Déterminants

1. Matrices inversibles

1. Relier entre elles chaque matrice avec son inverse.

$$\begin{pmatrix}1&2\\6&4\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \frac{1}{14}\begin{pmatrix}4&-6\\1&2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&-1\\1&2&-3\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}2&6\\-1&4\end{pmatrix},\quad -\frac{1}{8}\begin{pmatrix}4&-2\\-6&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\quad \frac{1}{7}\begin{pmatrix}5&4&-2\\-4&1&3\\1&-2&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

2. En vous servant de l'exercice précédent, résolvez le système linéaire

$$\begin{cases} x & & +2z & =3\\ x & +y & -z & =-1\\ x & +2y & -3z & =0\end{cases}$$

3. Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont inversibles ?

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&2&3\\0&-1&1\\2&4&6\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0&4\\2&-1&8\\-3&0&-12\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0&10\\0&3&-4\\1&3&6\end{pmatrix}.$$

2. Calcul de déterminants

1. Calculer les déterminants des matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix}10&3\\-4&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}3&-2\\4&5\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&-2\\-1&3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}4&4&-1\\-4&1&0\\3&7&-2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&3&-3&1\\10&-2&1&0\\1&-1&0&1\\2&3&-4&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&3&0&1&-1\\-4&0&1&0&1\\0&0&1&-1&0\\2&0&-2&3&0\\0&-1&1&0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}10&3&2&1\\0&1&-7&11\\0&0&3&11/7\\0&0&0&-2\end{pmatrix}.$$

2. Calculer les déterminants des matrices *élémentaires suivantes*, où λ est un paramètre

$$\begin{pmatrix}1&&&&&\\&1&&&&\\&&\ddots&&&\\&&&\ddots&&\\&&\lambda&&\ddots&\\&&&&&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&&\lambda&&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&&&&&&&\\&\ddots&&&&&&\\&&1&&&&&\\&&&0&1&&&\\&&&1&0&&&\\&&&&&1&&\\&&&&&&\ddots&\\&&&&&&&1\end{pmatrix}.$$

3. Algorithme de Gauss

À l'aide de l'algorithme de Gauss, calculer les déterminants des matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & 0 & -38 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Décomposition LU

Soit A la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Par la méthode du pivot de Gauß, mettre A sous la forme $L_0 \dots L_i U = A$, où U est une matrice triangulaire supérieure et $L_0, \dots, L_i$ sont des *matrices élémentaires*.
2. Par une suite de multiplications, donner une écriture $LU = A$, où L est une matrice triangulaire inférieure et U est une matrice triangulaire supérieure.
3. Calculer les déterminants de L, U et A et comparer les résultats.

5. Matrices de permutation

1. Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont des matrices de permutation ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les déterminants des matrices ci-dessus.
2. Uniquement pour les matrices de permutation, calculer la permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ qui correspond à la multiplication (à gauche) par ces matrices, et sa décomposition en cycles.
3. En vous aidant avec ce que vous savez sur les permutations, calculez les inverses des matrices de permutation.
4. Récrivez les matrices de permutation comme un produit de matrices correspondant à leur décomposition en cycles.
