TD 02

→ Modéliser la langue parlée

S = "c'est Sophia"
C = "elle a beaucoup changé"

1) $\neg S \oplus C$
2) $S \to C$

P = "Kasparov doit sacrifier une tour"
S = "Kasparov fera mat en trois coups"

3) $P \vee S$
4) $\neg P \to S$

P = "Paul a réussi"
M = "Maurice a réussi"

5) $\neg P \wedge \neg M \equiv \neg (P \vee M)$
6) $(\neg P \wedge M) \equiv \neg (P \wedge M)$
7) $(M \to P) \wedge (\neg M \to \neg (P \vee M))$

1) Paul n'aime pas Sophie et Sophie aime Paul
2) Il n'y a pas d'amour réciproque entre Sophie et Paul.
3) Ni Paul aime Sophie, ni Sophie aime Paul.
4) Paul aime Sophie si et seulement si Sophie aime Paul.
5) Paul aime Sophie mais Sophie n'aime pas Paul.

→ Equivalences du calcul des propositions

1) $\neg (P \wedge Q) \equiv (\neg P \vee \neg Q) \equiv Q \to (\neg P) \equiv P \to (\neg Q)$

$\neg (P \vee Q) \equiv (\neg P \wedge \neg Q)$

$\neg (P \to Q) \equiv P \wedge (\neg Q)$

P	Q	$P \vee (\neg P)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

P	Q	S	$Q \wedge S$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

P	Q	$\neg(Q \to P)$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

$$
\begin{aligned}
(\neg P \to Q) \to S &\equiv (\neg P \wedge \neg Q) \vee S \\
&\equiv \neg(\neg P \to Q) \vee S \\
&\equiv \neg(P \vee Q) \vee S \\
&\equiv (\neg P \wedge \neg Q) \vee S
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P &\equiv P \wedge (Q \vee (Q \to P)) \\
&\equiv P \wedge (Q \vee (\neg Q \vee P)) \\
&\equiv P \wedge ((Q \vee \neg Q) \vee P) \\
&\equiv P \wedge (\text{vrai} \vee P) \\
&\equiv P \wedge \text{vrai} \equiv P
\end{aligned}
$$

Rappel : soit P et Q deux propositions

→ L'implication réciproque de $P \to Q$ est $Q \to P$

→ L'implication contraposée de $P \to Q$ est $\neg Q \to \neg P$

→ Implication

1) Si $2+2=3$ alors je suis le roi de Prusse

P = "$2+2=3$" Q = "je suis le roi de Prusse"

Réci : Si je suis le roi de Prusse alors $2+2=3$

Contra : Si je ne suis pas le roi de Prusse, alors $2+2 \neq 3$

P = "il fait bon" Q = "je ne suis pas fatiguée"
S = "je vais me promener"
$P \wedge Q \rightarrow S$
Réci : je vais me promener s'il fait bon et je ne suis pas trop fatiguée
Contra : Si je ne vais pas me promener, alors il ne fait pas bon ou je suis trop fatiguée

3) P = "tu manges ta soupe" Q = "tu regarderas la télé"

Père : $\neg P \rightarrow \neg Q \equiv Q \rightarrow P$
Fils : $P \rightarrow Q$
$P \rightarrow Q \neq Q \rightarrow P$

4) M = "j'aime Marie" A = "j'aime Anne"

$\phi = (M \vee A) \wedge (M \rightarrow A)$

M	A	$M \vee A$	$M \rightarrow A$	ϕ
0	0	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

On peut en conclure qu'il aime Anne mais on ne sait rien pour Marie.

5) $\underbrace{((M \rightarrow A) \rightarrow M)}_{1} \wedge \underbrace{(M \rightarrow (M \rightarrow A))}_{2}$

M	A	$M \rightarrow A$	1	2	$1 \wedge 2$
0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

On conclut qu'il aime les deux

→ Faire des preuves

1) P = "4 ne divise n" Q = "n est pair"

$\neg P \oplus Q \equiv P \leftrightarrow Q$

P	Q	$\neg P \oplus Q$	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

Fausse car équi. "4 divise n si et seulement si n est pair"

3) P = "n est pair" Q = "1 + 1 = 2"

$P \rightarrow Q$

P	Q	$P \rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

4) Si 1+1=3 P, alors les nombres premiers sont en quantités finie. Q

Vrai car P et Q sont faux.

→ Contradictions et vérité

1) On peut en conclure que les deux mentent, donc le chemin est à droite.

2) On en conclut que A est faux, B indique que A ment, donc la sortie est à droite.