Les Arbres Binaires de Recherche

Sandrine Vial
sandrine.vial@uvsq.fr

Novembre 2020

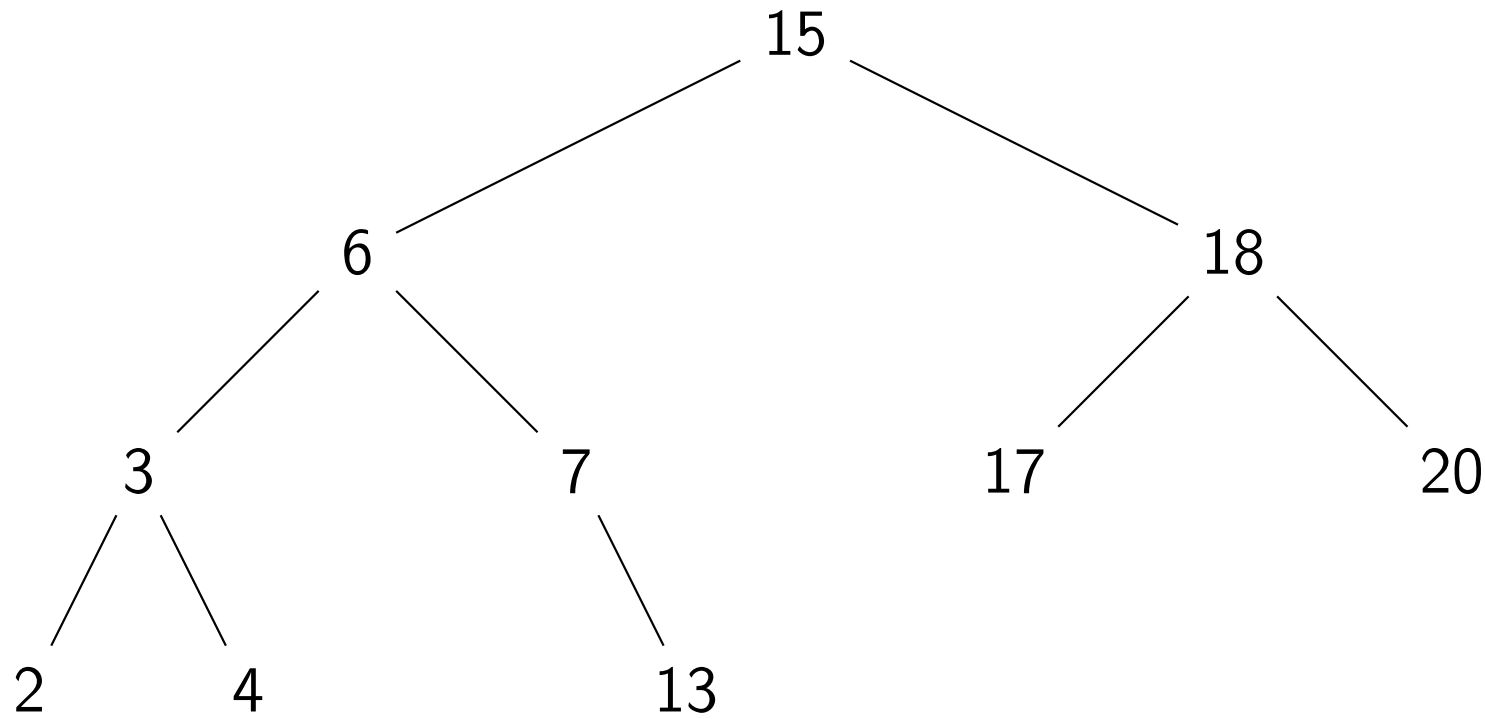
Les arbres binaires de recherche

1. Arbre binaire enraciné
2. Chaque nœud d'un ABR est associé à une valeur. Les valeurs doivent être comparables entre elles.
3. Propriété supplémentaire

Propriétés

1. La valeur d'un nœud est **plus grande** que toutes les valeurs de **son sous-arbre gauche**.
2. La valeur d'un nœud est **plus petite** que toutes les valeurs de **son sous-arbre droit**.

Exemple d'ABR



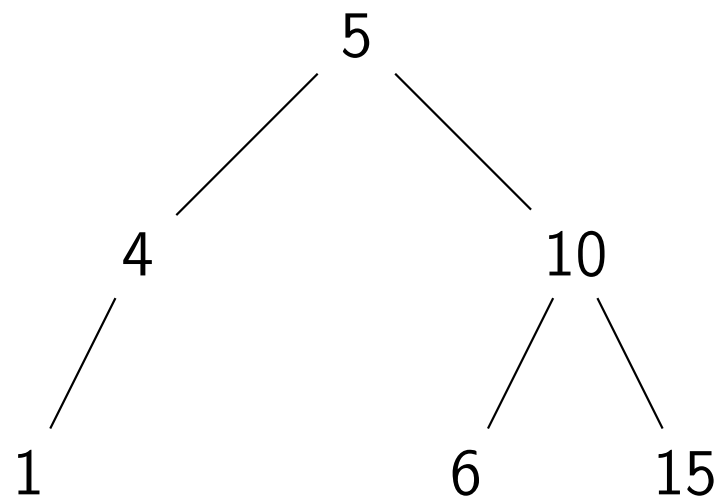
Structure de données

Mise en œuvre

```
Enregistrement Nœud {
    val    : entier;
    sag : ↑ Nœud;
    sad : ↑ Nœud;
    parent : ↑ Nœud;
}
```

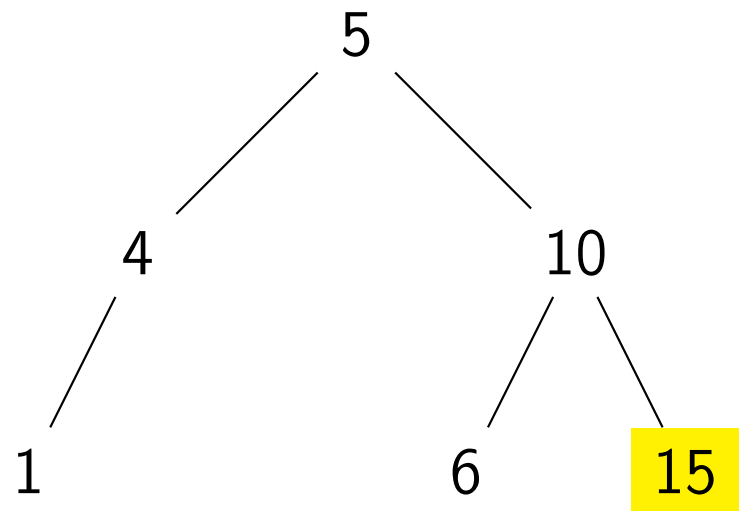
Affichage des valeurs des nœuds

- Affichage dans l'ordre croissant des clés :
  Parcours en profondeur infixe



Recherche de la valeur maximum

- La valeur maximum se trouve dans le sous-arbre droit de la racine.
- Il faut suivre **le bord droit** de l'arbre pour arriver à la valeur maximum.



Recherche de la valeur maximum

Algorithme 1 Element Maximum dans un ABR

```
ABR_Max(r : Nœud) : Entier
▷ Entrée : r (la racine d'un arbre)
▷ Sortie : l'élément maximum de l'ABR enraciné en r
Debut
    tant que x.sad ≠ NIL faire
        x ← x.sad ;
    fin tant que
    retourner x.val ;
Fin
```

Complexité au pire : O(hauteur de l'ABR)

Recherche de la valeur minimum

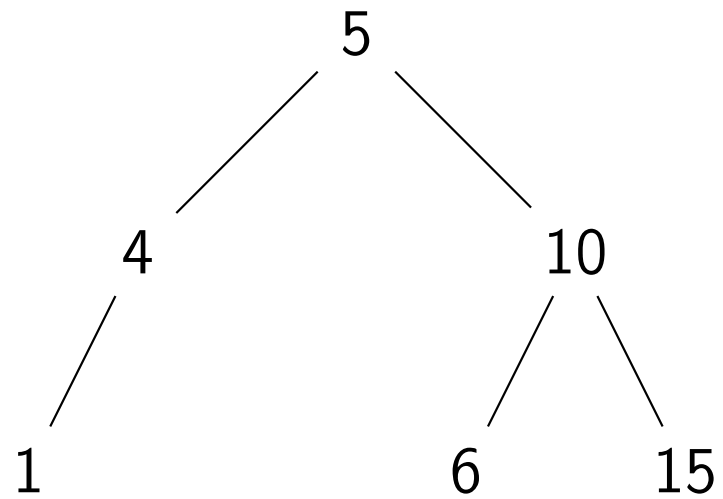
Algorithme 2 Element Minimum dans un ABR

```
ABR_Min(r : Nœud) : Entier
▷ Entrée : r (la racine d'un arbre)
▷ Sortie : l'élément maximum de l'ABR enraciné en r
Debut
    tant que x.sag ≠ NIL faire
        x ← x.sag ;
    fin tant que
    retourner x.val ;
Fin
```

Complexité au pire : O(**hauteur de l'ABR**)

Recherche d'un élément dans un ABR

- Parcours de l'arbre depuis la racine jusqu'à l'élément cherché en choisissant en chaque noeud dans quel sous-arbre on va chercher en fonction de la valeur cherchée.



Recherche d'un élément dans un ABR

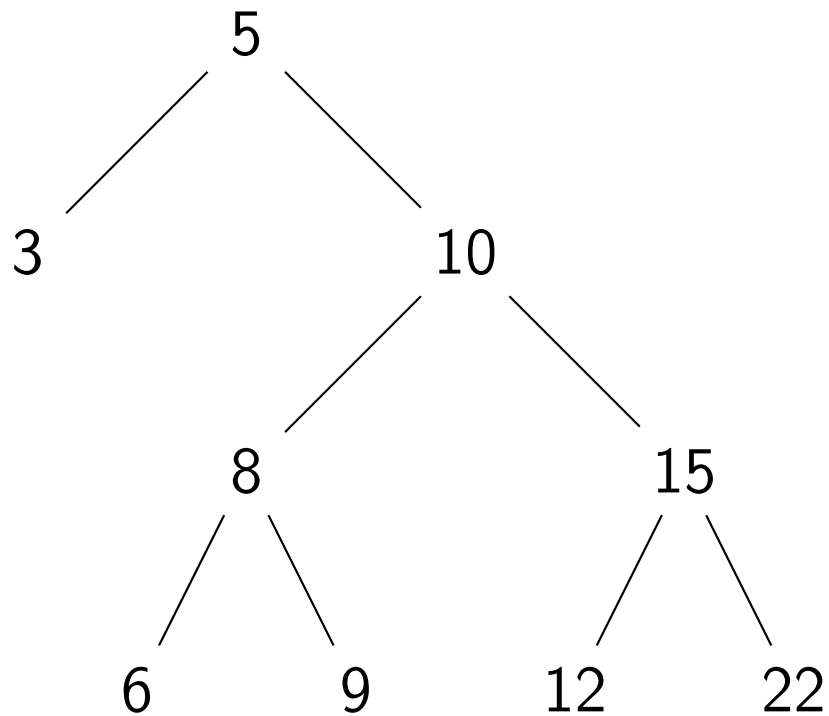
Algorithme 3 Recherche d'un élément dans un ABR

```
Recherche(r : Nœud, c : Entier) : Booleen
▷ Entrée : r (la racine d'un arbre), c (l'élément recherché)
▷ Sortie : renvoie vrai si c est dans l'arbre enraciné en r, faux sinon
 Debut
      si r ≠ NIL
           si r.val = c  retourner Vrai ;
           sinon  si r.val > c  retourner Recherche(r.sag,c) ;
           sinon  retourner Recherche(r.sad,c) ;
      fin si
      retourner Faux ;
 Fin
```

Complexité au pire : O(hauteur de l'ABR)

Successeur

- x un nœud. On cherche y tel que :
  - $y.val > x.val$
  - et tel que pour tout nœud z :
    - $z \neq x$ et $z \neq y$
    - on n'ait pas $y.val > z.val > x.val$



Successeur

- Le successeur d'un nœud x est le nœud possédant la plus petite valeur dans le sous-arbre droit de x s'il en possède un.
- sinon c'est le nœud qui est le 1er ancêtre de x dont la racine du sous-arbre gauche est aussi un ancêtre de x ou x lui-même.

Successeur

Algorithme 4 Successeur dans un ABR

```
ABR_Successeur(r : Nœud) : Noeud
▷ Entrée : r (la racine d'un arbre)
▷ Sortie : renvoie le nœud dont la valeur est immédiatement
supérieure à celle de r
▷ Variables locales :
    y : Noeud ;
    Debut
        si r.Droit ≠ NIL
            retourner ABR _Min(r.sad) ;
        fin si
        y ← r.Pere ;
        tant que y ≠ NIL et r = y.sad
            r ← y ;
            y ← y.parent ;
        fin tant que
        retourner y ;
    Fin
```

Complexité au pire : O(hauteur de l'ABR)

Insertion d'un nœud dans un ABR

- On veut garder les propriétés de l'ABR.
- Deux approches :
  - Insertion aux feuilles de l'ABR
  - Insertion à la racine de l'ABR

Insertion aux feuilles

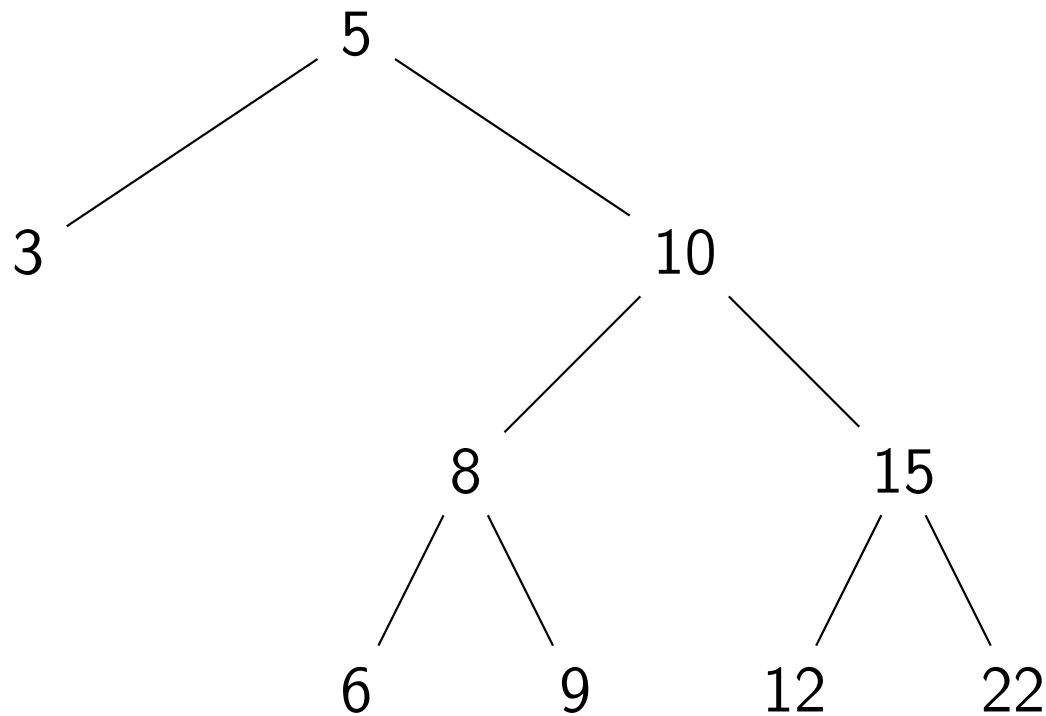
Principe

- Recherche de la valeur de l'élément que l'on cherche à insérer :
  - Si la valeur existe déjà : rien à faire
  - Sinon la recherche s'est arrêtée sur un arbre vide, qu'il suffit de remplacer par l'élément à insérer

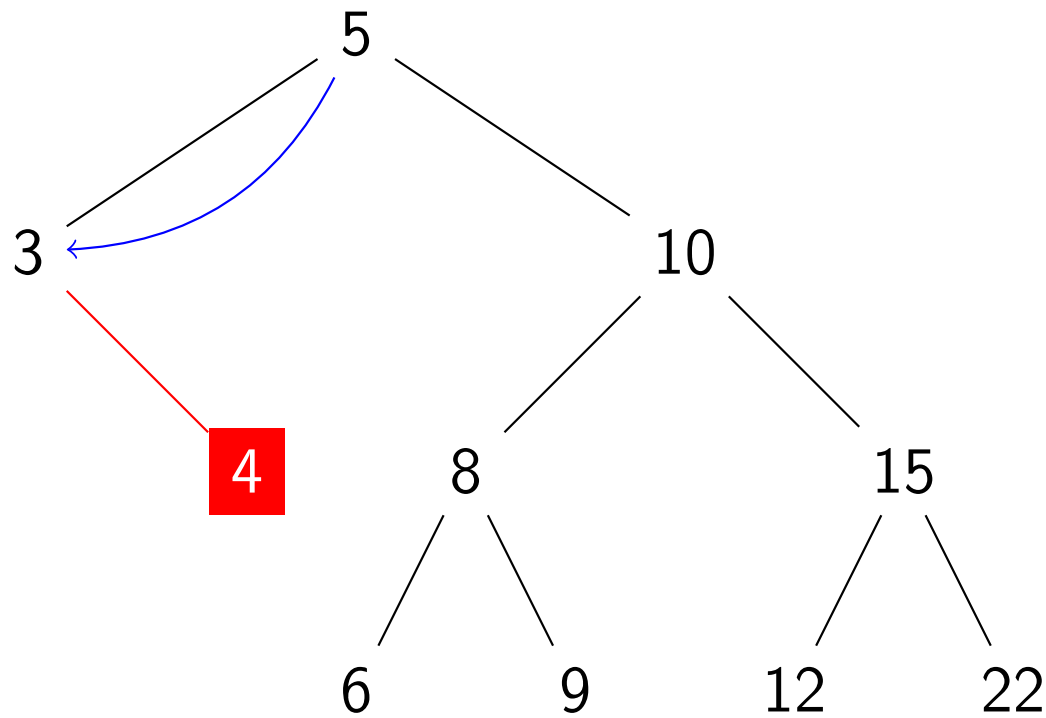
Conséquences

- Hauteur de l'arbre peut être modifiée.
- Complexité dans le pire cas : $O(h)$ avec h la hauteur de l'arbre.

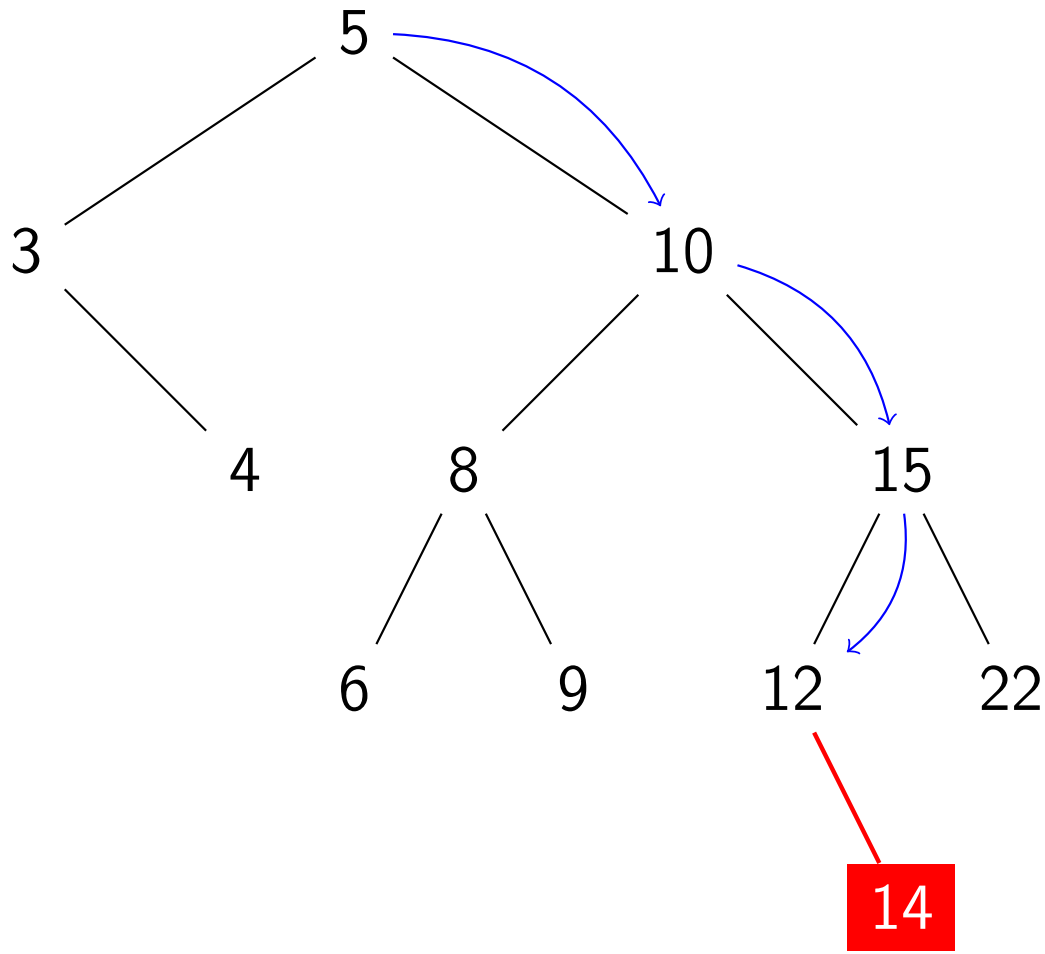
Exemple



Exemple



Exemple



Insertion aux feuilles

Algorithme 5 Insertion d'un nœud aux feuilles

ABR-Inserer(r : Nœud, z : Noeud) : Noeud
▷ ***Entrée : r (la racine d'un ABR), z (un nouveau à insérer)***
▷ ***Sortie : renvoie la racine de l'ABR dans lequel le nœud z a été inséré***

```
Debut
    si r = NIL
        retourner z ;
    sinon
        si z.val ≤ r.val
            r.sag ← ABR-Inserer(r.sag, z) ;
            retourner r ;
        sinon
            r.sad ← ABR-Inserer(r.sad,z) ;
            retourner r ;
        fin si
    fin si
Fin
```

Complexité au pire : O(hauteur de l'ABR)

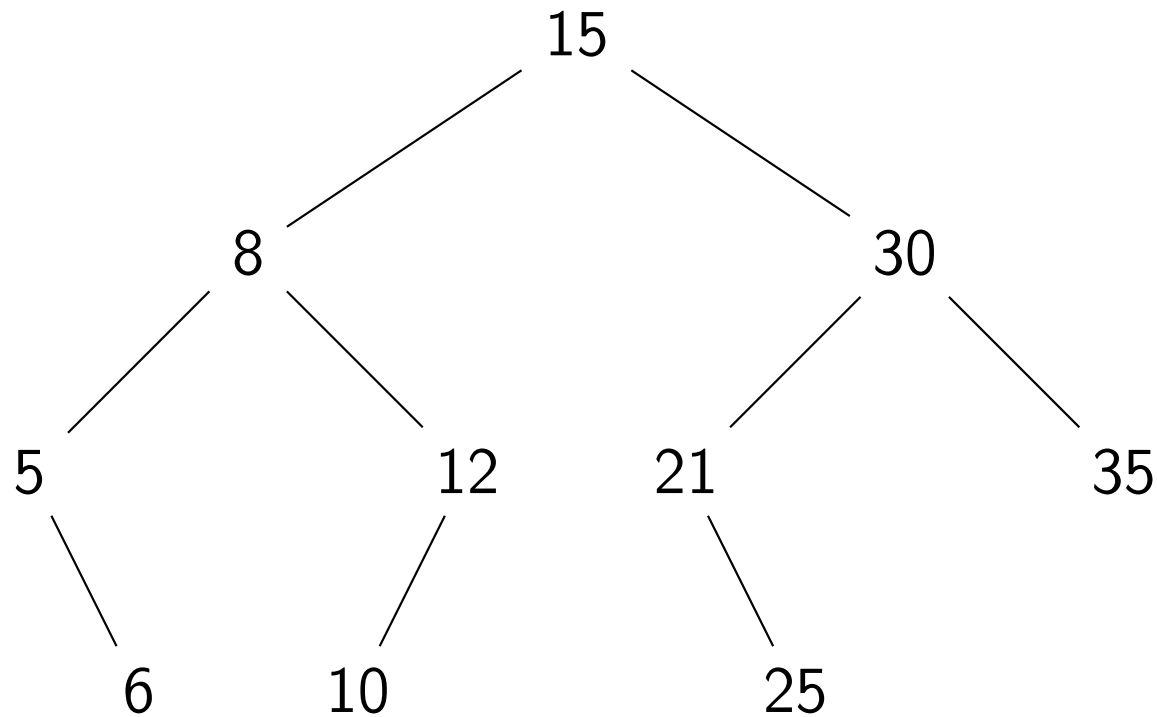
Insertion à la racine

Principe

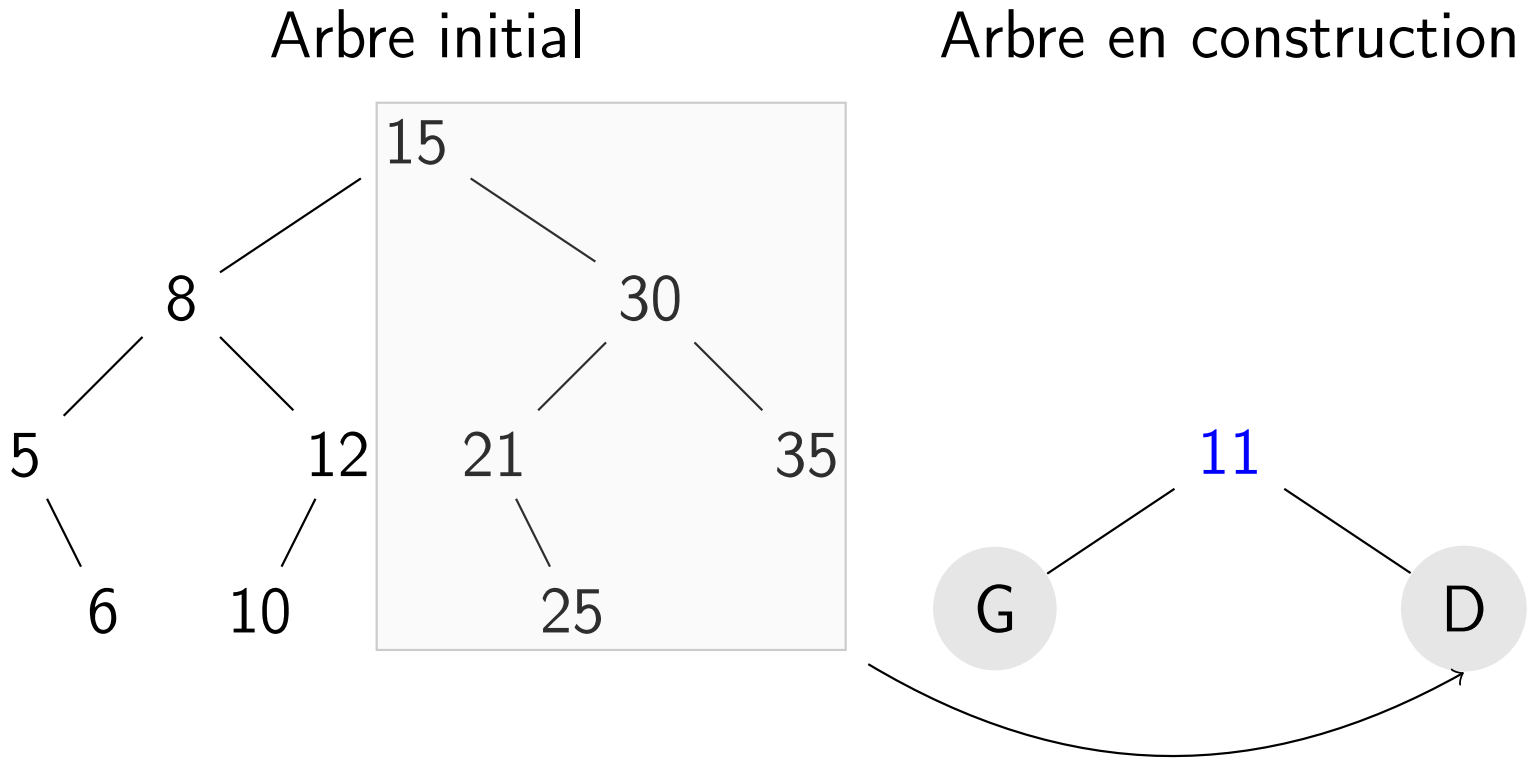
- Le nœud a insérer devient la nouvelle racine.
- Il faut trouver les nœuds à mettre dans le sous-arbre droit et ceux à mettre dans le sous-arbre gauche
- On va faire cela par étape en destructurant l'arbre de départ.

Insertion à la racine

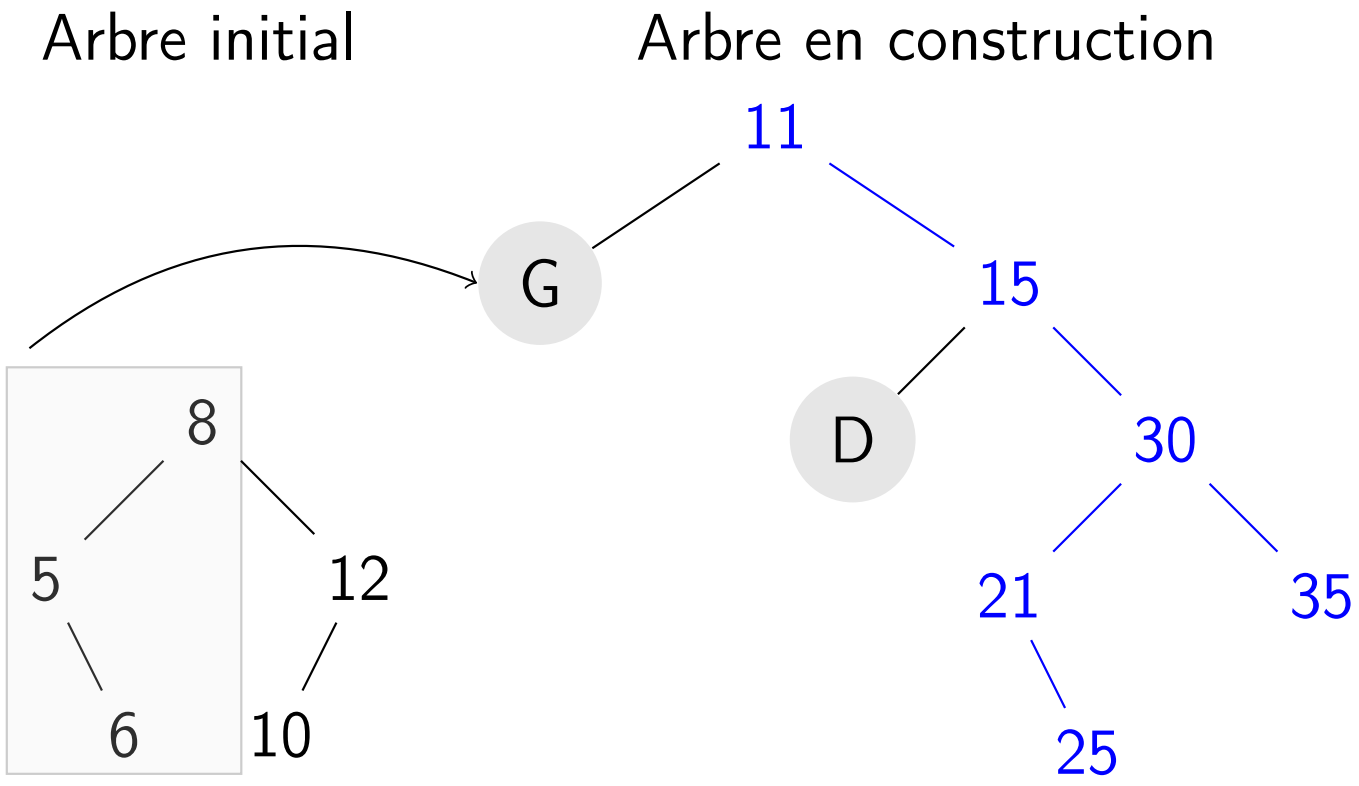
On va ajouter 11 à l'arbre suivant :



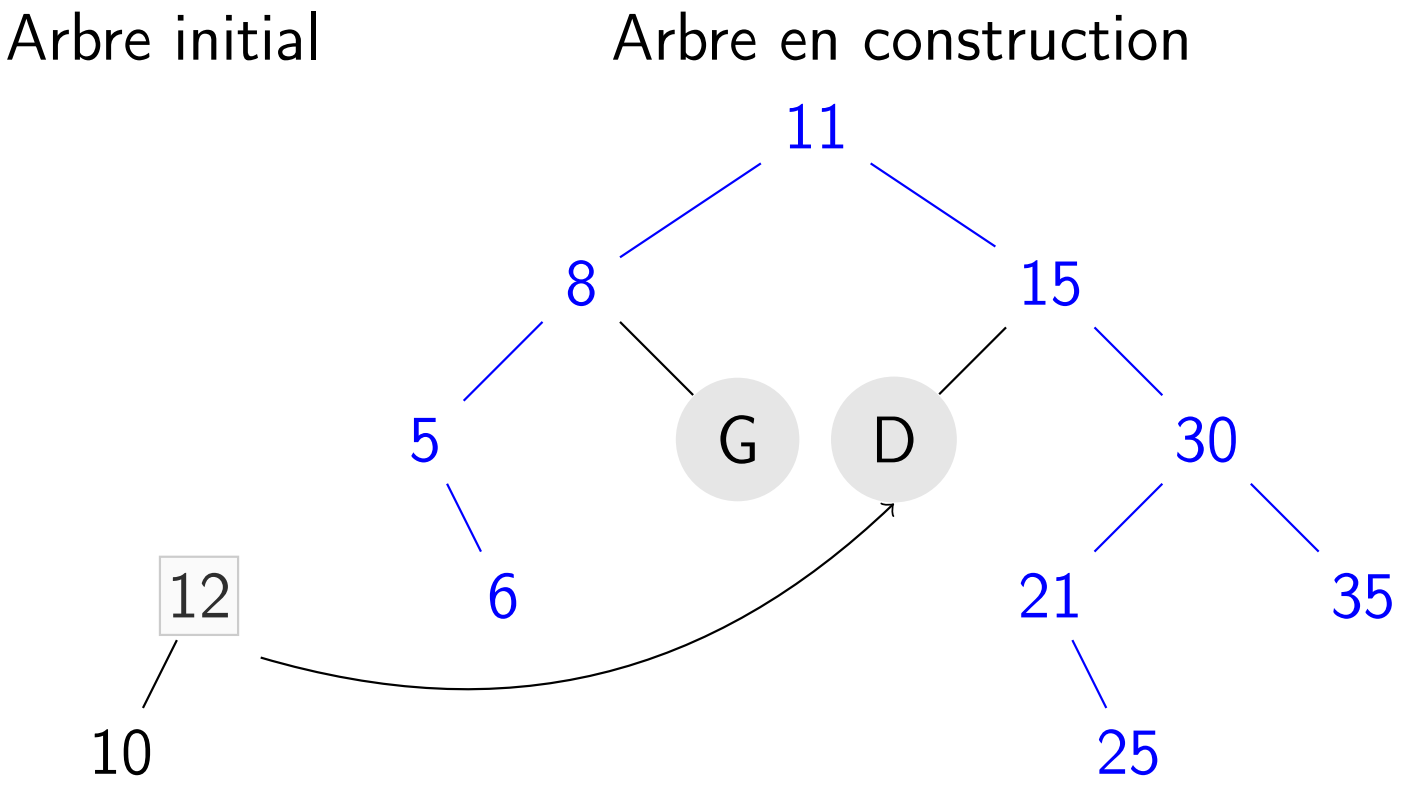
Insertion à la racine



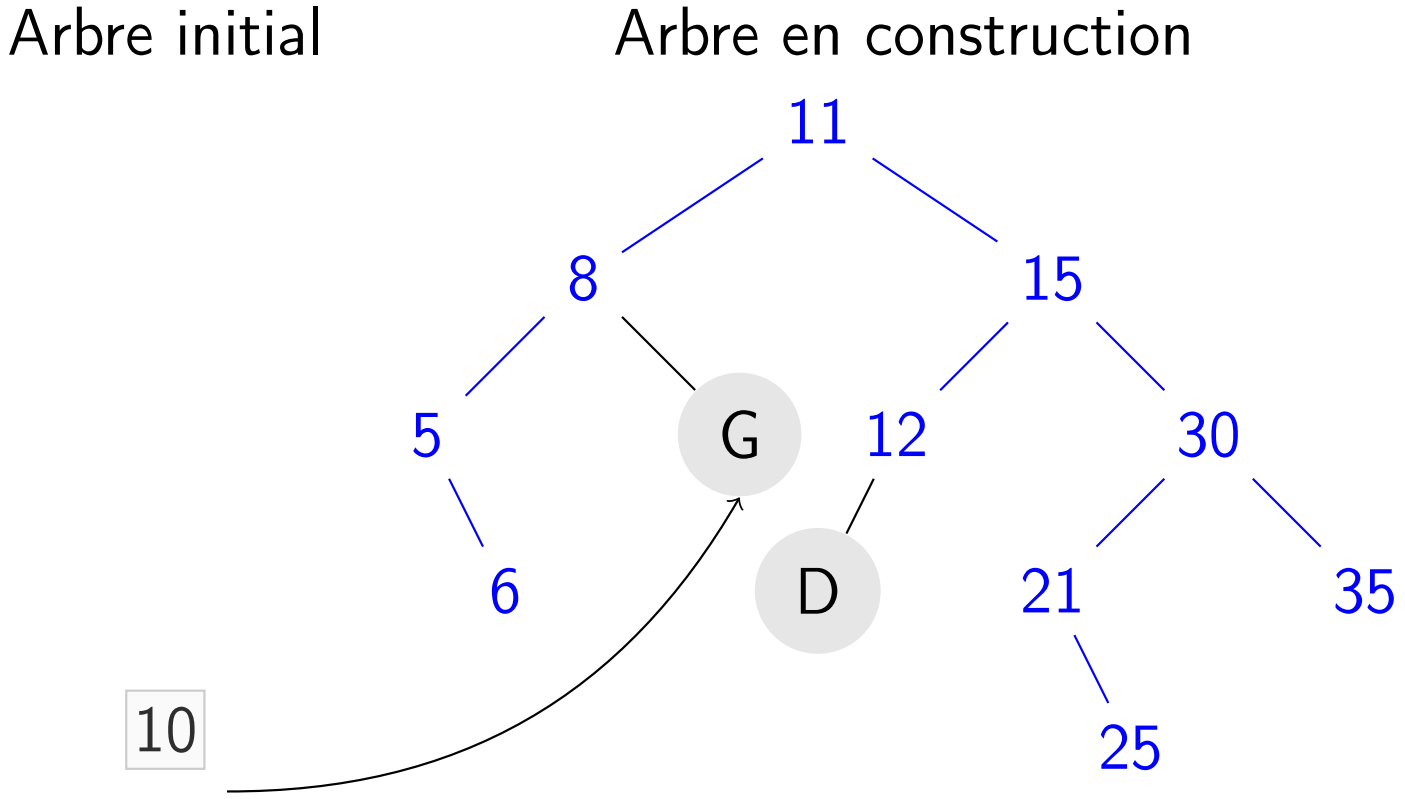
Insertion à la racine



Insertion à la racine



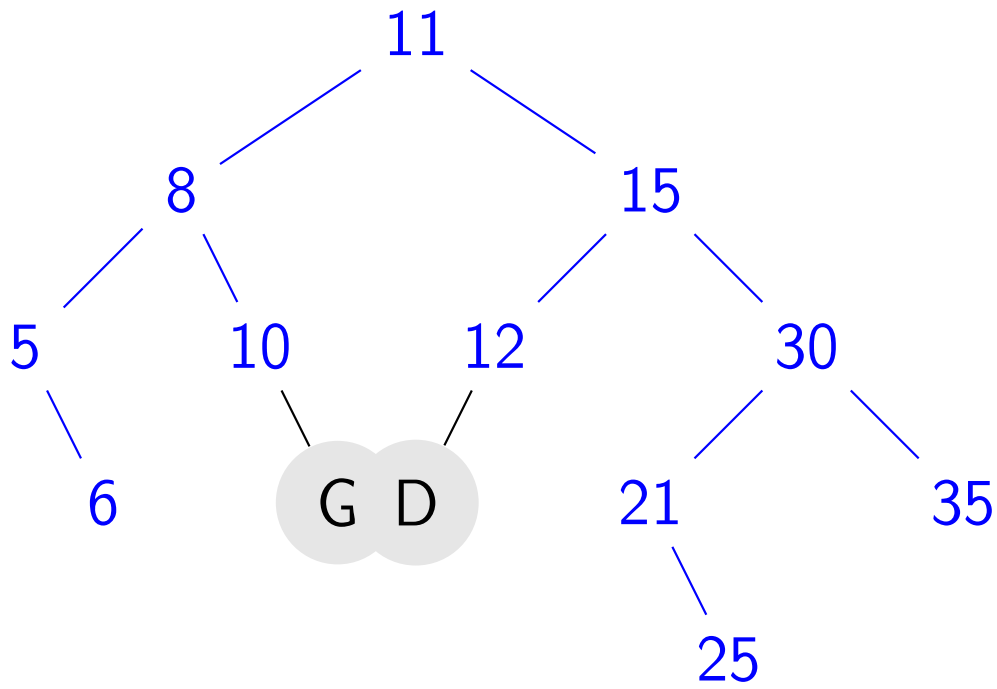
Insertion à la racine



Insertion à la racine

Arbre initial

Arbre en construction



Complexité au pire : O(hauteur de l'ABR)

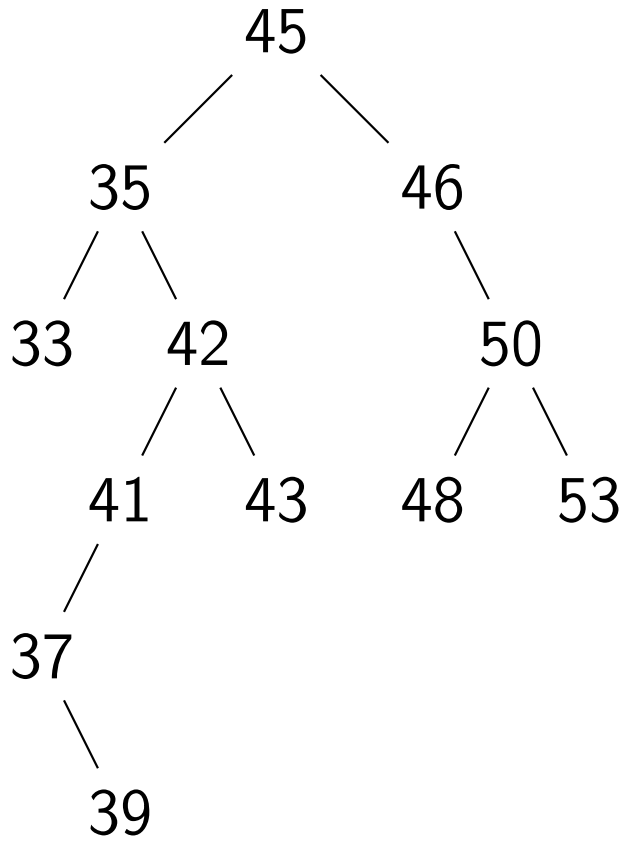
Suppression d'un nœud

3 cas possibles

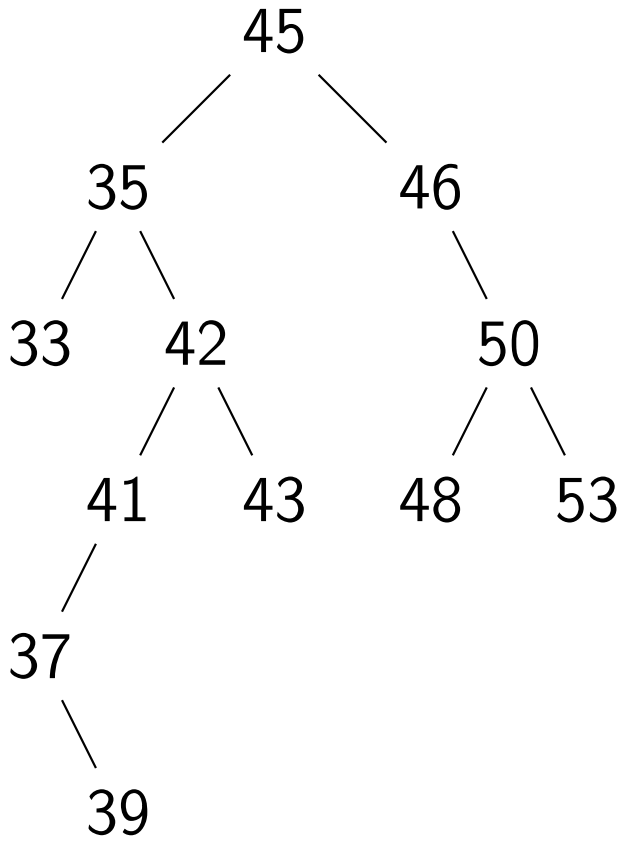
- nœud à supprimer est une **feuille** : suppression du nœud
- nœud à supprimer a **un seul enfant** : suppression du nœud + relier le parent du nœud avec son unique enfant.
- nœud à supprimer a **2 enfants** : remplacement du nœud par son **successeur** dans l'arbre et suppression du successeur.

Complexité au pire : O**(hauteur de l'ABR)**

Exemple de suppression

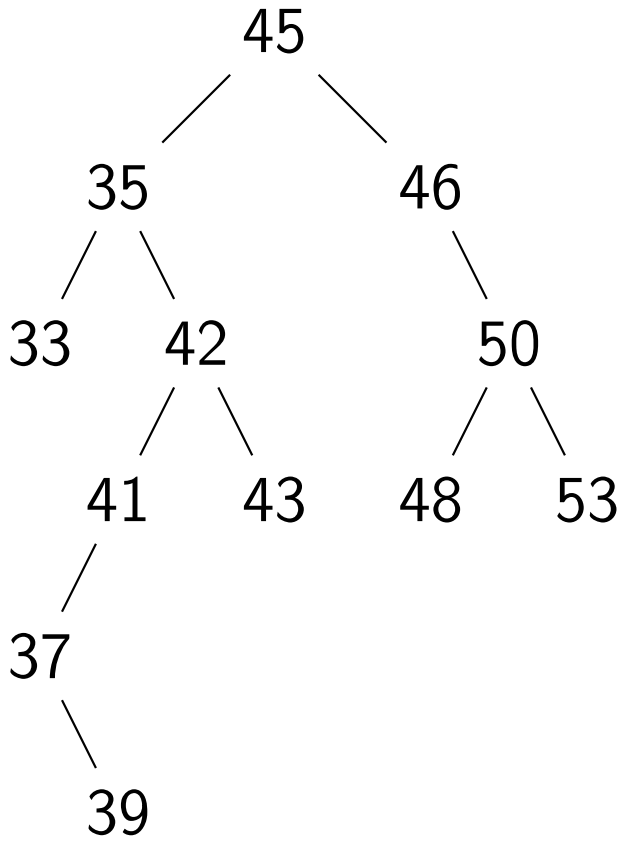


Exemple de suppression



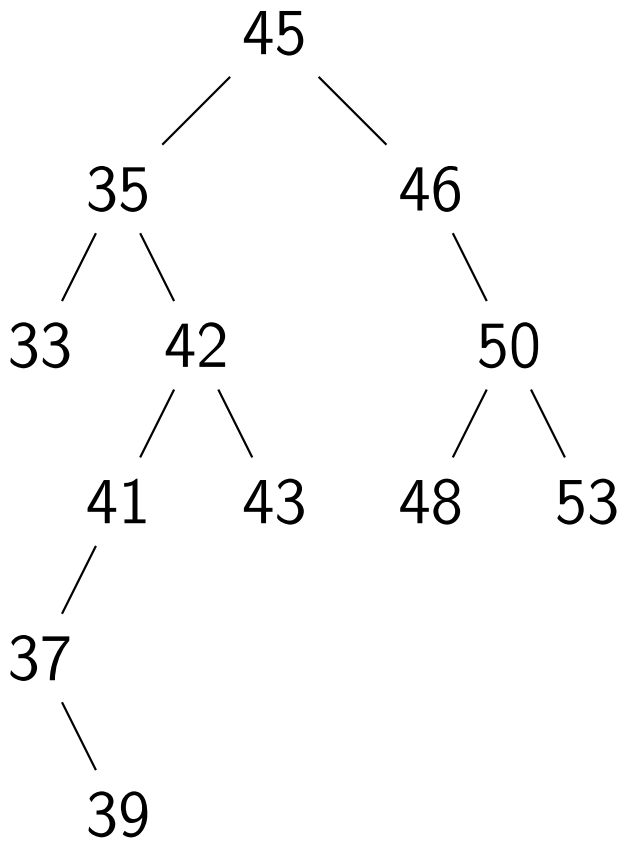
- Suppression d'une feuille : 48

Exemple de suppression



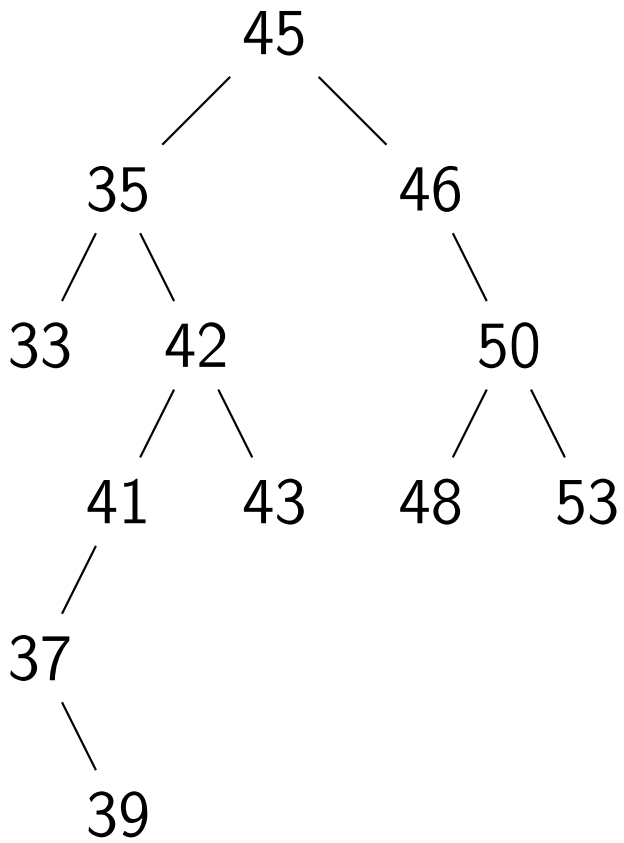
- Suppression d'une feuille : 48

Exemple de suppression



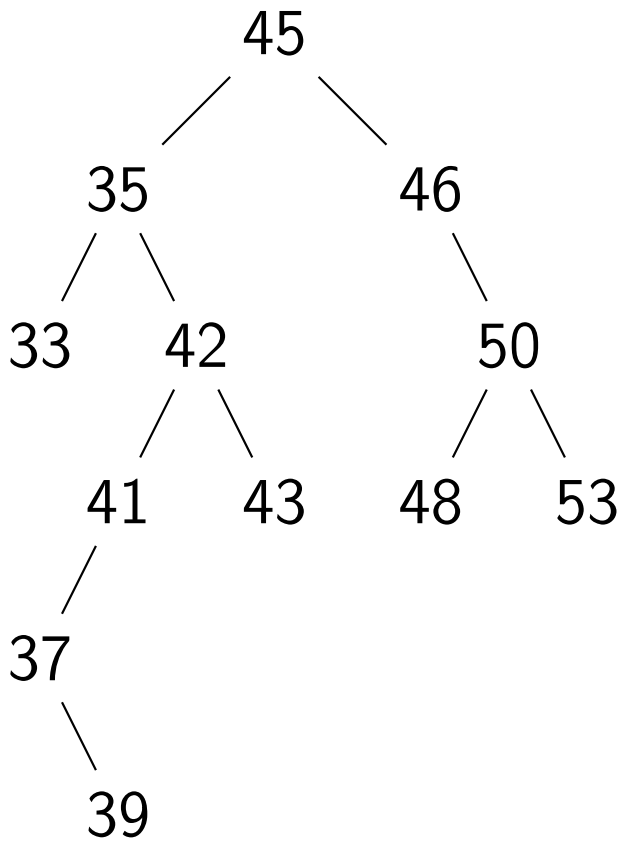
- Suppression d'un nœud avec un seul enfant : 41

Exemple de suppression



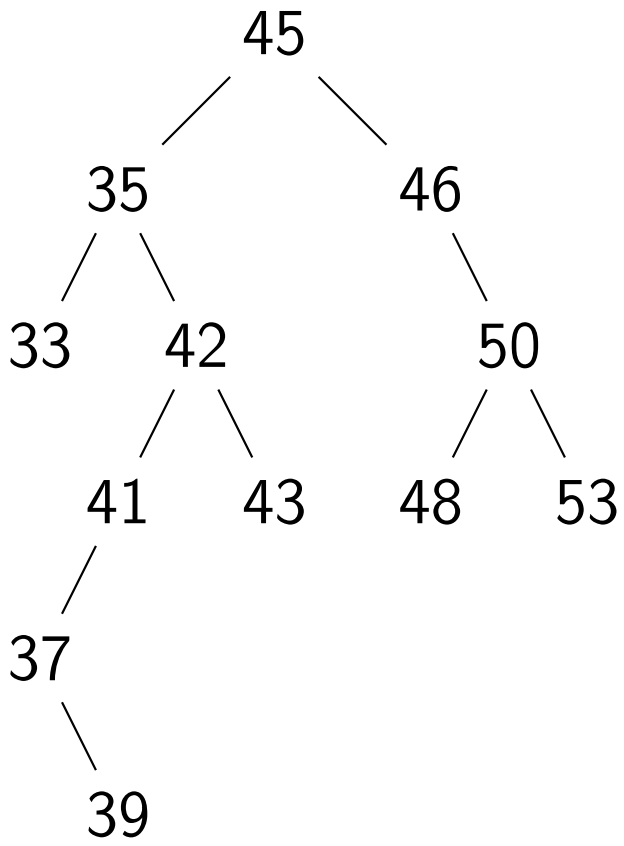
- Suppression d'un nœud avec un seul enfant : 41

Exemple de suppression



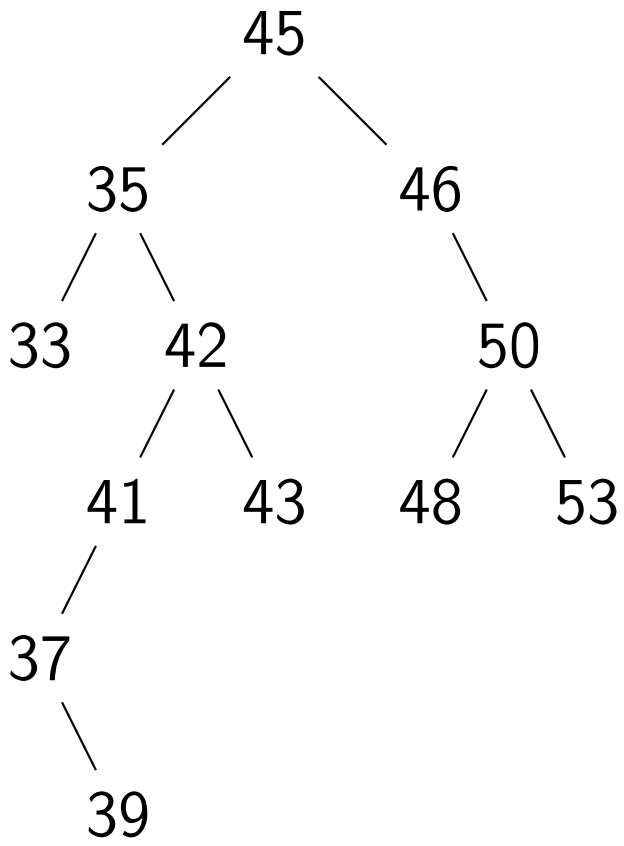
- Suppression d'un nœud avec deux enfants : 35

Exemple de suppression



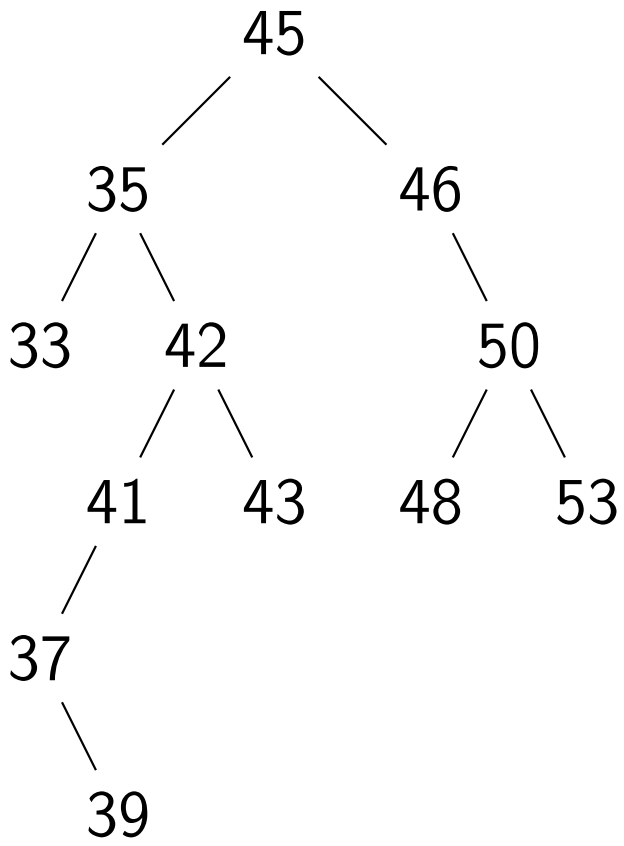
- Suppression d'un nœud avec deux enfants : 35

Exemple de suppression



- Suppression d'un nœud avec deux enfants : 35

Exemple de suppression



- Suppression d'un nœud avec deux enfants : 35

Complexité des algorithmes sur les ABR

- Les différents algorithmes sur les ABR ont une complexité au pire qui dépend de la hauteur h de l'arbre de taille n.

$$\lfloor \log_2 n \rfloor \leq h \leq n - 1$$

  - Pour les arbres complets, complexité en $O(\log_2 n)$.
  - Pour les arbres dégénérés, complexité en $O(n)$.
- La complexité dépend de la forme de l'arbre (et donc des opérations successives d'ajout/suppression).

Equilibrer les arbres en hauteur

Comment faire ?

- Ré-équilibrer l'arbre après les ajouts/suppressions pour qu'il ait une hauteur minimale : **Arbres AVL**
- Stocker plusieurs valeurs dans un même nœud : **B-arbres**