TD 5 : Induction et récursion

christina.boura@uvsq.fr

19 octobre 2020

Sommes

Dans les sommes suivantes, remplacer l'indice de sommation par $k = i - 1$.

1. $\sum_{i=1}^{n} i(i-1) = \frac{n(n^2-1)}{3}$.

   On a $k = i - 1 \Rightarrow i = k + 1$. Pour $i = 0 \Rightarrow k = -1$ et pour $i = n \Rightarrow k = n - 1$. Par conséquent, on obtient l'expression équivalente :

$$\sum_{k=0}^{n-1} k(k+1) = \frac{n(n^2-1)}{3}.$$

2. $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} 1^i 1^j = n^2$.

   De la même façon on obtient

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{n} 1^{k+1} 1^j = n^2.$$

Étendez les sommes de l'exercice précédent en remplaçant n par $n + 1$.

Preuves sur les entiers

Démontrer par induction les propriétés suivantes.

1. Pour tout entier n, $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$;

   On note $P(n)$ la propriété $P(n) : \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

   - Cas de base : On démontre ici que $P(0)$ est vraie. En effet, pour $n = 0$ on a $0 = 0(0+1)/2$, donc le cas de base est vérifié.
   - Hypothèse d'hérédité (H.R.) : On suppose que $P(n)$ est vraie pour un n quelconque, c'est-à-dire on suppose que $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ est vrai.
   - Hérédité : On va montrer que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, c'est-à-dire on suppose que $P(n)$ est vraie pour un n quelconque et on montrera que dans ce cas $P(n+1)$ est vraie.

$$P(n+1) : \sum_{i=0}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

   On a :

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = \sum_{i=0}^{n} i + (n+1) \overset{\text{H.R.}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

   On conclut alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

2. Pour tout entier n, $7^n - 1$ est divisible par 6 ;

   On note $P(n)$ la propriété $P(n)$: $7^n - 1$ est divisible par 6.

   - Cas de base : On démontre ici que $P(0)$ est vraie, ç.-à-d. que $7^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ est divisible par 6. Ceci est vraie, car on peut écrire $0 = 6 \cdot 0$, et comme $0 \in \mathbb{N}$ ceci prouve que 6 divise bien 0.

   - Hypothèse d'hérédité (H.R.) : On suppose que $P(n)$ est vraie pour un n quelconque, c'est-à-dire on suppose que pour un n quelconque $7^n - 1$ est divisible par 6.

   - Hérédité : On va montrer que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, c'est-à-dire on suppose que $P(n)$ est vraie pour un n quelconque et on montrera que dans ce cas $P(n+1)$ est vraie.

     $$P(n+1) : 7^{n+1} - 1 \text{ est divisible par } 6.$$

     On a :

     $$7^{n+1} - 1 = 7 \cdot 7^n - 1 = 7(7^n - 1) + 6.$$

     Par l'hypothèse d'hérédité on sait que $7^n - 1$ est divisible par 6. Il existe alors un entier k tel que $7^n - 1 = 6k$. Donc

     $$7^{n+1} - 1 = 7(7^n - 1) + 6 = 7 \cdot 6k + 6 = 6\underbrace{(7k+1)}_{\ell} = 6\ell.$$

     On conclut alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

3. Pour tout entier n, $(n^3 - n)$ est divisible par 3 ;

   On note $P(n)$ la propriété $P(n)$: $(n^3 - n)$ est divisible par 3.

   - Cas de base : On démontre ici que $P(0)$ est vraie, ç.-à-d. que $0^3 - 0 = 0$ est divisible par 3, ce qui est vrai.

   - Hypothèse d'hérédité (H.R.) : On suppose que $P(n)$ est vraie pour un n quelconque, c'est-à-dire on suppose que pour un n quelconque $(n^3 - n)$ est divisible par 3.

   - Hérédité : On montre que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

     $$P(n+1) : (n+1)^3 - (n+1) \text{ est divisible par } 3.$$

     On a :

     $$(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 = n^3 + 3n^2 + 2n = (n^3 - n) + 3(n^2 + n).$$

     Par l'hypothèse d'hérédité on sait que $(n^3 - n)$ est divisible par 3. Il existe alors un entier k tel que $(n^3 - n) = 3k$. Donc

     $$(n+1)^3 - (n+1) = 3k + 3\underbrace{(n^2+n)}_{\ell} = 3\underbrace{(k+\ell)}_{m}$$

     On voit donc que $(n+1)^3 - (n+1)$ est divisible par 3 et on conclut alors que $(n^3 - n)$ est divisible par 3 pour tout n.

4. Pour tout entier $n \geq 1$, $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$;

   On note $P(n)$ la propriété $P(n) : 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$.

- Cas de base : On démontre ici que $P(1)$ est vraie : $1 = 1^2$.
- Hypothèse d'hérédité (H.R.) : On fixe un $n \in \mathbb{N}$ et on suppose que $1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$.
- Hérédité : On montre que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

$$P(n+1) : 1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2n+1) = (n+1)^2.$$

On a :

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2n+1) \overset{\text{H.R.}}{=} n^2+(2n+1) = (n+1)^2.$$

On conclut alors que $1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$ pour tout n.

5. Pour tout entier n, $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

On note $P(n)$ la propriété $P(n) : \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

- Cas de base : On démontre ici que $P(0)$ est vraie : $0^2 = \frac{0 \cdot 1 \cdot 1}{6}$.
- Hypothèse d'hérédité (H.R.) : On fixe un $n \in \mathbb{N}$ quelconque et on suppose que $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- Hérédité : On montre que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

$$P(n+1) : \sum_{i=0}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

On a :

$$\sum_{i=0}^{n+1} i^2 = \sum_{i=0}^{n} i^2 + (n+1)^2 \overset{\text{H.R.}}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} \tag{1}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}. \tag{2}$$

On calcule également $(n+2)(2n+3) = 2n^2+3n+4n+6 = 2n^2+7n+6$.
On conclut alors que $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pour tout n.

6. Pour tout entier n, $\sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. On note $P(n)$ la propriété $P(n) : \sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

- Cas de base : On démontre ici que $P(0)$ est vraie : $0^3 = \frac{0^2 \cdot 1^2}{4}$.
- Hypothèse d'hérédité (H.R.) : On fixe un $n \in \mathbb{N}$ quelconque et on suppose que $\sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
- Hérédité : On montre que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

$$P(n+1) : \sum_{i=0}^{n+1} i^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

On a :

$$\sum_{i=0}^{n+1} i^3 = \sum_{i=0}^{n} i^3 + (n+1)^3 \overset{\text{H.R.}}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.$$

On conclut alors que la propriété $P(n)$ est vraie pour tout n.

Rappel : On note $n!$ et on lit "n factoriel" le produit $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$.

Prouver les inégalités suivantes.

1. $2^n < n!$ pour tout $n \geq 4$.

   On note $P(n)$ la propriété $P(n) : 2^n < n!$.

   - Cas de base : On démontre ici que $P(4)$ est vraie : $2^4 < 4! \Rightarrow 16 < 24$, vrai.
   - Hypothèse d'hérédité (H.R.) : On fixe un $n \in \mathbb{N}$ quelconque et on suppose que $2^n < n!$.
   - Hérédité : On montre que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

     $$P(n+1) : 2^{n+1} < (n+1)!$$

     On a :

     $$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \overset{\text{H.R.}}{<} n! \cdot 2 < n! \cdot (n+1) = (n+1)!$$

     où la dernière inégalité vient du fait que $n \geq 4$, donc $n+1 > 2$.
     On conclut alors que la propriété $P(n)$ est vraie pour tout n.

2. $n! < n^n$ pour tout $n > 1$.

   On note $P(n)$ la propriété $P(n) : n! < n^n$.

   - Cas de base : On démontre ici que $P(2)$ est vraie : $2! < 2^2 \Rightarrow 2 < 4$, vrai.
   - Hypothèse d'hérédité (H.R.) : On fixe un $n \in \mathbb{N}$ quelconque et on suppose que $n! < n^n$.
   - Hérédité : On montre que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

     $$P(n+1) : (n+1)! < (n+1)^{n+1}$$

     On a :

     $$(n+1)! = n!(n+1) \overset{\text{H.R.}}{<} n^n(n+1) < (n+1)^n(n+1) = (n+1)^{n+1},$$

     où la dernière inégalité vient du fait que pour $n > 1$, la fonction $x \mapsto x^n$, avec $x \in \mathbb{N}$ est strictement croissante, donc puisque $n < n+1$, on a que $n^n < (n+1)^n$.
     On conclut alors que la propriété $P(n)$ est vraie pour tout n.

3. L'*inégalité de Bernoulli* : $1 + nh \leq (1+h)^n$ pour tout entier n et tout nombre réel h tel que $h > 0$.

   On note $P(n)$ la propriété $P(n) : 1 + nh \leq (1+h)^n$.

   - Cas de base : On démontre ici que $P(0)$ est vraie : $1 + 0 \cdot h \leq (1+h)^0 \Rightarrow 1 \leq 1$, vrai.
   - Hypothèse d'hérédité (H.R.) : On fixe un $n \in \mathbb{N}$ quelconque et on suppose que $1+nh \leq (1+h)^n$.
   - Hérédité : On montre que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

     $$P(n+1) : 1 + (n+1)h \leq (1+h)^{n+1}$$

     On a :

     $$1 + (n+1)h = 1 + nh + h \overset{\text{H.R.}}{<} (1+h)^n + h < (1+h)^n + h(1+h)^n = (1+h)^n(1+h) = (1+h)^{n+1},$$

     où la dernière inégalité vient du fait que $1 + h > 1$ et que donc $h(1+h)^n > h$. On conclut alors que la propriété $P(n)$ est vraie pour tout n.

1 Suites récurrentes

Rappel : On définit les *nombres de Fibonacci* par la récurrence suivante :

— $F(0) = 0$,
— $F(1) = 1$,
— $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$.

Prouver les identités suivantes :

1. $\sum_{i=0}^{n} F(i) = F(n+2) - 1$ pour tout $n \geq 0$.

   On note $P(n)$ la propriété $P(n) : \sum_{i=0}^{n} F(i) = F(n+2) - 1$.

   - Cas de base : On démontre ici que $P(0)$ est vraie : $F(0) = F(2) - 1 \Rightarrow 0 = F(0) + F(1) - 1$ $\Rightarrow 0 = 0 + 1 - 1$, vrai.
   - Hypothèse d'hérédité (H.R.) : On fixe un $n \in \mathbb{N}$ quelconque et on suppose que $\sum_{i=0}^{n} F(i) = F(n+2) - 1$.
   - Hérédité : On montre que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

     $$P(n+1) : \sum_{i=0}^{n+1} F(i) = F(n+3) - 1$$

     On a :

     $$\sum_{i=0}^{n+1} F(i) = \sum_{i=0}^{n} F(i) + F(n+1) \stackrel{\text{H.R.}}{=} F(n+2) + F(n+1) - 1 = F(n+3) - 1.$$

     On conclut alors que la propriété $P(n)$ est vraie pour tout n.

2. $\sum_{i=0}^{n} F(i)^2 = F(n)F(n+1)$ pour tout $n \geq 0$.

   On note $P(n)$ la propriété $P(n) : \sum_{i=0}^{n} F(i)^2 = F(n)F(n+1)F(n)F(n+1)$.

   - Cas de base : On démontre ici que $P(0)$ est vraie : $F(0)^2 = F(0)F(1) \Rightarrow 0^2 = 0 \cdot 1$, vrai.
   - Hypothèse d'hérédité (H.R.) : On fixe un $n \in \mathbb{N}$ quelconque et on suppose que $\sum_{i=0}^{n} F(i)^2 = F(n)F(n+1)$.
   - Hérédité : On montre que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

     $$P(n+1) : \sum_{i=0}^{n+1} F(i)^2 = F(n+1)F(n+2).$$

     On a :

     $$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n+1} F(i)^2 &= \sum_{i=0}^{n} F(i)^2 + F(n+1)^2 \\ &\stackrel{\text{H.R.}}{=} F(n)F(n+1) + F(n+1)^2 = F(n+1)(F(n) + F(n+1)) = F(n+1)F(n+2).\end{aligned}$$

     On conclut alors que la propriété $P(n)$ est vraie pour tout n.

3. $F(n)^2 = F(n-1)F(n+1) + (-1)^{n+1}$ pour tout $n > 0$.

   On note $P(n)$ la propriété $P(n) : F(n)^2 = F(n-1)F(n+1) + (-1)^{n+1}$.

- Cas de base : On démontre ici que $P(1)$ est vraie : $F(1)^2 = F(0)F(2) + (-1)^2 \Rightarrow 1 = 0 + 1$, vrai.
- Hypothèse d'hérédité (H.R.) : On fixe un $n \in \mathbb{N}$ quelconque et on suppose que $F(n)^2 = F(n-1)F(n+1) + (-1)^{n+1}$.
- Hérédité : On montre que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

$$P(n+1) : F(n+1)^2 = F(n)F(n+2) + (-1)^{n+2}.$$

On a :

$$\begin{aligned}
F(n)F(n+2) + (-1)^{n+2} &= F(n)(F(n) + F(n+1)) + (-1)^{n+2} \\
&= F(n)^2 + F(n)F(n+1) + (-1)^{n+2} \\
&\overset{\text{H.R.}}{=} F(n-1)F(n+1) + (-1)^{n+1} + F(n)F(n+1) + (-1)^{n+2} \\
&= F(n-1)F(n+1) + F(n)F(n+1) \\
&= F(n+1)(F(n-1) + F(n)) \\
&= F(n+1)F(n+1) \\
&= F(n+1)^2
\end{aligned}$$

On conclut alors que la propriété $P(n)$ est vraie pour tout n.

4. $1 < \frac{F(n+1)}{F(n)} < 2$ pour tout $n > 2$.

On note $P(n)$ la propriété $P(n) : 1 < \frac{F(n+1)}{F(n)} < 2$.

- Cas de base : On démontre ici que $P(3)$ est vraie : $1 < \frac{F(3+1)}{F(3)} < 2 \Rightarrow 1 < \frac{F(4)}{F(3)} < 2$, $\Rightarrow 1 < \frac{3}{2} < 2$, vrai.
- Hypothèse d'hérédité (H.R.) : On fixe un $n \in \mathbb{N}$ quelconque et on suppose que $1 < \frac{F(n+1)}{F(n)} < 2$.
- Hérédité : On montre que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

$$P(n+1) : 1 < \frac{F(n+2)}{F(n+1)} < 2.$$

On a :

$$\frac{F(n+2)}{F(n+1)} = \frac{F(n) + F(n+1)}{F(n+1)} = \frac{F(n)}{F(n+1)} + 1$$

Par l'hypothèse d'hérédité on a que $1 < \frac{F(n+1)}{F(n)} < 2$, donc $\frac{1}{2} < \frac{F(n)}{F(n+1)} < 1$. Par conséquent

$$1 < \frac{1}{2} + 1 < \frac{F(n)}{F(n+1)} + 1 < 2.$$

On conclut alors que la propriété $P(n)$ est vraie pour tout n.

2 Définitions récursives

Donner une définition récursive des fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ suivantes :

1. $f(n) = 2^n$,

   $f(0) = 1$ et $f(n) = 2^n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2f(n-1)$ pour $n \geq 1$.
2. $f(n) = n!$.

   $f(0) = 1$ et $f(n) = n! = n \cdot (n-1)! = n \cdot f(n-1)$ pour $n \geq 1$.

Donner une définition récursive des propriétés suivantes :

1. n est une puissance de 10.

   On note $P(n)$: n est une puissance de 10.

   $P(10)$ est vérifiée.
   Si pour un entier $n > 10$, $P(n)$ est vérifiée alors $P(n \cdot 10)$ est vérifiée.

2. n est pair.

   On note $P(n)$: n est pair.

   $P(2)$ est vérifiée.
   Si pour un entier $n > 2$, $P(n)$ est vérifiée alors $P(n+2)$ est vérifiée.

3. L'écriture décimale de n ne contient que des 1.

   On note $P(n)$: L'écriture décimale de n ne contient que des 1.

   $P(1)$ est vérifiée.
   Si pour un entier $n > 1$, $P(n)$ est vérifiée alors $P(10^{n-1} + n)$ est vraie.