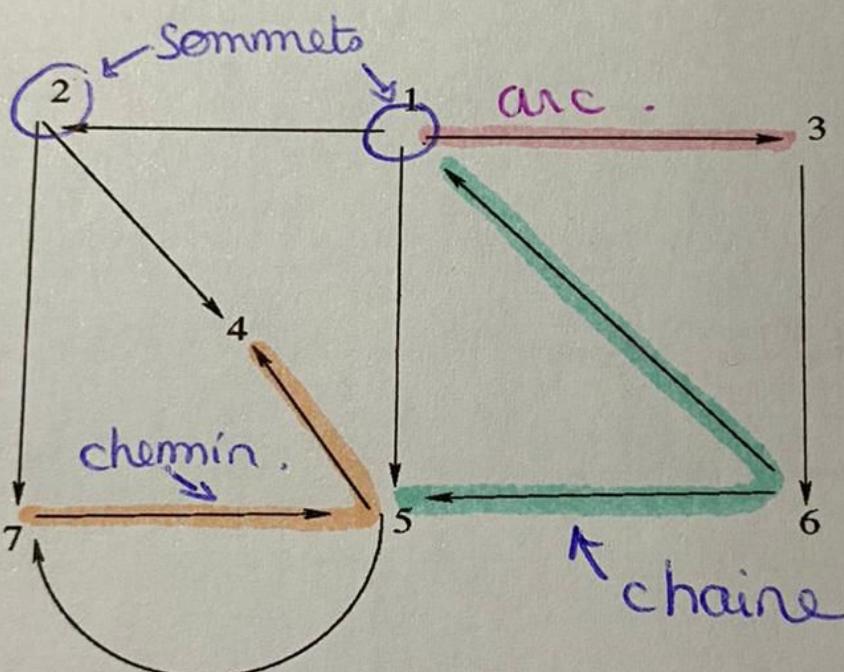
Université de Versailles - Saint Quentin

“Algorithmique de Graphes”

TD1 : Le début

remier graphe et sa représentation

suivant :



ne représentation de ce graphe *GO* (graphe orienté) sous forme matricielle.

ne autre représentation avec des listes chainées.

z les degrés entrant et sortant de chaque sommet.

lgorithme qui permet de calculer ces degrés. On considère que l’on
ion matricielle du graphe à l’aide d’une matrice *MO*. Quelle est la complexi
?

GO est-il fortement connexe ?

TD 1 : 1

I Un premier graphe et sa représentation

1)

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	1	0	1	0	0
2	0	0	0	1	0	0	1
3	0	0	0	0	0	1	0
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	1	0	0	1
6	1	0	0	0	1	0	0
7	0	0	0	0	1	0	0

on regarde les arcs sortants, les successeurs 1 si oui 0 si non

→ "Matrice creuse", bcp de mémoire inutile, bcp de 0

2) Liste chaînée sur les successeurs :

1 → 2 → 3 → 5 → NULL
2 → 4 → 7 → NULL
3 → 6 → NULL
4 → NULL
5 → 4 → 7 → NULL
6 → 1 → 5 → NULL
7 → 5 → NULL

3)

Sommets	d-	d+
1	1	3
2	1	2
3	1	1
4	2	0
5	3	2
6	1	2
7	2	1

Degré entrant : nombre de prédécesseurs (d-)
Degré sortant : nombre de successeurs (d+)

TD 1 : 4

Suite II)

3) Sequence de degrés : $(0, 1, 2, \ldots, n-2, n-1)$

Par l'absurde : supposons qu'un graphe de n sommets $(n \geq 2)$ dont tous les sommets ont des degrés différents existe.

Dans un graphe d'ordre n (de n sommets) sans boucle, le degré maximal est $n-1$.

Si tous les sommets ont un degré différent, on a la séquence de degrés suivante : $(0, 1, 2, \ldots n-2, n-1)$.

Du fait de la présence d'un sommet de degré 0, noté x_0, il est impossible d'avoir un sommet de degré $(n-1)$ (en effet, celui-ci devrait être relié à tous les autres sommets, y compris x_0, qui, lui n'a pas de voisins).

Donc, dans un graphe d'ordre n, $n \geq 2$, deux sommets au moins ont le même degré.

4) • La somme des éléments de la ligne i renvoie le degré sortant du sommet i
• La somme des éléments de la colonne j renvoie le degré entrant du sommet j.

n : nombre de sommets du graphe orienté GO

Algo 1 :

Degré (MO : matrice à 2 dimensions de taille ($n \times n$)) :
2 tableaux de taille n chacun

Variables locales : d_sortant, d_entrant : tableaux de taille n initialisés à 0.

Début

    Pour i de 0 à $n-1$
        Pour j de 0 à $n-1$
            d_sortant[i] = d_sortant[i] + MO[i][j]
            d_entrant[i] = d_entrant[i] + MO[j][i]
    renvoyer d_sortant, d_entrant

Fin.

ici on regarde la ligne i

ici on regarde la colonne i

Complexité : n^2 car on parcourt toute la matrice MO

5) Tout graphe G orienté est fortement connexe ssi pour tout couple de sommets u et v, il existe un chemin de u et v.

(graphe orienté) Chemin : suite de sommets $v_0 v_1 \dots v_n$ telle que chaque couple de sommets successifs est un arc

TD 1 : 2

5) suite

chaine : (graphe orienté et graphe non-orienté) : suite de sommets $v_0 v_1 \dots v_n$ telle que chaque paire de sommets successifs v_i, v_{i+1} est soit un arc (v_i, v_{i+1}) soit un arc (v_{i+1}, v_i)

Tout graphe G est connexe ssi pour toute paire de sommets u et v, il existe une chaine entre u et v dans G.

→ Le graphe GO n'est pas fortement connexe. Par exemple, on ne peut aller vers aucun sommet à partir du sommet 4.

6) Circuit (graphe orienté) : chemin tel que $v_0 = v_n$

Cycle : (graphe non orienté) : chaine tel que $v_0 = v_n$

→ $1 \to 3 \to 6 \to 1$: circuit le plus long possible ne (longueur 3) passant pas deux fois par le m̂ sommet de GO

7) Chemin hamiltonien : chemin qui passe une et une seule fois par chaque sommet du graphe.

Chemin eulérien : chemin qui passe une et une seule fois par chaque arc.

→ chemin hamitonien de GO est : $3 \to 6 \to 1 \to 2 \to 7 \to 5 \to 4$

TD 1 : 3

8)

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	1	0	1	1	0
2	1	0	0	1	0	0	1
3	1	0	0	0	0	1	0
4	0	1	0	0	1	0	0
5	1	0	0	1	0	1	1
6	1	0	1	0	1	0	0
7	0	1	0	0	1	0	0

MNO : matrice symétrique

9)

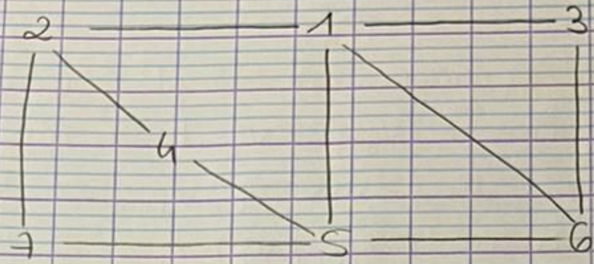
Sommets	degrés
1	4
2	3
3	2
4	2
5	4
6	3
7	2

Degré (GNO) : le nombre de sommets voisins

10) Le graphe GNO est connexe

11) $1 \to 3 \to 6 \to 5 \to 7 \to 2 \to (1)$: cycle le plus long possible ne passant pas plusieurs fois par le même sommet.

Orienté	Non orienté
arc	arrête
chemin	chaine
circuit	cycle

8) 

Dans les graphes non orientés, on parle de voisins ou de sommets adjacents et plus de successeurs / prédécesseurs.

Un graphe non orienté = un graphe orienté symétrique (une arête entre les sommets i et j dans le GNO correspond à un arc entre i et j dans le GO symétrique)

Algo 2 :

Construire_matrice_GNO (MO : matrice à deux dimension de taille n×n) : matrice à deux dimensions de taille n×n

Variable locale : MNO : matrice à deux dim de taille n×n initialisée à 0

```
Début
    Pour i de 0 à n-1
        Pour j de 0 à n-1
            Si MO[i][j] = 1
                MNO[i][j] ← 1
                MNO[j][i] ← 1
    Renvoyer MNO
Fin
```

II. Une question d'un ancien CC

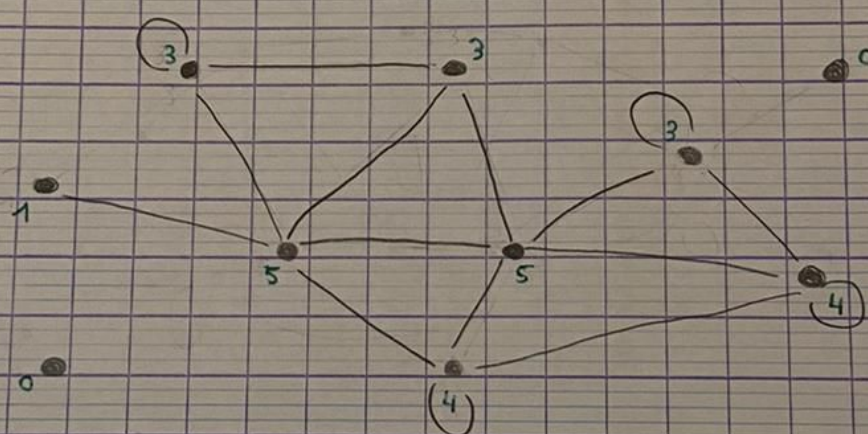
1) Séquence de degrés (0,0,1,2,2,2,6,7)

8 sommets en tout dont 2 qui sont de degré 6 et 7, et deux qui sont de degré 0 ⇒ impossible

2) Séquence de degrés (0,0,1,3,3,3,4,4,5,5)

10 sommets

Commencer par le degré le plus fort



ou