Équivalence

Une équivalence est une relation ayant des propriétés similaires à celles de l'égalité. Étant donné une relation d'équivalence sur un ensemble A, on peut regrouper les éléments de A en **classes d'équivalence** qui forment les éléments d'un ensemble (dit **ensemble quotient**) où la relation se réduit à l'identité.

Définitions et notations

Formellement, une équivalence d'un ensemble A est une relation $\mathcal{R} \subset A \times A$ réflexive, symétrique et transitive.

Pour un élément $a \in A$, on appelle **classe d'équivalence de** a, noté $\mathcal{R}(a)$ ou $\bar{a}$, l'ensemble des éléments $b \in A$ tels que $a\mathcal{R}b$. Il s'agit d'un sous-ensemble de A et il n'est jamais vide (car il contient au moins a). Un élément $b \in \bar{a}$ est appelé un **représentant** de la classe $\bar{a}$.

L'ensemble de toutes les classes d'équivalence de A par la relation $\mathcal{R}$ est appelé **l'ensemble quotient de** A **par** $\mathcal{R}$ et est noté $A/\mathcal{R}$. La fonction $f : A \to A/\mathcal{R}$ qui à chaque $a \in A$ associe sa classe d'équivalence est appelé la **surjection canonique** de A dans l'ensemble quotient.

Excercice: Démontrer que la surjection canonique est effectivement surjective. Démontrer qu'elle est totale. Donner un exemple d'équivalence pour laquelle elle n'est pas injective.

Exemples

- "Être né des mêmes parents" est une relation d'équivalence.
- "Parler la même langue" n'est pas une relation d'équivalence (elle n'est pas transitive).
- "Fêter l'anniversaire le même jour" est une relation d'équivalence. Il y a 366 classes d'équivalence.
- L'égalité $a = b$ (pour un ensemble quelconque) est une relation d'équivalence. Chaque classe d'équivalence contient un unique élément et la surjection canonique est bijective.

Réduction modulo un entier

Pour un $n \in \mathbb{Z}$ fixé, la relation $a = b \bmod n$ est une relation d'équivalence. Le reste de la division Euclidienne par n est compris entre 0 et $n-1$, du coup il y a exactement n classes d'équivalence:

- $\bar{0} = \bar{n} = \overline{2n} = \cdots = \{a \in A \mid a = qn\}$,
- $\bar{1} = \overline{n+1} = \cdots = \{a \in A \mid a = qn+1\}$,
- …
- $\overline{n-1} = \overline{-1} = \cdots = \{a \in A \mid a = qn+n-1\}$.

L'ensemble quotient est habituellement noté $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, il est égal à

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{n-1}\}.$$

Souvent, lorsque il est clair du contexte qu'on parle des éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on abuse de la notation et on écrit a à la place de $\bar{a}$.