IN 406 – Théorie des Langages
Cours 6 : Automate à pile

Franck Quessette – Franck.Quessette@uvsq.fr

Université de Versailles – Saint-Quentin

V4 2020–2021

Rappel

Notions déjà vues :

- langage non reconnaissable (non régulier) par un automate : $L = \{a^n b^n, n \geq 0\}$;
- il faudrait un «compteur».

Idée :

- automate fini + une pile ;
- la pile peut servir de «compteur».

Définition

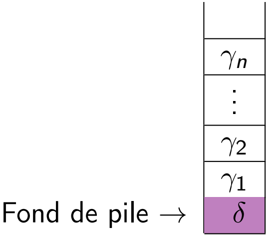
Un $\boxed{\textbf{automate à pile}}$ est défini par $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, q_0, \Gamma, \boxed{\delta}, F, T)$ où :

- Σ est l'alphabet de l'automate **(idem AFN)** ;
- Q est l'ensemble des états de l'automate **(idem AFN)** ;
- $q_0 \in Q$ est l'état initial de l'automate **(idem AFN)** ;
- Γ (Gamma majuscule) est l'alphabet de la pile **(nouveau)** ;
- $\boxed{\delta} \notin \Gamma$ est le symbole du fond de pile **(nouveau)** ;
- $F \subseteq Q$ est l'ensemble des états finaux de l'automate **(idem AFN)** ;
- $T \subseteq Q \times (\Gamma \cup \{\boxed{\delta}, \varepsilon\}) \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times (\Gamma^2 \cup \Gamma \cup \{\varepsilon\}) \times Q$ l'ensemble des transitions de l'automate à pile **(augmenté par rapport à AFN)**.

État de la pile

La pile est représentée par un mot $\boxed{Z} \in \Gamma^*$. La pile est de capacité infinie.

- $\boxed{Z} = \varepsilon$ correspond à la pile vide. Il y a quand même $\boxed{\delta}$ au fond de la pile.
- Remplacer $\boxed{Z}$ par $\boxed{Z\gamma}$ revient à empiler le symbole γ.
- Remplacer $\boxed{Z\gamma}$ par $\boxed{Z}$ revient à dépiler le symbole γ.
- Si $\boxed{Z} = \gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n$ avec les $\gamma_i \in \Gamma$ la pile est :



Configuration d'un automate à pile

La configuration d'un automate à pile

La $\boxed{\textbf{configuration}}$ d'un automate à pile est un couple (q, Z) :

- $q \in Q$ est l'état de l'automate ;
- $Z \in \Gamma^*$ est l'état de la pile.

Configuration initial

Au départ la pile ne contient que le symbole de fond de pile $\boxed{\delta}$ (on dit quand même pile vide). La configuration initiale est donc (q_0, ε).

Transition dans un automate à pile

Une transition consiste à passer d'une configuration à une autre en lisant une lettre de l'alphabet Σ.

Transition dans un automate à pile

Une **transition dans un automate à pile** $(p, X, a, Action, q)$ est définie avec :

- $p, q \in Q$ les états avant et après la transition ;
- $X \in \Gamma \cup \{\boxed{\delta}, \varepsilon\}$ le sommet de la pile avant la transition.
- $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ le caractère lu ;
- Si $Action = XY$ avec $Y \in \Gamma$ la transition empile Y ;
- Si $Action = X$ la transition ne modifie pas la pile ;
- Si $Action = \varepsilon$ avec $X \in \Gamma$ la transition dépile X.

On ne peut jamais empiler ou dépiler le symbole $\boxed{\delta}$. Il y en a toujours un et un seul au fond de la pile.

Reconnaissance par automate à pile

Plusieurs conditions de reconnaissance :

- par $\boxed{\textbf{Pile Vide}}$: configuration (q, ε) toutes les lettres du mot ont été lues et la pile est vide ;
- par $\boxed{\textbf{État Final}}$: configuration (q_F, Z) avec $q_F \in F$ toutes les lettres du mot ont été lues et l'automate est dans un état final ;
- par $\boxed{\textbf{Pile Vide}}$ ET $\boxed{\textbf{État Final}}$: configuration (q_F, ε) avec $q_F \in F$ les deux conditions précédentes doivent être satisfaites.

Remarques

- Il y a équivalence entre ces types de reconnaissance.
- Le type de reconnaissance doit être précisé dans la définition de l'automate à pile.
- L'automate à pile n'est pas nécessairement déterministe.

Reconnaissance de $a^n b^n$

Soit $L = \{a^n b^n, n \geq 0\}$ sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

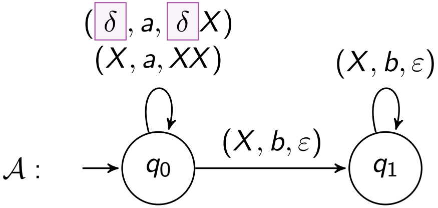
Automate à pile reconnaissant L par pile vide :
$(\Sigma, Q, q_0, \Gamma, \boxed{\delta}, F, T)$

- $\Sigma = \{a, b\}$;
- $Q = \{q_0, q_1\}$;
- $\Gamma = \{X\}$;
- $q_0 = q_0$;
- $F = \emptyset$;
- T contient quatre transitions :
  1. $(q_0, \boxed{\delta}, a, \boxed{\delta} X, q_0)$ quand on lit un a et que la pile est vide on empile un X ;
  2. (q_0, X, a, XX, q_0) quand on lit un a, on empile un X ;
  3. $(q_0, X, b, \varepsilon, q_1)$ changement d'état en lisant un b et en dépilant un X ;
  4. $(q_1, X, b, \varepsilon, q_1)$ quand on lit un b, on dépile un X.

Représentation graphique d'un automate à pile

Soit $L = \{a^n b^n, n \geq 0\}$ sur un alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

Exemple

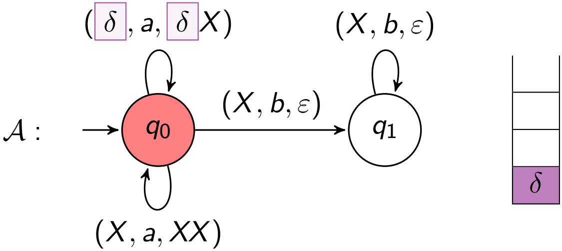


Acceptation par **pile est vide**, on a lu autant de a que de b et la pile est vide.

Déroulement de la reconnaissance de a^2b^2 :

Exemple

Étape 1 : État initial

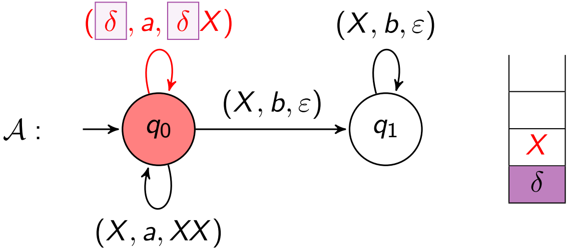


Exemple de reconnaissance

Déroulement de la reconnaissance de a^2b^2 :

Exemple

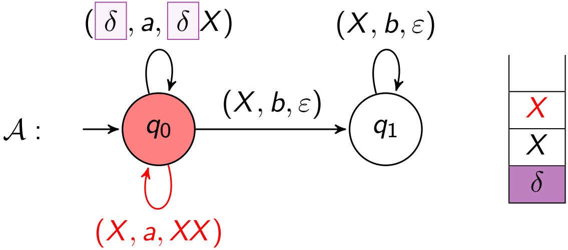
Étape 2 : Lecture d'un a, empilement d'un X



Déroulement de la reconnaissance de a^2b^2 :

Exemple

Étape 3 : Lecture d'un a, empilement d'un X

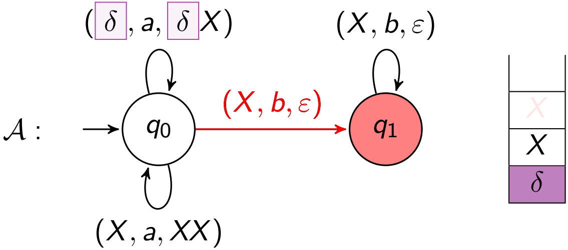


Exemple de reconnaissance

Déroulement de la reconnaissance de a^2b^2 :

Exemple

Étape 4 : Lecture d'un b, dépilement

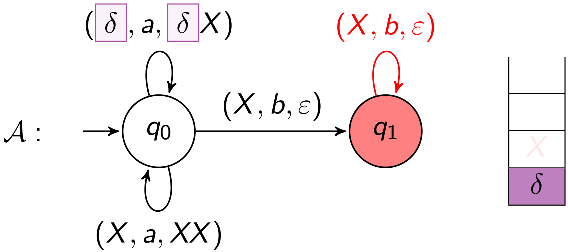


Exemple de reconnaissance

Déroulement de la reconnaissance de a^2b^2 :

Exemple

Étape 5 : Lecture d'un b, dépilement

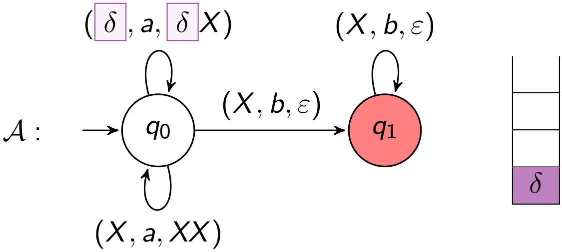


Exemple de reconnaissance

Déroulement de la reconnaissance de a^2b^2 :

Exemple

$\boxed{\textbf{Fin}}$: Reconnaissance par Pile Vide

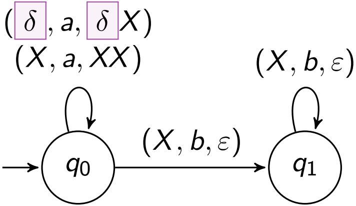


Reconnaissance par pile vide et état final

Soit $L = \{a^n b^n, n \geq 0\}$ sur un alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

Exemple

$\mathcal{A}$:

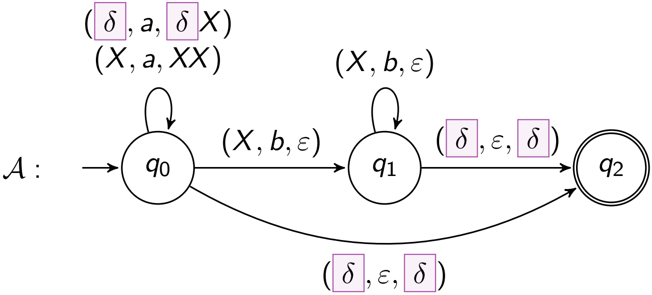


Acceptation par $\boxed{\textbf{pile est vide}}$, on a lu autant de a que de b et la pile est vide.

Reconnaissance par pile vide et état final

Soit $L = \{a^n b^n, n \geq 0\}$ sur un alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

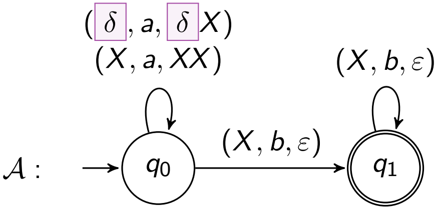
Exemple



Acceptation par **pile est vide** et **état final**, on a lu autant de a que de b et la pile est vide et on est dans un état final.

Soit $L = \{a^m b^n, 0 \leq n \leq m\}$ sur un alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

Exemple

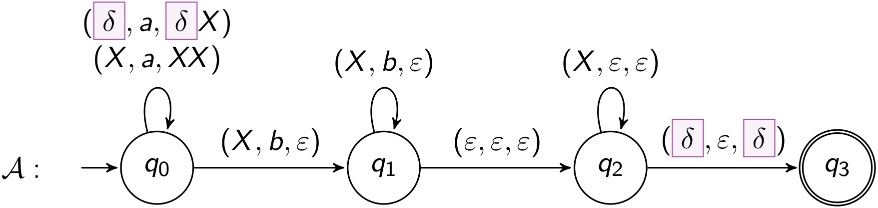


Acceptation par **état final**, on a lu moins de b que de a et la pile n'est pas forcément vide.

Reconnaissance par état final

Soit $L = \{a^m b^n, 0 \leq n \leq m\}$ sur un alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

Exemple



Acceptation par $\boxed{\textbf{état final}}$ et $\boxed{\textbf{pile vide}}$.

Langage algébrique

Un langage reconnu par un automate à pile est un **langage algébrique** et tout langage algébrique est reconnu par un automate à pile.

- On nomme également ces langages **Hors Contexte** ou **Non Contextuel** ou **Context Free** ;
- Tout langage régulier est également algébrique.

Automate à pile déterministe

Automate à pile déterministe

Un automate à pile est **déterministe** si pour toute configuration (q, Z) de l'automate il n'existe qu'une seule transition possible.

Il peut y avoir des ε-transitions entre les états si ces transitions modifient l'état de la pile.

Reconnaissance par état final d'un automate à pile déterministe

La reconnaissance par un automate à pile déterministe se fait uniquement par **état final** et pas par pile vide.

Reconnaissance par pile vide d'un automate à pile déterministe

La reconnaissance par **pile vide** avec un automate à pile déterministe définit les langages algébriques préfixes (aucun mot n'est préfixe d'un autre dans le langage).

Existe-t-il des langages non algébriques

Question 1

Le langage $L = \{a^n b^n c^n, n \geq 0\}$ est-il algébrique ?

Existe-t-il des langages non algébriques

Question 1

Le langage $L = \{a^n b^n c^n, n \geq 0\}$ est-il algébrique ?

Réponse : Non, il faut deux piles (Lemme de l'étoile généralisé).

Existe-t-il des langages non algébriques

Question 1

Le langage $L = \{a^n b^n c^n, n \geq 0\}$ est-il algébrique ?

Réponse : Non, il faut deux piles (Lemme de l'étoile généralisé).

Question 2

Faut-il trois piles pour reconnaitre le langage
$L = \{a^n b^n c^n d^n, n \geq 0\}$?

Existe-t-il des langages non algébriques

Question 1

Le langage $L = \{a^n b^n c^n, n \geq 0\}$ est-il algébrique ?

Réponse : Non, il faut deux piles (Lemme de l'étoile généralisé).

Question 2

Faut-il trois piles pour reconnaitre le langage $L = \{a^n b^n c^n d^n, n \geq 0\}$?

Réponse : Non deux piles suffisent.

Existe-t-il des langages non algébriques

Question 1

Le langage $L = \{a^n b^n c^n, n \geq 0\}$ est-il algébrique ?

Réponse : Non, il faut deux piles (Lemme de l'étoile généralisé).

Question 2

Faut-il trois piles pour reconnaitre le langage
$L = \{a^n b^n c^n d^n, n \geq 0\}$?

Réponse : Non deux piles suffisent.

Automate à deux piles $\Longleftrightarrow$ Machine de Turing.

Contrôle lundi 09 mars 2020, 09h40

Au programme :

- langages rationnels, reconaissables, réguliers ;
- notations ensemblistes, AFN, AFD, expressions régulières ;
- tous les algos.

Documents autorisés :

deux feuilles A4 recto-verso.