Chapitre 1 : Espace de probabilités (fiche 1)

Définition I.1 *(expérience aléatoire, univers, événement)*

1. **Expérience (ou épreuve) aléatoire** $\mathcal{E}$ *: situation qui conduit à un résultat dont on ne connaît pas le résultat à l'avance. On connaît tous les résultats possibles.*
2. **Univers (ou ensemble fondamental)** *: c'est l'ensemble de tous les résultats possibles de l'expérience* $\mathcal{E}$*. On le note* Ω.
3. **Evénement** *: c'est un sous ensemble de* Ω*, c'est à dire un ensemble de résultats possibles. Si* $\omega \in \Omega$, $\{\omega\}$ *est appelé événement élémentaire.*
4. *Deux événements* A *et* B *sont* **incompatibles** *s'ils ne peuvent pas se produire en même temps, c'est à dire* $A \cap B = \emptyset$.

Vocabulaire

Ensembliste	Probabiliste
A sous ensemble de Ω	A événément
Ω	événement certain
$\emptyset$	événement impossible
A^c complémentaire de A	événement contraire
$A \cup B$	A ou B
$A \cap B$	A et B
$A \subset B$	A entraîne B
$A \cap B = \emptyset$	A et B incompatibles

Définition I.2 *((mesure de) probabilité)*
Une probabilité $\mathbb{P}$ *est une application définie sur l'ensemble des événements à valeurs dans [0,1]*

$$\mathbb{P} : A \subset \Omega \mapsto \mathbb{P}(A) \in [0,1]$$

qui vérifie:

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- *si* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite d'événements 2 à 2 incompatibles :* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *pour* $i \neq j$*, alors*
$$\mathbb{P}(\cup_n A_n) = \sum_n \mathbb{P}(A_n).$$

On dit que $(\Omega, \mathbb{P})$ *est un espace probabilisé.*

Exemple important: Dans le cas où l'univers est **fini**, on appelle probabilité uniforme la probabilité donnée par : $\forall \omega \in \Omega, \mathbb{P}(\{w\}) = \frac{1}{\mathrm{Card}(\Omega)}$. Alors

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}.$$

On dit aussi qu'on a une situation d'équiprobabilité.

Proposition I.1 *Les propriétés suivantes sont des conséquences de la définition de* $\mathbb{P}$.

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
2. $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
3. *Si* A *et* B *sont des événements incompatibles, alors* $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
4. *Si* A *et* B *sont des événements quelconques,* $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
5. *Si* $A \subset B$*, alors* $\mathbb{P}(B \backslash A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$ *où* $B \backslash A = B \cap A^c$*. En particulier,* $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$
6. *Soit* $(A_n)_n$ *une suite d'événements, alors* $\mathbb{P}(\cup_n A_n) \leq \sum_n \mathbb{P}(A_n)$.