Debut

$i \leftarrow 1$

$j \leftarrow 1$

tant que ($j \leq n$) **faire**

si ($i \leq m$)

$i \leftarrow i+1$

sinon

$j \leftarrow j+1$

$i \leftarrow 1$

fin si

a)

fin tant que

Fin

2. Quels sont les algorithmes ayant un coût linéaire, et quels sont ceux ayant un coût quadratique ?

Correction exercice 2

1. Le nombre d'affectations de l'algorithme **A** est de 1 affectation par itération. L'algorithme fera $\frac{n}{2}$ itérations. Il y a 1 affectation pour l'initialisation. Au total, il y aura donc $\frac{n}{2}+1$ affectations.
2. Le nombre d'affectations de l'algorithme **B** est de 2 affectations par itération. L'algorithme fera $\frac{n}{2}$ itérations. Il y a 2 affectations pour l'initialisation. Au total, il y aura donc $2 \times \frac{n}{2} + 2 = n + 2$ affectations.
3. Le nombre d'affectations de l'algorithme **C** est de :
   — 1 affectation pour l'initialisation.
   — 1 affectation par itération de la boucle sur j. La boucle sur j est répétée n fois. Au total cela fait donc n affectations.
   — 2 affectations + les n affectations de la boucle sur j par itération de la boucle sur i. La boucle sur i est répétée n fois. Au total pour la boucle sur i , cela fait $n \times (n+2)$.

   Le total fait donc $n \times (n+2) + 1$ affectations.
4. Le nombre d'affectations de l'algorithme **D** est de :
   — 1 affectation pour l'initialisation.
   — 2 affectations + les affectations de la boucle sur j par itération de la boucle sur i. La boucle sur i est répétée n fois.
   — La boucle j fera 1 affectation par itération. Cette boucle sera exécutée $n-i$ fois. Ce nombre dépend de la valeur dans la boucle i. Elle sera donc exécutée $n-2$ fois au premier passage puis $n-3$ fois, ... 1 fois. Au total cela fera donc $(n-2)+(n-3)+ ... + 1 = \frac{((n-2)(n-1)}{2}$ affectations.

   On arrive à un total de $1 + 2n + \frac{(n-2)(n-1)}{2}$ affectations.
5. Le nombre d'affectations de l'algorithme **E** est de :
   — 1 affectation pour l'initialisation.
   — 1 affectation par itération de la boucle . Cette boucle sera exécutée $\min(m, n)$ fois.

   On arrive à un total de $1 + \min(m, n)$ affectations.
6. Le nombre d'affectations de l'algorithme **F** est de :
   — 1 affectation pour l'initialisation.
   — 1 affectation par itération de la boucle . Cette boucle sera exécutée $\max(m, n)$ fois.

   On arrive à un total de $1 + \max(m, n)$ affectations.
7. Le nombre d'affectations de l'algorithme **G** est de :
   — 2 affectations pour l'initialisation.
   — 1 affectation par itération de la boucle . Cette boucle sera exécutée $(m+n)$ fois.

   On arrive à un total de $2 + (m+n)$ affectations.
8. Le nombre d'affectations de l'algorithme **H** est de :
   — 2 affectations pour l'initialisation.
   — 1 affectation par itération de la boucle . Cette boucle sera exécutée $(m \times n)$ fois.

   On arrive à un total de $2 + (m \times n)$ affectations.
9. Les algorithmes **A**, **B**, **E**, **F**, **G** sont des algorithmes linéaires. Les algorithmes **C**, **D**, **H** sont des algorithmes quadratiques.

Exercice 3 – $\mathcal{P}$ **Algorithme mystère**

1. Que calcule l'algorithme suivant ? Donner une preuve de votre réponse.

Algorithme 1.9 $f(n$ **: entier) : entier**

Debut
$r \leftarrow 0$
pour i **de 1 à** n **faire**
$r \leftarrow 2r + 1$
fin pour
retourner r

Fin

2. Que calcule l'algorithme suivant et quelle est sa complexité ? Environ quel temps faut-il pour calculer $g(100)$ en supposant que l'on fait 10^{10} additions par secondes.

Algorithme 1.10 $g(n$ **: entier) : entier**

Debut
si $(n = 0)$
retourner 0

sinon
retourner (g(n-1)+g(n-1)+1)
fin si

Fin

Correction exercice 3

1. L'algorithme calcule $2^n - 1$. Si l'on calcule les premières itérations on obtient les valeurs suivantes pour r : $1, 3, 7, 15, \ldots$.
2. Cet algorithme calcule aussi $2^n - 1$.

Exercice 4 – $\mathcal{P}$ **Minimum d'un tableau**

Pour un tableau t, on note $t.n$ sa taille et $t[i]$ l'élément d'indice i qui doit être compris entre 0 et $t.n - 1$.

1. Écrire un algorithme qui retourne la valeur minimale d'un tableau.
2. Combien de comparaisons effectue cet algorithme (on ne compte que les comparaisons avec des valeurs du tableau) en fonction de $t.n$?
3. Comment modifier l'algorithme précédent afin de calculer la valeur maximale du tableau ? On suppose qu'on dispose de l'opération $-t$ qui change le signe des valeurs du tableau.
4. Écrire alors un algorithme qui retourne les valeurs à la fois du minimum et du maximum dans ce tableau. Combien de comparaisons fait-il ?
5. Trouver un algorithme qui n'effectue que $\frac{3n}{2}$ comparaisons.
6. Écrire un algorithme qui retourne les 2 plus grandes valeurs du tableau, et donner son coût.
7. Sur un tableau de 8 entiers, trouver une méthode qui permet de calculer les 2 plus grandes valeurs en ne faisant que 9 comparaisons.
8. Écrire l'algorithme correspondant dans le cas général.

Correction exercice 4

1. Voici l'algorithme de recherche d'un élément minimum dans un tableau.

$Minimum(t$ **: tableau**) **: entier**

```
Debut
  i ← 0
  ind_min ← 0
  tant que (i < t.n)  faire
     si (t[i] < t[ind_min])
        ind_min ← i

     fin si
    i ← i + 1

  fin tant que
  retourner t[ind_min]

Fin
```

2. A chaque itération il y a une comparaison entre les éléments du tableau. L'algorithme fait $t.n$ itérations. Au total il y a donc $t.n$ comparaisons.
3. Pour modifier l'algorithme, plusieurs façon de le faire :
   — Soit on change juste le $<$ par un $>$.
   — Soit on utilise l'algorithme Minimum sur le tableau $-t$ au lieu du tableau t.
4. Un algorithme qui recherche à la fois le minimum et le maximum du tableau pourrait ressembler à :

$Min\_Max(t$ **: tableau**) **: 2 entiers**

```
Debut
  min ← Minimum(t)
  max ← Maximum(-t)
  retourner min, max

Fin
```

5. L'idée d'un algorithme qui effectue $\frac{3n}{2}$ comparaisons pour trouver à la fois le minimum et le maximum est de regrouper les éléments par paire. Pour une paire donnée, on va donc comparer la plus petite des 2 valeurs à la valeur minimale connue jusqu'à présent et on fera pareil entre la plus grande des 2 valeurs et la valeur maximale connue. Ce qui revient à dire que pour chaque paire, on fait une comparaison entre les éléments de la paire pour connaitre la plus grande et la plus petite des 2 valeurs, ensuite on fait les comparaisons avec le minimum et le maximum. Ce qui au total fait 3 comparaisons par paire d'éléments et il y au total $\frac{n}{2}$ paires d'éléments d'où le résultat.
6. Voici un algorithme naïf pour répondre à la question :

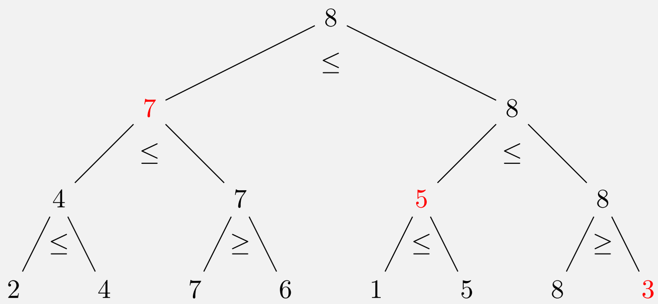
$2\_plus\_grandes\_valeurs(t$ **: tableau**) **: 2 entiers**

```
Debut
  i ← 0
  ind_max1 ← 0
  tant que (i < t.n)  faire
     si (t[i] < t[ind_max1])
        ind_max1 ← i
```

```
            fin si
          i ← i + 1

        fin tant que
        si ind_max1 = 0  alors
          ind_max2 = 1
        sinon
          ind_max2 = 0
        fin si
       i ← 0
        tant que (i < t.n et i ≠ ind_max1)  faire
            si (t[i] < t[ind_max2])
               ind_max2 ← i

            fin si
          i ← i + 1

        fin tant que
        retourner t[ind_max1] et t[ind_max2]

    Fin
```

Cet algorithme coûte en nombre de comparaisons (des éléments entre eux) :
— première boucle : n comparaisons
— deuxième boucle $n-1$ comparaisons
Au total, cela donne $2n-1$ comparaisons.

7. Il s'agit ici de modéliser la recherche de la plus grande valeur comme lors d'un tournoi de tennis par exemple. Voici un exemple sur 8 entiers, pour trouver l'élément maximum. Pour trouver le deuxième plus grand il est nécessairement parmi les éléments marqués en rouge sur la figure ci-dessous, c'est-à-dire tous les éléments qui ont été comparés à la plus grande valeur. Dans notre cas, il va donc falloir en plus des 7 comparaisons représentées sur la figure, comparer 3 et 5 puis 5 et 7. Ce qui fera bien 9 comparaisons en tout.



Exercice 5 – $\mathcal{D}$ **Sous-sommes d'un tableau**

On considère un tableau t de n entiers signés (positifs et négatifs). On veut trouver un sous-tableau de t (c'est-à-dire un ensemble d'éléments consécutifs de t) ayant la somme maximale.

1. Quel est le sous-tableau ayant la somme maximale dans le tableau suivant :

$$1, 4, -5, 5, -1, 1, 4, -1$$

2. Écrire un algorithme qui prend en entrée deux indices g et d avec $0 \leq g \leq d \leq n-1$ et qui retourne la somme des éléments du sous tableau compris entre les indices g et d.
3. Écrire un algorithme qui retourne la somme maximale parmi tous les couples (g, d) possibles. Vous pouvez utilisez l'algorithme précédent.

Correction exercice 5

1. Il y a deux sous-tableau de somme maximale : $1, 4, -5, 5 - 1, 14$ et $5, -1, 1, 4$ dont la somme vaut 9.
2. Un algorithme qui calcule la somme des éléments d'un tableau entre les indices g et d est :

sous_somme(t **: tableau,** g **: entier,** d **: entier**) **: entier**

Debut
  i $\leftarrow g$
  somme $\leftarrow$ **0**
  tant que (i $\leq d$**) faire**
    somme $\leftarrow$ **somme** + t**[i]**
    i $\leftarrow$ **i + 1**
  fin tant que
  retourner somme
Fin

3. Un algorithme qui retourne la somme maximale parmi tous les couples possibles est le suivant :

somme_max(t **: tableau) : entier**

Debut
  max $\leftarrow$ **0**
  pour l **de 1 à** n **faire**
    pour g **de 1 à** $n - l + 1$ **faire**
      somme $\leftarrow$ **sous_somme(**$t, g, g + l - 1$**)**
      si (max < somme)
        max $\leftarrow$ **somme**
      fin si
    fin pour
  fin pour retourner max
Fin

Exercice 6 – $\mathcal{D}$ **Polynôme**

Un polynôme s'écrit $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$. On stocke le polynôme dans un tableau qui contient ses coefficients $(a_0, \ldots, a_n)$ à l'indice correspondant.

1. Écrire un algorithme qui retourne la somme de deux polynômes.
2. Écrire un algorithme qui retourne la dérivée d'un polynôme.
3. Écrire un algorithme qui retourne le produit de deux polynômes.

Correction exercice 6

On supposera que dans la suite tous les tableaux représentant des polynômes sont de taille $n + 1$.

1.

somme_polynome(p : **tableau,** q : **tableau**) : **tableau**

Debut

▷ ***Variables Locales***

i : **entier**

R : **tableau**

pour i **de 0 à** n **faire**

R[i] ← P[i] + Q[i]

fin pour

retourner R

Fin

2.

derive_polynome(p : **tableau**) : **tableau**

Debut

▷ ***Variables Locales***

i : **entier**

R : **tableau**

pour i **de 1 à** n **faire**

R[i-1] ← P[i] * i

fin pour

R[n] ← 0

retourner R

Fin

3. Soit $p = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ alors leur produit vaut $r = \sum_{k=0}^{n+n} (\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}) x^k$. L'algorithme se déduit directement de la formule

produit_polynome(p : **tableau,** q : **tableau**) : **tableau**

Debut

▷ ***Variables Locales***

i : **entier**

R : **tableau**

pour k **de 0 à** $2n$ **faire**

r[k] ← 0

pour i de 0 à k faire

r[k] ← r[k] + p[i]*q[k-i]

fin pour

fin pour

retourner R

Fin

Exercice 7 – $\mathcal{D}$ **Taille d'un entier**

1. Écrire un algorithme itératif et un algorithme récursif qui prend en entrée un entier n et renvoie sa taille en base 10. La taille d'un entier est le nombre de chiffres qu'il faut pour l'écrire dans sa représentation en base 10.
2. Quelle est la complexité de l'algorithme d'addition de deux nombres entiers que l'on apprend à l'école ?

Correction exercice 7

1. Si l'on prend l'entier 4563, l'algorithme doit nous renvoyer 4. Il faut faire ici des divisions successives par 10 jusqu'à obtenir un reste plus petit que 10 et compter le nombre de divisions que l'on fait. La taille sera donc le nombre de divisions effectuées + 1 (qui correspond au reste).

   Voici un algorithme itératif :

```
taille_entier(n : entier ) :entier
Debut
▷ Variables Locales
   r, taille : entier
   taille ← 0
   r ← n
   tant que (r > 10)  faire
      r = r / 10 ;
      taille ← taille + 1

   fin tant que
   retourner taille + 1

Fin
```

   Voici un algorithme récursif :

```
taille_entier(n : entier ) :entier
Debut
▷ Variables Locales
   r, taille : entier
   si (n < 10)
      retourner 1
   sinon
      retourner taille_entier(n/10) + 1
   fin si

Fin
```

2. L'addition de de deux entiers est faite en additionant, les chiffres des unités entre eux et ensuite des dizaines, puis des centaines, etc. Le nombre d'opérations élémentaires dépend donc de la taille des 2 entiers et plus précisément de la taille du plus grand des 2 entiers.

Exercice 8 – $\mathcal{D}$ **Tableau unimodal**

Un tableau t de n entiers est unimodal s'il est d'abord croissant puis décroissant. Dit autrement, il existe un indice m, avec $0 \leq m \leq n-1$ tel que

— $t[i] \leq t[i+1]$ pour $0 \leq i \leq m-1$ et

— $t[i] \geq t[i+1]$ pour $m \leq i < n-1$

En particulier, $t[m]$ est l'élément maximal. Notez qu'un tableau trié est un tableau unimodal ($m = n-1$ si il est trié en ordre croissant).

Dans cet exercice, on suppose que toutes les valeurs du tableau sont distinctes.

1. Écrire un algorithme qui teste si un tableau est unimodal : votre algorithme doit retourner `vrai` s'il l'est, et `faux` sinon.
2. Écrire un algorithme qui calcule l'élément maximal du tableau unimodal t de complexité $O(\log n)$.

3. Pour la classe des tableaux triés, des tableaux unimodaux et des tableaux quelconques, comparer la complexité des algorithmes de la recherche du maximum et de la recherche d'une valeur.

Correction exercice 8

1. Un exemple de tableau unimodal est le suivant :

1	3	5	7	10	6	4	2

Les éléments compris entre la position 0 dans le tableau et la position 4 sont croissants puis de la position 5 à 7 les éléments sont en ordre décroissant.

Dans l'algorithme suivant, t est le tableau, n est sa taille. La variable croissant vaut 1 quand le tableau est croissant et 0 sinon.

$Verif\_unimodal(t$ **: tableau, n : entier) : booléen**

```
Debut
▷ Variables Locales
   croissant : entier
   croissant ← 1
    pour i de 0 à n-2  faire
        si croissant = 1 et t[i] ≤ t[i+1]
           croissant = 0
        si croissant = 0 et t[i] ≥ t[i+1]
            retourner faux
    fin pour
    retourner vrai

Fin
```

2. Pour atteindre une complexité en $O(\log n)$ il faut couper le tableau pour n'explorer qu'une partie du tableau, comme on le fait avec une recherche dichotomique. Ici le principe va être le suivant :
   - pour un tableau a un seul élément, l'élément maximal est cet élément.
   - Dans un tableau *unimodal* dont les éléments sont compris entre les indices g et d. On va calculer l'indice m, au milieu de ce sous-tableau. Si $t[m] < t[m+1]$, alors on va chercher l'élément maximal entre les indices $m+1$ et d, sinon on va chercher entre les indices g et m. L'algorithme s'écrit donc :

Max_unimodal(t : tableau, g : entier, d : entier) : booléen

```
Debut
    si (g > d)
       m ← (g+d) / 2
        si (t[m] < t[m+1])  retourner Max_unimodal(t,m+1,d)
        sinon  retourner Max_unimodal(t,g,m)
        fin si
    sinon  retourner t[g]
    fin si
Fin
```

3. Une synthèse pour la recherche du maximum et la recherche d'un élément dans différents tableaux de taille n.

	Recherche d'un élément	Recherche du maximum
Tableau quelconque	$O(n)$	$O(n)$
Tableau unimodal	$O(n)$	$O(\log n)$
Tableau Trié	$O(\log n)$	$O(1)$

Exercice 9 – $\mathcal{D}$ **Doublons**

1. Dans un tableau de n entiers, proposer un algorithme qui retourne un tableau dans lequel les doublons ont été supprimés.
2. Même question si le tableau est trié.
3. Pour la première question, est-il intéressant de le trier et d'appliquer ensuite l'algorithme sur les tableaux triés (la complexité du tri est $O(n \log n)$) ?

Correction exercice 9

1. Supposons que nous ayons un tableau T en entrée et que nous voulions créer un tableau S en sortie qui contient les éléments de T sans les doublons. L'algorithme consiste à parcourir le tableau T et pour chaque élément on va vérifier s'il est déjà dans le tableau S, si oui on passe à l'élément suivant sinon on insère l'élément dans le tableau S et on passe à l'élément suivant dans le tableau T. Ce qui conduit à une complexité de $O(n^2)$.
2. Si le tableau est trié, c'est plus facile car les doublons se suivent dans le tableau, il suffit de parcourir le tableau T, et de rajouter les éléments de T dans S que si le dernier élément inséré dans S est différent de l'élement de T à insérer. On a une complexité en $O(n)$.
3. Il est donc plus efficace de trier le tableau avec un tri en $O(n \log n)$ puis d'appliquer l'algorithme de la question 2 que d'appliquer l'algorithme de la question 1.

1.2 Les tris

Pour cette partie, nous allons faire un TD commun avec le module IN301. Le sujet du TD se trouve dans le polycop de TD d'IN301 dans l'espace moodle LSIN301.

1.3 Les piles et les files

On rappelle les primitives de manipulation des **piles** :
- `creer_pile(): Pile` : créé et retourne une pile vide ;
- `pile_vide(p: Pile): booleen` : teste si une pile est vide ;
- `empiler(p: Pile, x: entier)` : insère l'entier x dans la pile ;
- `depiler(p: Pile): entier` : retire l'entier sur le dessus de la pile et retourne sa valeur ;

et des **files** :
- `creer_file(): File` : créé et retourne une file vide ;
- `file_vide(f: File): booleen` : teste si une file est vide ;
- `insere_file(f: File, x: entier)` : insère l'entier x dans la file ;
- `supprime_file(f: File): entier` : retire un entier de la file et retourne sa valeur ;

Exercice 10 – $\mathcal{P}$ **Manipulations diverses**

Pour traiter les questions suivantes, vous pouvez utiliser des variables locales de type Pile ou File.

1. Écrire un algorithme qui inverse l'ordre des éléments d'une pile.
2. Écrire un algorithme qui supprime un élément sur deux d'une pile. L'ordre des éléments doit être conservé.

3. Écrire un algorithme qui, étant donnée une pile, retourne deux piles qui contiennent respectivement tous les entiers pairs et tous les entiers impairs.
4. Ecrire un algorithme qui étant donnée une pile P_1 stocke dans une pile P_2 les nombres pairs contenus dans P_1. Le contenu de P_1 est inchangé après l'exécution de l'algorithme. Les nombres pairs stockés dans P_2 doivent être dans le même ordre que dans P_1.

Correction exercice 10

1. Un algorithme qui inverse l'ordre des éléments d'une pile.

```
Inverse( P : Pile ) :Pile
  Debut
  ▷ Variables Locales
    x : entier; P2 : Pile
    P2 ← creer_pile()
     tant que pile_vide(P) ≠ vrai  faire
        x ← depiler(P)
        empiler(P2,x)
     fin tant que
    retourner P2

  Fin
```

2. Un algorithme qui supprime un élément sur deux de la pile.

```
un_sur_deux( P : Pile ) :Pile
  Debut
  ▷ Variables Locales
    x : entier; inter : Pile
    inter ← creer_pile()
     tant que pile_vide(P) ≠ vrai  faire
        x ← depiler(P)
        empiler(inter,x)
        depiler(P)
     fin tant que
    p ← Inverse(inter)
    retourner P

  Fin
```

3. Un algorithme qui renvoie 2 piles : l'une avec les entiers pairs de la pile d'entrée, l'autre avec les entiers impairs.

```
pair_impair( P : Pile ) :Pile, Pile
  Debut
  ▷ Variables Locales
    x : entier; pair, impair : Pile
    pair ← creer_pile()
    impair ← creer_pile()
     tant que pile_vide(P) ≠ vrai  faire
        x ← depiler(P)
         si x modulo 2 = 0  alors
            empiler(pair,x)
         sinon
```

```
                empiler(imppair,x)
             fin si
         fin tant que
        retourner pair, impair

     Fin
```

4. un algorithme qui renvoie les entiers pairs contenus dans la pile d'entrée. La pile d'entrée est inchangée.

pair(P1 : Pile) :Pile

```
     Debut
     ▷ Variables Locales
        x : entier ; pair, inter,P2 : Pile
        pair ← creer_pile()
        inter ← creer_pile()
        P2 ← creer_pile()
         tant que pile_vide(P1) ≠ vrai  faire
            x ← depiler(P1)
             si x modulo 2 = 0  alors
                empiler(pair,x)
             fin si
         fin tant que
        P2 ← Inverse(pair)
        P1 ← Inverse(inter)
        retourner P2

     Fin
```

Exercice 11 – $\mathcal{P}$ **Implémentation d'une file par deux piles**

Proposer une façon d'implémenter une file avec deux piles, puis écrire les primitives de manipulation des files à partir des primitives des piles. Donner la complexité de vos algorithmes.

Correction exercice 11

On commence par se définir une structure de données :

```
Enregistrement File {
 Pile e
 Pile s
}
```

Ensuite nous allons réécrire les primitives d'accès à une file à l'aide de cette nouvelle structure de données.

1. Création d'une file

Creer_File( ) :File

```
     Debut
     ▷ Variable Locale
        F : File
        F.e ← creer_pile()
        F.s ← creer_pile()

     Fin
```

La complexité de cet algorithme est en $O(1)$.

2. La file est-elle vide ?

File_Vide(F : File) : booleen

Debut
si pile_vide(F.e) = vrai et pile_vide(F.s) = vrai alors
retourner vrai
sinon
retourner faux
fin si
Fin

La complexité de cet algorithme est en $O(1)$

3. Insérer un élément dans la file

Inserer_File(F : File, x : entier)

Debut
empiler (F.e,x)
Fin

La complexité de cet algorithme est en $O(1)$

4. Supprimer un élément de la file

Supprimer_File (F : File) : entier

Debut
F.s ← Inverse(F.e)
x ← depiler(F.s)
F.e ← Inverse(F.s)
retourner x
Fin

La complexité de cet algorithme est en $O(n)$.

Exercice 12 – $\mathcal{P}$ **Implémentation d'une pile par deux files**

Proposer une façon d'implémenter une pile avec deux files, puis écrire les primitives de manipulation des piles à partir des primitives des files. Donner la complexité de vos algorithmes.

Correction exercice 12

On commence par se définir une structure de données :

```
Enregistrement Pile {
 File e
 File s
}
```

Ensuite nous allons réécrire les primitives d'accès à une pile à l'aide de cette nouvelle structure de données.

1. Création d'une pile

Creer_Pile( ) :Pile

Debut
▷ ***Variable Locale***
P : Pile
P.e ← creer_file()

P.s ← creer_file()

Fin

La complexité de cet algorithme est en $O(1)$.

2. La pile est-elle vide ?

Pile_Vide(P : Pile) : booleen

```
Debut
    si file_vide(P.e) = vrai et file_vide(P.s) = vrai  alors
        retourner vrai
    sinon
        retourner faux
    fin si
Fin
```

La complexité de cet algorithme est en $O(1)$

3. Insérer un élément dans la file

Inserer_Pile(P : Pile, x : entier)

```
Debut
    insere_file (P.e,x)
Fin
```

La complexité de cet algorithme est en $O(1)$

4. Supprimer un élément de la file

Supprimer_Pile (P : Pile) : entier

```
▷ Variables Locales
    x, elt : entier
Debut
    tant que file_vide(P.e) ≠ vrai  faire
        x ← supprime_file(P.e)
        si file_vide(P.e) = faux  alors insere_file(f.s,x)
    fin tant que
    elt ← x
    tant que file_vide(P.s) ≠ vrai  faire
        x ← supprime_file(P.s)
        insere_file(P.e,x)
    fin tant que
    retourner elt
Fin
```

La complexité de cet algorithme est en $O(n)$.

1.4 Les arbres

Exercice 13 – Parcours d'arbres

La liste des valeurs suivantes :

$$15, 5, 9, 12, 2, 4, 11, 3, 7, 8, 1, 6, 10, 13, 14$$

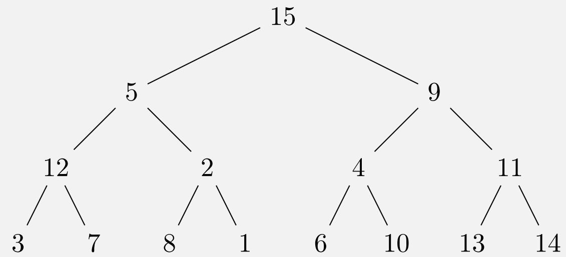
a été mémorisée sous forme d'arbre binaire. Il s'agit de la liste des valeurs obtenues par un parcours en largeur dans un arbre binaire.

1. Dessiner l'arbre obtenu.

2. Quel est l'ordre des valeurs que l'on obtient quand on fait un parcours infixe ?
3. Et avec des parcours préfixe et postfixe ?
4. Quels sont tous les arbres qui ont pour parcours préfixe :$1, 2, 3$? Pour chacun des ces arbres, donnez le parcours postfixe et infixe correspondant.
5. Existe-t-il un arbre à 8 nœuds dont le parcours préfixe est $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ et le parcours postfixe est $4, 3, 5, 2, 7, 8, 6, 1$? Si oui le dessiner, si non le justifier.
6. Même question mais avec le parcours postfixe $5, 3, 2, 4, 7, 6, 8, 1$.
7. Écrire un algo qui prend en entrée deux tableaux `t_pre` et `t_post` de même taille n et qui contiennent chacun toutes les valeurs de 1 à n (comme dans les 2 questions précédentes). Cet algorithme retourne `vrai` si ces deux tableaux peuvent être les parcours préfixe (pour `t_pre`) et postfixe (pour `t_post`) d'un même arbre binaire, et `faux` sinon.

Correction exercice 13

1. L'arbre obtenu est le suivant :



2. Le parcours infixe de l'arbre précédent donne la liste suivante des sommets :

$$3, 12, 7, 5, 8, 2, 1, 15, 6, 4, 10, 9, 13, 11, 14$$

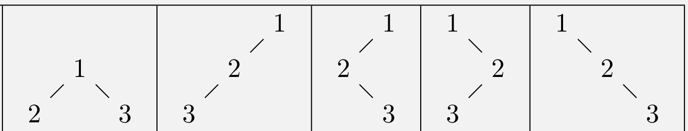
3. Le parcours préfixe de l'arbre précédent donne la liste suivante des sommets :

$$15, 5, 12, 3, 7, 2, 8, 1, 9, 4, 6, 10, 11, 13, 14$$

Le parcours postfixe de l'arbre précédent donne la liste suivante des sommets :

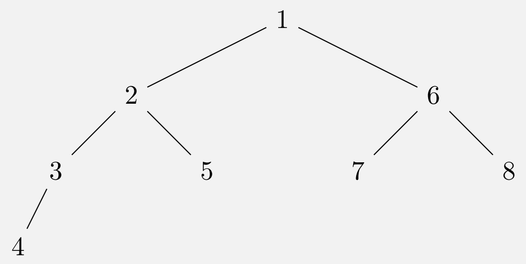
$$3, 7, 12, 8, 1, 2, 5, 6, 10, 4, 13, 14, 11, 9, 15$$

4. Voici tous les arbres dont le parcours préfixe est $1, 2, 3$:



infixe :	$2, 1, 3$	$3, 2, 1$	$2, 3, 1$	$1, 3, 2$	$1, 2, 3$
postfixe :	$2, 3, 1$	$3, 2, 1$	$3, 2, 1$	$3, 2, 1$	$3, 2, 1$

5. L'arbre a 8 noeuds dont le parcours prefixe est $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ et le parcours postfixe est $4, 3, 5, 2, 7, 8, 6, 1$ est :



6. Il n'est pas possible de trouver un arbre binaire dont le parcours postfixe est $5, 3, 2, 4, 7, 6, 8, 1$ et le parcours préfixe est $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$. La racine de l'arbre représenté est 1, le parcours préfixe nous donne la racine de son sous-arbre gauche (2), le parcours postfixe, la racine de son sous-arbre droit (8). Ensuite dans le parcours postfixe, tous les noeuds qui sont avant le noeud 2 dans le parcours sont des descendants de 2 dans l'arbre. Ici il s'agit de 5 et 3. Il n'y a aucun autre noeud entre eux. Dans le parcours prefixe, on devrait donc trouver la suite $2, 5, 3$. Or ce n'est pas le cas. Ce qui n'est pas compatible. L'arbre n'existe donc pas.

Exercice 14 – Arbres Binaires

On considère la structure de données `arbre binaire`. Ecrire les fonctions suivantes :

— `Hauteur` qui calcule la hauteur d'un arbre.
— `NombreNoeuds` qui calcule le nombre de nœuds d'un arbre binaire
— `Descendants` qui calcule et stocke en chaque nœud de l'arbre, le nombre de ses descendants.
— `Un_Fils` qui calcule le nombre de sommets ayant exactement un fils
— `Complet` qui renvoie `vrai` si l'arbre est un arbre complet et `faux` sinon.

Correction exercice 14

1. Un algorithme qui calcule la hauteur d'un arbre :

Hauteur d'un arbre binaire

hauteur(r : Nœud) : Entier
▷ **Entrée :** ***r (la racine d'un arbre)***
▷ **Sortie :** ***la hauteur de l'arbre enraciné en r***
Debut
si r = NIL alors retourner -1
sinon retourner 1+ max (hauteur(r.sag) ; hauteur(r.sad))
Fin

2. Un algorithme qui calcule le nombre de nœuds d'un arbre binaire

Nombre de noeuds d'un arbre binaire

NombreNoeuds(r : Nœud) : Entier
▷ **Entrée :** ***r (la racine d'un arbre)***
▷ **Sortie :** ***le nombre de noeuds de l'arbre enraciné en r***
Debut
si r = NIL alors retourner 0
sinon retourner 1+ NombreNoeuds(r.sag) + NombreNoeuds(r.sad)
Fin

3. Un algorithme qui calcule calcule le nombre de sommets ayant exactement un fils

Nombre de noeuds ayant un fils d'un arbre binaire

UnFils(r : Nœud) : Entier
▷ **Entrée :** ***r (la racine d'un arbre)***
▷ **Sortie :** ***le nombre de noeuds ayant un fils de l'arbre enraciné en r***

Debut
si r = NIL alors retourner 0
sinon si r.sag = NIL et r.sad = NIL
retourner 0
sinon si r.sag = NIL et r.sad ≠ NIL
retourner 1 + UnFils(r.sad)
sinon si r.sag ≠ NIL et r.sad = NIL
retourner 1 + UnFils(r.sag)
sinon
retourner UnFils(r.sag) + UnFils(r.sad)
fin si
Fin

4. un algorithme texttttDescendants qui calcule en chaque nœud de l'arbre, le nombre de ses descendants. On va rajouter un champ à la structure de données du cours qui est un champ `desc` de type entier.

Nombre de descendants d'un arbre binaire

Descendants(r : Nœud) : Entier
▷ **Entrée :** ***r (la racine d'un arbre)***
▷ **Sortie :** ***le nombre de descendants de l'arbre enraciné en r***
Debut
r.desc = 0
si r.sag ≠ NIL et r.sad ≠ NIL
r.desc = 2 + Descendants(r.sad) + Descendants(r.sag)
retourner 2 + Descendants(r.sad) + Descendants(r.sag)
sinon si r.sag ≠ NIL et r.sad = NIL
r.desc = 1 + Descendants(r.sag)
retourner 1 + Descendants(r.sag)
sinon si r.sag = NIL et r.sad =≠ NIL
r.desc = 1 + Descendants(r.sad)
retourner 1 + Descendants(r.sad)
fin si
Fin

5. `Complet` qui renvoie `vrai` si l'arbre est un arbre complet et `faux` sinon.

Un arbre binaire est complet si pour une hauteur h donnée, son nombre de noeuds est de $2^{h+1} - 1$.

Vérification si arbre est complet

Complet(r : Nœud) : Booleen
▷ **Entrée :** ***r (la racine d'un arbre)***
▷ **Sortie :** ***vrai si l'arbre enraciné en r est complet faux sinon***
Debut
h ← hauteur(r)
n = NombreNoeuds(r)
si n = $2^{h+1} - 1$
retourner vrai
sinon
retourner faux
fin si
Fin

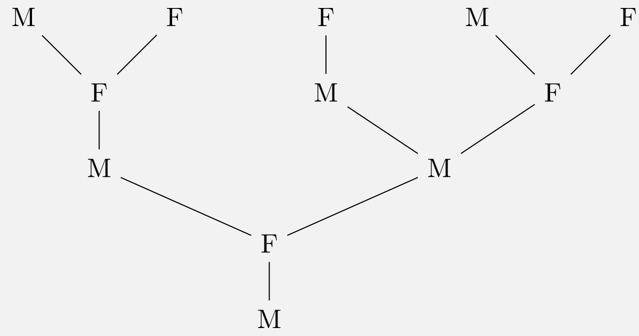
Exercice 15 – Bee Trees

Une abeille mâle est produite de manière asexuée à partir d'une abeille femelle. Par contre, une abeille femelle a deux parents : un mâle et une femelle.

1. Représenter l'arbre généalogique d'une abeille mâle jusqu'à la quatrième génération.
2. Combien une abeille mâle a-t-elle d'ancêtres de niveau 1 ? de niveau 2 ? de niveau n ?

Correction exercice 15

1. Arbre généalogique d'une abeille mâle jusqu'à la quatrième génération.



2. Une abeille mâle a 1 ancêtre de niveau 1. Elle a 2 ancêtres de niveau 2. Le calcul du nombre d'ancêtre de niveau n= nombre d'ancêtres de niveau $n-1$ + nombre d'ancêtres de niveau $n-2$.

Exercice 16 – Nombre de Strahler

On définit récursivement une fonction entière ϕ sur l'ensemble des arbres binaires. Appelons $sag(A)$ et $sad(A)$ le sous-arbre gauche et le sous-arbre droit d'un arbre binaire A :

$$\phi(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ est l'arbre vide} \\ \max(\phi(sag(A)), \phi(sad(A)) & \text{si} \phi(sag(A)) \neq \phi(sad(A)) \\ \phi(sad(A)) + 1 & \text{si} \phi(sag(A)) = \phi(sad(A)) \end{cases}$$

Cette fonction ϕ permet d'associer à tout arbre binaire un nombre dit de Strahler.

1. Quel est le nombre de Strahler d'un arbre binaire complet de hauteur n ? le nombre de Strahler d'un arbre binaire dégénéré de hauteur n ?
2. Donner une procédure récursive qui calcule le nombre de Strahler d'un arbre binaire.

Correction exercice 16

1. Un arbre binaire complet de hauteur n a un nombre de Strahler de $phi(A) = n + 1$.
2. Un arbre binaire dégénéré de hauteur n a un nombre de Strahler de $phi(A) = 1$.
3.

Algorithme 1.11 Calcul de $\phi(A)$

```
Strahler(r : Nœud) : entier
▷ Entrée : r (la racine d'un arbre)
▷ Sortie : nombre de Strahler de l'arbre enraciné en r
 Debut
     si r = ∅
          retourner 0 ;
     sinon
         gauche ← Strahler(r.Gauche) ;
         droit ← Strahler(r.Droit) ;
          si gauche ≠ droit  retourner max(gauche,droit)
          sinon  retourner droit + 1
     fin si
 Fin
```

1.5 Arbres Binaires de Recherche

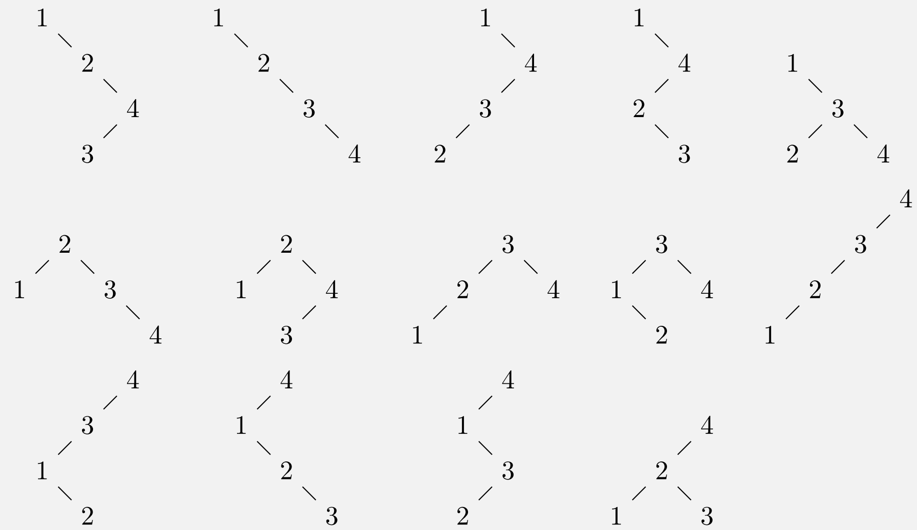
Exercice 17 –

1. Enumérez tous les ABR qui contiennent les valeurs $1, 2, 3, 4$.
2. Construire un arbre binaire de recherche en insérant successivement 6,3,5,16,10,1,88,4,14,19,32. Vous représenterez chacune des étapes.

3. On considère maintenant l'ABR dont le parcours préfixe est 8,5,2,1,4,3,7,12,10,15. Dessiner un arbre compatible avec ce parcours. Est-il unique ?
4. En utilisant les algos `min(a)` et `max(a)` qui retournent respectivement la valeur minimale et maximale d'un arbre `a` non vide, écrire un algorithme qui teste si un arbre binaire est un ABR.
5. Donner la complexité de l'algorithme en nombre de comparaisons de valeurs de l'arbre dans le cas où l'arbre est filiforme et dans le cas où il est complet.

Correction exercice 17

1. Il y a 14 ABR différents possibles.

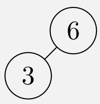


2. Voici les différentes étapes d'insertion aux feuilles dans un ABR.

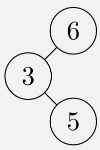
   a) Insertion de 6

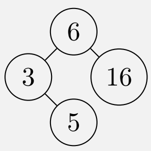
   b) Insertion de 3

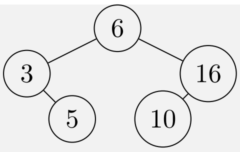
   c) Insertion de 5

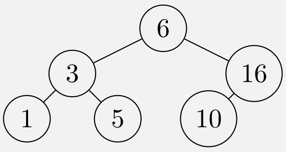
   d) Insertion de 16

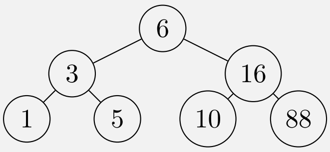
   e) Insertion de 10



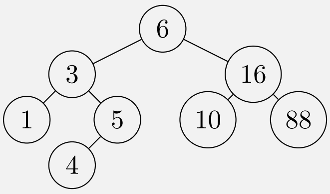
f) Insertion de 1



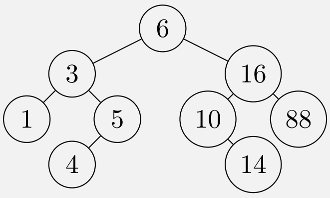
g) Insertion de 88



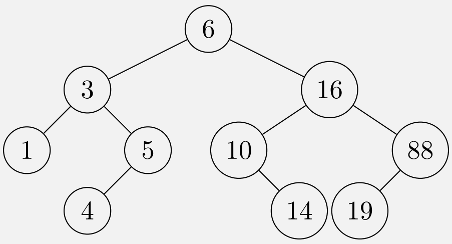
h) Insertion de 4



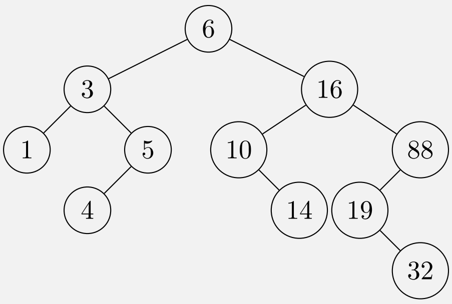
i) Insertion de 14



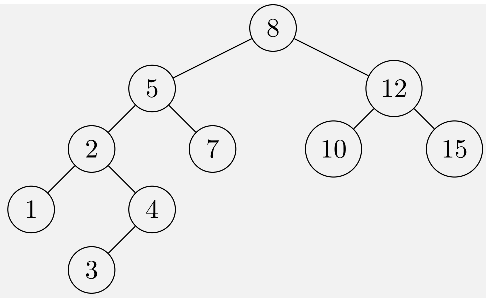
j) Insertion de 19



k) Insertion de 32



3. Voici l'unique ABR obtenu à partir du parcours préfixe : 8,5,2,1,4,3,7,12,10,15.



4.

Un arbre est-il un ABR ?

```
estABR(a : Nœud) : booleen
▷ Entrée : a (la racine d'un arbre)
▷ Sortie : vrai si l'arbre enraciné en a est un ABR faux sinon
▷ Variables locales : gauche,droite :entier
 Debut
     si a = NIL  alors  retourner vrai
     sinon  si a.sag = NIL
         gauche ← a.val
     sinon
         gauche ← max(a.sag)
     fin si
     si a.sad = NIL
         droite ← a.val
     sinon
         droite ← max(a.sad)
     fin si
     retourner (est_ABR(a.sag) et est_ABR(a.sad) et (gauche ≤ a.val ≤ droite))
 fin si
 Fin
```

5. Dans le cas où l'arbre est filiforme, il y a 2 comparaisons faites à chaque noeud de l'arbre. Donc la complexité est en $O(n)$. Dans le cas où l'arbre est complet, le nombre de comparaisons est aussi en $O(n)$.

Exercice 18 – Arbres Binaires de Recherche

Vous écrirez les algorithmes qui répondent aux définitions suivantes :

1. Un ABR A est *contenu* dans un ABR B si tous les éléments de A sont contenus dans B. Ecrire un algorithme qui teste si un ABR est contenu dans un autre sans utiliser de structures de données complémentaires. Ecrire ce même algorithme en utilisant une structure de données annexe. Comparez les complexités des deux algorithmes.
2. 2 ABR sont dits *équivalents* s'ils contiennent exactement les mêmes éléments. Ecrire un algorithme qui teste si 2 ABR sont équivalents sans utiliser de structures de données complémentaires. Ecrire ce même algorithme en utilisant une structure de données annexe. Comparez les complexités des deux algorithmes.
3. Un ABR A est dit de *domaine plus petit* qu'un ABR B si le plus petit élément de A est supérieur ou égal au plus petit élément de B et si le plus grand élément de A est inférieur ou égal au plus grand élément de B. Ecrire un algorithme (non récursif) qui teste si un ABR est de domaine plus petit qu'un autre.

Correction exercice 18

1. Pour savoir si ABR A est contenu dans un ABR B, sans utiliser de structure de données complémentaires, il suffit de faire un parcours de l'arbre A et de vérifier pour chaque noeud rencontré, s'il est dans l'arbre B. En utilisant une structure de données complémentaires, il suffit de faire un parcours (par exemple infixe) dans chacun des arbres et on doit retrouver les noeuds dans le même ordre dans les 2 parcours avec éventuellement

des noeuds supplémentaires dans l'arbre B.

2. Pour savoir si un ABR A est équivalent à un ABR B, il suffit de vérifier que A est contenu dans B et vice-versa.
3. Il suffit de comparer les plus petits et les plus grands éléments de chaque arbre.

Exercice 19 – Arbres binaires de recherche

On suppose que les entiers compris entre 1 et 1000 sont disposés dans un arbre binaire de recherche, et on souhaite retrouver le nombre 363. Parmi les séquences suivantes, lesquelles pourraient et ne pourraient pas être la séquence de nœuds parcourus ? Vous justifierez votre réponse.

1. 2, 252, 401, 398, 330, 344, 397, 363.
2. 924, 220, 911, 244, 898, 258, 362, 363.
3. 925, 202, 911, 240, 912, 245, 363.
4. 2, 399, 387, 219, 266, 382, 381, 278, 363.
5. 935, 278, 347, 621, 299, 392, 358, 363.

Correction exercice 19

1. 2, 252, 401, 398, 330, 344, 397, 363. **Chemin valide**
2. 924, 220, 911, 244, 898, 258, 362, 363. **Chemin valide**
3. 925, 202, 911, 240, 912, 245, 363. **Chemin non valide : 912 est dans le sag de 911, ce qui n'est pas possible dans un ABR.**
4. 2, 399, 387, 219, 266, 382, 381, 278, 363. **Chemin valide**
5. 935, 278, 347, 621, 299, 392, 358, 363. **Chemin non valide : 299 est dans le sad de 347, ce qui n'est pas possible dans un ABR.**

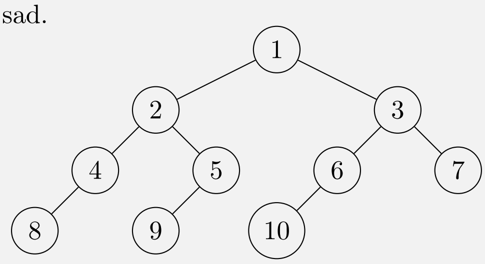
Exercice 20 – Arbres équilibrés

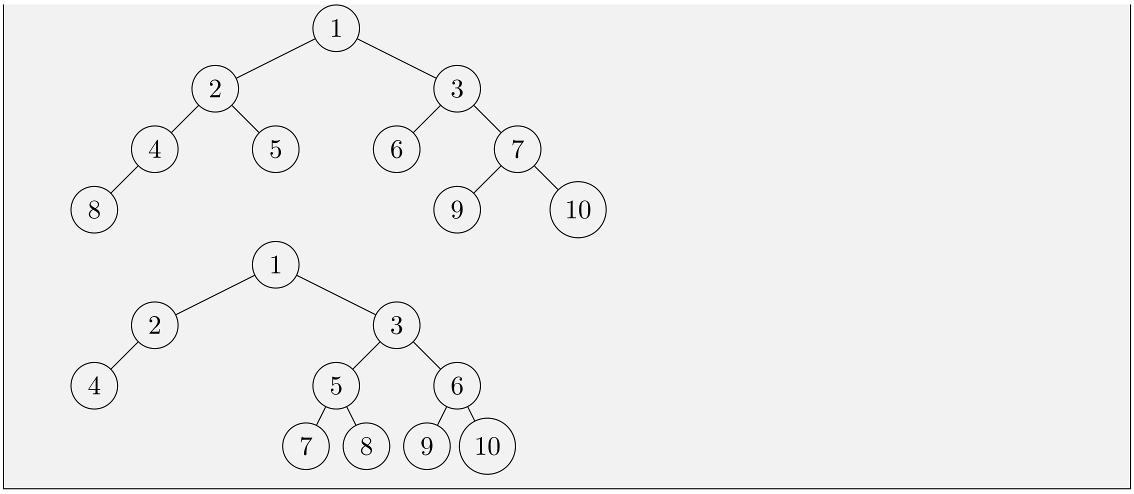
On appelle ici *arbre équilibré* un arbre binaire tel que, en tout nœud, la hauteur des sous-arbres gauches et droits diffère d'au plus 1.

1. Donner plusieurs exemples possibles d'arbres équilibrés de 10 nœuds au total.
2. Quelles sont les hauteurs minimale et maximale d'un arbre équilibré de 20 nœuds au total.
3. Ecrire un algorithme qui vérifie qu'un arbre binaire quelconque est bien un arbre équilibré. Quelle est la complexité de cet algorithme ?

Correction exercice 20

Voici plusieurs arbres binaires équilibrés à 10 noeuds. La numérotation des noeuds n'a ici aucune importance. En rouge, à côté des noeuds est notée la différence de hauteur entre sag et sad.





Exercice 21 – Médiane d'un ABR

Dans cet exercice, on considère des arbres binaires de recherche (ABR) dont les nœuds contiennent des valeurs entières qu'on suppose toutes différentes deux à deux. On dispose des primitives de manipulation des arbres binaires habituelles :

`arbreVide(a: Arbre): booleen, racine(a: Arbre): entier,`
`gauche(a: Arbre): Arbre, droite(a: Arbre): Arbre.`

1. Rappeler comment trouver la plus petite valeur d'un ABR.
2. Écrire un algorithme qui retourne la *deuxième* plus petite valeur contenue dans un ABR qu'on suppose contenir au moins deux nœuds.

   La *médiane* d'un ensemble de n entiers distincts est l'entier de rang $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ si les entiers sont triés en ordre croissant.
3. Où se trouve la valeur médiane d'un ABR qui serait un arbre binaire complet ?
4. En utilisant la primitive `taille(a: Arbre): entier` qui retourne la taille d'un arbre, écrire un algorithme qui retourne la médiane des valeurs contenues dans un ABR (pas nécessairement un arbre binaire complet).
5. Donner la complexité de votre algorithme en fonction de la hauteur de l'arbre en comptant le nombre d'appels à la primitive `taille`.
6. Est-il plus rapide de chercher la médiane dans un ABR que dans un arbre binaire quelconque ?

1.6 Les Arbres AVL

Exercice 22 – Dessinons un peu ...

Dessinez tous les arbres AVL qui contiennent les valeurs 1,2,3,4,5.

Exercice 23 – Quelques fonctions sur les AVL

1. Ecrire une fonction qui calcule le déséquilibre d'un nœud dans un arbre binaire.
2. Ecrire une fonction qui renvoie `vrai` si un arbre binaire est un arbre AVL et `faux sinon`.

Exercice 24 – Arbres AVL

Voici une liste aléatoire de 15 entiers :

$$25, 60, 35, 10, 5, 20, 65, 45, 70, 40, 50, 55, 30, 15$$

1. Construire l'arbre AVL par ajout des valeurs successives dans l'ordre de la liste ci-dessus.
2. Donner l'arbre obtenu par la suppression de 45 dans l'arbre précédemment construit. Lors de la suppression d'un noeud, on applique l'algorithme de suppression des noeuds dans les ABR et on rééquilibre l'arbre en partant du noeud supprimé et en remontant vers la racine. Attention, il peut y avoir plus d'une rotation à effectuer.

3. Donner l'arbre obtenu par la suppression de 30 dans l'arbre construit à la question précédente.

Exercice 25 – Arbres de Fibonacci

On appelle suite d'arbres de Fibonacci, noté F_n avec $n \geq 0$, la suite d'arbres binaires définis de la façon récursive suivante : L'arbre F_0 est l'arbre vide, l'arbre F_1 est l'arbre réduit à un seul noeud et et pour $n \geq 2, F_n$ est l'arbre binaire dont le sous-arbre gauche est F_{n-1} et le sous-arbre droit F_{n-2}.

1. Construire F_6
2. Pour tout $n \geq 2$, calculer la hauteur (notée h_n) et le nombre de noeuds (noté N_n) de l'arbre F_n
3. Montrer que les arbres de Fibonnacci sont des arbres h-équilibrés.
4. Les arbres de Fibonacci et les arbres qu'on obtient à partir d'eux par symétries, sont les arbres h-équilibrés qui ont le moins de noeuds pour une hauteur donnée. Montrer que si l'on supprime un noeud dans un arbre de Fibonacci de hauteur h on obtient :
   — soit un arbre h-équilibré de hauteur $h - 1$,
   — soit un arbre de hauteur h qui n'est plus h-équilibré.
   h est toujours la hauteur en nombre de nœuds de l'arbre.

1.7 Tas binaires

Exercice 26 – Implémentation via un tas binaire

Un *tas binaire* est une structure de données généralement représentée par un arbre binaire parfait dans lequel les sommets ont des valeurs qui satisfont la propriété suivante : la valeur d'un sommet est supérieure (dans le cas du tas-max que nous utiliserons ici) à la valeur de ses enfants.

Un arbre binaire parfait de hauteur h est un arbre qui vérifie les deux conditions suivantes :
— l'arbre est complet jusqu'à la profondeur $h - 1$;
— les feuilles de profondeur h sont "tassées à gauche".

1. Dessiner des arbres binaires parfaits de taille 7, 9, et 14.
2. Quel est le nombre de feuilles d'un arbre binaire presque complet de taille n ?

   Un tas peut être écrit dans un tableau qu'on suppose indicé à partir de 1 : la racine de l'arbre est stockée à l'indice 1, puis le sommet stocké à l'indice i a son fils gauche à l'indice $2i$ (si $\leq n$) et son fils droit à l'indice $2i + 1$ (si $\leq n$). Dans cette représentation, un tableau t de taille n est un tas si il satisfait la propriété suivante pour tout indice $i \leq n$:

$$\begin{cases} t[i] \geq t[2i] & \text{si } 2i \leq n \\ t[i] \geq t[2i+1] & \text{si } 2i + 1 \leq n \end{cases}$$

   Dans la représentation en arbre, on peut voir l'élément d'indice $2i$ comme le fils gauche du sommet d'indice i, et l'élement d'indice $2i + 1$ comme le fils droit. L'élément d'indice 1 est appelé la *racine* de l'arbre.

3. Représenter les tableaux suivants sous forme d'arbre binaire. Quels sont ceux qui satisfont la propriété du tas ?

indices	1	2	3	4	5	6	7	8	9
t_1	16	14	10	8	7	9	3	2	4
t_2	11	6	10	8	7	5	3	2	4
t_3	18	16	15	13	14	1	2	12	11
t_4	18	16	15	13	14	1	2	19	11
t_5	16	14	15	8	7	9	3	2	4

4. Écrire un algorithme qui étant donné un arbre binaire presque complet teste si celui-ci est un tas. Quelle est sa complexité ?

5. Soit un tableau de taille n qui vérifie la propriété du tas entre les indices 1 et $i \leq n-1$. Écrire un algorithme qui insère la valeur $t[i+1]$ de manière à ce que le tableau vérifie la propriété du tas entre les indices 1 et $i+1$ (s'aider de la représentation sous forme d'arbre binaire). Quelle est sa complexité ?
6. En utilisant l'algorithme précédent, écrire un algorithme qui prend en entrée un tableau et qui le transforme en tas. Quelle est sa complexité ?
7. On suppose que le tableau est un tas, écrire un algorithme qui supprime la racine de l'arbre (c'est-à-dire l'élément d'indice 1 du tableau) en le mettant à la fin du tableau et qui réorganise le tableau de manière à ce que les éléments entre les indices 1 et $n-1$ vérifient la propriété du tas. Quelle est sa complexité ?

Exercice 27 – Tri par tas

Comment utiliser les algorithmes de l'exercice précédent pour trier un tableau ? Quelle est la complexité de ce tri ?

Chapitre 2

Conseils

Vous trouverez dans ce document quelques conseils pour écrire correctement des algorithmes en pseudo-code, quelques rappels de mathématiques élémentaires (utiles pour les calculs de complexité) et enfin quelques techniques usuelles de preuves. J'espère que vous ferez bon usage de ce mémento !

2.1 Pseudo-Code

Le pseudo-code est un mélange de langage naturel et de concepts de programmation de haut-niveau qui décrit les idées générales d'un algorithme. Le but du pseudo-code est de s'abstraire des contingences d'un langage de programmation particulier. Chacun écrit le pseudo-code un peu à sa manière, ce n'est en rien un langage avec des règles claires (une grammaire) que l'on peut appliquer de manière automatique. Néanmoins, il reste que la plupart des gens s'accorde sur un certain nombre de règles de présentation. Ce sont celles-ci sur lesquelles je veux insister ici.

2.1.1 Quelques règles générales

Types élémentaires Généralement, les types élémentaires de données sont les suivants : `Entier`, `Réel`, `Caractère`.

Variables Les variables sont typées et portent un nom facilement identifiable.

Affectation Il y a plusieurs façons de la noter soit $\leftarrow$ soit $=$ (à la manière du langage C) soit $:=$ (à la manière de Pascal).

Égalité Là encore deux façons de l'écrire soit $=$, soit $==$ (pour la différencier de l'affectation comme en C). On notera la différence (non égalité) $<>$ ou bien $\neq$.

Instructions Ce que j'appellerai Instructions de manière générale regroupe 2 réalités : Soit une instruction simple terminée par un «`;`» soit un bloc d'instructions (suite d'instructions généralement identifiable par l'indentation du programme).

Conditionnelle `Si` *condition* `alors` *Instructions si la condition est vraie* `sinon` *Instructions si la condition est fausse* `Fin Si`

Boucles Plusieurs types de boucles sont possibles :
- `Tant Que` *condition* `faire` *Instructions* `Fin Tant Que`
- `Répéter` *Instructions* `tant que` *condition* `Fin Répéter`
- `Pour` *variable* `de initialisation à` *valeur finale* `faire` *Instructions* `Fin Pour`

Retour de valeur `Retourner` *valeur*. Cette instruction stoppe l'exécution de la fonction en cours et retourne la valeur spécifiée.

Tableaux Un tableau A de type `tableau type1[n]` est une suite contiguë d n éléments (ou cases) notés $A[1], A[2], \ldots, A[n]$. Chaque élément $A[i]$ est une variable de type `type1`. Les tableaux à deux ou plusieurs dimensions sont définis de la même façon, c'est-à-dire `tableau type1[n1,n2, ..., n3]`. Par exemple pour un tableau bi-dimensionnel, $A[i, j]$ donne accès au $j$ème élément de la $i$ème ligne du tableau A et est du même type que A.

Enregistrements Ils permettent de définir des types structurés. On les représentera généralement de la façon suivante : `enregistrement` *nom* `{` *champ1 : type1 ; champ2 : type 2 ; ... champn : typen*`}` L'accès au champ d'une variable structurée se fait par l'opérateur . (point).

Pointeurs Généralement, on ne descend pas au niveau des pointeurs pour les descriptions d'algorithmes, cela peut cependant se produire dans certains cas. Pour déclarer une variable de type pointeur on utilise le symbole $\uparrow$ `NIL` représente un pointeur qui ne pointe sur rien.

Entête d'une fonction *Nom_de_la_fonction*`(`*liste de paramètres avec leurs types*`) :` *type renvoyé*. Il faut préciser ensuite quelles sont les variables modifiées et les variables non modifiées.

Corps d'une fonction Après l'entête de la fonction, on précise quelles sont les variables locales puis les Instructions de la fonction.

2.1.2 Quelques exemples

Voici quelques exemples d'algorithmes vus en cours et repris ici.

Algorithme 2.1 Somme des carrés des entiers entre m et n (version itérative)

SommeCarrés(m : entier, n : entier) : entier
▷ **Entrées :** ***m et n***
▷ **Sortie :** ***somme des carrés des entiers entre m inclus et n inclus, si*** $m \leq n$***, et*** 0 ***sinon.***
Debut
▷ ***Variables locales***
  i : entier ;
  som : entier ;

  som ← 0 ;
  pour i de m à n faire
    som ← som + i * i ;
  fin pour

  retourner som

Fin

Algorithme 2.2 Somme des carrés des entiers entre m inclus et n inclus (version récursive)

SommeCarrés(m : entier, n : entier) : entier
▷ **Entrées :** ***m et n***
▷ **Sortie :** ***somme des carrés des entiers entre m et n.***
▷ **Pré-condition :** $m \leq n$

```
Debut
    si (m <> n)
        retourner (m*m + SommeCarrés(m+1,n)) ;
    sinon
        retourner (m*m) ;
    fin si

Fin
```

Il y a plusieurs choses à remarquer dans les algorithmes 1 et 2 :
— Tout d'abord, dans l'algorithme 2, on remarque que l'on a précisé les pré-conditions. Autrement dit, les conditions qui doivent être remplies avant l'utilisation de cet algorithme. En effet, si ces conditions ne sont pas remplies alors l'algorithme rend un résultat erroné.
— Dans l'algorithme 1, aucune pré-condition n'est précisée, toutefois la boucle `Pour`, ne s'exécutera que si la variable `i` n'a pas une valeur plus grande que n. Donc les conditions de validité de l'algorithme seront ici encore bien remplies.

Algorithme 2.3 Recherche dans une liste chaînée

Recherche(L : ↑ Element, x : entier) : booléen
▷ **Entrées :** ***x (élément recherché), L (tête de liste)***
▷ **Sortie :** ***vrai si l'élément x a été trouvé dans la liste L, faux sinon.***
▷ **Pré-condition :** ***La liste L est triée par ordre croissant***

```
Debut
▷ Variable Locale
    p : ↑ Element
    p ← L ;
    tant que (p <> NIL)  faire
        si (p.val < x)
            p ← p.suiv
        sinon  si (p.val = x)
            retourner  vrai
        sinon
            retourner  faux
        fin si
    fin tant que
```

Dans ce dernier algorithme, il faut noter que j'ai fait appel à un type structuré `Element` défini de la manière suivante :

`Enregistrement Element { val : entier; suiv : ↑ Element}`. Attention ici, j'ai explicitement fait apparaître une boucle `tant que` avec une seule condition qui est que la liste ne soit pas vide. On aurait pu écrire une boucle qui intègre les 2 conditions et donc avoir une boucle du type `tant que p <> NIL et p.val < x)`, toutefois cette écriture ne fonctionne que si le `et` est paresseux, à savoir si la première condition est fausse la seconde condition n'est pas évaluée. Ceci est vrai dans un certain nombre de langages de programmation mais pas dans tous. Si le `et` est passif alors la seconde condition est évaluée et dans ce cas, votre programme écrit à l'aide de l'algorithme ne pourra pas s'exécuter correctement. Il faut donc être très prudent lorsque l'on écrit de tels algorithmes. C'est pourquoi j'ai choisi de présenter ici un algorithme sans le `et` comme cela j'évite le piège du `et` actif ou passif. Cela n'a ici de fait, plus aucune importance.

Algorithme 2.4 Recherche dichotomique

Dicho(x : entier, S : tableau d'entiers, g : entier, d : entier) : booléen
▷ **Entrées :** ***x (élément recherché), S (espace de recherche), g (indice de gauche), d (indice de droite)***
▷ **Sortie :** ***vrai si l'élément x a été trouvé dans le tableau S entre les indices g et d, faux sinon.***
▷ **Pré-condition :** ***g et d sont des indices valides du tableau S.***

```
Debut
▷ Variable Locale
  m : entier ;
  si (g < d)
     m ← ⌊(g+d)/2⌋ ;
     si (x = S[m])
        retourner vrai ;
     sinon si (x < S[m])
        retourner (Dicho(x,S,g,m-1)) ;
     sinon
        retourner (Dicho(x,S,m+1,d)) ;
     fin si
  sinon
     retourner faux ;
  fin si
Fin
```

2.2 Mathématiques élémentaires

Voici quelques rappels de mathématiques élémentaires.

logarithmes

— $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$
— $\log_b(x/y) = \log_b x - \log_b y$
— $\log_b x^\alpha = \alpha \log_b x$
— $\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b} = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} b}$

exposants

— $a^{(b+c)} = a^b a^c$
— $a^{bc} = (a^b)^c$
— $\frac{a^b}{a^c} = a^{(b-c)}$
— $b = a^{\log_a b}$
— $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

Parties entières

— Partie entière inférieure : $\lfloor x \rfloor$ = le plus grand entier inférieur ou égal à x.
— Partie entière supérieure : $\lceil x \rceil$ = le plus petit entier supérieur ou égal à x.
— $x - 1 \leq \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil \leq x + 1$

Par exemple, $\lfloor 3.8 \rfloor = 3$ et $\lfloor -3.8 \rfloor = -4$. De même $\lceil 3.8 \rceil = 4$ et $\lceil -3.8 \rceil = -3$.

Somme

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

2.3 Techniques de preuves

2.3.1 Les techniques efficaces

Exemple

— Pour montrer qu'une propriété est fausse, il suffit de trouver un contre-exemple qui ne vérifie pas la propriété. Par exemple si la question est *Montrer que l'algorithme de coloration séquentielle est optimal* ce qui revient à dire que *pour tout graphe, cet algorithme permet de trouver une coloration optimale*, il suffit d'en trouver un pur lequel ça ne marche pas pour montrer que l'affirmation est fausse. Le contre-exemple du cours (un graphe biparti) montrer que dans une famille de cas, l'algorithme est non optimal.
— On peut montrer qu'une propriété d'existence est vraie à l'aide d'un exemple. Par exemple, si la question est *existe-t-il des graphes tels que leur indice chromatique est strictement supérieur au degré du graphe.* Vous pouvez répondre en exhibant un exemple de graphe : le cycle à 5 sommets qui est de degré 2 et qui nécessite 3 couleurs pour colorier ses arêtes.

Absurde

Il s'agit de montrer que la négation de l'énoncé aboutit à une absurdité. Le schéma de la démonstration est donc le suivant : on prend comme hypothèse la négation de l'énoncé (pour éviter tout risque d'erreur, on écrit cette hypothèse). En l'utilisant, on arrive à un résultat que l'on sait faux. On en conclut que l'hypothèse était fausse et donc que sa négation, l'énoncé est juste.

Par exemple dans la démonstration du théorème suivant

Théorème 1 *Un graphe orienté G est acyclique si et seulement si un parcours en profondeur de G ne rencontre jamais un arc (u, v) tel que u est un descendant de v dans une arborescence en profondeur.*

Preuve.

1. On va d'abord prouver que si on a un DAG alors il n'existe pas d'arc (u, v) tel que u est un descendant de v dans une arborescence en profondeur. Pour cela, on va supposer le contraire : il existe un arc (u, v) tel que u est un descendant de v dans une arborescence en profondeur. Dans ce cas là, le sommet v est un ancêtre du sommet u dans la forêt en profondeur. Ce qui implique qu'il existe un chemin de v à u dans G, donc avec l'arc (u, v) on a un circuit ! ce qui est absurde, donc il n'existe pas d'arc (u, v) tel que u est un descendant de v dans une arborescence en profondeur.

2. On va maintenant partir du fait qu'il n'existe pas d'arc (u, v) tel que u est un descendant de v dans une arborescence en profondeur pour montrer que le graphe G est sans circuit. De la même façon que dans la première partie de la preuve, on va partir de la supposition contraire, c'est-à-dire qu'il existe un circuit C dans le graphe. Soit v le premier sommet découvert par un parcours en profondeur dans le circuit C et soit (u, v) l'arc précédent v dans C. A la date $d[v]$, il existe un chemin composé de sommets blancs (non encore découverts) de v à u. D'après le théorème du chemin blanc, le sommet u devient un descendant de v dans la forêt en profondeur. L'arc (u, v) est donc un arc tel que u

est un descendant de v dans l'arborescence en profondeur. C'est une absurdité puisque c'est contraire à notre hypothèse de départ, donc il ne peut pas exister de circuit dans le graphe G.

$\square$

Induction (récurrence)

La preuve se fait en 2 temps :

1. Prouver le cas de base
2. En considérant que la propriété est vérifiée pour n, il faut montrer que la propriété est aussi vraie pour $n + 1$.

Par exemple, pour montrer la propriété des arbres binaires suivante :

Lemme 1 *Un arbre binaire localement complet*[1] *ayant n nœuds internes a $(n + 1)$ nœuds externes.*

Preuve. La preuve va se faire par récurrence sur le nombre de nœuds internes de l'arbre.

Cas de base Le plus petit arbre localement complet est l'arbre réduit à un seul nœud. Cet arbre a 0 nœud interne et 1 nœud externe. La propriété est donc vérifiée.

Récurrence Supposons cette propriété vraie pour tous les arbres ayant moins de n nœuds internes c'est-à-dire $\forall k \leq n$, tout arbre binaire localement complet ayant k nœuds internes a $k + 1$ nœuds externe.

Soit B un arbre constitué d'une racine o et de deux sous-arbres l'un gauche B_1 et l'autre droit B_2. B a n nœuds internes. Soit n_1 le nombre de nœuds internes de l'arbre B_1 et n_2, le nombre de nœuds internes de l'arbre B_2. On a donc $n = n_1 + n_2 + 1$.

Par hypothèse de récurrence, B_1 (resp. B_2) a $n_1 + 1$ (resp. $n_2 + 1$) nœuds externes. Or les nœuds externes de B sont les nœuds externes de B_1 et de B_2, donc le nombre de nœuds externes de B est $n_1 + 1 + n_2 + 1 = n + 1$. Ce qui termine la preuve puisque nous avons montré que si la propriété était vraie pour tous les arbres ayant moins de n nœuds internes alors elle était vraie pour tous les arbres ayant n nœuds internes. De plus, la propriété est vraie pour les arbres les plus petits (avec un seul nœud). Donc la propriété est vraie pour tous les arbres.

$\square$

2.3.2 Les techniques absolument inefficaces :-)

— Donner un exemple pour une propriété générale. Exemple : *montrer que tous les entiers impairs sont premiers.* Réponse : C'est vrai pour 3 donc c'est vrai pour tous !!!!

— Preuve par excès d'agitations des mains (cela peut éventuellement être utile pour un oral, mais généralement c'est très peu convaincant).

— Preuve par diagramme incompréhensible (très en vogue lors des examens écrits mais est tout aussi inefficace que le précédent).

— Preuve par intimidation : *"Cette preuve est tellement évidente que seul un idiot serait incapable de la comprendre."* La notation en général est tout aussi évidente :-)

1. Un arbre binaire est localement complet s'il est binaire non vide et chaque nœud a 0 ou 2 fils. On appelle nœud externe un nœud ayant 0 fils et nœud interne un nœud ayant 2 fils.

Chapitre 3

Résumés de cours

3.1 Introduction à la complexité des algorithmes

— *Mesure intrinsèque* de la complexité de l'algorithme indépendamment de l'implémentation.
— Permet la *comparaison* entre différents algorithmes pour un même problème.

Définition 1. Différentes Mesures

— Complexité en temps
— Complexité en espace

But : *« Sur toute machine, et quel que soit le langage utilisé, l'algorithme α est meilleur que l'algorithme β pour des données de grande taille. »*

3.1.1 Quelques règles

$cout(x)$: nbre d'op. élémentaires de l'ens. d'instructions x.

— **Séquence d'instructions** : $x_1; x_2;$

$$cout(x_1; x_2;) = cout(x_1;) + cout(x_2;)$$

— **Les boucles simples** : *tant que condition faire* x_i ;

$$cout(boucle) = \sum_{i=1}^{n}(cout(x_i) + cout(condition))$$

— **Conditionnelle** : *Si condition alors* x_{vrai}; *sinon* x_{faux};

$$cout(conditionnelle) \leq cout(condition) + \max(cout(x_{vrai}); cout(x_{faux}))$$

3.1.2 Grandeurs

— Caractérisation du comportement d'un algorithme $\mathcal{A}$ sur l'ensemble des données D_n de taille n.
— $Cout_{\mathcal{A}}(d)$: coût de l'algorithme $\mathcal{A}$ sur la donnée d.

— **Complexité dans le meilleur cas :**

$$Min_{\mathcal{A}}(n) = \min\{Cout_{\mathcal{A}}(d), d \in D_n\}$$

— **Complexité dans le pire cas :**

$$Max_{\mathcal{A}}(n) = \max\{Cout_{\mathcal{A}}(d), d \in D_n\}$$

— **Complexité en moyenne :**

$$Moy_{\mathcal{A}}(n) = \sum_{d \in D_n} p(d) \times Cout_{\mathcal{A}}(d)$$

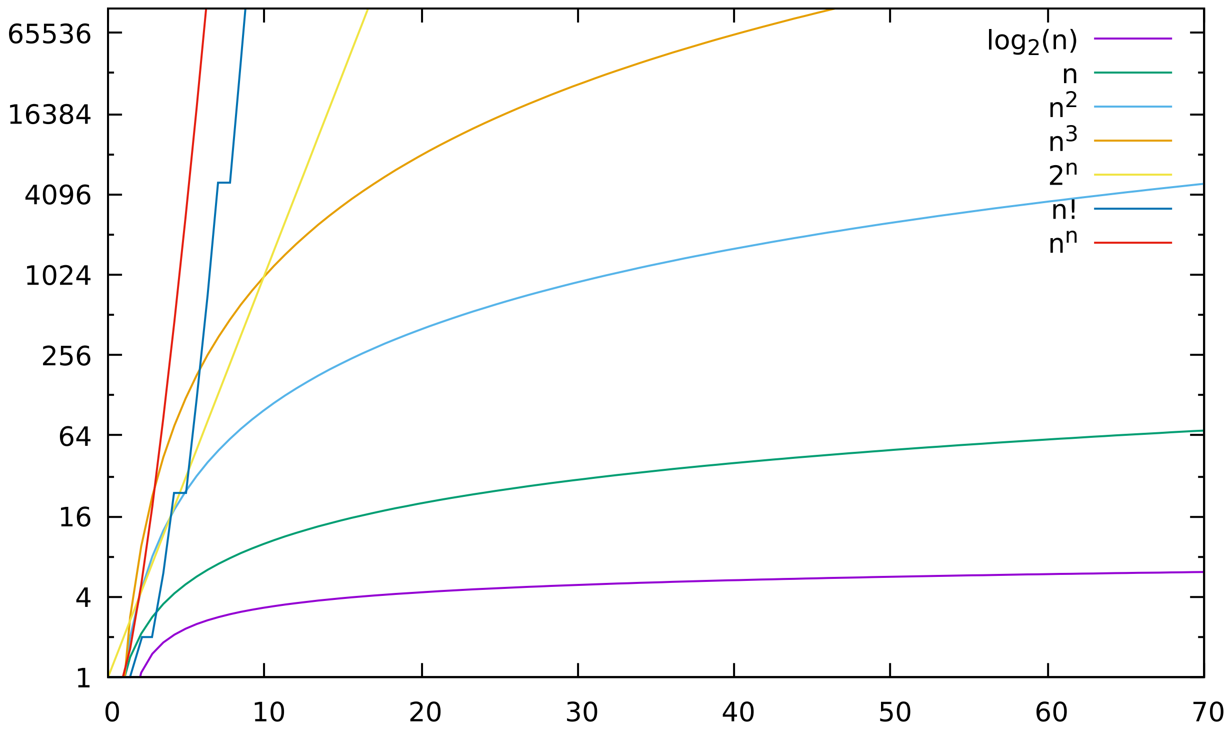


Figure 3.1 – Représentation des différentes fonctions $\log_2 n, n, n^2, n^3, 2^n, n!, n^n$ en échelle logarithmique

Définition 2. O **« Borne Supérieure »**

> Soient f et $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$: $f = O(g)$ ssi $\exists c \in \mathbb{R}_+, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tels que :
>
> $$\forall n > n_0, f(n) \leq c \times g(n)$$

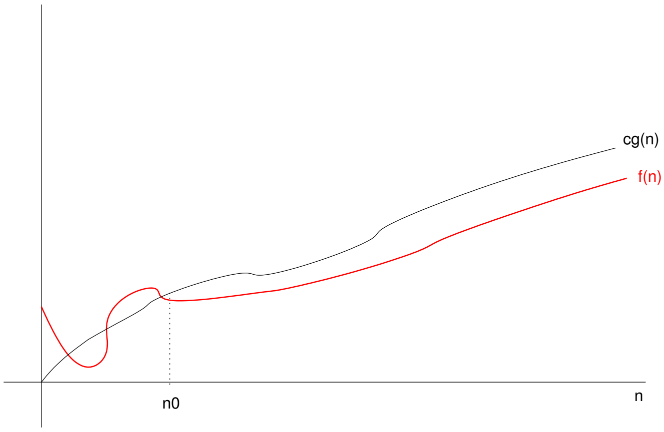


FIGURE 3.2 – $f(n) = O(g(n))$

Définition 3. Ω **« Borne Inférieure »**

> Soient f et $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$: $f = \Omega(g)$ ssi $\exists c \in \mathbb{R}_+, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tels que :
>
> $$\forall n > n_0, 0 \leq c \times g(n) \leq f(n)$$

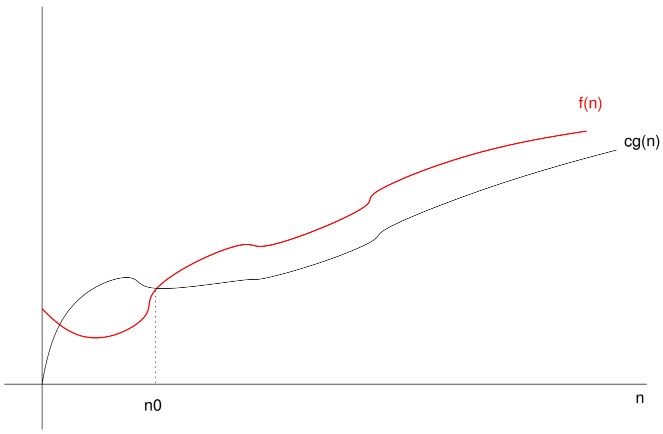


FIGURE 3.3 – $f(n) = \Omega(g(n))$

Définition 4. Θ

> $$f = \Theta(g) \text{ ssi } f = O(g) \text{ et } f = \Omega(g)$$
>
> $\exists c, d \in \mathbb{R}_+, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tels que :
>
> $$\forall n > n_0, d \times g(n) \leq f(n) \leq c \times g(n)$$

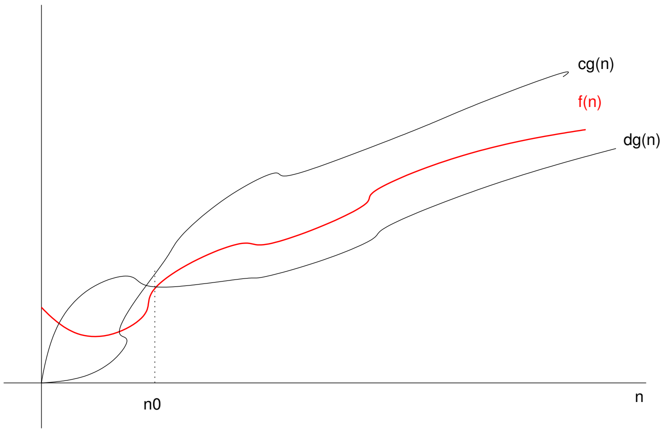


Figure 3.4 – $f(n) = \Theta(g(n))$

3.2 Etudes de complexité

3.2.1 Structures Linéaires

Eléments d'un même type stockés dans :

— un tableau
— une liste

Opérations sur les structures linéaires

— Insérer un nouvel élément
— Supprimer un élément
— Rechercher un élément
— Afficher l'ensemble des éléments
— Concaténer deux ensembles d'élements
— ...

Définition des structures

— Un tableau

```
Enregistrement Tab {
    T[NMAX] : entier;
    Fin     : entier;
}
```

3.2.2 Recherche et insertion dans les structures non triées

Algorithme 3.1 Recherche dans un tableau non trié

```
Recherche(S : Tab, x : entier) : booléen
▷ Entrées : S (un tableau), x (élément recherché)
▷ Sortie : vrai si l'élément x a été trouvé dans le tableau S, faux sinon.
Debut
▷ Variable Locale
    i : entier;
pour i de 1 à S.Fin faire
    si (S.T[i] = x)
        retourner vrai;
    fin si
fin pour
retourner faux;
Fin
```

— **Opération fondamentale :** comparaison
— **A chaque itération :**

— 1 comparaison (`Si ... Fin Si`)
— 1 comparaison (`Pour ... Fin Pour`)

— **Nombre d'itérations maximum :** nombre d'éléments du tableau
— **Complexité :** Si n est le nombre d'éléments du tableau $\mathbf{O(n)}$.

Algorithme 3.2 Insertion dans un tableau non trié

Insertion(S : Tab, x : entier)
▷ **Entrées :** ***S (un tableau), x (élément à insérer)***
▷ **Sortie :** ***le tableau S dans lequel x a été inséré.***
Debut
S.Fin ← S.Fin + 1 ;
S.T[S.Fin] ← x ;
Fin

— **Opération fondamentale :** affectation
— **Nombre d'opérations fondamentales** : 2 affectations.
— **Complexité :** $\mathbf{O(1)}$ (Temps constant).

3.2.3 Recherche et insertion dans les structures triées

Algorithme 3.3 Insertion dans un tableau trié

```
Insertion(S : Tab, x : entier)
▷ Entrées : S (un tableau), x (élément recherché)
▷ Sortie : le tableau S dans lequel x a été inséré.
▷ Pré-condition : le tableau S trié par ordre croissant.
▷ Variable Locale
    i,k :entiers ;
 Debut
     si (S.Fin = -1)
         S.Fin ← 0 ;
         S.T[S.Fin] ← x ;
     sinon
         i ← 0 ;
          tant que (i < S.Fin et S.T[i] < x)
              i ← i + 1 ;
          fin tant que
          si (i = S.Fin et S.T[i] < x)
              k ← S.Fin + 1 ;
          sinon
              k ← i ;
          fin si
          pour i de S.Fin + 1 à k en décroissant  faire
              S.T[i] ← S.T[i-1] ;
          fin pour
         S.T[k] ← x ;
         S.Fin ← S.Fin + 1 ;
     fin si
 Fin
```

— **Opération fondamentale :** affectation
— **Recherche de la bonne position :** k affectations
— **Décaler à droite :** $n - k$ affectations
— **Insérer élément :** 1 affectation
— **Total :** $n + 2$ affectations
— **Complexité :** $\mathbf{O(n)}$ si n est le nombre d'éléments du tableau.

Algorithme 3.4 Recherche dichotomique

```
Recherche(x : entier, S : tableau, g : entier, d : entier) : booléen
▷ Entrées : x (élément recherché), S (espace de recherche), g (indice de gauche), d (indice de droite)
▷ Sortie : vrai si l'élément x a été trouvé dans le tableau S entre les indices g et d, faux sinon.
▷ Pré-conditions : g et d sont des indices valides du tableau S et S est trié par ordre croissant.
▷ Variable Locale
    m : entier ;
Debut
    si (g < d)
        m ← ⌊(g+d)/2⌋ ;
        si (x = S.T[m])
            retourner vrai ;
        sinon si (x < S.T[m])
            retourner (Recherche(x,S,g,m-1)) ;
        sinon
            retourner (Recherche(x,S,m+1,d)) ;
        fin si
    sinon
        retourner faux ;
    fin si
Fin
```

- **Opération fondamentale :** comparaison
- ***A chaque appel récursif, on diminue l'espace de recherche par 2*** et on fait au pire 2 comparaisons
- **Complexité :** Au pire on fera donc $\mathbf{O}(\log_2 \mathbf{n})$ appels et la complexité est donc en $\mathbf{O}(\log_2 \mathbf{n})$.

3.2.4 Résumé

Complexité de l'insertion

	Eléments triés	Eléments non triés
Tableau	$O(n)$	$O(1)$

Complexité de la recherche

	Eléments triés	Eléments non triés
Tableau	$O(\log_2 n)$	$O(n)$

3.3 Les tris

3.3.1 tri par insertion

Algorithme 3.5 Tri par insertion

```
TriInsertion(T : tableau d'entiers, TailleMax : entier)
▷ Variables Locales
    TC, i, p, temp : entiers
Debut
pour TC de 1 à TailleMax - 1 faire
    temp ← T[TC + 1]
    p ← 1
    tant que T[p] < temp faire              Chercher la position p
        p ← p + 1
    fin tant que
    pour i de TC en décroissant à p faire   Décaler les éléments
        T[i+1] ← T[i]
    fin pour
    T[p] ← temp
fin pour
Fin
```

Complexité pour n éléments
— Le corps de la boucle est exécuté $n-1$ fois
— Une itération :
  — Recherche de la position : p
  — Décalage des éléments : $TC - p$
  — Total : TC
— Au total :

$$\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$$

La complexité du tri par insertion est en $O(n^2)$.

3.3.2 Tri par permutation

Algorithme 3.6 Tri par permutation

```
TriPermutation(T : tableau d'entiers, TailleMax : entier)
▷ Variables Locales
    i, TC : entiers
Debut
pour TC de 2 à TailleMax faire
    pour i de TailleMax en décroissant à TC faire
        si T[i-1] > T[i] faire
            T[i-1] ↔ T[i]
        fin si
    fin pour
fin pour
Fin
```

Complexité pour n éléments
— Boucle externe : $n-2$ fois
— Boucle interne : $TailleMax - TC$ fois
— Total : $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$

La complexité du tri par permutation est en $O(n^2)$.

3.3.3 Tri fusion

Algorithme 3.7 Tri Fusion

```
TriFusion(T : tableau d'entiers, p : entier, r : entier)
▷ p et r sont les indices entre lesquels on veut trier le tableau. On suppose p ≤ r.
Debut
    si p < r faire
        q ← ⌊(p+r)/2⌋
        TriFusion(T,p,q)
        TriFusion(T,q+1,r)
        Fusion(T,p,q,r)
    fin si
Fin
```

Algorithme 3.8 Tri Fusion

```
Fusion(T : tableau d'entiers, p : entier, q : entier, r : entier)
▷ Entrées : T : tableau d'entiers. p, q et r : indices entre lesquels on veut trier le tableau avec p ≤ q ≤ r.
▷ Sortie : T : tableau trié entre les indices p et r.
▷ Pré-condition : T tableau trié entre les indices p et q et T trié entre les indices q + 1 et r
▷ Variables locales : i,j,k : entiers et B : tableau d'entiers
```

```
Debut
i ← p ; k ← p ; j ← q + 1 ;
tant que (i ≤ q et j ≤ r) faire
    si T[i] < T[j] faire
        B[k] ← T[i]
        i ← i + 1
    sinon
        B[k] ← T[j]
        j ← j + 1
    fin si
    k ← k + 1
fin tant que
tant que i ≤ q faire
    B[k] ← T[i]
    i ← i + 1
    k ← k + 1
fin tant que
tant que j ≤ r faire
    B[k] ← T[j]
    j ← j + 1
    k ← k + 1
fin tant que
T ← B
Fin
```

Complexité pour n éléments

— Intuitivement il faut résoudre :

$$Tri(n) = 2 \times Tri(\frac{n}{2}) + \Theta(n)$$

— $\Theta(n)$: complexité de la fusion

La complexité du tri fusion est en $\Theta(n \log_2 n)$.

3.3.4 Tri rapide

Algorithme 3.9 Tri Rapide

```
TriRapide(T : tableau d'entiers, p : entier, r : entier)
▷ p et r sont les indices entre lesquels on veut trier le tableau. On suppose p ≤ r.
 Debut
     si p < r  faire
         q ← partitionner(T,p,r)
         TriRapide(T,p,q)
         TriRapide(T,q+1,r)

     fin si
 Fin
```

Algorithme 3.10 Partitionner

```
Partitionner(T : tableau d'entiers, p : entier, r : entier)
▷ p et r sont les indices entre lesquels on veut trier le tableau. On suppose p ≤ r.
▷ Variables locales : i,j,pivot : entiers
 Debut
i ← p ; j ← r ; pivot ← T[p] ;
 tant que (i < j)  faire
     tant que (T[i] < pivot)  faire i ← i + 1  fin tant que
     tant que (T[j] > pivot)  faire j ← j - 1  fin tant que
     si (i < j)  faire
         T[i] ↔ T[j]
         i ← i + 1
         j ← j - 1

     fin si
 fin tant que
retourner j
 Fin
```

Complexité pour n éléments
— Partitionner n éléments coûte $\Theta(n)$.
— Temps d'exécution dépend de l'équilibre ou non du partitionnement :
  — S'il est équilibré : **aussi rapide que le tri fusion**
  — S'il est déséquilibré : **aussi lent que le tri par insertion**

3.4 Les structures de données abstraites

— Mise en œuvre d'un ensemble dynamique
— Définition de données (**structuration** et **propriétés**)
— Définition des opérations pour **manipuler** les données.

Quelques structures classiques

1. Pile
2. File
3. Tables de hachage
4. Dictionnaire
5. Tas
6. Files de priorité
7. Arbres
8. .....

3.4.1 Les Piles

Analogie avec une pile d'assiette :
LIFO (Last In First Out ou **Dernier Arrivé Premier Servi**)
- On ne peut rajouter un élément qu'au dessus de la pile
- On ne peut prendre que l'élément qui est au dessus de la pile (élément le plus récemment inséré).

Mise en œuvre à l'aide d'un tableau (*nombre maximum d'éléments dans la pile fixé*)

```
Enregistrement Pile {
   T[NMAX] : entier;
   Sommet : entier;
}
```

Algorithme 3.11 La pile est-elle vide ?

PileVide(p : Pile) : booléen
▷ Entrée : *P (une pile)*
▷ Sortie : *vrai si la pile est vide, faux sinon.*
Debut
si (p.Sommet = -1)
retourner vrai ;
sinon
retourner faux ;
fin si
Fin

Complexité : $O(1)$

Algorithme 3.12 La pile est-elle pleine ?

PilePleine(p : Pile) : booléen
▷ Entrée : *P (une pile)*
▷ Sortie : *vrai si la pile est pleine, faux sinon.*
Debut
si (p.Sommet = NMAX-1)
retourner vrai ;
sinon
retourner faux ;
fin si
Fin

Complexité : $O(1)$

Algorithme 3.13 Insertion d'un élément

Insertion(p : Pile, elt : entier)
▷ Entrée : *p (une pile) et elt (un entier)*
▷ Sortie : *la pile p dans laquelle elt a été inséré*
Debut
si (PilePleine(p) = faux)
p.Sommet ← p.Sommet + 1 ;
p.T[p.Sommet] ← elt ;
sinon
Afficher un message d'erreur
fin si
Fin

Complexité : $O(1)$

Algorithme 3.14 Suppression d'un élément

Suppression(p : Pile) : entier

```
▷ Entrée : p (une pile) e
▷ Sortie : renvoie l'élément qui était au sommet de la pile p et supprime l'élément de la pile
▷ Variable locale :
    elt : entier ;
Debut
si (PileVide(p) = faux )
    elt ← p.T[p.Sommet] ;
    p.Sommet ← p.Sommet - 1 ;
     retourner elt ;
sinon
    Afficher un message d'erreur
fin si
Fin
```

Complexité : $O(1)$

3.5 Les arbres

3.5.1 Définitions

Définition 5.

> — Un **arbre** : un ensemble de nœuds reliés entre eux par des arêtes.
> — Trois propriétés pour les arbres **enracinés** :
> 1. Il existe un nœud particulier nommé **racine**.
> 2. Tout nœud c autre que la racine est relié par une arête à un nœud p appelé **père** de c.
> 3. Un arbre est **connexe**.

— Un nœud peut avoir 0 ou plusieurs fils.
— Un nœud a exactement un père.

Une définition récursive :

— **Base :**
  — Un nœud unique n est un arbre
  — n est la racine de cet arbre.
— **Récurrence :**
  — Soit r un nouveau nœud
  — $T_1, T_2, \ldots, T_k$ sont des arbres ayant pour racine $r_1, r_2, \ldots, r_k$.
  — Création d'un nouvel arbre ayant pour racine r et on ajoute une arête entre r et r_1 r et r_2, ..., r et r_k.

Définition 6.

> Les **ancêtres** d un nœud : *Nœuds trouvés sur le **chemin unique** entre ce nœud et la racine.*

Définition 7.

> Le nœud d est un **descendant** de a si et seulement si a est un ancêtre de d.

Définition 8.

> **Longueur** d'un chemin = nombre d'arêtes parcourues.

Définition 9.

> Les nœuds ayant le même père = **frères**.

Définition 10.

Un nœud n et tous ses descendants = **sous-arbre**

Définition 11.

Une `feuille` est un nœud qui n'a pas de fils Un nœud intérieur est un nœud qui a au moins 1 fils. Tout nœud de l'arbre est :
— Soit une feuille
— Soit un nœud intérieur

Définition 12.

La **hauteur d'un nœud** n, notée $h(n)$, est la longueur du chemin depuis la racine jusqu'à n. La **hauteur de l'arbre** T, notée $h(T)$:

$$h(T) = \max_{x \text{ nœud de l'arbre}} h(x)$$

Définition 13.

Taille de l'arbre T, notée *taille(T)* = nombre de nœuds.

Définition 14.

Nombre de feuilles noté *nf(T).*

Définition 15.

Longueur de cheminement de l'arbre T, notée *LC(T)* = somme des longueurs de tous les chemins issus de la racine.

$$LC(T) = \sum_{x \text{ nœud de } T} h(x).$$

Longueur de cheminement externe de l'arbre T, notée *LCE(T)* = somme des longueurs de tous les chemins aboutissant à une feuille issus de la racine.

$$LCE(T) = \sum_{x \text{ feuille de } T} h(x).$$

Définition 16.

Profondeur moyenne de l'arbre T, notée *PC(T)*= moyenne des hauteurs de tous les nœuds.

$$PC(T) = \frac{LC(T)}{taille(T)}$$

Profondeur moyenne externe de l'arbre T, notée *PCE(T)* = moyenne des longueurs de tous les chemins issus de la racine et se terminant par une feuille.

$$PCE(T) = \frac{LCE(T)}{nf(T)}$$

3.5.2 les arbres binaires

Définition 17.

Tous les nœuds d'un arbre binaire ont $0, 1$ ou 2 fils.

— **Fils gauche** de n = racine du sous-arbre gauche de n.

— **Fils droit** de n = racine du sous-arbre droit de n.

Définition 18.

> **Bord gauche** de l'arbre = le chemin depuis la racine en ne suivant que des fils gauche.
> **Bord droit** de l'arbre = le chemin depuis la racine en ne suivant que des fils droits.

Quelques arbres binaires particuliers :

1. Arbre binaire *filiforme*
2. Arbre binaire *complet* :
   - 1 nœud à la hauteur 0
   - 2 nœuds à la hauteur 1
   - 4 nœuds à la hauteur 2
   - ...
   - 2^h nœuds à la hauteur h.
   - Nombre total de nœuds d'un arbre de hauteur h :

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^h = 2^{h+1} - 1$$

3. Arbre binaire *parfait* :
   - Tous les niveaux sont remplis sauf le dernier.
   - Les feuilles sont le plus à gauche possible.
4. Arbre binaire *localement complet* : chaque nœud a 0 ou 2 fils.

Lemme 2

$$h(T) \leq taille(T) - 1$$

Preuve. Egalité obtenue pour un arbre filiforme. □

Lemme 3 *Pour tout arbre binaire T de taille n et de hauteur h on a :*

$$\lfloor \log_2 n \rfloor \leq h \leq n - 1$$

Preuve.

- Arbre filiforme : arbre de hauteur h ayant le plus petit nombre de nœuds : $n = h + 1$ (seconde inégalité).
- Arbre complet : arbre de hauteur h ayant le plus grand nombre de nœuds : $n = 2^{h+1} - 1$ (première inégalité).

□

Corollaire 1 *Tout arbre binaire non vide T ayant f feuilles a une hauteur $h(T)$ supérieure ou égale à $\lceil \log_2 f \rceil$.*

Lemme 4 *Un arbre binaire localement complet ayant n nœuds internes a $(n + 1)$ feuilles.*

Mise en œuvre

```
Enregistrement Nœud {
    Val     : entier;
    Gauche : ↑ Nœud;
    Droit  : ↑ Nœud;
}
```

Algorithme 3.15 Parcours en largeur d'un arbre binaire

ParcoursEnLargeur(r : Nœud)
▷ **Entrée :** ***r (la racine d'un arbre)***
▷ **Sortie :** ***traitement de tous les nœuds de l'arbre enraciné en*** r
▷ **Variables locales :**
    ce_niveau, niveau_inférieur : File ;
    o : Nœud ;

```
Debut
    ce_niveau ← { r } ;
    tant que (ce_niveau est non vide)  faire
        niveau_inférieur = { } ;
        pour chaque nœud o de ce_niveau  faire
            traiter o ;
            niveau_inferieur ← niveau_inférieur ∪ enfants de o.
        fin pour
        ce_niveau ← niveau_inférieur ;
    fin tant que
Fin
```

Algorithme 3.16 Parcours en profondeur d'un arbre binaire

ParcoursEnProfondeur(r : Nœud)
▷ **Entrée :** ***r (la racine d'un arbre)***
▷ **Sortie :** ***traitement de tous les nœuds de l'arbre enraciné en*** r
Debut
  si $r = \emptyset$
    traitement de l'arbre vide
  sinon
    traitement_prefixe(r) ;
    ParcoursEnProfondeur(r.Gauche) ;
    traitement_infixe(r) ;
    ParcoursEnProfondeur(r.Droit) ;
    traitement_postfixe(r) ;
  fin si
Fin

3.6 Les Arbres Binaires de Recherche

3.6.1 Définition

Définition 19.

Un **Arbre Binaire de Recherche** est un arbre binaire tel que pour tous les noeuds de l'arbre, tous les noeuds de son sous-arbre gauche ont une valeur plus petite que le nœud lui-même et tous les nœuds de son sous-arbre droit ont une valeur plus grande que le nœud lui-même.

Mise en œuvre

```
Enregistrement Nœud {
   Val     : entier;
   Gauche : ↑ Nœud;
   Droit : ↑ Nœud;
   Parent : ↑ Nœud;
}
```

3.6.2 Algorithmes

Algorithme 3.17 Element Maximum dans un ABR

ABR-Max(r : Nœud) : Entier
▷ **Entrée :** ***r (la racine d'un arbre)***
▷ **Sortie :** ***l'élément maximum de l'ABR enraciné en r***
Debut
  tant que x.Droit $\neq$ **NIL faire**
    x $\leftarrow$ **x.Droit ;**
  fin tant que
  retourner x ;
Fin

Algorithme 3.18 Recherche d'un élément dans un ABR

Recherche(r : Nœud, c : Entier) : Booleen
▷ **Entrée :** ***r (la racine d'un arbre), c (l'élément recherché)***
▷ **Sortie :** ***renvoie vrai si c est dans l'arbre enraciné en r, faux sinon***
Debut
  si r $\neq$ **NIL**
    si r.val = c retourner Vrai ;
    sinon si r.val > c retourner Recherche(r.Gauche,c) ;
    sinon retourner Recherche(r.Droit,c) ;
  fin si
  retourner Faux ;
Fin

Algorithme 3.19 Successeur dans un ABR

ABR-Successeur(r : Nœud) : Noeud
▷ **Entrée :** ***r (la racine d'un arbre)***
▷ **Sortie :** ***renvoie le nœud dont la valeur est immédiatement supérieure à celle de r***

▷ **Variables locales :**
y : Noeud ;

```
Debut
    si r.Droit ≠ NIL
        retourner ABR _Min(r.Droit) ;
    fin si
    y ← r.Parent ;
    tant que y ≠ NIL et r = y.Droit
        r ← y ;
        y ← y.Parent ;
    fin tant que
    retourner y ;
Fin
```

Algorithme 3.20 Insertion d'un nœud aux feuilles

ABR-Inserer(r : Nœud, z : Noeud) : Noeud
▷ **Entrée :** ***r (la racine d'un ABR), z (un nouveau à insérer)***
▷ **Sortie :** ***renvoie la racine de l'ABR dans lequel le nœud z a été inséré***

```
Debut
    si r = NIL
        retourner z ;
    sinon
        si z.val ≤ r.val
            r.Gauche ← ABR-Inserer(r.Gauche, z) ;
            retourner r ;
        sinon
            r.Droite ← ABR-Inserer(r.Droite,z) ;
            retourner r ;
        fin si
    fin si
Fin
```

Complexité au pire : $O(hauteur\ de\ l'ABR)$

Ajout d'un nœud à la racine de l'arbre

Si l'on note un arbre de la façon suivante : `a= <racine, sag, sad>`. Soit un arbre `a = <o',g,d>`. Ajouter le nœud `o` à `a` c'est construire l'arbre `<o,a1,a2>` tel que :

— `a1` contienne tous les nœuds dont la clé est inférieure à celle de `o`
— `a2` contienne tous les nœuds dont la clé est supérieure à celle de `o`.

Si la valeur de `o` est plus petite que la valeur de `o'` alors `a1 = g1` et `a2 = <o',g2,d>`, avec :

— `g1` = nœuds de `g` dont la valeur est inférieure à la valeur de `o`
— `g2` = nœuds de `g` dont la valeur est supérieure à la clé de `o`.

Si la valeur de `o` est plus grande que la valeur de `o'` alors `a1 = <o',g,d1>` et `a2 = d2`, avec :

— `d1` = nœuds de `d` dont la valeur est inférieure à la valeur de `o`
— `d2` = nœuds de `d` dont la valeur est supérieure à la clé de `o`.

Complexité au pire : $O(hauteur\ de\ l'ABR)$

Suppression d'un nœud

— Si c'est une feuille : suppression simple
— Si c'est un nœud avec un seul fils : suppression du nœud et raccordement de son sous-arbre à son père.
— Si le nœud a deux fils : remplacement par son successeur (et suppression du successeur).

Complexité au pire : $O(hauteur\ de\ l'ABR)$

3.6.3 les arbres AVL

Définition 20.

> Soit a un nœud dans un arbre binaire
> $$desequilibre(a) = h(a.Gauche) - h(a.Droit)$$

Définition 21.

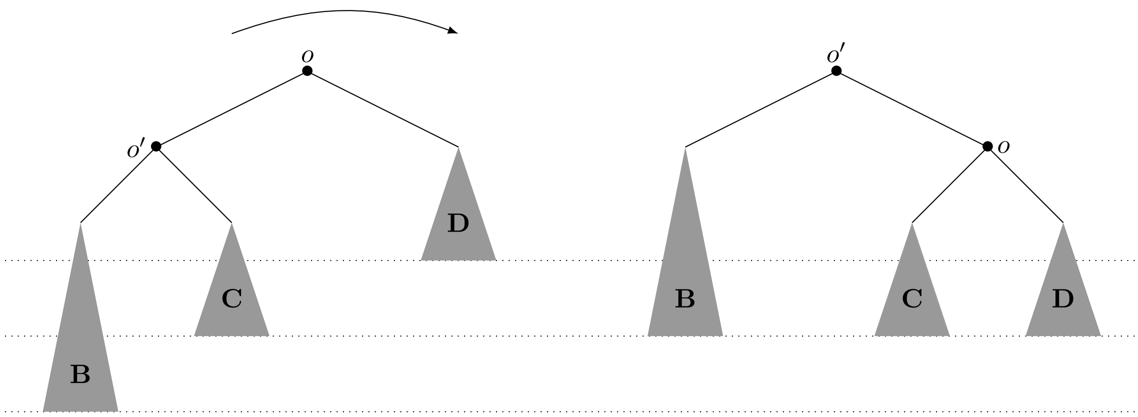
> Un arbre est **H-équilibré** si pour tous ses noeuds a on a :
> $$desequilibre(a) \in \{-1, 0, 1\}$$
> .

Définition 22.

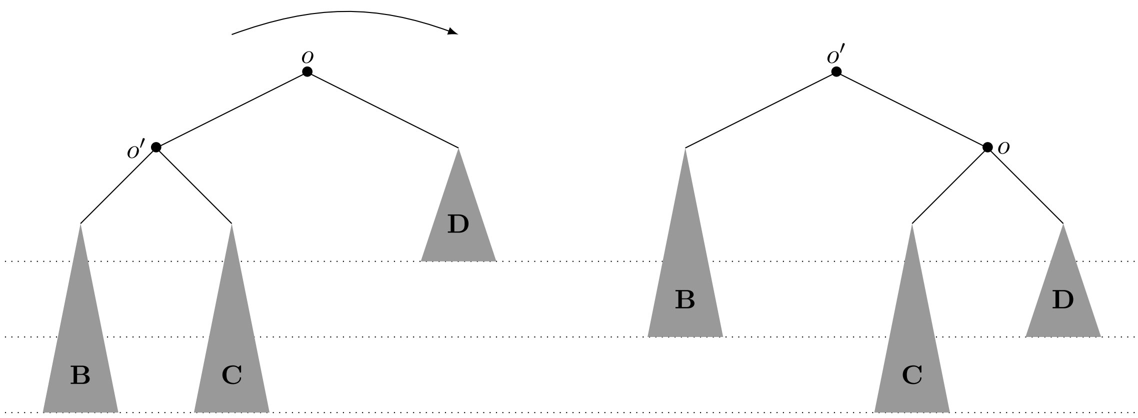
> Un **arbre AVL** est un ABR H-équilibré.

Après une insertion ou une suppression d'un nœud dans un arbre AVL, il peut y avoir des nœuds qui ont un déséquilibre de +2 ou -2. Il faut alors rééquilibrer l'arbre par des opérations de rotations. Ci-dessous voici les opérations de rotations lorsqu'il existe un déséquilibre de +2 à la racine de l'arbre notée o. Il est facile d'en déduire les rotations lorsque le déséquilibre est de -2. Il y a trois cas de figures :

1. Déséquilibre de +1 sur le fils gauche : **Rotation Droite**



2. Déséquilibre de 0 sur le fils gauche : **Rotation Droite**



3. Déséquilibre de `-1` sur le fils gauche : **Rotation Gauche-Droite**