Calcul de l'inverse d'une matrice

Inversibilité d'une matrice

Théorème. Une matrice $A \in M_n(\mathbf{K})$ est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. De plus, si A est inversible, alors $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$.

On peut facilement montrer un sens du théorème. On suppose que A est inversible. Alors on a:

$$1 = \det(I_n) = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}),$$

donc $\det(A) \neq 0$ et en plus on voit directement que $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$.

Calcul de la matrice inverse

Nous allons présenter deux méthodes différentes pour calculer l'inverse d'une matrice carrée : la *méthode de Cramer* et la méthode de *Gauss-Jordan*.

Méthode de Cramer pour l'inversion

Soit $A = [a_{ij}]$ une matrice de $M_n(\mathbf{K})$. On note A_{ij} la matrice obtenue en effaçant la ligne i et la colonne j de A.

La *comatrice* de A est la matrice de $M_n(\mathbf{K})$, notée Com A, dont le coefficient à l'intersection de la ligne i et la colonne j est $(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$.

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ alors

$$\text{Com } A = \begin{pmatrix} \det(A_{11}) & -\det(A_{12}) & \det(A_{13}) \\ -\det(A_{21}) & \det(A_{22}) & -\det(A_{23}) \\ \det(A_{31}) & -\det(A_{32}) & \det(A_{33}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Proposition. Si $A \in M_n(\mathbf{K})$ alors on a

$$(\text{Com } A)^t A = A^t(\text{Com } A) = (\det A)I_n.$$

Corollaire. Si A est une matrice inversible de $M_n(\mathbf{K})$, alors on a

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(\text{Com } A)^t.$$

Démonstration. D'après la proposition précédente, nous avons

$$(\text{Com } A)^t A = (\det A)(A^{-1}A) \Leftrightarrow (\text{Com } A)^t = (\det A)(A^{-1}),$$

donc

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(\text{Com } A)^t.$$

Exemple (suite). Calculons l'inverse de la matrice précédente. On calcule d'abord le déterminant de A. $\det(A) = \det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 2 + 2 = 4.$

Donc $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Calcul de l'inverse par la méthode de Gauss-Jordan

Soit une matrice $A \in M_n(\mathbf{K})$ inversible. Pour amener A à une forme échelonnée réduite nous appliquons à la matrice A des opérations élémentaires sur les lignes. Cependant, une opération élémentaire sur les lignes de A correspond à multiplier à gauche la matrice A par une matrice élémentaire. On suppose que nous avons besoin de k opérations élémentaires afin d'amener A à sa forme échelonnée réduite, qui dans le cas d'une matrice carrée correspond simplement à la matrice identité. Dans ce cas nous multiplions A par k matrices élémentaires:

$$E_1E_2\dots E_kA = I_n.$$

Puisque la matrice est inversible nous pouvons multiplier les deux côtés par A^{-1}.

$$E_1E_2\dots E_kAA^{-1} = I_nA^{-1} \Leftrightarrow E_1E_2\dots E_kI_n = A^{-1}.$$

Ceci veut dire qu'en appliquant ces mêmes opérations élémentaires à la matrice identité, nous obtenons directement la matrice inverse. L'idée est alors de commencer par une matrice de la forme AI_n et de la transformer à l'aide d'opérations élémentaire à une forme I_nB. Dans ce cas $B = A^{-1}$.

Exemple. Calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

On commence par créer la matrice $A|I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

En effectuant ensuite des opérations élémentaires sur cette matrice nous essayons de la ramener sous la forme I_3B, où selon la théorie, la matrice B sera la matrice A^{-1} recherchée.

On commence par l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On applique ensuite l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & -7 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On fait $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{9}{4}L_2$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 & 1/4 & -9/4 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_3 \leftarrow -4L_3$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 9 & -4 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & 28 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 9 & -4 \end{pmatrix}$$

$L_1 \leftarrow L_1 - 4L_3$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 5 & -36 & 16 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & 28 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 9 & -4 \end{pmatrix}$$

$L_1 \leftarrow L_1 + L_2$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & -8 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & 28 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 9 & -4 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow \frac{1}{4}L_2$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & -8 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 9 & -4 \end{pmatrix}$$

$L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1$:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 9 & -4 \end{pmatrix}$, donc on obtient finalement

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -4 & 2 \\ -1 & 7 & -3 \\ -1 & 9 & -4 \end{pmatrix}$$

2011-2020 Mélanie Boudard <http://melanie.boudard.free.fr/>, Christina Boura <http://christina-boura.info/en/content/home>, Luca De Feo <http://defeo.lu>, licensed under the Creative Commons 4.0 Attribution-ShareAlike <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>.