Induction et récursion

Sommes

Dans les sommes suivantes, remplacer l'indice de sommation par $k = i - 1$.

1. $\sum_{i=1}^{n} i(i-1) = \frac{n(n^2-1)}{3}$.
2. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 1^i 1^j = n^2$.

Étendez les sommes de l'exercice précédent en remplaçant n par $n+1$.

Preuves sur les entiers

Démontrer par induction les propriétés suivantes.

1. Pour tout entier n, $\sum_{i=0}^{n} i = n(n+1)/2$;
2. Pour tout entier n, $7^n - 1$ est divisible par 6 ;
3. Pour tout entier n, $(n^3 - n)$ est divisible par 3 ;
4. Pour tout entier $n \geq 1$, $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$;
5. Pour tout entier n, $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
6. Pour tout entier n, $\sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Rappel : On note $n!$ et on lit « n factoriel » le produit $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$.

Prouver les inégalités suivantes.

1. $2^n < n!$ pour tout $n \geq 4$.
2. $n! < n^n$ pour tout $n > 1$.
3. L'*inégalité de Bernoulli*: $1 + nh \leq (1+h)^n$ pour tout entier n et tout nombre réel h tel que $h > 0$.

1. Suites récurrentes

Rappel : On définit les nombres de Fibonacci par la récurrence suivante :

- $F(0) = 0$,
- $F(1) = 1$,
- $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$.

Prouver les identités suivantes:

1. $\sum_{i=0}^{n} F(i) = F(n+2) - 1$ pour tout $n \geq 0$.
2. $\sum_{i=0}^{n} F(i)^2 = F(n)F(n+1)$ pour tout $n \geq 0$.
3. $F(n)^2 = F(n-1)F(n+1) + (-1)^{n+1}$ pour tout $n > 0$.
4. $1 < \frac{F(n+1)}{F(n)} < 2$ pour tout $n > 2$.

2. Définitions récursives

Donner une définition récursive des fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ suivantes :

1. $f(n) = 2^n$,
2. $f(n) = n!$.

Donner une définition récursive des propriétés suivantes :

1. n est une puissance de 10.
2. n est pair.
3. L'écriture décimale de n ne contient que des 1.

3. Combinaisons

Rappel : on note $\binom{n}{k}$, et on lit « k parmi n », le nombre de k-combinaisons de n éléments, c'est à dire le nombre de façons de choisir k éléments parmi n. La récurrence fondamentale des combinaisons dit que

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Prouver par induction (en utilisant l'égalité ci dessus) les égalités suivantes.

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
2. $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$ pour tout $0 < k \leq n$.

Suggestion : ces inductions sont plus facilement réalisées sur la variable n. Ceci correspond à prouver les égalités en remontant le triangle de Pascal ligne par ligne.

Rappel : Le triangle de Pascal est obtenu en arrangeant les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ par lignes de longueur croissante, avec la variable n qui parcourt les lignes et la variable k qui parcourt les colonnes.

$$\begin{array}{ccccc} & & \binom{0}{0} & & \\ & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & \\ \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} \end{array}$$

En utilisant le signe de sommation Σ, écrire les sommes suivantes :

1. La somme des coefficients de la n-ème ligne.
2. La somme des coefficients de la k-ème colonne.

On définit les sommes *diagonales* et *anti-diagonales* du triangle de Pascal comme suit :

- La n-ème somme diagonale est $\sum_{k\geq 0}\binom{n+k}{k}$.
- La n-ème somme anti-diagonale est $\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor}\binom{n-k}{k}$.

1. Dessiner le triangle de Pascal et, pour chaque entier n, tracer des droites passant par les coefficients qui forment les sommes diagonales. Même chose pour les sommes anti-diagonales.

Rappel : On utilisera à nouveau la récurrence fondamentale des coefficients binomiaux, qui dit en pratique que chaque coefficient du triangle de Pascal est obtenu en faisant la somme des deux coefficients immédiatement au dessus :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

1. Prouver par induction que la somme des coefficients de la n-ième ligne vaut 2^n.

Rappel : Les nombres de Fibonacci $F(n)$ sont définis par la récurrence $F(0) = 0$, $F(1) = 1$, $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$.

1. Prouver par induction que la n-ème somme anti-diagonale vaut $F(n+1)$.
