TD 7 : Relations et classes d'équivalence

christina.boura@uvsq.fr

9 novembre 2020

1 Relations et ensembles

On considère des relations entre l'ensemble $A = \{1, 3, 5, 7\}$ et l'ensemble $B = \{3, 4, 5, 6\}$. Écrire les relations suivantes comme des sous ensembles de $A \times B$.

1. "est inférieur strictement à",

$$\mathcal{R} = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (5, 6)\}.$$

2. "est inférieur ou égal à",

$$\mathcal{S} = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (5, 5), (5, 6)\} = \mathcal{R} \cup \{(3, 3), (5, 5)\}.$$

3. "divise".

$$\mathcal{T} = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (3, 3), (3, 6), (5, 5)\}.$$

Écrire les relations réciproques de chacune des relations précédentes.

Toutes les relations réciproques, $\mathcal{R}^{-1}$, $\mathcal{S}^{-1}$, $\mathcal{T}^{-1}$ sont des sous-ensembles de $B \times A$.

1. "est supérieur strictement à",

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1), (4, 3), (5, 3), (6, 3), (6, 5)\}.$$

2. "est supérieur à",

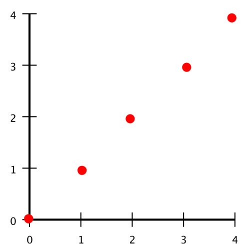
$$\mathcal{S}^{-1} = \{(3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1), (3, 3), (4, 3), (5, 3), (5, 5), (6, 3), (6, 5)\}.$$

3. "est divisible".

$$\mathcal{T}^{-1} = \{(3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1), (3, 3), (5, 5), (6, 3)\}.$$

Dessiner les graphes des fonctions suivantes et de leurs inverses. On rappelle qu'un graphe est une relation. Dans les cas ci-dessus, s'agit-il de relations réflexives, symétriques, transitives ?

1. La fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(x) = x$.



$$G_f = \{(x, x), \quad x \in \mathbb{N}\}.$$

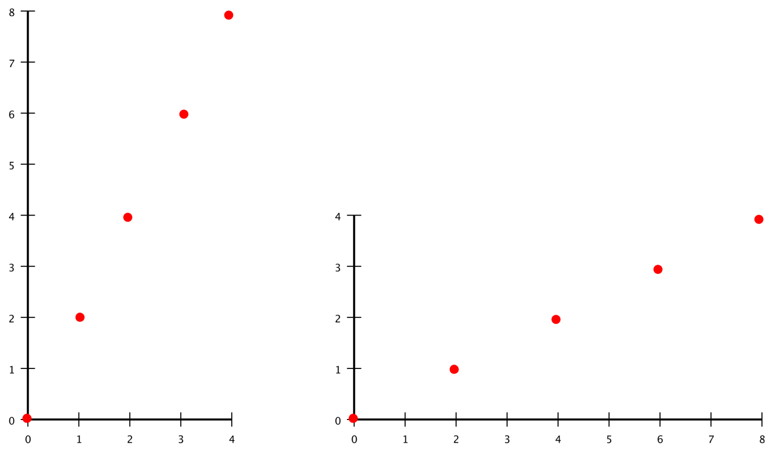
Réflexive Pour tout $x \in \mathbb{N}$, $(x, x) \in G_f$, la relation est donc réflexive.

Symétrique Pour tout $x, y \in \mathbb{N}$, si $(x, y) \in G_f$, alors forcément $y = x$ et donc $(y, x) = (x, x) \in G_f$. La relation est donc symétrique.

Transitive Pour tout $x, y, z \in \mathbb{N}$, si $(x, y), (y, z) \in G_f$, alors forcément $z = y = x$ et donc $(x, z) = (x, x) \in G_f$. La relation est donc transitive.

Ici, la relation $G_f^{-1} = G_f$.

2. La fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = 2n$;



G_f $\qquad$ G_f^{-1}

$$G_f = \{(n, 2n), \quad n \in \mathbb{N}\}.$$

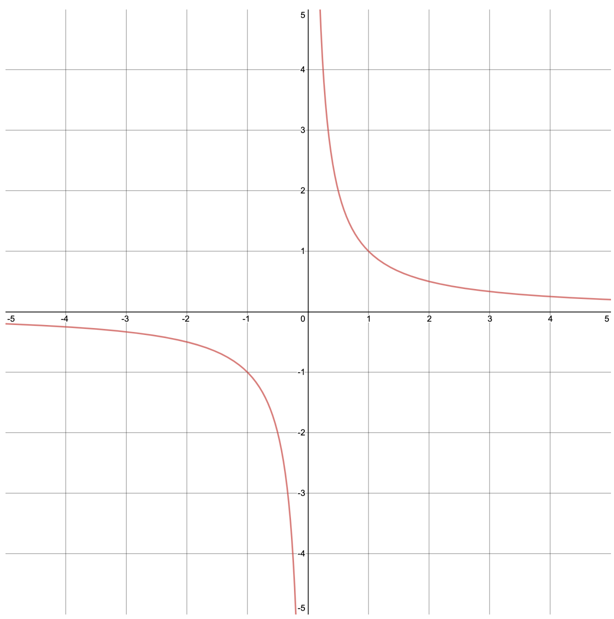
Réflexive $(1, 1) \notin G_f$, la relation n'est donc pas réflexive.

Symétrique $(1, 2) \in G_f$ mais $(2, 1) \notin G_f$, la relation n'est donc pas symétrique.

Transitive $(1, 2), (2, 4) \in G_f$ mais $(1, 4) \notin G_f$, la relation n'est donc pas transitive.

La relation $G_f^{-1} = \{(2n, n), \quad n \in \mathbb{N}\}$, n'est pas réflexive, symétrique ni transitive également.

3. La fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ définie par $f(x) = 1/x$;



$$G_f = \{(x, \frac{1}{x}), \quad x \in \mathbb{R}\}.$$

Réflexive $(2,2) \notin G_f$, la relation n'est donc pas réflexive.

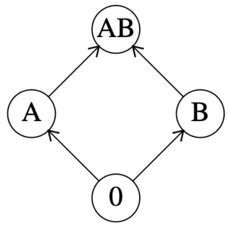
Symétrique Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x, \frac{1}{x}) \in G_f$, comme l'inverse de $\frac{1}{x}$ est $\frac{1}{\frac{1}{x}} = x$, on a bien que $(\frac{1}{x}, x) \in G_f$ et que donc la relation est symétrique.

Transitive $(2, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 2) \in G_f$ mais $(2,2) \notin G_f$, la relation n'est donc pas transitive.

Ici, la relation $G_f^{-1} = G_f$.

2 Diagrammes de Hasse

Considérons le graphe de compatibilité des groupes sanguins : $x \to y$ signifie que une personne du groupe sanguin x peut donner son sang à une personne du groupe sanguin y.



Définir la relation ≪ compatibilité ≫. Est-elle réflexive, transitive, symétrique, antisymétrique ?

$$\mathcal{R} = \{(O,O), (O,A), (O,B), (O,AB), (A,A), (A,AB), (B,B), (B,AB), (AB,AB)\}.$$

Réflexive La relation est bien refléxive, car une personne de groupe sanguin x peut toujours donner son sang à une autre personne du même groupe x et cela pour tout $x \in \{O, A, B, AB\}$.

Symétrique La relation n'est pas symétrique. Par exemple $(O, A) \in \mathcal{R}$ mais $(A, O) \notin \mathcal{R}$.

Transitive La relation est transitive car la définition de transitivité est verifiée pour tout $x, y, z \in \{O, A, B, AB\}$.

Anti-symétrique La relation est antisymétrique car pareil, si $x, y \in \{O, A, B, AB\}$ avec $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$, alors forcément $x = y$.

Rappel : l'*ensemble des parties* d'un ensemble A est l'ensemble de tous les sous-ensembles de A (y compris l'ensemble vide et A lui-même).

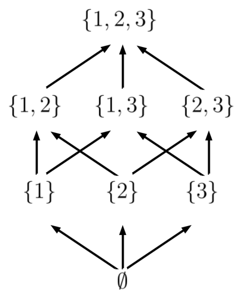
On considère l'ensemble des parties de $A = \{1, 2, 3\}$ muni de la relation $x \subset y$ (x est contenu dans y). La relation $\subset$ est-elle un ordre ? En dessiner le diagramme de Hasse. On va montrer que la relation est bien réflexive, transitive et anti-symétrique.

Réflexive La relation est bien réflexive, car tout ensemble est sous-ensemble de lui-même : $\forall E \in \mathcal{P}(A) : E \subset E$.

Transitive La relation est bien transitive car pour tout $E_1, E_2, E_3 \in \mathcal{P}(A)$ si $E_1 \subset E_2$ et $E_2 \subset E_3$, alors $E_1 \subset E_3$.

Anti-symétrique La relation est antisymétrique car pareil, si $E_1, E_2 \in \mathcal{P}(A)$ avec $E_1 \subset E_2$ et $E_2 \subset E_1$, alors forcément $E_1 = E_2$.

La relation est donc réflexive, transitive et anti-symétrique, il s'agit donc une relation d'ordre. Voici son diagramme de Hasse.



3 Propriétés des relations

Donner des exemples de relations qui sont

1. réflexives et symétriques mais pas transitives,

   On considère sur $\mathbb{Z}$ la relation
   $$\mathcal{R} = \{(x, y) : |x - y| \leq 1\}.$$

   Réflexive La relation est bien réflexive, car pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a $|x - x| = 0 \leq 1$.

   Symétrique La relation est bien symétrique, car si pour $x, y \in \mathbb{Z}$, on a $|x-y| \leq 1$ alors forcément $|y - x| = |-(x - y)| \leq 1$.

   Pas transitive La relation n'est pas transitive. En effet, pour $x = 1, y = 2$ et $z = 3$ on a bien que $|x - y| = |1 - 2| = 1$ et que $|y - z| = |2 - 3| = 1$, mais $|x - z| = |1 - 3| = 2 > 1$.

2. réflexives et transitives mais pas symétriques,

   On considère sur $\mathbb{Z}$ la relation
   $$\mathcal{S} = \{(x, y) : x \leq y\}.$$

   Réflexive La relation est bien réflexive, car pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a $x \leq x$.

   Transitive La relation est bien transitive, car si pour $x, y, z \in \mathbb{Z}$, on a $x \leq y$ et $y \leq z$ alors forcément $x \leq z$.

   Pas symétrique La relation n'est pas symétrique. En effet, pour $x = 1$ et $y = 2$ on a bien que $x \leq y$ mais il n'est pas vrai que $y \leq x$.

3. symétriques et transitives mais pas réflexives.

   On considère sur $\mathbb{Q}$ la relation
   $$\mathcal{T} = \{(x, y) : x \cdot y \neq 0\}.$$

   Symétrique La relation est bien symétrique, car pour tout $x, y \in \mathbb{Q}$, si $x \cdot y \neq 0$, alors $y \cdot x = x \cdot y \neq 0$.

   Transitive La relation est bien transitive, car si pour $x, y, z \in \mathbb{Q}$, on a $x \cdot y \neq 0$ et $y \cdot z \neq 0$ alors forcément $x, y, z \neq 0$ et donc $x \cdot z \neq 0$.

   Pas réflexive La relation n'est pas réflexive, car pour $x = 0 \in \mathbb{Q}$ on a que $x \cdot x = 0 \cdot 0 = 0$.

La relation sur les entiers suivante est-elle une relation d'équivalence ?

$$\mathcal{T} = \{(a, b) \mid a + b \text{ est pair}\}.$$

On doit vérifier si cette relation est réflexive, symétrique et transitive.

Réflexive La relation est bien réflexive, car pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $x + x = 2x$ est toujours un nombre pair.

Symétrique La relation est symétrique. En effet, si pour tout $x, y \in \mathbb{Z}$ on a $x + y$ est pair, alors $y + x = x + y$ est pair également.

Transitive La relation est bien transitive, car si pour $x, y, z \in \mathbb{Z}$, on a $x + y = 2k$ et $y + z = 2\ell$ pour un k et un $\ell \in \mathbb{Z}$ alors $x + z = (x + y) + (y + z) - 2y = 2k + 2\ell - 2y = 2(k + \ell - y) = 2n$, avec $n = k + \ell - y \in \mathbb{Z}$.

Donner la classe d'équivalence de 3, 4, 5, 6.

On note par $\bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}$ les classes d'équivalence de $3, 4, 5$ et 6 respectivement. On a :

$$\begin{aligned}\bar{3} &= \{x \in \mathbb{Z} \,:\, x\mathcal{T}3\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} \,:\, x + 3 \text{ est pair}\} \\ &= \{\dots, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \dots\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{4} &= \{x \in \mathbb{Z} \,:\, x\mathcal{T}4\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} \,:\, x + 4 \text{ est pair}\} \\ &= \{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}\end{aligned}$$

On a que $\bar{5} = \bar{3}$ et que $\bar{6} = \bar{4}$.

Les relations suivantes sont-elles des relations d'ordre sur les entiers relatifs ?

1. $x\mathcal{P}y$ si et seulement si $x \leq y$.

   Cette relation est :

   Réflexive : La relation est réflexive, car pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a bien $x \leq x$.

   Transitive : La relation est transitive, car pour tout $x, y, z \in \mathbb{Z}$, si $x \leq y$ et $y \leq z$, alors $x \leq z$.

   Anti-symétrique : La relation est anti-symétrique, car pour tout $x, y, z \in \mathbb{Z}$, si $x \leq y$ et $y \leq x$ alors forcément $x = y$.

   La relation est donc bien une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}$.

2. $x\mathcal{Q}y$ si et seulement si $x < y$.

   Cette relation n'est pas une relation d'ordre sur les entiers car elle n'est pas réflexive. Par exemple, il n'est pas vrai que $1 < 1$.

3. $x\mathcal{R}y$ si et seulement si x est multiple de y.

   Réflexive : La relation est réflexive, car pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $x = 1 \cdot x$, donc x est toujours multiple de lui-même.

   Transitive : La relation est transitive, car pour tout $x, y, z \in \mathbb{Z}$, s'il existe $k, \ell \in \mathbb{Z}$ tels que $y = k \cdot x$ et $z = \ell y$, alors $z = (\ell \cdot k) \cdot x$, avec $\ell \cdot k \in \mathbb{Z}$, donc z est bien un multiple de x.

   Anti-symétrique : La relation cependant n'est pas anti-symétrique. En effet, on voit que 2 et un multiple de -2 et inversement, mais $2 \neq -2$.

   Il n'est s'agit donc pas d'une relation d'ordre sur les entiers.

4. $x\mathcal{S}y$ si et seulement si l'écriture de x en base dix est contenue dans l'écriture de y en base dix (ex. : $101 \,\mathcal{S}\, 31012$).

   C'est bien une relation d'ordre car à la fois réflexive, transitive et anti-symétrique (développer).

Soit $E = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. On définit sur l'ensemble $E \times E$ la relation $\mathcal{R}$: $(p,q)\mathcal{R}(p',q')$ si et seulement si $p - p'$ est pair et $q - q'$ est divisible par 3.

$$\mathcal{R} = \{(p,q),(p',q') \ : \ p - p' \text{ est pair et } q - q' \text{ est divisible par 3.}\}$$

1. Donner le cardinal de $E \times E$.

$$|E \times E| = |E| \times |E| = 8^2 = 64.$$

2. Vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Réflexive : La relation est réflexive, car pour tout $(p,q) \in E \times E$, on a que $(p,q)\mathcal{R}(p,q)$ puisque $p - p = 0$ est pair et $q - q = 0$ est divisible par 3.

Symétrique : La relation est symétrique. En effet, on suppose que pour $(p,q),(p',q') \in E \times E$ si $(p,q)\mathcal{R}(p',q')$. Par conséquent $p - p'$ est pair et $q - q'$ est un multiple de 3. Mais on voit bien que $p' - p = -(p - p')$ est donc forcément pair aussi, ainsi que $q' - q = -(q - q')$ est aussi un multiple de 3.

Transitive : On va montrer que la relation est transitive. Soit $(p,q),(p',q')$ et $(p'',q'') \in E \times E$ tels que $(p,q)\mathcal{R}(p',q')$ et $(p',q')\mathcal{R}(p'',q'')$. Par définition cela implique qu'il existe quatre entiers $k,\ell,m,n \in \mathbb{Z}$ tels que $p - p' = 2k$, $p' - p'' = 2\ell$, $q - q' = 3m$ et $q' - q'' = 3n$. On a donc que

$$p - p'' = (p - p') + (p' - p'') = 2k + 2\ell = 2(k+\ell) = 2K$$

et

$$q - q'' = (q - q') + (q' - q'') = 3m + 3n = 3(m+n) = 3M.$$

On conclue donc que $(p,q)\mathcal{R}(p'',q'')$ et que donc la relation est transitive. Il s'agit donc d'une relation d'équivalence.

On désigne par $\overline{(p,q)}$ la classe d'équivalence de (p,q).

1. Calculer le nombre d'éléments des classes $\overline{(1,1)}, \overline{(1,2)}, \overline{(1,3)}$.

$$\begin{aligned}\overline{(1,1)} &= \{(p,q) \ : \ (p,q)\mathcal{R}(1,1)\} \\ &= \{(p,q) \ : \ p - 1 \text{ est pair et } q - 1 \text{ est un multiple de 3.}\} \\ &= \{(1,1),(3,1),(5,1),(7,1),(1,4),(3,4),(5,4),(7,4),(1,7),(3,7),(5,7),(7,7)\}.\end{aligned}$$

On voit donc que $|\overline{(1,1)}| = 12$.

$$\begin{aligned}\overline{(1,2)} &= \{(p,q) \ : \ (p,q)\mathcal{R}(1,2)\} \\ &= \{(p,q) \ : \ p - 1 \text{ est pair et } q - 2 \text{ est un multiple de 3.}\} \\ &= \{(1,2),(3,2),(5,2),(7,2),(1,5),(3,5),(5,5),(7,5),(1,8),(3,8),(5,8),(7,8)\}.\end{aligned}$$

On voit donc que $|\overline{(1,2)}| = 12$.

$$\begin{aligned}\overline{(1,3)} &= \{(p,q) \ : \ (p,q)\mathcal{R}(1,3)\} \\ &= \{(p,q) \ : \ p - 1 \text{ est pair et } q - 3 \text{ est un multiple de 3.}\} \\ &= \{(1,3),(3,3),(5,3),(7,3),(1,6),(3,6),(5,6),(7,6)\}.\end{aligned}$$

On voit donc que $|\overline{(1,3)}| = 8$.

2. Soit $q \in E$. Montrer que si $(x, y) \in \overline{(1, q)}$, alors $(x + 1, y) \in \overline{(2, q)}$.

   On suppose que $(x, y) \in \overline{(1, q)}$ pour un $q \in E$. Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - 1 = 2k$ et il existe $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que $y - q = 3\ell$. Il suffit de montrer que $x + 1 - 2 = x - 1$ est pair, ce qui est déjà le cas.

3. Combien y a-t-il de classes d'équivalence différentes ? Donner leur liste.

   — Il y a deux possibilités pour la parité de $p - p'$: $p - p'$ peut être pair ou impair.
   — $q - q'$ peut prendre trois valeurs mod 3 : 0, 1 ou 2.

   On a donc au total $2 \times 3 = 6$ possibilités, donc 6 classes d'équivalence : $\overline{(1, 1)}, \overline{(1, 2)}, \overline{(1, 3)}, \overline{(2, 1)}, \overline{(2, 2)}, \overline{(2, 3)}$.

4. Déterminer le cardinal de chaque classe d'équivalence. Le résultat est-il compatible avec la cardinalité de $E \times E$?

   On a $|\overline{(1, 1)}| = |\overline{(1, 2)}| = |\overline{(2, 1)}| = |\overline{(2, 2)}| = 12$ et $|\overline{(1, 3)}| = |\overline{(2, 3)}| = 8$ et on a bien que

$$4 \times 12 + 2 \times 8 = 64 = |E \times E|.$$