Feuille n^o 5 : Couples de variables aléatoires.

Exercice 1 :

On jette une pièce de monnaie non truquée deux fois indépendamment et on note par X_1 et X_2 les deux variables aléatoires de Bernoulli correspondantes. Soit $Y = X_1 + X_2$ et $Z = \max\{X_1, X_2\}$.

1. Déterminer la loi conjointe de (X_1, X_2).
2. Déterminer la loi Y et la loi de Z.
3. Déterminer la loi conjointe de (Y, Z). Déterminer les lois marginales de Y et Z.
4. Calculer $Cov(X, Y)$.

Exercice 2 :

Soient X et Y deux v.a. indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p $(0 < p < 1)$. On note $U = X + Y$ et $V = X - Y$.

1. Déterminer la loi du couple (U, V).
2. Calculer la covariance de U et V.
3. Les variables sont-elles indépendantes ?

Exercice 3 : *(à propos de la covariance)*

1. Exprimer la variance de $3X - Y$ en fonction de $\mathbb{V}ar(X)$, $\mathbb{V}ar(Y)$, et $Cov(X, Y)$.
2. Soit X une variable aléatoire centrée de variance 1, et $Y = 3X - 2$. Calculer $\mathbb{V}ar(Y)$ et $Cov(X, Y)$.
3. Rappeler pourquoi $Cov(X, Y)$ est nulle si X et Y sont indépendantes. Puis, si X désigne une v.a.r. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, montrer que X et X^2 ne sont pas indépendantes mais que pourtant $Cov(X, X^2)$ est nul. On pourra considérer l'événement $\{X \in [0, 1], X^2 \in [0, 1]\}$.

Exercice 4 :

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires continues dont la loi est déterminée par la densité suivante

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} k(x + y) & \text{si } (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur de k pour que $f_{X,Y}$ constitue bien une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
3. Calculer $\mathbb{P}(X < 1/2)$, $\mathbb{P}(X < 1/2 \mid Y < 1/2)$.
4. X et Y sont elles indépendantes ?
5. Calculer $Cov(X, Y)$.

Exercice 5 : *(Partie entière et fractionnaire d'une variable exponentielle)*

Pour $x > 0$, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x et $\{x\}$ la partie fractionnaire de x :

$$\lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}, \ \lfloor x \rfloor \le x < \lfloor x \rfloor + 1, \ \text{et } \{x\} = x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1[$$

Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1. Soit $Y = \lfloor X \rfloor$ et $Z = \{X\}$.

1. Déterminer la loi du couple (Y, Z), i.e. calculer $\mathbb{P}(Y = k, Z \in [s, t])$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $s, t \in [0, 1[$.
2. Déterminer la loi de Y.
3. Calculer pour tout $s, t \in [0, 1[$, $\mathbb{P}(Z \in [s, t])$ puis en déduire la densité de Z. Calculer $\mathbb{E}[Z]$.
4. Les variables Y et Z sont-elles indépendantes ?

Exercice 6 :

1. Dessiner dans le plan $\mathbb{R}^2$ l'ensemble des points du domaine
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 1, x \leq y\}.$$
2. Soient (X, Y) un couple de v.a. de densité f donnée par
$$\begin{aligned} f(x,y) &= (y-x)e^{-(y-x)} \text{ pour } (x,y) \in D \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$
Calculer la densité marginale de X. Quelle est la loi de X ?
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?