1

I Sur des petits graphes pour se faire la main

chaine : suite sommets : $v_0 v_1 \dots v_m$ telle que chaque paire de sommets successifs v_i, v_{i+1}, est soit un arc (v_i, v_{i+1}) soit un arc (v_{i+1}, v_i) => Graphe orienté

ou est soit une arête v_i, v_{i+1}

chemin : (graphe orienté) : suite sommets v_0, v_1, v_m telle que chaque couple de sommets successifs v_i, v_{i+1} est un arc (v_i, v_{i+1})

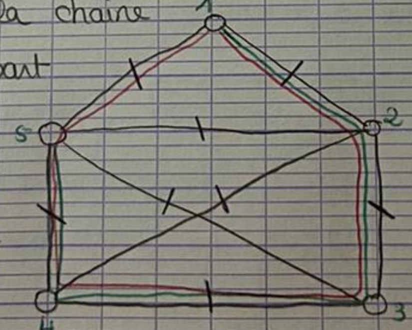
Cycle : chaine telle que $v_0 = v_m$

circuit : (G-O) chemin telle que $v_0 = v_m$

chaine / cycle hamiltonien : chaine / cycle qui passe une et une seule fois par chaque sommet du graphe

Chaine / cycle eulérien : chaine / cycle qui passe une et une seule fois par chaque arrête.

Pour trouver la chaine eulerienne, on part d'un sommet de degré impair et on arrive dans l'autre



— chaine hamiltonienne

— cycle hamiltonien

chaine Eulerienne :

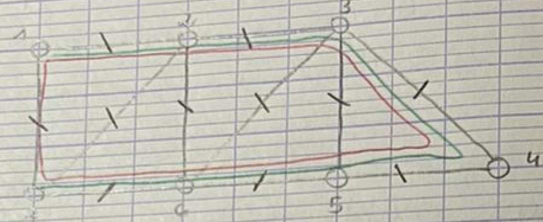
3 - 2 - 1 - 5 - 2 - 4 - 5 - 3 - 4

ou 4 - 2 - 3 - 4 - 5 - 2 - 1 - 5 - 3

cycle eulerien condition : Un graphe non orienté connexe contient un cycle eulerien ssi chaque sommet a un degré pair.

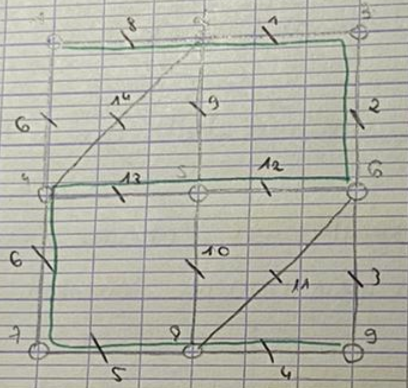
Un graphe non orienté connexe contient une chaine eulérienne ssi il ne possède que 0 ou 2 sommet de degré impair.

- chaine hamiltonienne
-



chaine eulerienne
5 - 4 - 3 - 5 - 6 - 3 - 2 - 6 - 7 - 2 - 1 - 7

cycle eulerien : impossible (degré impair)



- chaine hamiltonienne
- pas de cycle hamiltonien

cycle eulerien :
2, 3, 6, 9, 8, 7, 4, 1, 2, 5, 8, 6, 5, 4, 2

Pour la chaine eulerienne, on prend les cycles, qui sont aussi des chaines spécifiques

II. Jouons un peu aux echecs

1	14	9	20	3
22	19	2	15	10
13	8	21	4	25
18	23	6	11	16
7	12	17	24	5

Déplacement du cavalier : 2 cases dans un sens puis une case dans l'autre (inverse+)

S : 2

II (suite)

On cherche une chaine hamiltonienne et un cycle ham dans un G-O où les sommets représententent les cases de l'echiquier et les arêtes representent les deplacements possibles du cavalier

il existe une chaine hamiltonienne mais pas de cycle hamiltonien (il faut un échiquier (pair * pair) pour en avoir un, sinon problème avec nombre de cases noires ≠ nombre de cases blanches) ⟹ le cavalier se déplace d'une case blanche à une case noire et inversement

Pour un échiquier 4*4, il n'y a ni chaine ni circuit hamiltonien car la taille doit être supérieur à 5, sinon le cavalier n'a pas assez de cases pour se déplacer.

III Algorithme pour trouver un circuit Eulérien

1. Pour chaque sommet, le nombre de degré entrant doit être égal au nombre de degré sortant. Le graphe doit être fortement connexe

→ ici la condition est vérifiée pour chacun des sommets
Pour le savoir, si on représente le graphe par une matrice d'adjacence, il faut vérifier que la ligne i et la colonne i pour tout sommet i contiennent le même nombre de 1.

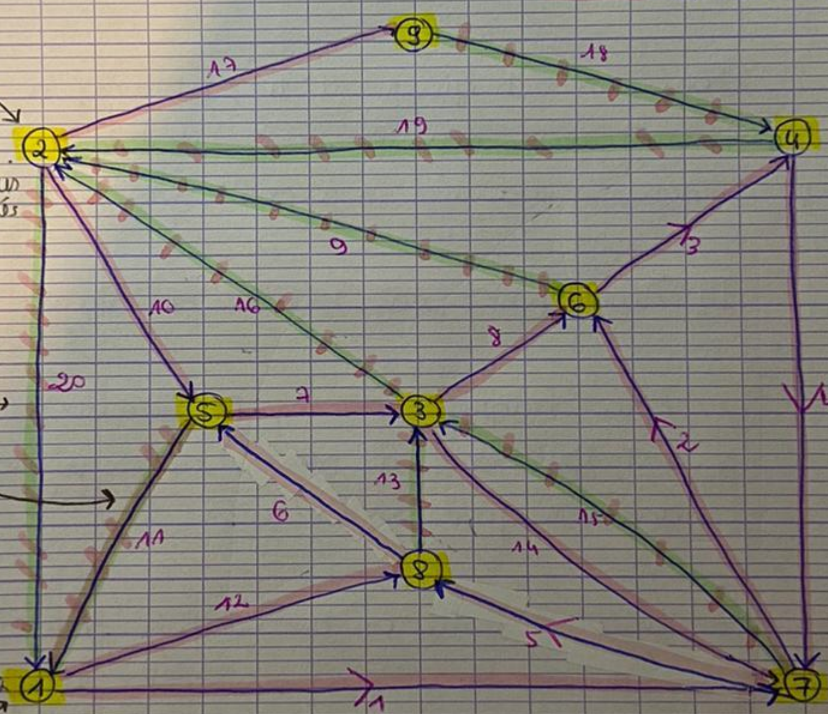
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1							1	1	
2	1				1				1
3		1				1	1		
4		1					1		
5	1		1						
6		1		1					
7			1			1		1	
8			1		1				
9				1					

anti arborescence couvrante

circuit eulérien.

on continue le marquage en choisissant le sommet le plus petit et ainsi de suite.
→ on s'arrête quand tous les sommets sont marqués

on marque les sommets et les arcs qui vont vers un sommet marqué



On choisit la racine

Algo : recherche d'un circuit eulérien dans un G-O et fortem^t connexe $G = (V, A)$

1. Choix d'un sommet x quelconque
2. On construit l'anti-arborescence couvrante (contient tous les sommets de G de racine x, notée A_x en faisant un parcours (largeur ou profondeur) sur les prédécesseurs de x

III (suite)

3. On parcourt G à partir de x. A chaque étape, s'il est possible de choisir un arc sortant qui n'appartient pas à l'anti-arborescence courante A_x, on le choisit.

Dans l'anti-arborescence A_x, chaque sommet à un seul arc sortant (sauf la racine qui n'en a pas)
En choisissant de passer par cet arc en dernier dans le parcours quand on arrive à un sommet u, on s'assure d'être passé par tous les autres arcs sortants du sommet u. auparavant, et comme il y autant d'arcs entrants que sortants pour chaque sommet (sinon pas de cycle eulerien), on est sûr de pouvoir arriver sur u suffisamment de fois pour en repartir en utilisant tous les arcs sortants.

4. Il n'y a pas de circuit hamiltonien.

IV Degré minimum

Degré min de G : $\delta(G) = \min d(v) \quad v \in V$

a) Montrer que G contient toujours une chaine de longueur $\delta(G)$

→ chaque sommet du graphe G a un degré d'au moins $\delta(G)$, et il existe forcément un sommet de degré exactement $\delta(G)$ (car c'est le degré min du graphe)
On part d'un sommet x qui est de degré $\delta(G)$. On considère l'arête qui le relie à un autre sommet u (chaine de longueur 1). Le sommet u a un degré $\geqslant \delta(G)$ donc il lui reste au moins $\delta(G)-1$ autre voisins de x. Donc on continue de construire la chaine avec l'un de ses voisins (chaine de longueur 2)

Ce voisin v a au moins $\delta(G)-2$ autres voisins que x et u. On peut donc construire un chaine de longueur 3 et etc jusqu'à obtenir une chaine de longueur $\delta(G)$

b. Si $\delta(G) \geq 2$, montrer que G contient toujours un cycle de longueur au moins $\delta(G)+1$.

Le graphe G possède au moins $\delta(G)+1$ sommets
On considère le graphe possédant exactement $\delta(G)+1$ sommets, et donc chacun des sommets est de degré $\delta(G)$. C'est un graphe complet (tous les sommets sont reliés entre eux). Et c'est aussi le plus petit graphe (en nombre d'arêtes et de sommets) dont le degré min est $\delta(G)$
Comme tous les sommets sont reliés entre eux, un tel graphe contient un cycle de longueur $\delta(G)+1$, passan par tous les sommets.
Si on ajoute d'autres sommets et d'autres arêtes à ce graphe, le cycle sera toujours présent. Et chaque graphe étant de degré min $\delta(G)$ contiendra ce graphe.
Donc un graphe G contient toujours un cycle de longueur au moins $\delta(G)+1$ (avec $\delta(G) \geq 2$)

Si $\delta(G)=1$: il n'y a pas de cycle de longueur 2.