Feuille n^o 5 : Couples de variables aléatoires.

Exercice 1 :

On jette une pièce de monnaie non truquée deux fois indépendamment et on note par X_1 et X_2 les deux variables aléatoires de Bernoulli correspondantes. Soit $Y = X_1 + X_2$ et $Z = \max\{X_1, X_2\}$.

1. Déterminer la loi conjointe de (X_1, X_2).
2. Déterminer la loi Y et la loi de Z.
3. Déterminer la loi conjointe de (Y, Z). Déterminer les lois marginales de Y et Z.
4. Calculer $Cov(X, Y)$.

Correction :

1. La loi conjointe de (X_1, X_2) est, $\forall i \in [0, 1], j \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 = i, X_2 = j) &= \mathbb{P}(X_1 = i)\mathbb{P}(X_2 = j) \quad \text{par l'indépendance entre les deux lancers} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad \text{car la pièce de monnaie est non truquée}\end{aligned}$$

2. Loi de Y

C'est un schéma binomial : $Y = X_1 + X_2$ suit une loi Binomiale de paramètres 2 et $\frac{1}{2}$. D'où

$$\mathbb{P}(Y = k) = C_2^k \frac{1}{2}^k \frac{1}{2}^{2-k}$$

Si le schéma binomial n'est pas reconnu, la loi de Y se déduit de la loi conjointe de (X_1, X_2) :

$$\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0) = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = 1) &= \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1) \quad \text{par réunion d'événements disjoints} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(Y = 2) = \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{1}{4}$$

Loi de Z

De la loi conjointe de (X_1, X_2), il vient

$$\mathbb{P}(Z = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0) = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(Z = 1) = 1 - \mathbb{P}(Z = 0) = \frac{3}{4}$$

Z suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{3}{4}$.

3. La loi du couple (Y, Z) est résumé dans le tableau suivant.

$Y \backslash Z$	0	1
0	1/4	0
1	0	1/2
2	0	1/4

Chaque cellule du tableau est obtenue comme dans l'exemple qui suit :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = 1, Z = 1) &= \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0) \\ &= 1/4 + 1/4 \\ &= 1/2\end{aligned}$$

4. Dans le calcul des espérances, la première ligne correspond au cas où le schéma de la loi est reconnue et la seconde au cas contraire.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= n * p = 2 * \frac{1}{2} = 1 \\ &\overset{ou}{=} 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} \\ \mathbb{E}(Z) &= p = \frac{3}{4} \\ &\overset{ou}{=} 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{3}{4} \\ \mathbb{E}(YZ) &= 0 \times 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times 1 \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}COV(Y,Z) &= \mathbb{E}(YZ) - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Z) \\ &= 1 - \frac{3}{4} \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Remarque : la covariance entre Y et Z étant différente de 0, on en déduit que les deux variables ne sont pas indépendantes.

Exercice 2 :

Soient X et Y deux v.a. indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p $(0 < p < 1)$. On note $U = X + Y$ et $V = X - Y$.

1. Déterminer la loi du couple (U, V).
2. Calculer la covariance de U et V.
3. Les variables sont-elles indépendantes ?

Correction :

1. La loi conjointe de (U, V) peut s'exprimer en fonction de celle de (X, Y). En utilisant l'indépendance entre X et Y, il vient

$U \backslash V$	-1	0	1
0	0	$(1-p)^2$	0
1	$p(1-p)$	0	$p(1-p)$
2	0	p^2	0

Chaque cellule du tableau est obtenue comme dans l'exemple qui suit :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U = 1, V = 1) &= \mathbb{P}(X = 1, Y = 0) \\ &= \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 0) \text{ par indépendance} \\ &= p(1-p)\end{aligned}$$

2. $COV(UV) = \mathbb{E}(UV) - \mathbb{E}(U)\mathbb{E}(V)$. Pour obtenir les lois marginales il suffit de sommer les lignes et les colonnes du tableau précédent :

$U \backslash V$	-1	0	1	loi de U
0	0	$(1-p)^2$	0	$(1-p)^2$
1	$p(1-p)$	0	$p(1-p)$	$2\ p(1-p)$
2	0	p^2	0	p^2
Loi de V	$p(1-p)$	$(1-p)^2 + p^2$	$p(1-p)$	1

Des lois marginales, il vient

$$\mathbb{E}(U) = 0 \times (1-p)^2 + 1 \times 2p(1-p) + 2 \times p^2 = 2p$$
$$\mathbb{E}(V) = 0 \times (p^2 + (1-p)^2) - 1 \times p(1-p) + 1 \times p(1-p) = 0$$

De plus,

$$\mathbb{E}(UV) = 0 \times 0 \times (1-p)^2 + 1 \times (-1) \times p(1-p) + 1 \times 1 \times p(1-p) + 2 \times 0 \times p^2 = 0$$

En reprenant la définition de la covariance, il vient $COV(U,V) = 0$. Attention, cela ne signifie pas que U et V sont indépendants.

3. U et V sont indépendantes si la loi conjointe est égale au produit des lois marginales. Ici ce n'est pas le cas, prenons par exemple,

$$\mathbb{P}(U=0, V=0) = (1-p)^2 \neq \mathbb{P}(U=0)\mathbb{P}(V=0) = (1-p)^2(p^2 + (1-p)^2).$$

Remarque : bien que la covariance soit nulle, les variables ne sont pas indépendantes.

Exercice 3 : *(à propos de la covariance)*

1. Exprimer la variance de $3X - Y$ en fonction de $\mathbb{V}ar(X)$, $\mathbb{V}ar(Y)$, et $Cov(X,Y)$.
2. Soit X une variable aléatoire centrée de variance 1, et $Y = 3X - 2$. Calculer $\mathbb{V}ar(Y)$ et $Cov(X,Y)$.
3. Rappeler pourquoi $Cov(X,Y)$ est nulle si X et Y sont indépendantes. Puis, si X désigne une v.a.r. de loi $\mathcal{N}(0,1)$, montrer que X et X^2 ne sont pas indépendantes mais que pourtant $Cov(X,X^2)$ est nul. On pourra considérer l'événement $\{X \in [0,1], X^2 \in [0,1]\}$.

Correction :

1. Par les propriétés de la variance et de la covariance, il vient

$$Var(aX + bY) = a^2\ Var(X) + b^2\ Var(Y) + 2ab\ Cov(X,Y)$$

En prenant $a = 3$ et $b = -1$, on obtient :

$$Var(Z) = 9\ Var(X) + Var(Y) - 6\ Cov(X,Y)$$

2.

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(3X-2) = 9\mathbb{V}(X) = 9$$

car $\mathbb{V}(X) = 1$.

Première méthode pour calculer la covariance :

$$COV(X,Y) = COV(X, 3X-2) = 3\ COV(X,X) = 3\ \mathbb{V}(X) = 3$$

Seconde méthode :

$$\begin{aligned}
COV(X,Y) &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\
&= \mathbb{E}(X(3X-2)) - 0 \text{ car } \mathbb{E}(X) = 0 \\
&= 3\ \mathbb{E}(X^2) - 2\ \mathbb{E}(X) \text{ même argument} \\
&= 3\ \mathbb{E}(X^2) = 3
\end{aligned}$$

En effet,

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 1$$

or $\mathbb{E}(X) = 0$ d'où $\mathbb{E}(X^2) = 1$.

3. Si X et Y sont indépendants, alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ (voir démonstration dans le cours). Ainsi $COV(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0$. Si deux variables sont indépendantes alors leur covariance est nulle.

Soit X qui suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Commençons par calculer la covariance :

$$\begin{aligned}
COV(X,X^2) &= \mathbb{E}(X\ X^2) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X^2) \\
&= \mathbb{E}(X^3) \text{ car } \mathbb{E}(X) = 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Revoir exercice 4 du TD4 : pour $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, tous les moments impaires de X sont nuls (c'est-à-dire $\mathbb{E}(X^k) = 0$ si k impair).

On considère l'événement $\{X \in [0,1], X^2 \in [0,1]\}$. Calculons les deux probabilités suivantes :

$$\mathbb{P}(X^2 > 1|X > 1) = \frac{\mathbb{P}(X^2 > 1, X > 1)}{\mathbb{P}(X > 1)} = \frac{\mathbb{P}(X > 1)}{\mathbb{P}(X > 1)} = 1$$

$$\mathbb{P}(X^2 > 1) = \mathbb{P}(|X| > 1) = 2(1 - \Phi(1)) \approx 0.31$$

Les variables X et X^2 ne sont pas indépendantes car $\mathbb{P}(X^2 > 1|X > 1) \neq \mathbb{P}(X^2 > 1)$. Lorsque $X > 1$, on a plus de chance d'avoir $X^2 > 1$, on voit donc bien la dépendance entre les deux variables.

Exercice 4 :

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires continues dont la loi est déterminée par la densité suivante

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k(x+y) & \text{si } (x,y) \in [0,1] \times [0,1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur de k pour que $f_{X,Y}$ constitue bien une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
3. Calculer $\mathbb{P}(X < 1/2)$, $\mathbb{P}(X < 1/2 \mid Y < 1/2)$.
4. X et Y sont elles indépendantes ?
5. Calculer $Cov(X, Y)$.

Correction :

1. Pour que $f_{X,Y}$ soit une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^2$, il faut que $f_{X,Y} \geq 0$ et que $\int_R \int_R f_{X,Y}(x,y)dx\ dy = 1$.
On vérifie $f_{X,Y} \geq 0$ si $k \geq 0$.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dx\ dy &= \int_0^1 \int_0^1 k(x+y)dx\ dy \\
&= \int_0^1 \left[\frac{k}{2}x^2 + kyx\right]_0^1 dy \\
&= \int_0^1 \frac{k}{2} + ky\ dy \\
&= \left[\frac{k}{2}y + \frac{k}{2}y^2\right]_0^1 \\
&= k
\end{aligned}$$

$f_{X,Y}$ est une densité de probabilité pour $k = 1 \geq 0$.

2. Commençons par la loi marginale de X. Si $x \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_0^1 x + y\ dy \\
&= \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^1 \\
&= x + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Sinon ($x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$), $f_X(x) = 0$.
De la même manière, il vient

$$f_Y(y) = \left(y + \frac{1}{2}\right) 1_{[0,1]}(y)$$

On remarque que $f_X(x) = f_Y(y)$ donc X et Y sont égaux en loi.

3. En utilisant la loi marginale de X pour $x \in [0,1]$ (car $1/2 \in [0,1]$), il vient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X < 1/2) &= \int_0^{\frac{1}{2}} x + \frac{1}{2}\; dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{3}{8}\end{aligned}$$

En utilisant le théorème de Bayes, il vient

$$\mathbb{P}(X < 1/2 | Y < 1/2) = \frac{\mathbb{P}(X < 1/2, Y < 1/2)}{\mathbb{P}(Y < 1/2)}$$

Pour le dénominateur, X et Y étant égaux en loi, $\mathbb{P}(Y < 1/2) = \mathbb{P}(X < 1/2) = 3/8$.
La probabilité au numérateur s'obtient via le calcul suivant pour $(x, y) \in [0,1] \times [0,1]$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X < 1/2, Y < 1/2) &= \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} (x+y) dx dy \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{x^2}{2} + yx\right]_0^{\frac{1}{2}} dy \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2}y\right) dy \\ &= \left[\frac{y}{8} + \frac{y^2}{4}\right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{8}\end{aligned}$$

D'où

$$\mathbb{P}(X < 1/2 | Y < 1/2) = \frac{1/8}{3/8} = \frac{1}{3} \qquad (1)$$

4. En reprenant les probabilités de la question précédente, on remarque que

$$\mathbb{P}(X < 1/2 | Y < 1/2) \neq \mathbb{P}(X < 1/2)$$

Donc X et Y ne sont pas indépendants. Lorsque $Y < 1/2$, on a moins de chance d'avoir $X < 1/2$, il y a donc une dépendance entre les deux variables.
On peut également montrer que

$$\begin{aligned}f_X(x) f_Y(y) &= \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{1}{2}\right) \\ &= xy + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4} \\ &\neq x + y = f_{X,Y}(x,y)\end{aligned}$$

5. $COV(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx \\ &= \int_0^1 x + \frac{1}{2}\; dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}\end{aligned}$$

X et Y sont égaux en loi donc $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = \frac{7}{12}$.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= \int_0^1 \int_0^1 xy(x+y)dx\ dy \\
&= \int_0^1 \left[y\frac{x^3}{3} + y^2\frac{x^2}{2} \right]_0^1 dy \\
&= \int_0^1 \frac{1}{3}y + \frac{1}{2}y^2\ dy \\
&= \left[\frac{y^2}{6} + \frac{y^3}{6} \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

D'où

$$COV(X,Y) = \frac{1}{3} - \frac{7}{12}^2 = -\frac{1}{144}$$

On retrouve ici "l'effet négatif" de Y sur X présent dans la phrase : "Lorsque $Y < 1/2$, on a moins de chance d'avoir $X < 1/2$".

Exercice 5 : *(Partie entière et fractionnaire d'une variable exponentielle)*

Pour $x > 0$, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x et $\{x\}$ la partie fractionnaire de x :

$$\lfloor x \rfloor \in \mathbb{N},\ \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1,\ \text{et } \{x\} = x - \lfloor x \rfloor \in [0,1[$$

Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1. Soit $Y = \lfloor X \rfloor$ et $Z = \{X\}$.

1. Déterminer la loi du couple (Y, Z), i.e. calculer $\mathbb{P}(Y = k, Z \in [s,t])$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $s, t \in [0,1[$.
2. Déterminer la loi de Y.
3. Calculer pour tout $s, t \in [0,1[$, $\mathbb{P}(Z \in [s,t])$ puis en déduire la densité de Z. Calculer $\mathbb{E}[Z]$.
4. Les variables Y et Z sont-elles indépendantes ?

Correction :

1. *Pout tout $s, t \in [0,1[$ et $k \in \mathbb{N}$, on a $Y = k$ et $Z \in [s,t]$ si et seulement si $X \in [k+s, k+t]$. Donc*
$$\mathbb{P}(Y = k,\ Z \in [s,t]) = \mathbb{P}(X \in [k+s, k+t]) = \int_{k+s}^{k+t} e^{-x}dx = e^{-k}(e^{-s} - e^{-t}). \tag{2}$$
2. *L'égalité (2) implique que*
$$\mathbb{P}(Y = k) = P(Y = k,\ Z \in [0,1]) = e^{-k}(1 - e^{-1}), \tag{3}$$
c'est-à-dire $Y + 1 \sim \mathcal{G}(p)$ avec $p = 1 - e^{-1}$.
3. *Si $x < 0$, l'événement $\{Z \leq z\}$ est impossible : on a alors $F_Z(x) = 0$. Si $x \geq 1$, l'événement $\{Z \leq x\}$ est certain (puisque $Z(\Omega) = [0,1[$) et donc $F_Z(x) = 1$. Supposons maintenant $x \in [0,1[$. D'après l'égalité (2), on a*
$$\mathbb{P}(Z \in [s,t]) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X \in [k+s, k+t]) = \frac{(e^{-s} - e^{-t})}{1 - e^{-1}}, \tag{4}$$
c'est-à-dire la fonction de répartition de Z est donnée par
$$F_Z(x) = \begin{cases} 0, & si\ x < 0, \\ \frac{1-e^{-x}}{1-e^{-1}}, & si\ x \in [0,1[, \\ 1, & si\ x \geq 1, \end{cases}$$
et la densité s'obtient par dérivation de F_Z :
$$f_Z(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}}{1-e^{-1}}, & si\ x \in [0,1], \\ 0, & si\ x < 0\ ou\ x \geq 1. \end{cases}$$

On a $Z = X - Y$, donc

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y+1] + 1 = 1 - \frac{1}{1-e^{-1}} + 1 = \frac{1-2e^{-1}}{1-e^{-1}},$$

car $\mathbb{E}[X] = 1$ et $\mathbb{E}[Y+1] = \frac{1}{1-e^{-1}}$ (formules des espérances des lois exponentielle et géomrtrique).

4. *On déduit des égalités* (2)-(4) *que*

$$\mathbb{P}(Y = k,\ Z \in [s,t]) = \mathbb{P}(Y = k)\,\mathbb{P}(Z \in [s,t]),$$

donc les variables aléatoires Y et Z sont indépendantes.

Exercice 6 :

1. Dessiner dans le plan $\mathbb{R}^2$ l'ensemble des points du domaine
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 1, x \leq y\}.$$
2. Soient (X,Y) un couple de v.a. de densité f donnée par
$$\begin{aligned} f(x,y) &= (y-x)e^{-(y-x)} \text{ pour } (x,y) \in D \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$
Calculer la densité marginale de X. Quelle est la loi de X ?
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Correction :

Soient X et Y deux v.a.r. continues et soit f la densité du couple (X,Y) donnée sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (y-x)e^{-(y-x)} \text{ pour } 0 \leq x \leq 1 \text{ et } x \leq y && (5) \\ &= 0 \qquad \text{sinon} && (6) \end{aligned}$$

1. On appelle support d'une fonction f, l'ensemble des points (x,y) du plan tels que $f(x,y) \neq 0$. Dessiner le support de f.

R : Le support de f est l'ensemble des points (x,y) dans $\mathbb{R}^2$ tels que $0 \leq x \leq 1$ et $y > x$. C'est donc l'intersection de la bande verticale $0 \leq x \leq 1$ et du demi-plan $\{y > x\}$ (demi-plan au-dessus de la diagonale $y = x$).

2. Calculer la densité marginale de X. Quelle est la loi de X ? Calculer la densité marginale de Y.

R : On obtient la densité f_X de X en intégrant en y la densité jointe $f(x,y)$ (voir cours). Si x n'est pas dans $[0,1]$, $f(x,y) = 0$ pour tout réel y, et donc

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy = 0$$

Si x est dans $[0,1]$, alors $f(x,y) \neq 0$ si et seulement si $y > x$, et donc

$$f_X(x) = \int_x^\infty f(x,y)dy = \int_x^\infty (y-x)e^{-(y-x)}dy = \int_0^\infty ze^{-z}dz = 1,$$

en effectuant le changement de variable $z = y - x$: ici x est fixé, donc $dz = dy$ et z varie de 0 à l'infini).
On constate que f_X est égale à la densité de la loi uniforme sur $[0,1]$. Donc X a la loi uniforme sur $[0,1]$.
Pour f_Y le calcul est un peu plus difficile. En regardant le dessin du support de f, on voit qu'il faut distinguer deux cas.
(i) Si $y \geq 1$, alors $f(x,y) \neq 0$ pour tout x dans $[0,1]$, et alors

$$f_Y(y) = \int_0^1 (y-x)e^{x-y}dx = \int_{-y}^{1-y} -ue^u du = \Big[(1-u)e^u\Big]_{-y}^{1-y} = (-1 + (e-1)y)e^{-y} > 0.$$

en effectuant le changement de variable $u = x - y$: ici y est fixé, donc $du = dx$ et u varie de $-y$ à $(1-y)$.
(ii) Si $0 < y < 1$, alors $f(x,y) \neq 0$ seulement si x est dans $[0,y[$, et, en effectuant le même changement de variable,

$$f_Y(y) = \int_0^y (y-x)e^{x-y}dx = \int_{-y}^0 -ue^u du = \Big[(1-u)e^u\Big]_{-y}^0 = 1 - (1+y)e^{-y} > 0.$$

Enfin, si $y \leq 0$, alors $f(x,y) = 0$ pour tout réel x et donc $f_Y(y) = 0$.

3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

R : Supposons X et Y indépendantes. Alors $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ en presque tout point (x, y) (c'est à dire sauf sur un domaine de surface nulle). Comme $f_X(x) > 0$ pour tout x dans $[0, 1]$ et $f_Y(y) > 0$ pour tout $y > 0$, $f_X(x)f_Y(y) > 0$ dès que (x, y) est dans $[0, 1]\times]0, \infty[$. Or $f(x, y) = 0$ si (x,y) est dans le triangle $\{0 < x < y < 1\}$, domaine de surface non nulle qui est inclus dans $[0, 1]\times]0, \infty[$. Il y a contradiction. Donc X et Y ne sont pas indépendantes.