Feuille n^{o}6 : Convergences – Théorèmes limite

Exercice 1 : (pile ou face équitable)

Deux joueurs à pile ou face ont obtenu 48% de pile l'un en jouant 100 fois, l'autre en jouant 10 000 fois. Tous les deux pensent que la pièce qu'ils ont utilisée est équilibrée. Qu'en pensez-vous ?

Exercice 2 : (erreur de calcul)

Un micro-processeur effectue, lors d'une opération, une erreur de calcul avec la probabilité $p = 10^{-5}$. Soit P_n la proportion d'erreurs faites en n opérations. Calculer l'espérance et la variance de P_n.

Déterminer le nombre n d'opérations nécessaires pour que cette proportion d'erreurs P_n vérifie

$$\mathbb{P}\Big(\frac{|P_n - p|}{p} > 0,2\Big) \leq 0,05$$

(a) à partir de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ;
(b) à partir du théorème central limite.

Indication : la table de loi normale donne $\Phi(1,96) = 0,975$ où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Exercice 3 : (l'indépendance est primordiale)

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires toutes égales :

$$X_1 = X_2 = \dots$$

de moyenne $m = 0$ et d'écart-type $\sigma = 1$. Soit $\overline{X_n} = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ leur moyenne empirique. Montrer que

$$\frac{\sqrt{n}\left(\overline{X_n} - m\right)}{\sigma} = X_1\sqrt{n}.$$

Constater que cette quantité ne converge pas vers une loi gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$.

Exercice 4 : (limite de Poisson(s))

Soient n variables aléatoires $X_1, X_2, \dots X_n$ indépendantes et de même loi de Poisson de paramètre $\lambda = 4$. Soit

$$\overline{X_n} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

(a) Rappeler $\mathbb{E}(X_1)$ et $Var(X_1)$.

(b) Calculer $\mathbb{E}\left(\overline{X_n}\right)$ et $Var\left(\overline{X_n}\right)$.

(c) Ecrire le théorème central limite pour $\overline{X_n}$.

(d) En déduire une approximation de $\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \geq 425)$ exprimée en fonction de n et de Φ, la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

<u>Rappel</u> : $\Phi(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$

Application numérique : $n = 100$. Calculer $\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \geq 425)$.

Exercice 5 : (une somme de Poisson est gaussienne)

Soient $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ une suite de v.a. indépendantes de même loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1$. Quelle est la loi de $S_n := X_1 + \cdots + X_n$? En déduire $\mathbb{P}(S_n = k)$ pour tout $k = 0, \dots, n$.

Calculer l'espérance et la variance de S_n.

Ecrire le théorème central limite pour S_n.

Montrer la relation :

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$