Algèbre linéaire

Matrice inverse

Soit A une matrice carrée $n \times n$, on dit que A est inversible s'il existe une matrice, notée A^{-1}, telle que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, où I est la *matrice identité* $n \times n$.

L'ensemble $\mathcal{M}_n(K)$ des matrices carrées à coefficients dans un corps K forme un anneau, dont les éléments inversibles sont exactement les matrices inversibles.

Déterminant

Soit A une matrice carrée $n \times n$, de coefficients $a_{i,j}$, le déterminant de A est défini comme

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \operatorname{sig}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)},$$

où

- $\mathcal{S}_n$ est le groupe des permutations à n éléments ;
- $\operatorname{sig}(\sigma)$ est la *signature* de σ, qui vaut 1 si σ est composé d'un nombre pair de transpositions, ou -1 si σ est composé d'un nombre impair de transpositions.
- $\sigma(i)$ est l'image de l'entier $1 \leq i \leq n$ par la permutation σ.

Formule de Lagrange

La même formule est exprimée de façon récursive par la formule suivant, due à Lagrange.

On note A_i la sous-matrice de A obtenue en enlevant la première colonne et la i-ème ligne. On a alors

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i a_{i,1} \det(A_i).$$

Propriété fondamentale du déterminant

Soit A une matrice carrée, $\bar{x}$ un vecteur d'inconnues $(x_1, \ldots, x_n)$, b un vecteur de scalaires $(b_1, \ldots, b_n)$, alors

$$\det(A) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ est inversible} \quad \Leftrightarrow \quad A\bar{x} = b \text{ a une unique solution.}$$

Propriétés du déterminant

Pour toutes matrices A, B carrées de taille $n \times n$, les propriétés suivantes sont vérifiés :

- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$;
- $\det(A^t) = \det(A)$, où A^t est la *transposée* de A ;
- soit A_i la i-ème colonne de A, soit A' la matrice obtenue en remplaçant A_i par $A_i + \lambda A_j$, avec $i \neq j$, alors $\det(A) = \det(A')$;
- Soit A' la matrice obtenue en échangeant deux colonnes de A, alors $\det(A') = -\det(A)$.

Les matrices diagonales, triangulaires supérieures et triangulaires inférieures satisfont toutes la propriété

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Calcul du déterminant par pivot de Gauss

Les propriétés énoncés ci-dessus impliquent que l'algorithme du pivot de Gauss sans échanges de lignes ou de colonnes préserve la valeur du déterminant.

Lorsqu'on autorise les échanges dans l'algorithme de Gauss, il faut tenir compte du nombre d'échanges effectués pour décider du signe du déterminant.

Attention : seuls les pivots qui remplacent une ligne A_i par une ligne $A_i + \lambda A_j$, avec $i \neq j$, préservent le déterminant. Les pivots de la forme $\mu A_i + \lambda A_j$ le multiplient par μ.

Formules de Cramer

Soit A une matrice carrée, et soit $A_{i,j}$ la matrice obtenue en enlevant la i-ème ligne et la j-ème colonne de A. La **comatrice** de A est la matrice

$$\begin{pmatrix} \det(A_{1,1}) & -\det(A_{2,1}) & \cdots & (-1)^n \det(A_{n,1}) \\ -\det(A_{1,2}) & \det(A_{2,2}) & \cdots & -(-1)^n \det(A_{n,2}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (-1)^n \det(A_{1,n}) & -(-1)^n \det(A_{2,n}) & & \det(A_{n,n}) \end{pmatrix}.$$

Proposition : Soit A une matrice et A^* sa comatrice, on a $AA^* = A^*A = \det(A)I$.

Une conséquence immédiate de cette proposition est la suivante, connue sous le nom de *formule de Cramer* :

Soit A une matrice $n \times n$ inversible, soit $\bar{x}$ un vecteur d'inconnues, soit b un vecteur de scalaires, le système $A\bar{x} = b$ a pour solution

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)},$$

où A_i est la matrice obtenue en remplaçant la i-ème colonne de A par b.

Calcul de l'inverse par pivot de Gauss

Soit A une matrice inversible $n \times n$, la solution à l'équation

$$AX = I,$$

où X est une matrice inconnue et I est la matrice identité peut être trouvée par pivot de Gauss en résolvant colonne-par-colonne.

Cette méthode est appelée *méthode de Gauss-Jordan*. Il est usuel de faire les calculs de cette méthode en écrivant la matrice $A|I$, obtenue par juxtaposition de A et de la matrice identité, et en appliquant la méthode de Gauss jusqu'à faire apparaître la matrice identité à gauche, sous la forme $I|B$. Il est alors immédiat de vérifier que B est l'inverse de A.

Références

F. Liret, D. Martinais. ***Algèbre 1re année*.**
2e édition. Dunod, 2003. ISBN 2-10-005548-8. Côte BU : 512 LIR.