Calcul des propositions

Le **calcul propositionnel** (sporadiquement appelé **logique d'ordre zéro**) est une théorie *formelle* (au sens où il s'agit de manipuler des *formules*) qui modélise des raisonnements mathématiques simples du type *"si p alors q"*. On s'intéresse notamment à la façon de créer de nouvelles propositions à partir des propositions élémentaires, dits *atomiques*, et à la manière de déduire si la proposition construite est vraie ou fausse à partir de la vérité ou la fausseté des propositions élémentaires.

Le Calcul des prédicats constitue une généralisation du calcul des propositions à des formules plus complexes du type *"pour tout n, si n a la propriété X alors n a la propriété Y"*.

Concepts de base

Une **proposition** est une phrase dont on peut affirmer qu'elle est vraie ou fausse. Ainsi "il pleut", "n est pair", "$n > 0$" sont des propositions, mais "le nombre de doigts de la main", "4", "$f(n)$" ne le sont pas.

Le calcul des propositions modélise la façon dont le mathématicien raisonne sur la vérité et la fausseté en faisant abstraction des propositions spécifiques qui forment le raisonnement concret. Ce qui compte est exclusivement la forme du raisonnement, ainsi l'affirmation

S'il pleut **ou** il neige, **alors** il y a des nuages

et l'affirmation

Si $n > 0$ **ou** $n < 0$, **alors** $n \neq 0$

sont représentées par la même **formule**

Si p **ou** q, **alors** r

où les *variables* p, q, r représentent à la fois les *propositions* "il pleut", "il neige", "$n > 0$", etc.

De plus, les **connecteurs** logiques *si*, *alors*, *ou*, etc. sont exprimés par des symboles plutôt que par des mots. Par convention, on utilise les symboles suivants:

Appellation	Formule	Interprétation
implication	$p \to q$	**si** p **alors** q,
équivalence	$p \leftrightarrow q$	p **si et seulement si** q,
conjonction	$p \wedge q$	p **et** q,
disjonction	$p \vee q$	p **ou** q,
négation	$\neg p$	**il n'est pas vrai que** p.

De tous les opérateurs, seul le "ou" mérite quelques mots d'explication en plus. Par p **ou** q l'on entend le *ou inclusif* du français c'est à dire qu'au moins l'une des propositions p ou q doit être vraie, mais possiblement les deux sont vraies. On appelle *ou exclusif* ce qui est souvent exprimé en français par "soit… soit…" et qui signifie p ou q, mais pas les deux en même temps. Ce type d'opérateur est parfois ajouté à la logique propositionnelle avec la notation $p \oplus q$. Voici des exemples

Type de ou	Notation	Exemple
ou inclusif	$p \vee q$	une résidence accueille des personnes malades ou agées
ou exclusif	$p \oplus q$	demain, j'irai travailler en train ou en voiture

Définitions

En calcul des propositions, comme dans tout autre système formel, on fait une distinction minutieuse entre *syntaxe*, *sémantique* et *métalogique*. Ainsi, la **syntaxe** décrit la façon correcte de former les formules, la **sémantique** donne l'interprétation des formules, et la **métalogique** est le processus de raisonner sur le système formel avec des outils externes (la pensée mathématique, en général, ou plus formellement une autre logique formelle plus puissante que le calcul des propositions).

Syntaxe

La syntaxe du calcul propositionnel est composée des éléments suivants:

- Une liste infinie (mais dénombrable) de **propositions atomiques** (ou **formules atomiques**), en général représentées par les lettres de l'alphabet $p, q, \ldots$,
- Des **opérateurs logiques**, en général $\wedge, \vee, \to, \neg$.

Une **proposition** (ou **formule**, ou **formule bien formée**) est

- soit une proposition atomique,
- soit le résultat de la combinaison d'un opérateur logique avec deux (ou une dans le cas de $\neg$) propositions (non nécessairement atomiques).

Ainsi p, $p \wedge q$, $(p \wedge q) \vee (\neg r)$ sont des propositions, mais pq, $\wedge \wedge p$ ne le sont pas.

Remarque: les parenthèses ne font pas partie du calcul des propositions, elles sont simplement là pour décrire la structure syntaxique des formules, i.e. pour indiquer dans quel ordre les opérateurs ont été appliqués pour obtenir la formule. Voir du bon usage des parenthèses.

Pour réduire le nombre de parenthèses, on assigne une précédence par défaut aux opérateurs. Ainsi $\neg$ a la précédence la plus haute, ensuite viennent $\wedge$ et $\vee$ avec la même précédence, et enfin $\rightarrow$. Par conséquent la formule

$$\neg p \wedge q \rightarrow r$$

doit être lue comme

$$((\neg p) \wedge q) \rightarrow r.$$

Puisque on peut démontrer que $\wedge$ et $\vee$ sont associatifs, un autre usage courant consiste à ne pas écrire les parenthèses d'une chaîne de ces opérateurs, à moins que l'on ne s'intéresse à l'arbre de formation d'une formule. Ainsi

$$p \wedge q \wedge r$$

peut être aussi bien interprété comme

$$(p \wedge q) \wedge r,$$

que comme

$$p \wedge (q \wedge r),$$

ce qui ne change rien dans un contexte où l'on s'intéresse à la vérité de la formule puisque ces deux formules sont *sémantiquement équivalentes*. Cependant, nous allons essayer d'utiliser cette convention le moins possible.

Attention: Par contre, il est toujours incorrect d'écrire

$$p \vee q \wedge r,$$

puisque les deux parenthésages possibles de la formule n'ont pas la même sémantique (remarquez que certains auteurs préfèrent assigner une priorité plus haute à $\wedge$, en levant donc cette ambiguïté). De façon similaire, la formule

$$p \rightarrow q \rightarrow r$$

est ambiguë puisque les deux parenthésages ne sont pas équivalents. Beaucoup de textes adoptent la convention de l'*associativité à droite*, ainsi la seule lecture possible de la formule ci-dessus serait

$$p \rightarrow (q \rightarrow r)$$

mais remarquez que ceci est purement une convention, que nous allons éviter d'utiliser dans ce texte.

Sémantique

La sémantique consiste à attacher des *interprétations* aux formules du calcul propositionnel. Le système qui est obtenu en considérant toutes les interprétations possibles est aussi appelée *logique Booléenne* ou *algèbre de Boole*.

Formellement, un **modèle** (parfois on dit une **interprétation**) d'une proposition est l'affectation d'une valeur 0 ou 1 (appelée **valeur de vérité**) à chacune de ses propositions atomiques. En général, affecter p à 1 est interprété comme l'affirmation “il est vrai que p”, affecter p à 0 comme “il n'est pas vrai que p”.

On parle aussi de **modèle du calcul propositionnel** lorsque on assigne une valeur de vérité à chacune de ses propositions atomiques (souvenez-vous qu'il y en a une infinité).

Connecteurs logiques et tables de vérité

Dans les langages naturelles on peut composer des propositions complexes à l'aide des propositions plus simples. Nous venons de voir que dans le calcul propositionnel on peut de la même façon composer des propositions complexes à partir des propositions atomiques en utilisant les connecteurs logiques. La valeur de vérité des propositions composées ne dépend que de celles des propositions atomiques. On peut décrire des telles constructions à l'aide des *tables de vérité*, qui sont des tables qui donnent, en fonction des valeurs de vérité des propositions atomiques, la valeur de vérité de la proposition composée.

Négation

Considérons p la proposition *Il fait beau aujourd'hui*. La langue française possède plusieurs formes grammaticales pour exprimer la négation de cette proposition, la plus courante étant sans doute l'expression *il ne fait pas beau aujourd'hui*. En l'occurence, *ne … pas* signifie que s'il est vrai que *Il fait beau aujourd'hui*, alors il est faux qu'*il ne fait pas beau aujourd'hui*, et que s'il est faux que "Il fait beau aujourd'hui", alors il est vrai qu'*il ne fait pas beau aujourd'hui*. On peut illustrer la signification de la négation à l'aide d'une table de vérité :

p	$\neg p$
0	1
1	0

Le connecteur $\neg$ est appelé connecteur *monadique* car il s'applique à une seule proposition. Tous les autres connecteurs sont des connecteurs *dyadiques* s'appliquant à deux propositions.

Conjonction

Le sens donné au connecteur $\wedge$ et celle du *et*. Par conséquent, la proposition $p \wedge q$ est vraie si p et q sont tous les deux vrais, et sera fausse dans tous les autres cas. Ceci peut se résumer par la table de vérité suivante :

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Disjonction

La disjonction est un connecteur dyadique défini par la table de vérité :

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

La proposition $p \vee q$ est vraie si au moins une des propositions p et q est vraie. (**Rappel** : Le symbole $\vee$ définit le *ou inclusif*).

Implication

L'implication $p \to q$ est sans doute la plus compliquée à comprendre. On lit $p \to q$ comme **si** p, **alors** q, p **implique** q ou encore q, **à condition que** p.

Afin de mettre les choses en clair commençons par un exemple. Soit p la proposition *j'obtiens ma licence* et q la proposition *je vais organiser une fête*. Dans ce cas $p \to q$ se lit *si j'obtiens ma licence alors je vais organiser une fête*. Clairement, si j'obtiens ma licence, donc si p est vraie et si j'organise une fête, donc si q est vraie, la promesse est tenue donc $p \to q$ est vraie. Par contre, si j'obtiens ma licence mais je n'organise pas de fête (p est vraie tandis que q est fausse) alors la promesse n'est pas tenue, donc $p \to q$ est fausse. Regardons cependant ce qu'il se passe si malheureusement je n'obtiens pas ma licence. Dans ce cas, si j'organise une fête malgré ça ou si je ne fait rien, ne fait pas démentir ma promesse car je ne me suis engagé à rien dans ce cas-ci. Personne ne pourrait dire que je suis un menteur. Donc, si la proposition p est fausse, l'implication $p \to q$ est vraie, peut importe la valuer de q. Nous pouvons alors conclure que la table de vérité de l'implication est la suivante:

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Remarque. Comme on vient de le voir si p est fausse, alors l'implication $p \to q$ est vraie, quelle que soit la valeur de vérité de q. Ainsi, *si* $4 < 0$, *alors* $1 = 2$ est une implication vraie, de même que *si* $1 = 2$, *alors* $4 > 0$. Cela conduit à la constatation suivante : **du faux, on peut déduire n'importe quoi !**

Théorie des modèles

Si un modèle $\mathcal{M}$ associe la valeur 1 à une formule donnée, on dit que la formule est *vraie dans le modèle* $\mathcal{M}$. On dit qu'une formule est

- **satisfaisable** s'il existe un modèle qui la rend vraie;

- une **tautologie** si elle est vraie dans tout modèle (on dit aussi que la formule est **valide**);
- **falsifiable** s'il existe un modèle qui la rend fausse;
- une **antilogie** s'il n'existe aucun modèle qui la rend vraie.

Par example $p \wedge q$ est *satisfaisable* et *falsifiable* car $p = 1$ et $q = 1$ la rendent vraie, mais $p = 0$ et $q = 1$ la rendent fausse. $p \vee \neg p$ est non seulement *satisfaisable*, mais aussi une tautologie. $p \wedge \neg p$ est une *antilogie*.

Donc, on appelle **tautologie** une formule ϕ dont l'interprétation est 1, quelle que soit la valeur des variables propositionnelles. La notation

$$\models \phi$$

signifie que ϕ est une tautologie. On a par exemple $\models \phi \vee \neg\phi$, puisque quelque soit la valeur associée à ϕ, la valeur de $\phi \vee \neg\phi$ sera toujours 1.

Si ϕ et ψ sont deux formules, on dit que ϕ est une **conséquence logique** de ψ (ou **conséquence sémantique** ou, plus informellement, que ψ **implique** ϕ) si tout modèle qui satisfait ψ satisfait aussi ϕ. Si ϕ est une conséquence logique de ψ on écrit

$$\psi \models \phi;$$

intuitivement, ceci signifie que ϕ est vraie *sous l'hypothèse* ψ. Plus généralement, si Γ est un ensemble de formules on dit que ϕ est une conséquence logique de Γ, et on note $\Gamma \models \phi$, si tout modèle qui satisfait *toutes* les formules de Γ satisfait aussi ϕ.

Lorsque on a $\phi \models \psi$ et $\psi \models \phi$, on dit que ϕ et ψ sont **(sémantiquement) équivalentes**, ce qui, selon les textes, est noté

$$\phi \equiv \psi \quad \text{ou} \quad \phi \Leftrightarrow \psi \quad \text{ou} \quad \phi = \psi$$

Pour donner un exemple, il suffit de regarder les tables de vérité pour se rendre compte que $p \wedge q \models p \vee q$, mais que la réciproque n'est pas vraie ($p \wedge q$ n'est pas une conséquence logique de $p \vee q$).

Attention: aucun des symboles $\models, \equiv, \Leftrightarrow, =$ ne fait partie de la logique. Ce sont tous des symboles *métalogiques* qui permettent d'exprimer des propriétés qu'on a démontrées *en dehors* de la syntaxe du calcul des propositions (par exemple en lisant les tables de vérité). On fera surtout attention à ne pas confondre $p \to q$ et $p \leftrightarrow q$, qui sont des propositions du calcul des propositions, avec $p \models q$ et $p \Leftrightarrow q$.

Équivalences remarquables

Commutativité

Les phrases *il est beau et intelligent* et *il est intelligent et beau* sont sémantiquement équivalentes. De la même façon les phrases *il est beau ou intelligent* et *il est intelligent ou beau* sont sémantiquement équivalentes. De manière générale, pour toutes propositions p et q,

$$p \wedge q \equiv q \wedge p \qquad \text{et} \qquad p \vee q \equiv q \vee p.$$

Associativité

Supposons que nous avons une formule de la forme $p \wedge q \wedge s$. Nous pouvons interpréter cette formule de deux façons différentes. Ou bien on calcule d'abord $s = p \wedge q$ et ensuite $s \wedge r$, c'est qui est équivalent à $(p \wedge q) \wedge r$, ou bien on calcule d'abord $t = q \wedge r$ et ensuite $q \wedge t$, ce qui revient à faire $p \wedge (q \wedge r)$.

Le même constat tient si on remplace $\wedge$ par $\vee$. En effet, les connecteurs $\wedge$ et $\vee$ sont associatives et donc l'ordre dans lequel on effectue les opérations n'est pas important. On peut alors conclure que

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \qquad \text{et} \qquad (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r).$$

Distributivité

Imaginez que votre professeur vous dit: *Pour valider le cours il faut d'abord réussir l'examen écrit et ensuite réussir l'examen sur machine ou avoir une note supérieure à 12 à tous les devoirs maison.* Vous avez alors deux manières de valider le cours: Réussir l'examen écrit et l'examen sur machine, ou bien réussir l'examen écrit et avoir une note supérieure à 12 à tous les devoirs maison.

Ceci est dû aux tautologies suivantes :

$$p \wedge (q \vee s) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge s) \qquad \text{et} \qquad p \vee (q \wedge s) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee s).$$

Lois de De Morgan

Pour que la phrase “La maison est grande et belle” soit fausse, il suffit que la maison soit petite ou qu'elle soit moche, mais il n'est pas nécessaire que ces deux caractéristiques soient réunis en même temps. La négation de cette phrase est alors “La maison est petite ou moche” et non pas “La maison est petite et moche”.

Les tautologies suivantes, connues comme *les lois de De Morgan*, formalisent cela:

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q \qquad et \qquad \neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

Implication

$$p \to q \equiv \neg p \vee q.$$

Transposition

La phrase *si l'eau bout, alors sa température est à 100 degrés* est équivalente à *si la temperature de l'eau n'est pas à 100 degrés, alors l'eau ne bout pas*. Ceci provient de la tautologie suivante :

$$p \to q \equiv \neg q \to \neg p.$$

Exportation

$$(p \wedge q) \to r \equiv p \to (q \to r).$$

On résume maintenant la liste de formules qui peuvent être prouvées *sémantiquement équivalentes* en comparant leur tables de vérité (remarquez qu'à la place de p et q on peut substituer n'importe quelles formules ϕ et ψ non nécessairement atomiques).

Propriété	Formules équivalentes	
Double négation	p	$\neg\neg p$
Commutativité	$p \wedge q$	$q \wedge p$
	$p \vee q$	$q \vee p$
Associativité	$(p \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
	$(p \vee q) \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
Distributivité	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (q \wedge r)$
	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (q \vee r)$
Lois de de Morgan	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$
	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
Implication	$p \to q$	$\neg p \vee q$
Transposition	$p \to q$	$\neg q \to \neg p$
Exportation	$(p \wedge q) \to r$	$p \to (q \to r)$

Réciproque et contraposée d'une implication

Réciproque

Considérons la proposition p : *n est un nombre entier* et la position q : *n est un nombre réel*. L'implication $p \to q$ est vraie, puisque tout nombre entier est aussi un nombre réel. On peut maintenant se demander si la réciproque est vraie, c'est-à-dire si q implique p, qui donne *si n est un nombre réel, alors n est un nombre entier*. Cette implication est évidemment fausse. En effet, $1/2$ est un nombre réel, mais pas un nombre entier.

De façon générale, la réciproque d'une implication $p \to q$ est l'implication $q \to p$.

Contraposée

La phrase $\neg q \to \neg p$ est la contraposée de la phrase $p \to q$.

Si par exemple p est la phrase *est un rectangle* et q la phrase *a quatre angles droits*. L'implication $p \to q$ se lit alors *si c'est un rectangle alors il quatre angles trois*. L'implication contraposée est donc la phrase *s'il n'a pas quatre angles droits, alors ce n'est pas un rectangle.* Puisque $p \to q$ et $\neg q \to \neg p$ sont sémantiquement équivalentes, pour démontrer une implication, nous pouvons à la place démontrer sa contraposée.

Bibliographie

Pour les définitions de base et les algèbres de Boole, on pourra consulter un quelconque des ouvrages conseillés dans la Bibliographie.

Pour une exposition claire et complète sur la distinction entre syntaxe et sémantique et sur la théorie de la preuve, je conseille les chapitres 4 et 5 du livre *Mathématiques pour l'Informatique* de *Arnold* et *Guessarian*, en particulier la section 5.2: à quelques choix de nomenclature et de notation près (par exemple le symbole $\to$ est remplacé par $\supset$), les arguments y sont traités de la même façon que dans cette page. Malheureusement ce livre contient assez peu d'exercices sur cette partie.

Introduction à la logique de *David*, *Nour* et *Raffali* est un autre très bon texte. Le chapitre 1 couvre toute la théorie de la preuve faite dans ce cours, plus la théorie de la preuve du Calcul des Prédicats. Il propose aussi beaucoup d'exercices pour vous entraîner avec les séquents. Le chapitre 2 couvre la sémantique et les théorèmes de complétude. L'étudiant intéressé pourra les lire rapidement.

Allez voir aussi les pages des Exercices et des Exercices Corrigés.