TD 6 : Ensembles et fonctions

christina.boura@uvsq.fr

2 novembre 2020

1 Ensembles

Opérateurs On considère un univers $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Étant donnés les ensembles suivants

$$A = \{1, 2, 3, 4\},\ B = \{4, 5, 6, 7\},\ C = \{1, 3, 5, 7\},\ D = \{2, 3, 4, 5, 6\},$$

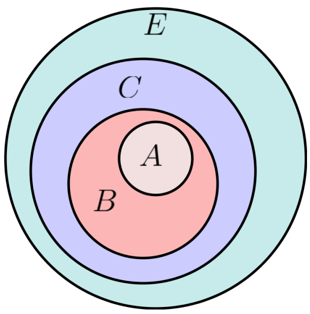
calculer

1. $\overline{A}, A \cup C, \overline{A \cup C}, A \cap C, \overline{A \cap C}$
   - $\overline{A} = \{5, 6, 7\}$
   - $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$
   - $\overline{A \cup C} = \{6\}$
   - $A \cap C = \{1, 3\}$
   - $\overline{A \cap C} = \{2, 4, 5, 6, 7\}$
2. $(A \cap B) \cup (C \cap D), (A \cup C) \cap (B \cup D)$
   - $(A \cap B) \cup (C \cap D) = \{4\} \cup \{3, 5\} = \{3, 4, 5\}$
   - $(A \cup C) \cap (B \cup D) = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\} \cap \{2, 3, 4, 5, 6, 7\} = \{2, 3, 4, 5, 7\}$.
3. $A \backslash D = \{1\}$, $D \backslash A = \{5, 6\}$.

Diagrammes de Venn On suppose que $A \cup B = B \cap C$ et que $C \subset E$. Dessiner les diagrammes de Venn de A, B, C et E.

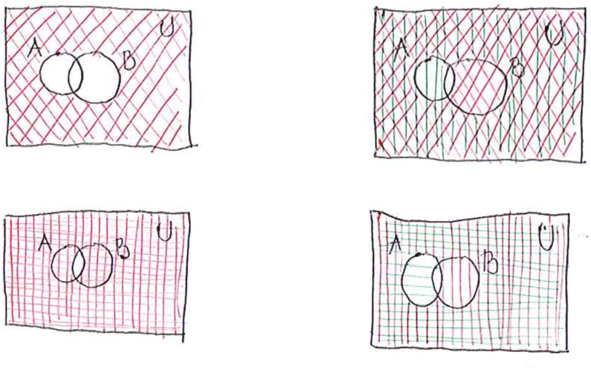
- On suppose que $x \in A \Rightarrow x \in A \cup C \Rightarrow x \in B \cap C$. On a donc que $x \in B$ et $x \in C$. Ceci implique que $A \subset B$ et $A \subset C$.
- On suppose que $x \in B \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in B \cap C$. Ceci implique que $x \in C$. Par conséquent $B \subset C$.

On conclut alors que $A \subset B \subset C \subset E$.



Comparer les diagrammes de Venn

1. de $\overline{A \cup B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$;
2. de $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A} \cup \overline{B}$.



On voit alors qu'on a bien $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Ensembles et calcul des propositions Soient A, B, C trois ensembles dans un univers U. Démontrer les propriétés suivantes.

Dans toute cette série d'exercices il s'agit de démontrer l'égalité de deux ensembles. Comme la relation $\subset$ est une relation anti-symétrique, il suffit à chaque fois de montrer que le premier ensemble est un sous-ensemble du deuxième et inversement, ç.-à-d. si $A \subset B$ et $B \subset A$, alors $A = B$.

1. La distributivité : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
   - $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$: Soit $x \in A \cap (B \cup C)$. Alors $x \in A$ et $x \in B \cup C \Rightarrow x \in B$ ou $x \in C$.
     — Si $x \in B$, alors comme $x \in A$ on a que $x \in A \cap B$.
     — Si $x \in C$, alors comme $x \in A$ on a que $x \in A \cap C$.
     On voit donc bien que $x \in A \cap B$ ou $x \in A \cap C$, ce qui implique que $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
   - $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$: Soit $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Alors $x \in A \cap B$ ou $x \in A \cap C$.
     — Si $x \in A \cap B$, alors $x \in A$ et $x \in B \Rightarrow x \in A$ et $x \in B \cup C$ donc $x \in A \cap (B \cup C)$.
     — Si $x \in A \cap C$, alors $x \in A$ et $x \in C \Rightarrow x \in A$ et $x \in B \cup C$ donc $x \in A \cap (B \cup C)$.
     On voit donc bien que $x \in A \cap B$ ou $x \in A \cap C$, ce qui implique que $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
2. Les lois de de Morgan : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
   - $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$: Soit $x \in \overline{A \cup B}$. Alors $x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A$ et $x \notin B \Rightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$.
   - $\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$: Soit $x \in \overline{A} \cap \overline{B} \Rightarrow x \notin A$ et $x \notin B \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \in \overline{A \cup B}$.
   - $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$: Soit $x \in \overline{A \cap B}$. Alors $x \notin A \cap B \Rightarrow x \notin A$ ou $x \notin B \Rightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}$.
   - $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$: Soit $x \in \overline{A} \cup \overline{B} \Rightarrow x \notin A$ ou $x \notin B \Rightarrow x \notin A \cap B \Rightarrow x \in \overline{A \cap B}$.
3. $A \backslash B = A \cap \overline{B}$.
   - $A \backslash B \subset A \cap \overline{B}$: Soit $x \in A \backslash B$. Alors $x \in A$ et $x \notin B \Rightarrow A \cap \overline{B}$.
   - $A \cap \overline{B} \subset A \backslash B$: Soit $x \in A \cap \overline{B} \Rightarrow x \in A$ et $x \notin B \Rightarrow x \in A \backslash B$.
4. $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$.
   - $A \cup B \subset (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$: Soit $x \in A \cup B$. Il y a donc trois possibilités pour x. Soit $x \in A \cap B$, soit $x \in (A \cap \overline{B})$ soit $x \in \overline{A} \cap B$. Ce qui montre que $x \in (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$.

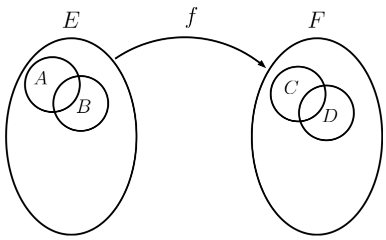
- $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \subset A \cup B$: La preuve inverse est immédiate comme chacun des trois ensembles et bien un sous-ensemble de $A \cup B$.

5. $A \cap B = A \cap C$ si et seulement si $A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$.
   - On suppose que $A \cap B = A \cap C$ et on va montrer que $A \cap \overline{B} \subset A \cap \overline{C}$ et inversement. Soit $x \in A \cap \overline{B}$. Alors $x \in A$ et $x \notin B$. Forcément $x \in C$, car sinon puisque $A \cap B = A \cap C$, x devrait appartenir à $A \cap B$ donc à B. Alors, on a bien que $x \in A \cap \overline{C}$. Le cas inverse se montre de la même façon en inversant les rôles de B et de C.
   - On suppose que $A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$ et il faut montrer que $A \cap B = A \cap C$. La même preuve qu'avant peut se répéter en remplaçant B par $\overline{B}$, et C par $\overline{C}$.

2 Fonctions

Rappel : Si $f : A \to B$ est une fonction, et si $C \subset B$ est un sous-ensemble de B, on note $f^{-1}(C)$ l'**image inverse de** C **par** f, c'est à dire l'ensemble des $x \in A$ tels que $f(x) \in C$.

Soit $f : E \to F$ une fonction. Soient A et B des sous-ensembles de E et soient C et D des sous-ensembles de F.



A-t-on nécessairement les relations suivantes ? Justifier chaque cas par une preuve ou par un contre-exemple.

1. $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

   Cette relation est fausse et voici un **contre-exemple**.

   On prend $E = F = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{2, 3, 4\}$. On suppose que $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 3$, $f(4) = 1$ et $f(5) = 5$.
   On a donc $f(A \cap B) = f(\{2, 3\}) = \{2, 3\}$ et $f(A) = f(B) = \{1, 2, 3\}$ donc $f(A) \cap f(B) = \{1, 2, 3\}$ et on voit bien que $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.
2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

   Cette relation est juste. On va la démontrer en montrant que $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$ et inversement.

   ($\subseteq$) Soit $y \in f(A \cup B)$. Alors il existe un $x \in A \cup B$ tel que $f(x) = y$. Si $x \in A$, alors $y = f(x) \in f(A) \Rightarrow y \in f(A \cup B)$. Autrement, si $x \in B$, alors $y = f(x) \in f(B) \Rightarrow y \in f(A \cup B)$. Dans les deux cas on a que $y \in f(A) \cup f(B)$, ce qui prouve que $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$.

   ($\supseteq$) Soit $y \in f(A) \cup f(B)$. Si $y \in f(A)$, alors il existe un $x \in A$ tel que $f(x) = y$. Dans ce cas, comme $A \subseteq A \cup B$, alors $x \in A \cup B$ et donc $y \in f(A \cup B)$. Autrement, si $y \in f(B)$, alors il existe un $x \in B$ tel que $f(x) = y$. Dans ce deuxième cas, comme $B \subseteq A \cup B$, alors $x \in A \cup B$ et donc $y \in f(A \cup B)$. Dans les deux cas on a que $y \in f(A \cup B)$ ce qui prouve que $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$.
3. $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

   Cette relation est juste. On va la démontrer en montrant que $f^{-1}(C \cap D) \subseteq f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$ et inversement.

   ($\subseteq$) Soit $x \in f^{-1}(C \cap D)$. Alors $f(x) \in C \cap D$. Donc $f(x) \in C$ et $f(x) \in D$. Par conséquent, $x \in f^{-1}(C)$ et $x \in f^{-1}(D)$, donc $x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$. Ceci montre que $f^{-1}(C \cap D) \subseteq f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

(⊇) Inversement, soit $x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$. Alors, $x \in f^{-1}(C)$ et $x \in f^{-1}(D)$, donc $f(x) \in C$ et $f(x) \in D$. Par conséquent, $f(x) \in C \cap D$ et donc $x \in f^{-1}(C \cap D)$. Donc, on a bien que $f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) \subseteq f^{-1}(C \cap D)$.

4. $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

   Cette relation est juste. On va la démontrer en montrant que $f^{-1}(C \cup D) \subseteq f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$ et inversement.

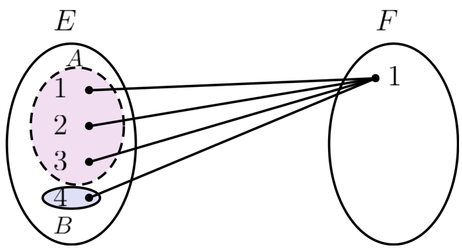
   (⊆) Soit $x \in f^{-1}(C \cup D)$. Alors $f(x) \in C \cup D$. Si $f(x) \in C$, alors $x \in f^{-1}(C) \Rightarrow x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$. Autrement, si $f(x) \in D$, alors $x \in f^{-1}(D) \Rightarrow x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$. Dans les deux cas on a bien que $x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

   (⊇) Soit $x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$. Si $x \in f^{-1}(C)$ alors $f(x) \in C \Rightarrow x \in C \cup D$ et si $x \in f^{-1}(D)$ alors $f(x) \in D \Rightarrow f(x) \in C \cup D$. Dans les deux cas on a que $f(x) \in C \cup D$ et donc que $x \in f^{-1}(C \cup D)$.

5. $f^{-1}(f(A)) = A$

   Cette relation est fausse et voici un **contre-exemple**.

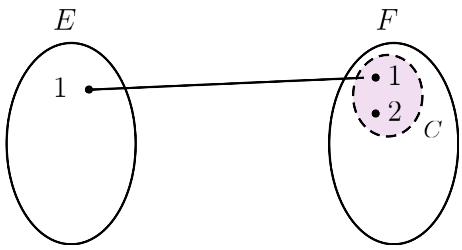
   On prend $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et $A, B \subseteq E$ tels que $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{4\}$. On suppose que $f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = 1$.
   On a $f(A) = \{1\}$. De l'autre côté $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(1) = \{1, 2, 3, 4\} \neq f(A)$.



6. $f(f^{-1}(C)) = C$.

   Cette relation est fausse et voici un **contre-exemple**.

   On prend $C = \{1, 2\}$ et on suppose que $f(1) = 1$. On a $f^{-1}(C) = \{1\}$ et $f(f^{-1}(C)) = f(\{1\}) = \{1\} \neq \{1, 2\} = C$.



Injectivité et surjectivité

Rappel : si n est un nombre réel, la notation $\lfloor n \rfloor$ désigne la *partie entière inférieure* de n, c'est à dire le plus grand entier plus petit ou égal à n. La notation $\lceil n \rceil$ désigne la *partie entière supérieure* de n, c'est à dire le plus petit entier plus grand ou égal à n.

Déterminer si les fonctions suivantes sont injectives, surjectives ou aucune des deux.

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

   Cette fonction n'est pas injective. Par exemple on a $f(0) = f(1) = 0$. Par contre, elle surjective. En effet, chaque $n \in \mathbb{N}$, $2n$ est une préimage pour n par f.

2. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = 2n$.

   $f(n)$ est injective. En effet, si $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ avec $n_1 \neq n_2$, alors $2n_1 \neq 2n_2 \Rightarrow f(n_1) \neq f(n_2)$. Par contre, elle n'est pas surjective. Par exemple $n = 3$ n'a pas de préimage.

3. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie par $f(n) = (-1)^n \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Cette fonction est injective et surjective à la fois. (Justifier).

4. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(x) = x + 1$. Cette fonction est injective. En effet, si $x_1 \neq x_2$ alors $x_1 + 1 \neq x_2 + 1 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
   Par contre, elle n'est pas surjective. En effet, pour $y = 0$, il n'existe pas de $x \in \mathbb{N}$ tel que $f(x) = x + 1 = 0$.
5. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ définie par $f(x) = x + 1$. Cette fonction est injective et surjective à la fois. Pour l'injectivité, la même preuve que toute à l'heure marche. Pour la surjectivité, on voit que pour $y \in \mathbb{Z}$, $y - 1$ est une préimage pour y par f. La fonction est donc bijective.

Interpréter les phrases suivantes en terme d'injectivité et de surjectivité.

1. Il existe des nombres entiers relatifs (i.e., dans $\mathbb{Z}$) différents qui ont le même carré.

   La fonction
   $$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\to \mathbb{N} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$
   n'est pas injective.
2. Tout nombre réel positif a une racine carrée. La fonction
   $$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$
   est surjective.
3. Le nombre 3 n'est le sinus d'aucun nombre.

   La fonction
   $$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sin(x) \end{aligned}$$
   n'est pas surjective.

4. Un nombre complexe est caractérisé par ses parties réelle et imaginaire. La fonction
   $$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\to \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ z &\mapsto (a, b) \end{aligned}$$
   tel que $z = a + bi$ est injective et surjective, donc bijective.

Rappel : Si $f : A \to B$ et $g : B \to C$ sont deux fonctions, on note $g \circ f$ la **composée de** g **et de** f, i.e. la fonction $g \circ f : A \to C$ définie par $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Soient $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux fonctions et $h = g \circ f$. Montrer les propositions suivantes.

1. Si h est surjective alors g est surjective.

   On suppose que h est surjective. Alors pour tout tout $c \in C$ il existe un $a \in A$ tel que $h(a) = c. \Leftrightarrow g(f(a)) = c$. On note $b = f(a)$. Alors, pour tout $c \in C$, il existe un $b \in B$ tel que $g(b) = c$. Ceci montre que la fonction g est surjective.

2. Si h est injective alors f est injective.

   On suppose que h est injective. Alors pour tout $a_1, a_2 \in A$ avec $a_1 \neq a_1$ on a $h(a_1) \neq h(a_2)$. Supposons maintenant que f n'est pas injective. Alors il existe a_1, a_2 avec $a_1 \neq a_2$ et $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow g(f(a_1)) = g(f(a_2)) \Rightarrow h(a_1) = h(a_2)$, contradiction puisque h est injective. Alors f est injective.

3. Si h est injective et f est surjective alors g est injective.

   On raisonne par l'absurde. On suppose que g n'est pas injective. Alors, il existent $b_1, b_2 \in B$ avec $b_1 \neq b_2$ et $g(b_1) = g(b_2)$. Puisque f est surjective, il existe $a_1 \in A$ tel que $f(a_1) = b_1$ et $a_2 \in A$ tel que $f(a_2) = b_2$. Puisque $f(a_1) \neq f(a_2)$ et f est une fonction on a forcément que $a_1 \neq a_2$.
   On a donc $a_1 \neq a_2$ et $g(f(a_1)) = g(f(a_2)) \Rightarrow h(a_1) = h(a_2)$, contradiction puisque h est injective. Alors on conclut que g est injective.

4. Si h est surjective et g est injective alors f est surjective.

   Soit $b \in B$ et on note $c = g(b) \in C$. Comme la fonction h est surjective, il existe un $a \in A$ tel que $h(a) = g(f(a)) = c$. On a alors $g(b) = g(f(a))$ et comme g est injective, alors forcément $b = f(a)$. Ceci prouve que f est surjective.

Les implications réciproques sont-elles vraies ?

3 Ensembles et induction

Soient A et B des ensembles finis, et soit $f : A \to B$ une fonction. Prouver que

1. Si f est injective, alors $|A| \leq |B|$
2. Si f est surjective, alors $|A| \geq |B|$.

Soit $f : E \to E$ une fonction. On définit par récurrence les applications f^n par $f^1 = f$ et $f^n = f \circ f^{n-1}$.

1. On suppose que f est injective. Montrer que pour tout entier n, f^n est injective.
2. On suppose que f est surjective. Montrer que pour tout entier n, f^n est surjective.