Décidabilité

Définitions :

Un langage est décidable s'il existe une MT qui le reconnaît

exemple MT s'arrête jamais

Un problème de décision (sortie 0 ou 1) est décidable s'il existe une MT qui le décide

De manière équivalente :
Un problème est décidable seulement si il existe du pseudo-code qui le décide.

Un langage reconnu par un AFD est décidable car on peut simuler un AFD par une MT.

Un langage non reconnu par un AFD peut être décidable.

Problème de l'arrêt :

entrée : MT M et un mot x en entrée
Indécidable
sortie : 1 si M s'arrête sur x, 0 sinon
$\Leftrightarrow L = \{\langle M\rangle \# x \mid M \text{ s'arrête sur } x\}$
où $\langle M\rangle$ est l'encodage de la MT M.

Preuve : soit $h(\langle M \rangle, x)$ la fonction précé-
dente et supposons qu'il existe une MT M_h qui calcule h sur l'entrée $\langle M \rangle \# x$, $\forall M, x$.

On considère la machine M qui sur l'entrée x :

1) Simule M_h sur l'entrée $x \# x$
2) Si M_h retourne 0 alors M s'arrête et sinon M boucle infiniment

Si $h(\langle M \rangle, \langle M \rangle)$ vaut 1 alors M s'arrête sur $\langle M \rangle$
mais M ne s'arrête pas sur $\langle M \rangle$

Si $h(\langle M \rangle, \langle M \rangle)$ vaut 0 alors M s'arrête pas sur $\langle M \rangle$
mais M s'arrête sur $\langle M \rangle$

contradiction ! donc M_h n'existe pas.

Exercice 9.1 :

$L = \{ n \geq 0 \mid n \leq 100000000 \}$
décidable car langage fini

$L = \{ x \# y \# z \mid \exists n \text{ tq. } x^n = y^n + z^n \}$

$f(x, y) \Leftrightarrow x \# y$

théorème Fermat :
Si $n \geq 2$, il n'existe pas d'entiers > 0
x, y, z tq. $x^n = y^n + z^n$

On écrit un algo qui décide ce langage:
entrées: x, y, z entiers avec $x > y$ et $x > z$
sortie: 1 si $x, y, z \in L$, 0 sinon
  si $x = y + z$ retourner 1
  si $x^2 = y^2 + z^2$ retourner 1
  retourner 0

L reconnaissable par pseudo-code et comme le pseudo-code peut être simulé par une MT alors L décidable.

Exercice 9_3 =

$L_\forall = \{ \langle M \rangle \mid \forall w \in \Sigma^*, M$ s'arrête sur entrée $w \}$

par ex. l'encodage de la MT suivante est dans $L_\forall$:

→ ACCEPT

Réduction problème de l'arrêt:
On va montrer que si on peut $L_\forall$ alors on peut décider le problème de l'arrêt.

Soit $\langle M \rangle, x$ une entrée du problème de l'arrêt.
On construit une MT M' qui sur entrée w:
1) simule M sur entrée x
2) si M s'arrête sur x alors M' s'arrête

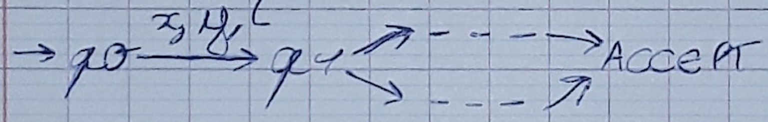
Si M s'arrête sur x alors M' s'arrête $\forall w$ sur entrée donc $\langle M \rangle \in L_\forall$

Si M ne s'arrête pas sur x alors M' ne s'arrête pas sur w donc $M' \notin L_U$.

Au final M s'arrête sur x seulement si $M' \in L_U$!
Donc décider si M s'arrête sur x peut se faire en décidant L_U, cela contredit le théorème de l'arrêt. Donc L_U indécidable.

Théorème Rice : un langage défini par l'ensemble des MT vérifiant une propriété non triviale est indécidable (pas tout le temps vraie ni fausse).

Représentation MT :



un encodage d'une MT sous forme de mot : prendre la représentation de MT.