IN 406 – Théorie des Langages
Cours 2 : Automate fini non-déterministe, déterministe

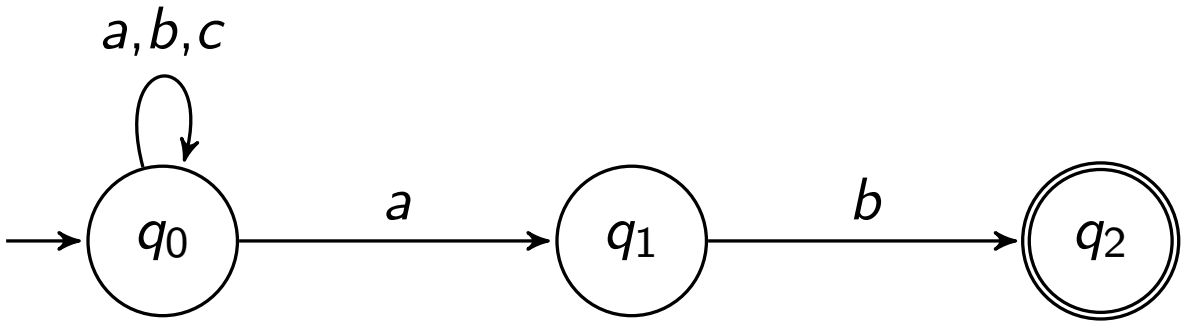
Franck Quessette – Franck.Quessette@uvsq.fr

Université de Versailles – Saint-Quentin

V3 2019–2020

Non déterminisme

Soit l'automate qui reconnaît les mots se terminant par ab sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$:



La reconnaissance du mot $acab$ se fait avec la séquence d'états : q_0, q_0, q_0, q_1, q_2. La séquence q_0, q_0, q_0, q_0, q_0 se termine dans un état non final.

Cet automate est **non-déterministe** : pour le couple (q_0, a) il existe deux transitions différentes : (q_0, a, q_0) et (q_0, a, q_1).

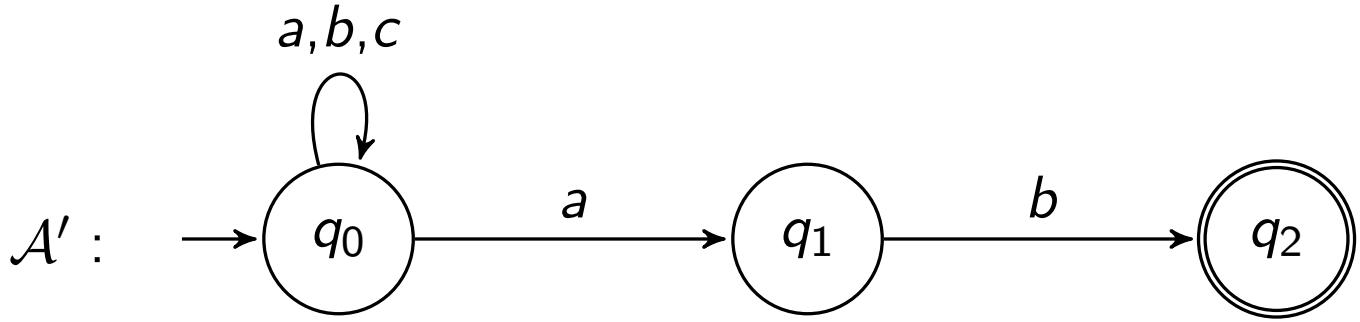
Non déterminisme

Définition

Pour un automate $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, q_0, F, T)$, pour tout état q et toute lettre a, on définit l'**ensemble des successeurs** de (q, a) par :

$$S(q, a) = \{q' \in Q, (q, a, q') \in T\}$$

Exemple



$S(q_0, a) = \{q_0, q_1\}$ $S(q_1, a) = \emptyset$ $S(q_2, a) = \emptyset$
$S(q_0, b) = \{q_0\}$ $S(q_1, b) = \{q_2\}$ $S(q_2, b) = \emptyset$
$S(q_0, c) = \{q_0\}$ $S(q_1, c) = \emptyset$ $S(q_2, c) = \emptyset$

AFN – AFD

Définition

Soit un automate fini $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, q_0, F, T)$,

- si $\exists q \in Q, \exists a \in \Sigma,\ |S(q,a)| > 1$
  $\Rightarrow \mathcal{A}$ est **non-déterministe** ;
- si $\forall q \in Q, \forall a \in \Sigma,\ |S(q,a)| \leq 1$
  $\Rightarrow \mathcal{A}$ est **déterministe** ;
- si $\forall q \in Q, \forall a \in \Sigma,\ |S(q,a)| = 1$
  $\Rightarrow \mathcal{A}$ est **déterministe complet**.

Notations

On note :

- **AFN** : **A**utomate **F**ini **N**on-déterministe ;
- **AFD** : **A**utomate **F**ini **D**éterministe.

ε-transition

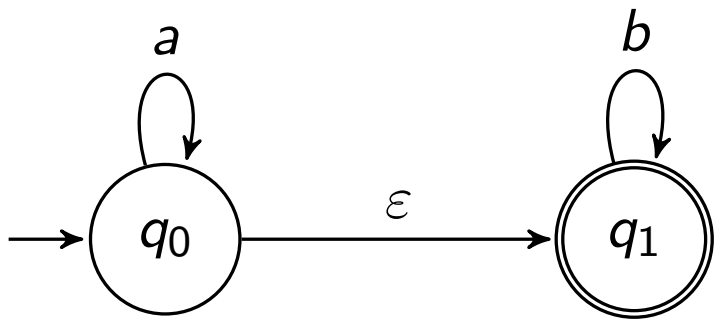
Définition

Une **ε-transition** dans un automate est une transition (q, ε, q').

Un **ε-chemin** de q à q' existe s'il existe une suite d'ε-transitions permettant d'aller de q à q'.

Exemple

Automate reconnaissant le langage $L = \{a^n b^m, n \geq 0, m \geq 0\}$:



Les ε-transitions simplifient la construction d'automates.

Un AFD ne contient pas d'ε-transition.

AFN avec ε-transtion $\rightarrow$ AFN $\rightarrow$ AFD

Théorème
Pour tout $\mathcal{A}_1$ **AFN avec ε-transitions**,
il existe $\mathcal{A}_2$ **AFN sans ε-transition**,
tel que $L(\mathcal{A}_2) = L(\mathcal{A}_1)$.

Théorème
Pour tout $\mathcal{A}_2$ **AFN sans ε-transitions**, il existe $\mathcal{A}_3$ **AFD**,
tel que $L(\mathcal{A}_3) = L(\mathcal{A}_2)$.

Théorème
Pour tout $\mathcal{A}_3$ **AFD**, il existe $\mathcal{A}_4$ **AFD complet**,
tel que $L(\mathcal{A}_4) = L(\mathcal{A}_3)$.

Théorème
Pour tout $\mathcal{A}_4$ **AFD**, il existe $\mathcal{A}_5$ **AFD minimal complet**,
tel que $L(\mathcal{A}_5) = L(\mathcal{A}_4)$.

Suppression des ε-transitions

Algorithme par fermeture arrière

Pour tout ε-chemin de q_1 à q_2 et pour toute transition (q_2, a, q_3) avec $a \neq \varepsilon$

Ajouter la transition (q_1, a, q_3)

Si q_2 est un état final, **Ajouter** q_1 dans les états finaux

Supprimer toutes les ε-transitions.

Exemple

Automate reconnaissant le langage $L = \{a^n b^m, n \geq 0, m \geq 0\}$:

La suppression des ε-transitions n'augmente pas le nombre d'états de l'automate.

Parties d'un ensemble

Notation

Pour tout ensemble E, l'ensemble des parties (sous-ensembles) de E est noté : $\boxed{2^E}$.

Exemple

Si $E = \{x, y, z\}$ alors,

$$2^E = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x, y, z\}\}.$$

Remarque

Pour tout ensemble E, $|2^E| = 2^{|E|}$. Dans l'exemple $|E| = 3$, $|2^E| = 8$ et $8 = 2^3$.

Déterminisation d'automate 1

Théorème

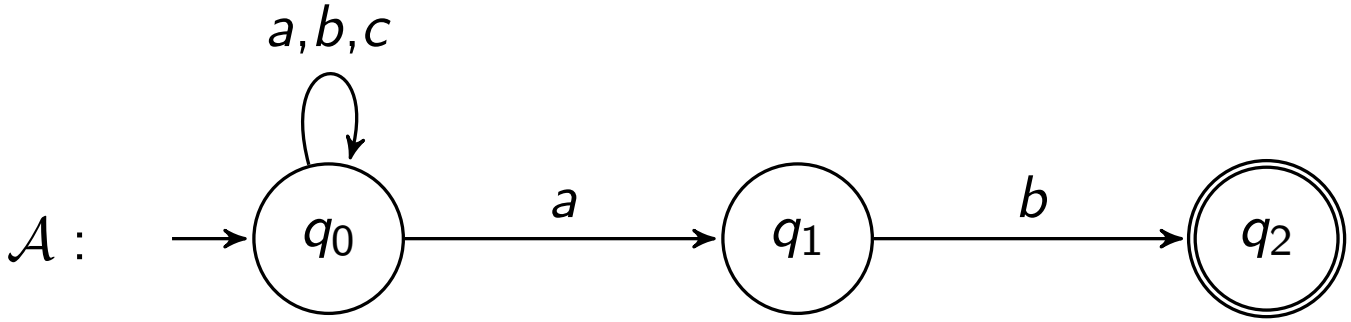
Soit $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, q_0, F, T)$ un AFN et soit $\mathcal{A}' = (\Sigma', Q', q_0', F', T')$ un automate fini défini par :

- $\Sigma' = \Sigma$;
- $Q' = 2^Q$ (chaque élément de Q' est un sous-ensemble de Q) ;
- $q_0' = \{q_0\}$;
- $\forall q' \in Q'$, si $\exists q \in q'$ tel que $q \in F$, alors $q' \in F'$;
- $T' = \{(q', a, \bigcup_{q \in q'} S(q, a)), q' \in Q', a \in \Sigma'\}$.

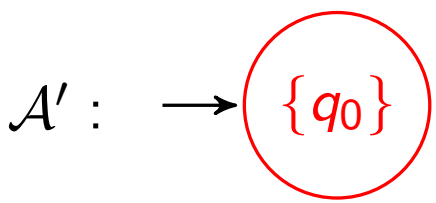
alors $\mathcal{A}'$ est déterministe et $L(\mathcal{A}') = L(\mathcal{A})$.

Déterminisation d'automate 2

$$\mathcal{A} = (\Sigma = \{a, b, c\}, Q = \{q_0, q_1, q_2\}, q_0, F = \{q_2\}, T)$$

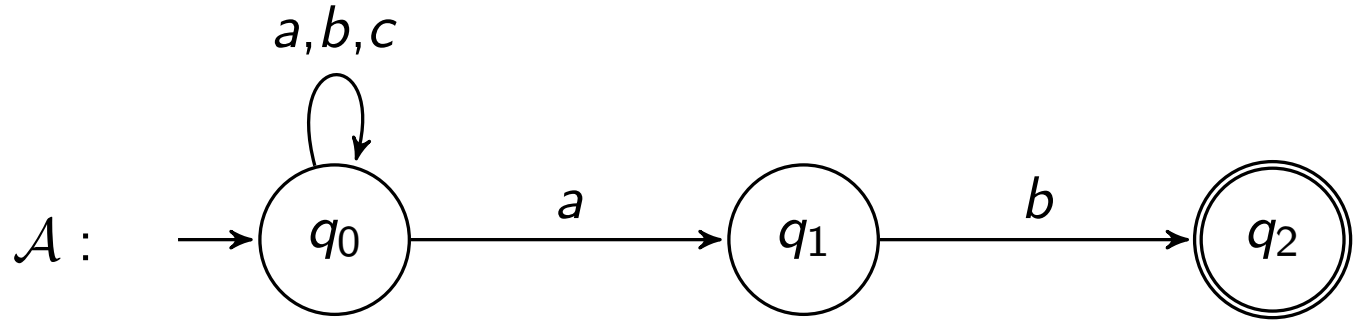


Étape 1 : État initial $q'_0 = \{q_0\}$

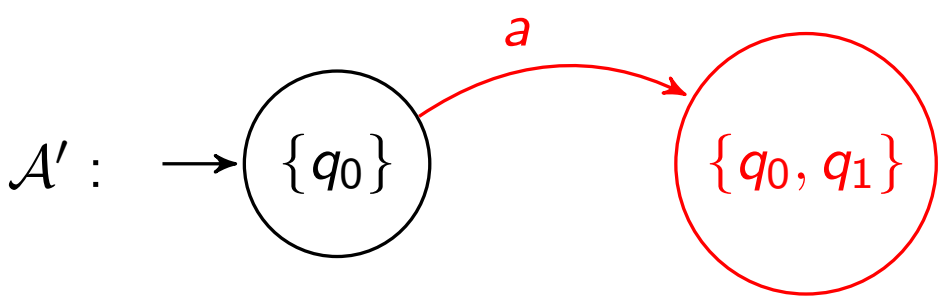


Déterminisation d'automate 2

$\mathcal{A} = (\Sigma = \{a, b, c\}, Q = \{q_0, q_1, q_2\}, q_0, F = \{q_2\}, T)$

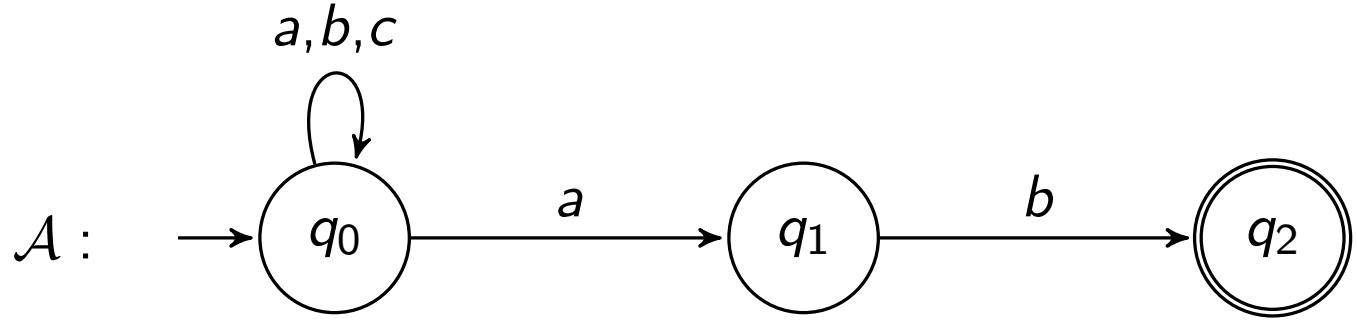


Étape 2 : $S(q_0, a) = \{q_0, q_1\}$

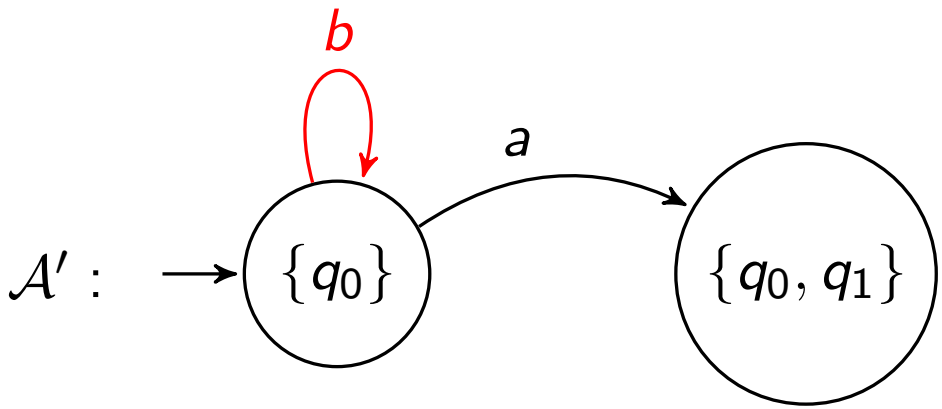


Déterminisation d'automate 2

$\mathcal{A} = (\Sigma = \{a, b, c\}, Q = \{q_0, q_1, q_2\}, q_0, F = \{q_2\}, T)$

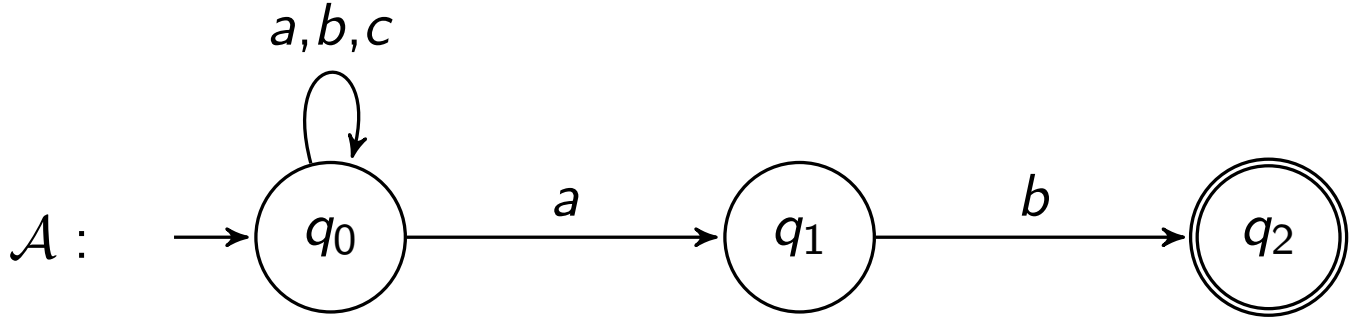


Étape 3 : $S(q_0, b) = \{q_0\}$

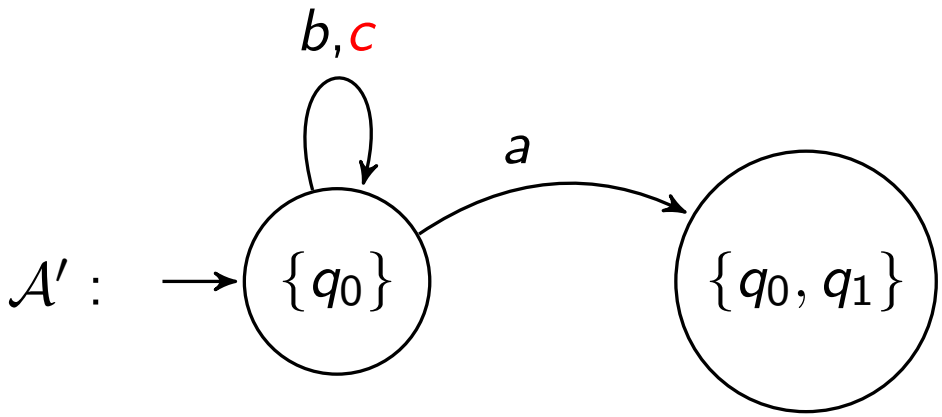


Déterminisation d'automate 2

$\mathcal{A} = (\Sigma = \{a, b, c\}, Q = \{q_0, q_1, q_2\}, q_0, F = \{q_2\}, T)$

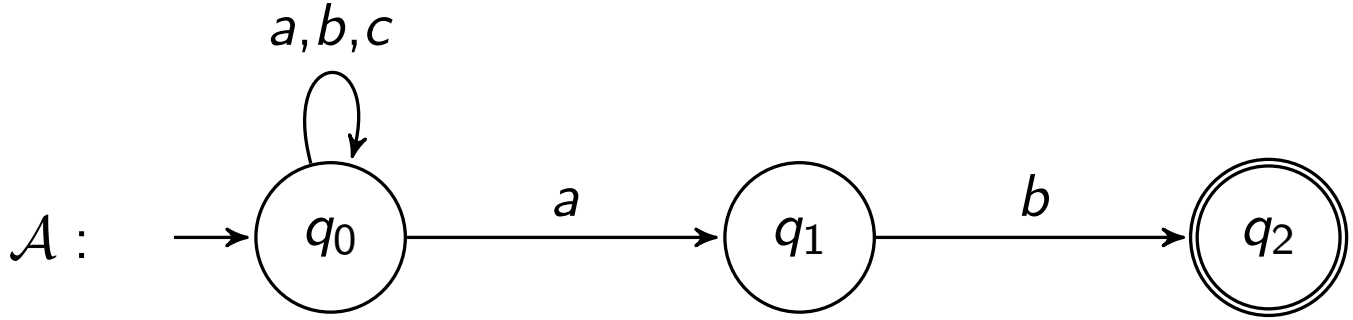


Étape 4 : $S(q_0, c) = \{q_0\}$

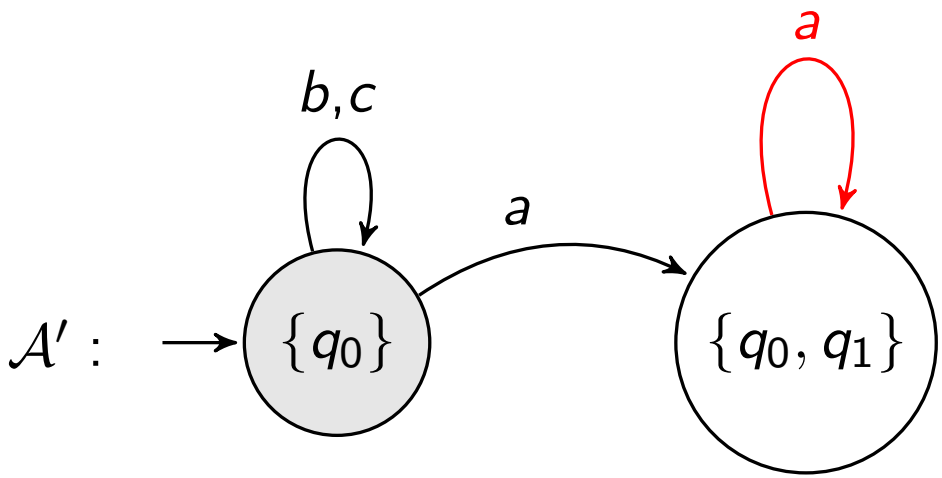


Déterminisation d'automate 2

$\mathcal{A} = (\Sigma = \{a, b, c\}, Q = \{q_0, q_1, q_2\}, q_0, F = \{q_2\}, T)$

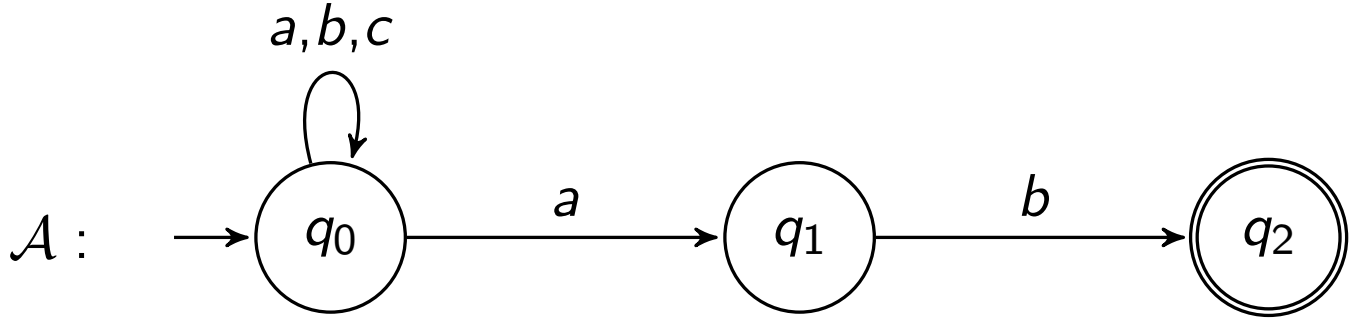


Étape 5 : $S(q_0, a) \cup S(q_1, a) = \{q_0, q_1\} \cup \emptyset = \{q_0, q_1\}$

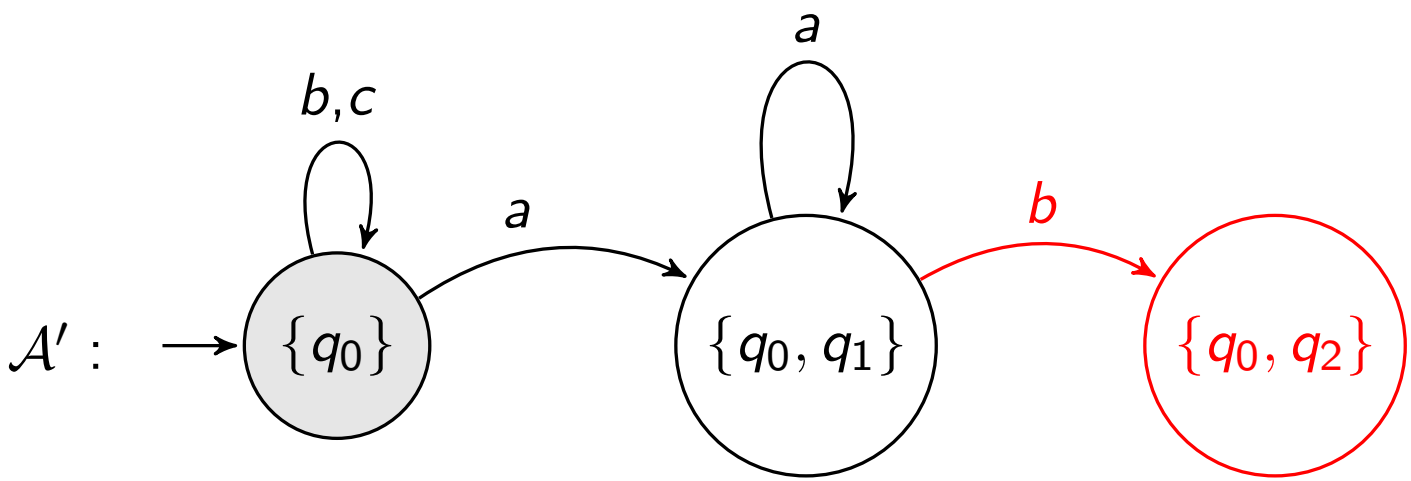


Déterminisation d'automate 2

$\mathcal{A} = (\Sigma = \{a, b, c\}, Q = \{q_0, q_1, q_2\}, q_0, F = \{q_2\}, T)$

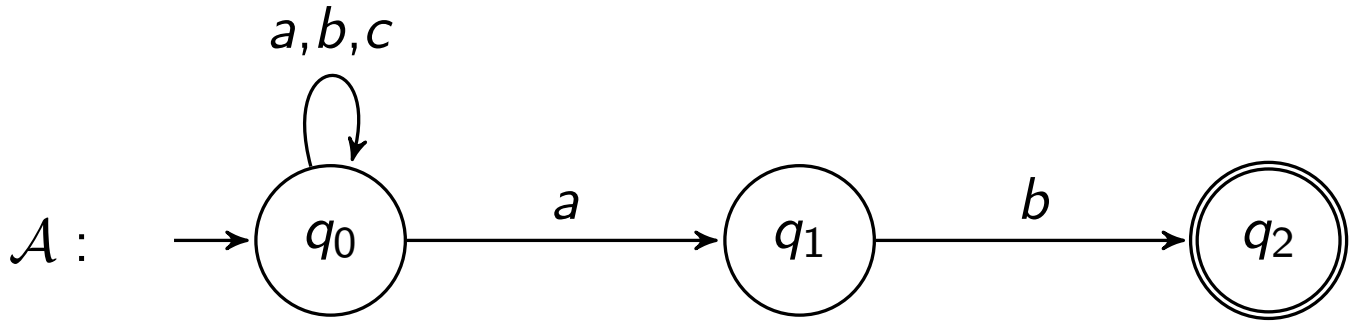


Étape 6 : $S(q_0, b) \cup S(q_1, b) = \{q_0\} \cup \{q_2\} = \{q_0, q_2\}$

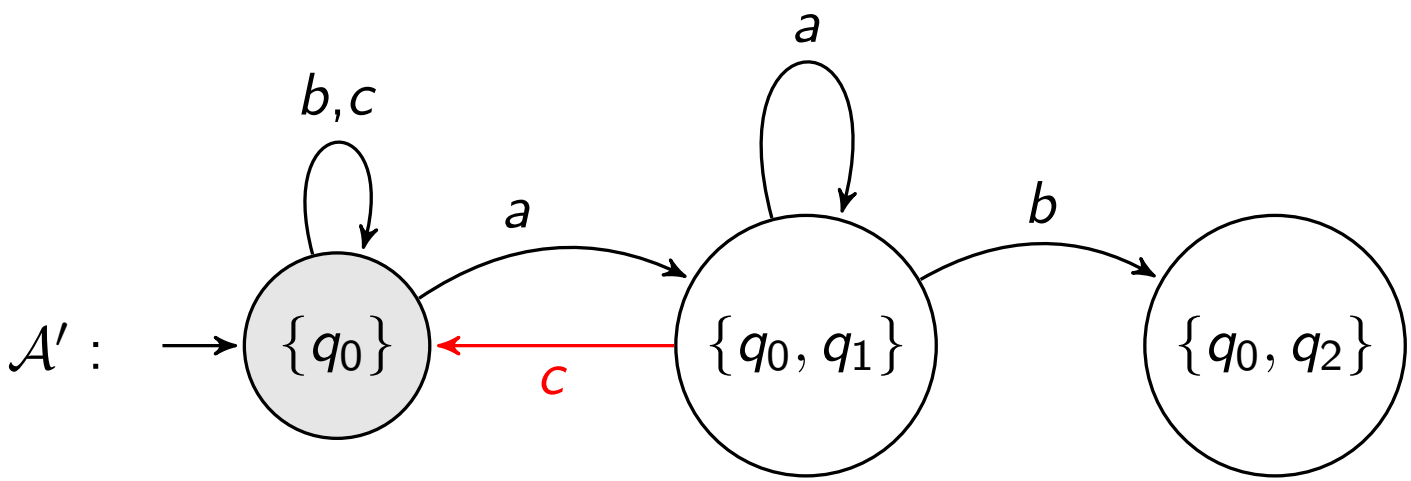


Déterminisation d'automate 2

$\mathcal{A} = (\Sigma = \{a, b, c\}, Q = \{q_0, q_1, q_2\}, q_0, F = \{q_2\}, T)$

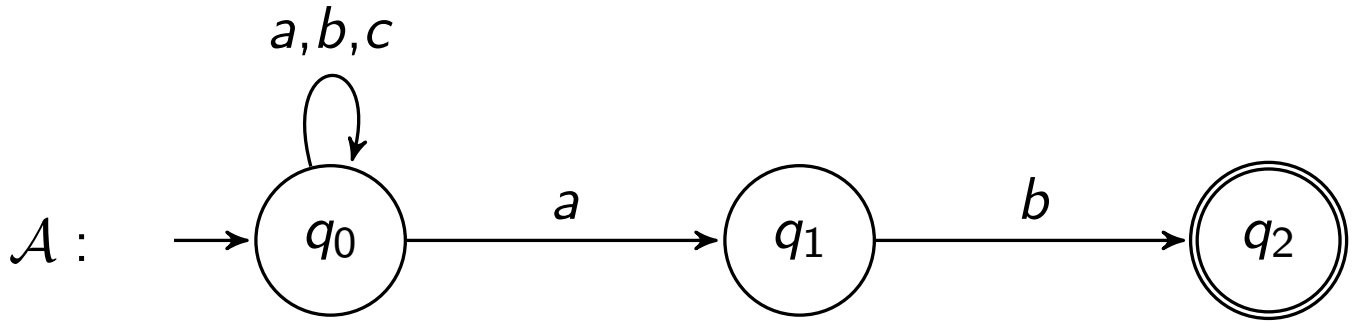


Étape 7 : $S(q_0, c) \cup S(q_1, c) = \{q_0\} \cup \emptyset = \{q_0\}$

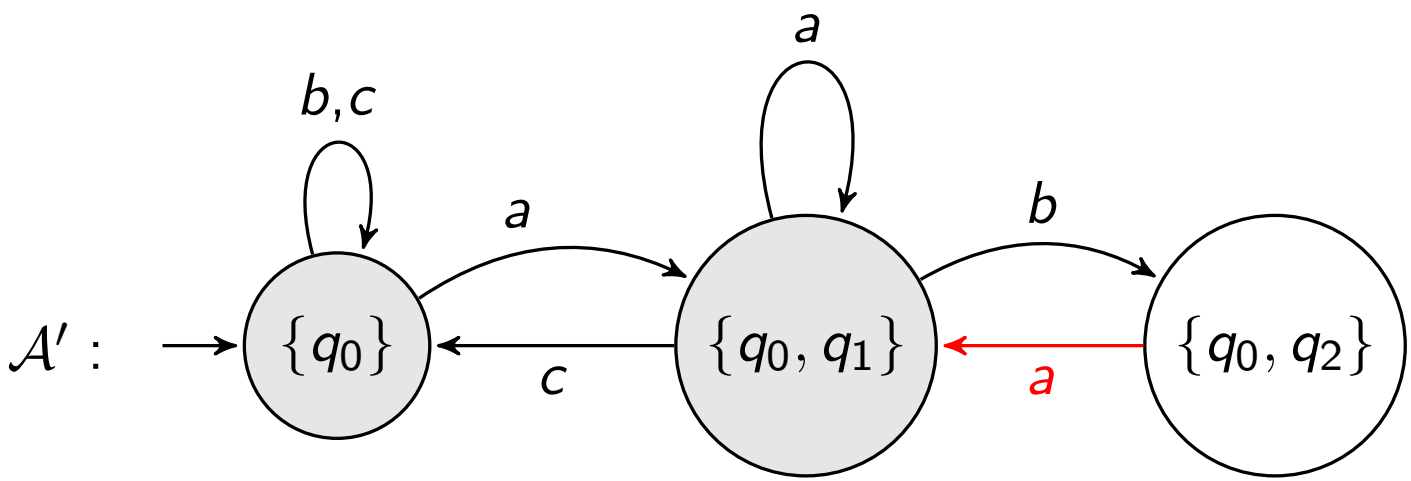


Déterminisation d'automate 2

$\mathcal{A} = (\Sigma = \{a, b, c\}, Q = \{q_0, q_1, q_2\}, q_0, F = \{q_2\}, T)$

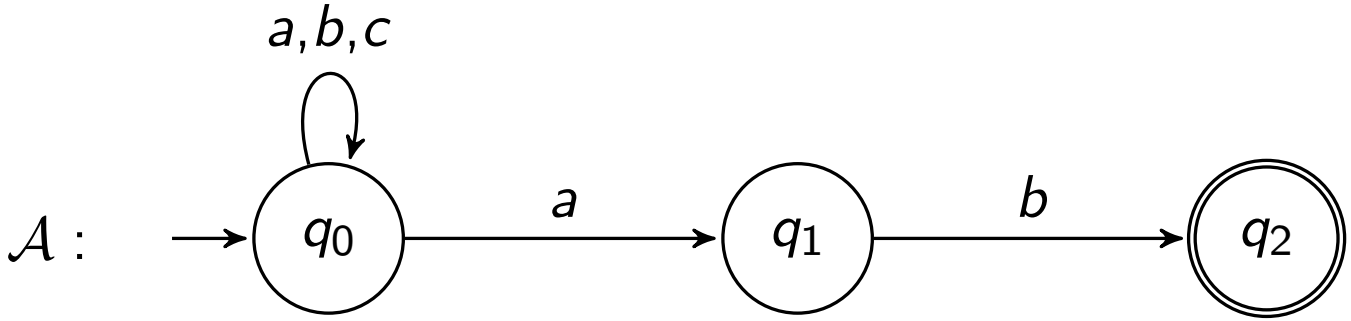


Étape 8 : $S(q_0, a) \cup S(q_2, a) = \{q_0, q_1\} \cup \emptyset = \{q_0, q_1\}$

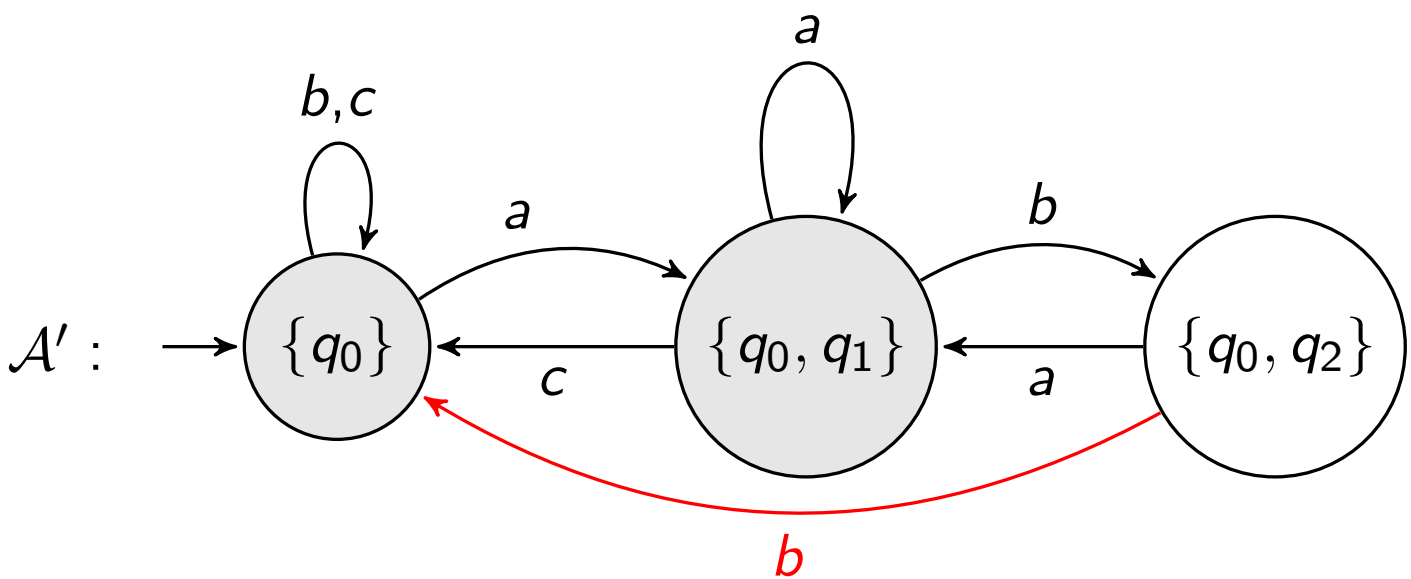


Déterminisation d'automate 2

$\mathcal{A} = (\Sigma = \{a, b, c\}, Q = \{q_0, q_1, q_2\}, q_0, F = \{q_2\}, T)$

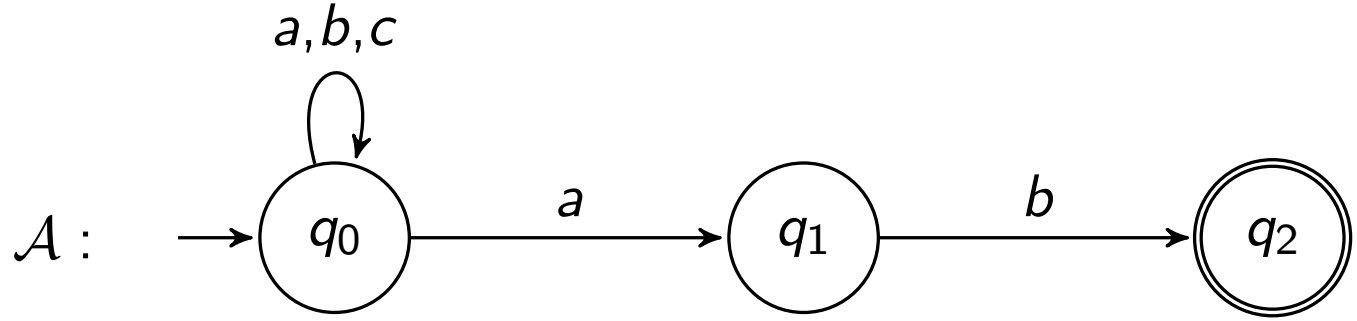


Étape 9 : $S(q_0, b) \cup S(q_2, b) = \{q_0\} \cup \emptyset = \{q_0\}$

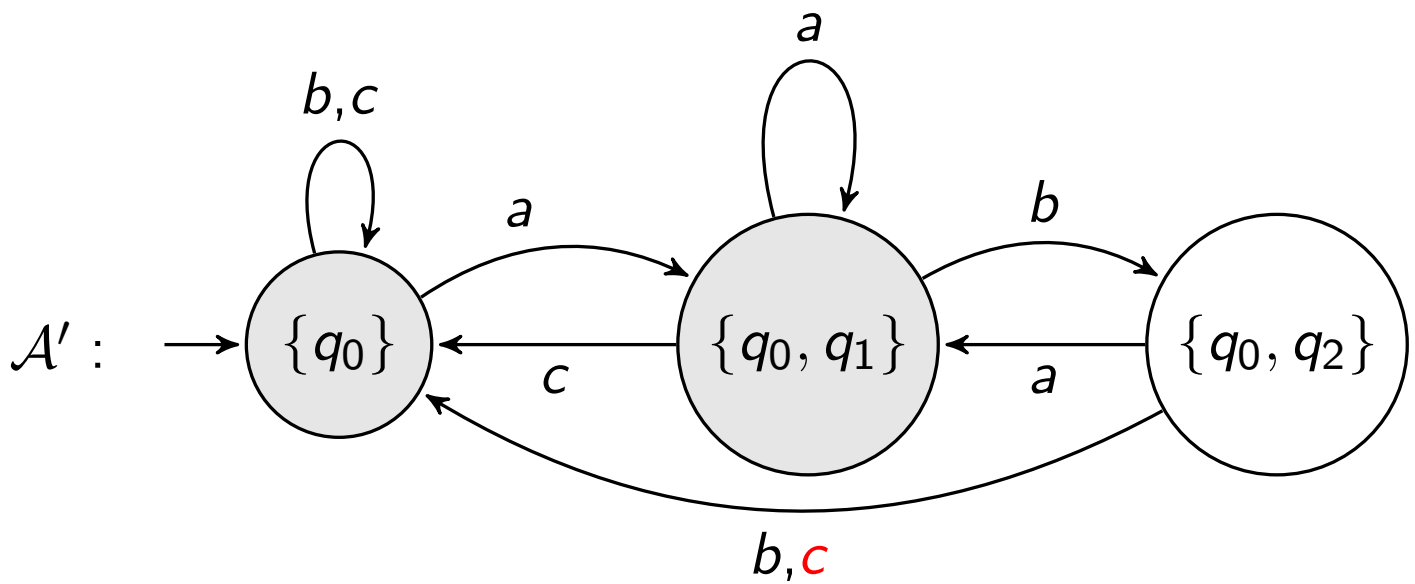


Déterminisation d'automate 2

$\mathcal{A} = (\Sigma = \{a, b, c\}, Q = \{q_0, q_1, q_2\}, q_0, F = \{q_2\}, T)$

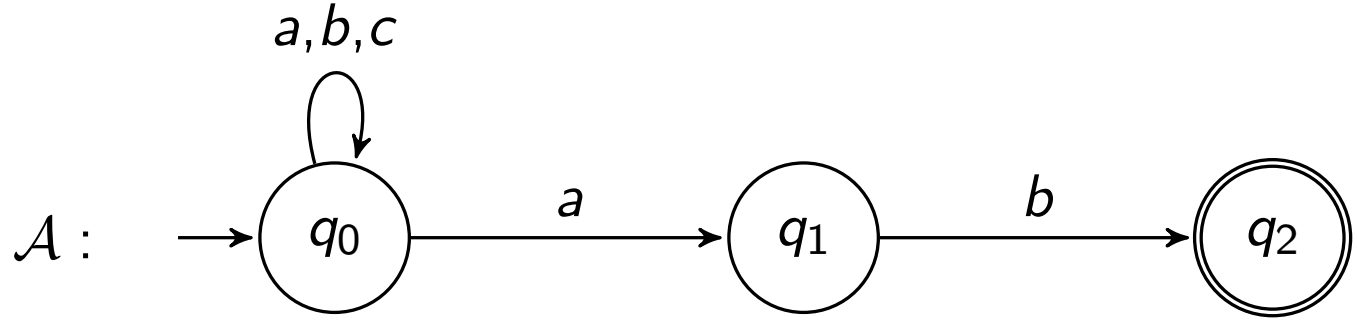


Étape 10 : $S(q_0, c) \cup S(q_2, c) = \{q_0\} \cup \emptyset = \{q_0\}$

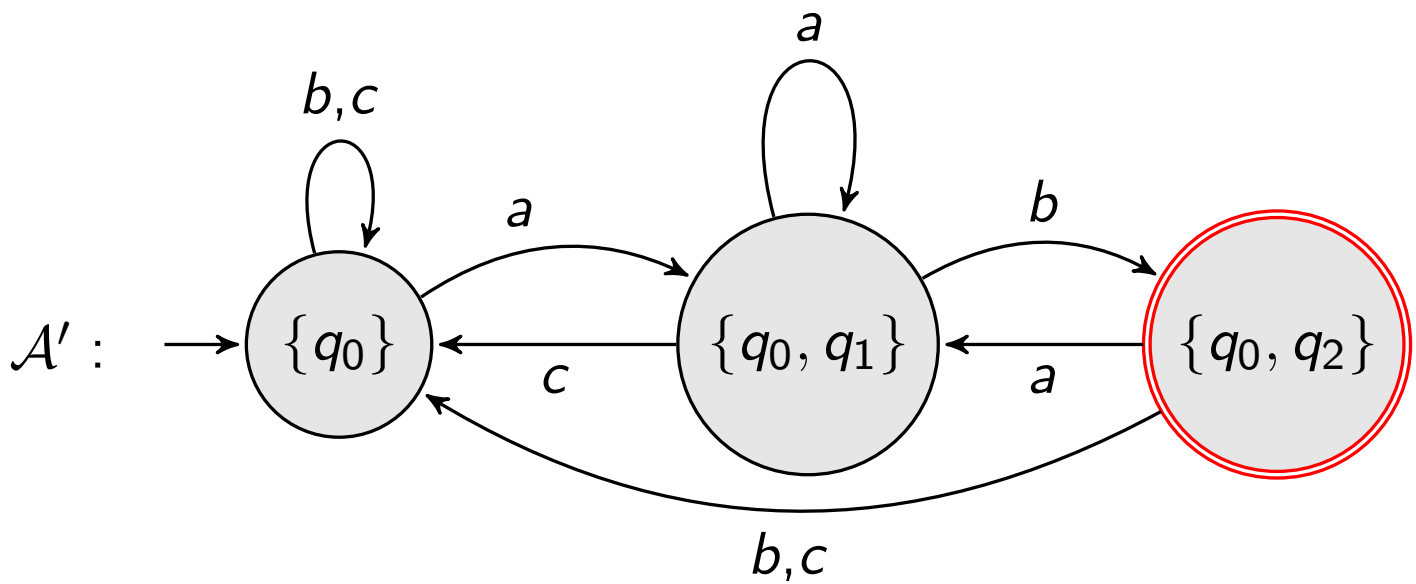


Déterminisation d'automate 2

$\mathcal{A} = (\Sigma = \{a, b, c\}, Q = \{q_0, q_1, q_2\}, q_0, F = \{q_2\}, T)$

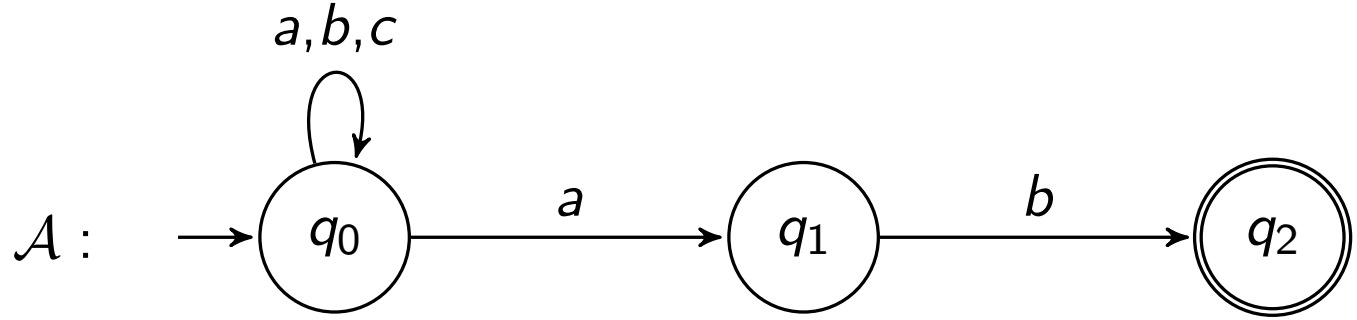


Étape 11 : États finaux $F = \{\{q_0, q_2\}\}$

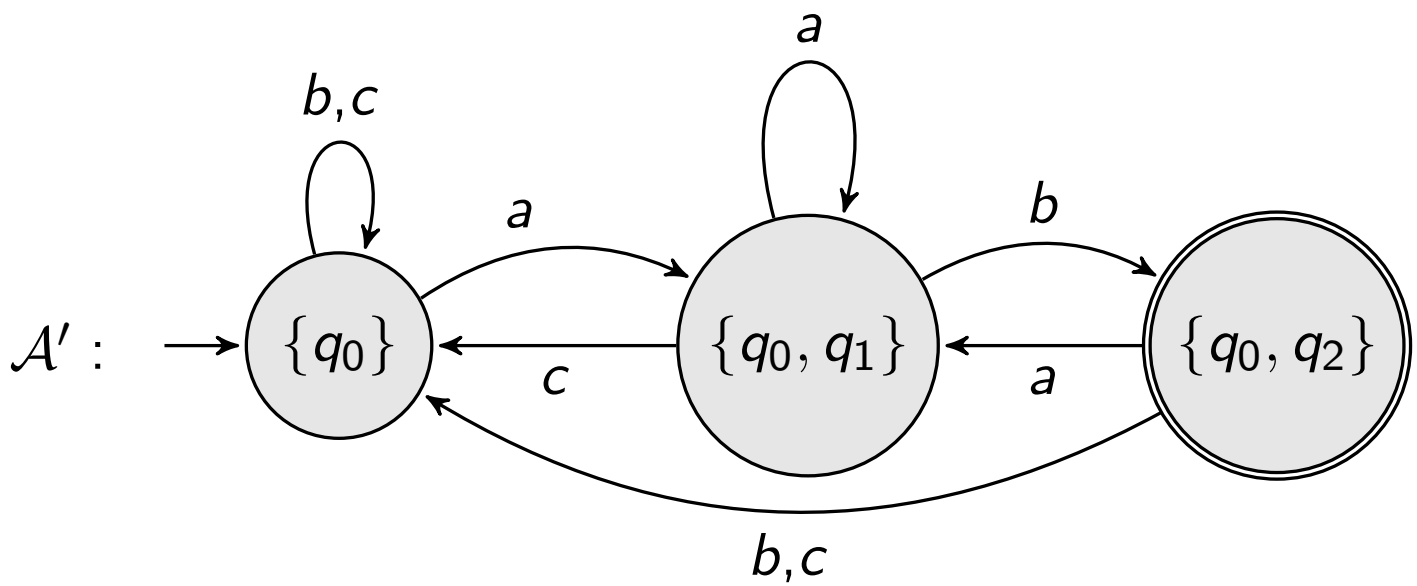


Déterminisation d'automate 2

$\mathcal{A} = (\Sigma = \{a, b, c\}, Q = \{q_0, q_1, q_2\}, q_0, F = \{q_2\}, T)$



Fin et $L(\mathcal{A}') = L(\mathcal{A})$



Automate fini déterministe complet

Théorème

Soit $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, q_0, F, T)$ un AFD et soit $\mathcal{A}' = (\Sigma', Q', q_0', F', T')$ un automate fini défini par :

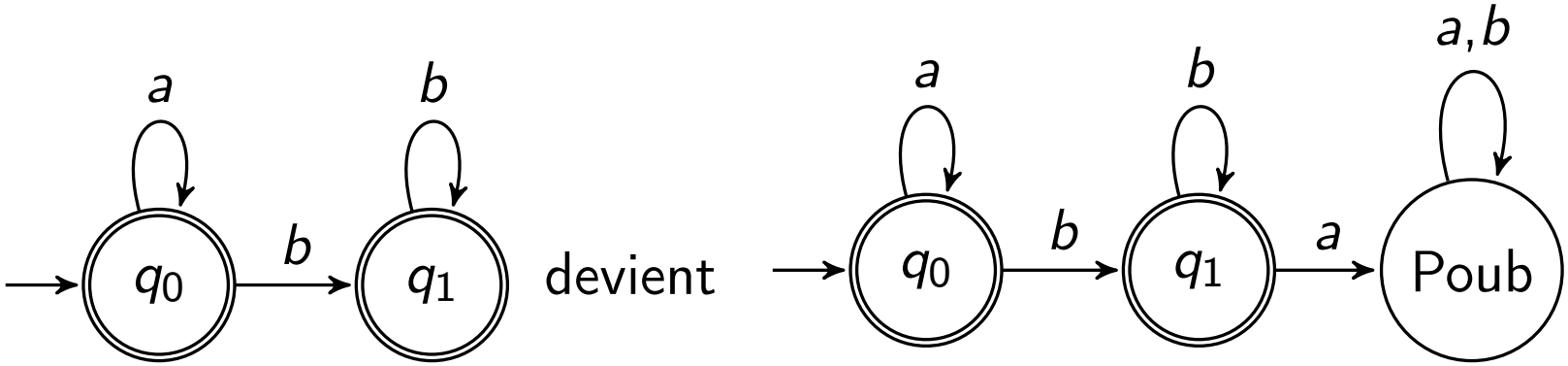
- $\Sigma' = \Sigma$;
- $Q' = Q \bigcup \{\text{Poubelle}\}$;
- $q_0' = q_0$;
- $F' = F$
- $T' = T \bigcup \{(q, a, \text{Poubelle}) \text{ pour } (q, a) \text{ tel que } |S(q, a)| = 0\} \bigcup_{a \in \Sigma} \{(\text{Poubelle}, a, \text{Poubelle})\}$.

alors $\mathcal{A}'$ est déterministe et complet et $L(\mathcal{A}') = L(\mathcal{A})$.

Automate fini déterministe complet 2

Exemple

Automate reconnaissant le langage $L = \{a^n b^m, n \geq 0, m \geq 0\}$:



Déterminisme vs Non-déterminisme 1

AFN

Les caractéristiques du **non-déterminisme** sont :

- facilité de construction de l'automate ;
- nombre d'états généralement polynomial dans la taille du problème ;
- reconnaissance d'un mot moins aisée, il faut potentiellement essayer tous les chemins possibles. Peut néanmoins se faire en temps polynomial ;
- certificat polynomial : si on donne la séquence des états qui reconnait un mot, la vérification est rapide.

Déterminisme vs Non-déterminisme 2

AFD

Les caractéristiques du **déterminisme** sont :

- construction de l'automate difficile ;
- nombre d'états peut être exponentiel dans la taille du problème ;
- reconnaissance d'un mot polynomiale ;
- certificat de reconnaissance et de non reconnaissance d'un mot polynomial ;
- automate minimum canonique.

Déterminisme vs Non-déterminisme 3

Comparaison

Notations :

- Σ l'alphabet ;
- $ED(L)$ nombre minimum d'état dans un AFD reconnaissant L ;
- $EN(L)$ nombre minimum d'état dans un AFN reconnaissant L ;
- $TD(L)$ nombre minimum de transitions dans un AFD reconnaissant L ;
- $TN(L)$ nombre minimum de transitions dans un AFN reconnaissant L.

On a :

$$EN(L) \leq ED(L) \leq 2^{EN(L)}$$

$$TD(L) = |\Sigma| \times ED(L)$$

$$EN(L) - 1 \leq TN(L) \leq |\Sigma| \times (EN(L))^2$$

P vs NP

Définition

Un problème est dans **classe de complexité P** s'il existe une machine de Turing déterministe qui décide (problème de décision) en temps polynomial dans la taille de l'entrée.

Définition

Un problème est dans **classe de complexité NP**

- s'il existe une machine de Turing non-déterministe qui décide (problème de décision) en temps polynomial dans la taille de l'entrée ; ou bien
- s'il existe une machine de Turing déterministe qui est capable de décider positivement en temps polynomial dans la taille de l'entrée. C'est la notion de certificat.

On a $P \subseteq NP$, mais on ne sait pas si $P \neq NP$.