UNIVERSITÉ DE VERSAILLES-ST-QUENTIN **Licence Sciences, Semestre 4**
Module de Probabilités LSMA430 **2d semestre 2020/2021**

Feuille n^o 2 : Probabilités conditionnelles, indépendance

Exercice 1 :

On lance un dé à huit faces et on considére les événements suivants :

$$A_1 = \{1,2,3,4\} \quad A_2 = \{1,2,5,6\} \quad A_3 = \{3,4,5,6\}$$

Montrer que ces trois événements sont indépendants deux à deux mais pas mutuellement indépendants.

Exercice 2 :

On lance deux dés. On considère les événements $A :=$ "la somme est 7", $B :=$ "le premier dé donne 4", $C :=$ " le second dé donne 3".

1. Montrer que A et B sont indépendants.
2. Montrer que, sachant C, A et B ne sont pas indépendants.

Exercice 3 :

Le lièvre et la tortue ont N mètres à parcourir, $N = 6$. On lance six fois un dé non truqué à 6 faces. Quand le dé tombe sur 1, 2, 3, 4 ou 5, la tortue avance d'un mètre et le lièvre reste sur la ligne de départ. Quand le dé tombe sur 6, le lièvre atteint directement l'arrivée et le lièvre a gagné.

1. Déterminer Ω.
2. Soit A_1 l'événement "le lièvre gagne au premier lancement". Calculer $\mathbb{P}(A_1)$.
3. Pour $2 \leq j \leq 6$, on appelle A_j l'événement "le lièvre gagne au j-ième lancement". Calculer $\mathbb{P}(A_j)$.
4. Calculer la somme $\sum_{j=1}^{6} \mathbb{P}(A_j)$. Que représente cette probabilité ?
5. Calculer la probabilité que la tortue gagne.

Exercice 4 :

On cherche un livre qui a la probabilité $p/4$ de se trouver dans l'un des 4 tiroirs d'un secrétaire. $(0 \leq p \leq 1)$ Quelle est la probabilité qu'il se trouve dans le quatrième tiroir sachant qu'il n'est pas dans les trois premiers ?

Exercice 5 :

Avant de partir en vacances, Pierre demande à son voisin de bien vouloir arroser sa plante verte pendant son absence. Sans arrosage, il estime qu'elle a 4 chances sur 5 de périr, contre 1 chance sur 10 avec. Pierre part du principe que son voisin a 50% de chances d'oublier d'arroser sa plante.

1. Quelle est la probabilité que la plante soit vivante à son retour de congés ?
2. S'il constate à son retour que sa plante est morte, quelle est la probabilité que son voisin ait oublié de l'arroser ?
3. (question optionnelle) Si Pierre n'est pas sûr de la probabilité que son voisin pense à arroser sa plante (que l'on note p), entre quelles bornes la probabilité de la question précédente peut-elle varier ?

Exercice 6 :

Une maladie affecte un français sur mille. On dispose d'un test sanguin qui détecte cette maladie avec une fiabilité de 99 % lorsque la maladie est présente. Le test donne un résultat positif pour 0,2 % des personnes saines testées.

1. Quelle est la probabilité $\mathbb{P}(M|T)$ qu'une personne soit réellement malade lorsqu'elle a un test positif ?
2. Quelle est la probabilité qu'une personne soit saine lorsqu'elle a un test positif ? Conclure.
3. Quelle est la probabilité qu'une personne soit contaminée lorsque son test est négatif ?
4. La probabilité $\mathbb{P}(M^c|T)$ qu'une personne saine ait un test positif, calculée en 2., est grande. A votre avis, pourquoi ? Que proposez vous de faire pour ne pas effrayer inutilement la population ?

Exercice 7 :

On choisit une famille au hasard parmi toutes les familles ayant deux enfants.

1. Sachant que la famille choisie a un garçon, quelle est la probabilité qu'elle ait deux garçons ?
2. Sachant que l'aîné de la famille choisie est un garçon, quelle est la probabilité que le plus jeune soit aussi un garçon ?

Exercice 8 :

On considère 3 cartes : une a deux faces rouges, une a deux faces blanches, la dernière a une face rouge et blanche.
On tire une carte au hasard et on montre une face au hasard : elle est rouge.
Quelle est la probabilité que la face cachée soit blanche ?

Exercice 9 : Transmission d'information

On considére n individus ($n \geq 2$). I_1 reçoit une information sous la forme de "oui" ou "non", la transmet à I_2, ainsi de suite juusqu'à I_n qui l'annonce à tous. Chacun transmet ce qu'il a entendu avec probabilité p, $0 < p < 1$, le contraire avec probabilité $1 - p$. Les comportements des individus sont indépendants.
Calculer la probabilité p_n que I_n donne l'information initiale ? On pourra trouver une relation entre p_n et p_{n-1}.
Que se passe-t-il quand $n \to \infty$?

Exercice 10 :

Dans un service de maternité, on constate que sur l'ensemble des accouchements, 20% présentent des complications et 10% ont lieu avant terme.

1. En supposant que le terme est indépendant de l'existence de complications, calculer la probabilité qu'une femme accouche à terme et sans complications.
2. En réalité, il y a 40% de complications lorsque l'accouchement a lieu avant terme. Dans ces conditions, calculer la probabilité :

2.a) d'un accouchement avant terme et avec complications.

2.a) d'un accouchement à terme et sans complications