TD 3-4 : Calcul des prédicats et preuves en arithmétique

christina.boura@uvsq.fr

5 octobre 2020

1 Modélisation du langage

1. Écrire sous forme de formules du premier ordre :

- Quelqu'un chante ;

  Soit "$C(x)$: x" chante.

  $$\exists x.C(x)$$

- Quelques musées sont gratuits ;

  Soit "$M(x)$: x est un musée" et "$G(x)$: x est gratuit."

  $$\exists x.(M(x) \wedge G(x))$$

- Tous les français aiment le fromage ;

  Soit "$F(x)$: x est français" et "$A(x)$: x aime le fromage"

  $$\forall x.(F(x) \rightarrow A(x))$$

- Aucun enfant ne déteste les glaces ;

  Soit "$E(x)$: x est un enfant" et "$G(x)$: x déteste les glaces"

  $$\neg\exists x.(E(x) \wedge G(x)) \quad \text{ou bien} \quad \forall x.(E(x) \rightarrow \neg G(x)).$$

- Il existe des livres savants et ennuyeux ;

  Soit "$L(x)$: x est un livre", "$S(x)$: x est savant" et "$E(x)$: x est ennuyeux".

  $$\exists x.(L(x) \wedge S(x) \wedge E(x))$$

- Il existe des livres savants et il existe des livres ennuyeux ;

  $$(\exists x.(L(x) \wedge S(x))) \wedge (\exists x.(L(x) \wedge E(x)))$$

- Il existe un entier naturel inférieur ou égal à tous les autres ;

  Soit "$E(x)$: x est un entier naturel" et "$I(x, y)$: x est inférieur ou égal à y".

  $$\exists x.(E(x) \wedge (\forall y.E(y) \rightarrow I(x, y)))$$

- Si quelqu'un fume, je suis gêné ;

  On note "$F(x)$: x fume", "$G(x)$: x est gêné" et soit m la constante "moi".

  $$(\exists x.F(x)) \rightarrow G(m)$$

- Si tout le monde fume, je suis gêné ;

$$(\forall x.F(x)) \to G(m)$$

- Un enseignant est heureux si tous ses étudiants aiment la logique ;

  Soit "$E(x)$: x est un enseignant", "$H(x)$: x est heureux", "$P(x,y)$: y est un étudiant de x" et $L(x)$: x aime la logique.

$$\forall x.(E(x) \wedge (\forall y.P(x,y) \to L(y)) \to H(x))$$

- Chaque ville a un employé de la fourrière qui a été mordu par chaque chien de la ville ;

  Soit "$V(x)$: x est une ville", "$E(x,y)$: x est un employé de la fourrière de la ville y", "$C(x,y)$: x est un chien de la ville y" et $M(x,y)$: x a été mordu par y.

$$\forall x.(V(x) \to ((\exists y.E(y,x) \wedge (\forall z.C(z,x) \to M(y,z)))$$

- Il existe un seul Dieu. Soit "$D(x)$: x est un dieu" et "$E(x,y)$: x est égal à y".

$$\exists x.(D(x) \wedge (\forall y.D(y) \to E(y,x)))$$

2. Traduire les phrases suivantes en formules du premier ordre en utilisant les prédicats suivants : $H(x)$: x est un homme, $M(x)$: x est un mathématicien, $F(x)$: x est fou.

   - Tous les mathématiciens sont des hommes

$$\forall x.M(x) \to H(x)$$

   - Si Luc est un mathématicien, Luc est fou

     Soit ℓ la constante *Luc*.

$$M(\ell) \to F(\ell)$$

   - Quelques mathématiciens sont fous

$$\exists x.(M(x) \wedge F(x))$$

   - Quelques mathématiciens ne sont pas fous

$$\exists x.(M(x) \wedge \neg F(x))$$

   - Aucun mathématicien n'est fou

$$\forall x.M(x) \to \neg F(x) \quad \text{ou} \quad \neg \exists x.(M(x) \wedge F(x))$$

   - Tous les hommes ne sont pas mathématiciens

$$\exists x.(H(x) \wedge \neg M(x)) \quad \text{ou} \quad \neg \forall x.(H(x) \to M(x))$$

   - Tous les hommes sont mathématiciens ou fous

$$\forall x.(H(x) \to M(x) \vee F(x))$$

3. En utilisant la *signature* $+, -, \times, =, \geq$ et les constantes numérales, traduire en langage logique les phrases suivantes.

   - Le carré de tout nombre est positif

$$\forall n.(n \times n \geq 0)$$

- n divise m ;
$$\exists k.(m = k \times n)$$
- Un nombre divisible par 8 est divisible par 2 ;
$$\forall n.(\exists k.n = 8 \times k) \rightarrow (\exists \ell.n = 2 \times \ell)$$
- Il existe un nombre pair divisible par 3 ;
$$\exists n.(\exists k.n = 2 \times k) \wedge (\exists \ell.n = 3 \times \ell)$$
- Le produit de deux nombres réels est positif si et seulement si ces deux nombres réels sont positifs ;
$$\forall n.\forall m.(n \times m \geq 0) \Leftrightarrow ((n \geq 0) \wedge (m \geq 0))$$
- Les deux seules solutions de l'équation $x^2 - 5x + 6 = 0$ sont 2 et 3 ;
$$x \times x - 5 \times x + 6 = 0 \rightarrow (x = 2) \vee (x = 3)$$
- a est l'inverse multiplicatif de b ;
$$a \times b = 1$$
- L'inverse (multiplicatif) de tout nombre est unique.
$$\forall n.(\exists m.(n \times m = 1)) \wedge ((\exists (k.n \times k = 1)) \rightarrow (k = m))$$

2 Variables libres, variables liées

Pour chacun des prédicats suivants, dessiner l'arbre de formation, indiquer les variables libres et les variables liées, puis remplacer chaque variable liée par une nouvelle variable (choisir une lettre pas encore employée).

- $P(x) \vee Q(y)$;

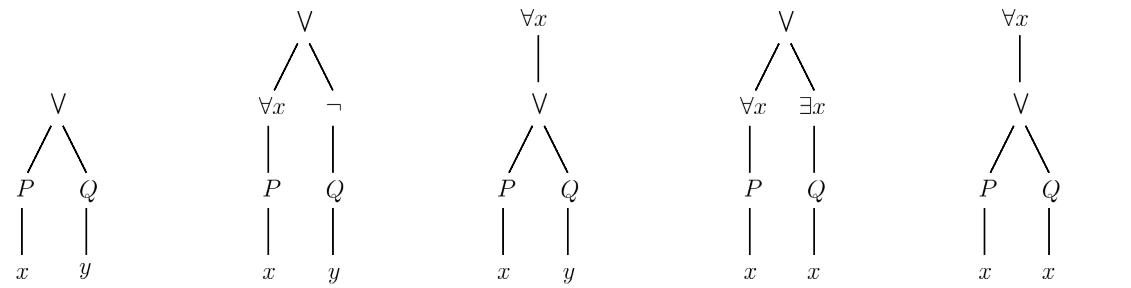
  Les deux variables x et y sont libres.
- $(\forall x.P(x)) \vee \neg Q(y)$;

  x et liée tandis que y et libre. De façon équivalente on peut écrire : $\forall z.P(z) \vee \neg Q(y)$.
- $\forall x.(P(x) \vee Q(y))$;

  x et liée tandis que y et libre. De façon équivalente on peut écrire : $\forall z.(P(z) \vee Q(y))$.
- $(\forall x.P(x)) \vee (\exists x.Q(x))$;

  x et liée tandis dans les deux apparitions. De façon équivalente on peut écrire : $(\forall y.P(y)) \vee (\exists z.Q(z))$.
- $\forall x.(P(x) \vee Q(x))$.

  x et liée. De façon équivalente on peut écrire : $\forall z.(P(z) \vee Q(z))$.



$P(x) \vee Q(y)$ $\quad$ $(\forall x.P(x)) \vee \neg Q(y)$ $\quad$ $\forall x.(P(x) \vee Q(y))$ $\quad$ $(\forall x.P(x)) \vee (\exists x.Q(x))$ $\quad$ $\forall x.(P(x) \vee Q(x))$

3 Équivalences remarquables

1. Les propositions suivantes sont-elles équivalentes ? Si non, est-ce que l'une implique l'autre ?

   - $\neg(\exists x.P(x))$ et $(\forall x.\neg P(x))$;

     Les deux formules sont **équivalentes**.

   - $(\forall x.P(x) \wedge Q(x))$ et $((\forall x.P(x)) \wedge (\forall x.Q(x)))$;

     Les deux formules sont **équivalentes**.

   - $((\forall x.P(x)) \vee (\forall x.Q(x))$ et $(\forall x.P(x) \vee Q(x))$;

     Les deux formules **ne sont pas équivalentes**.

     Contre-exemple : Domaine $= \mathbb{N}$. Soit $P(x) =$ "x est pair" et $Q(x) =$ "x est impair". On voit que la formule $(\forall x.P(x) \vee Q(x))$ est vraie, puisque tout nombre est pair ou impair. Cependant, la formule $((\forall x.P(x)) \vee (\forall x.Q(x))$ est fausse. En effet, il n'est pas vraie que tous les nombres sont pairs ou que tous les nombres sont impairs.

     La première formule implique la deuxième.

   - $(\exists x.P(x) \vee Q(x))$ et $((\exists x.P(x)) \vee (\exists x.Q(x))$;

     Les deux formules sont **équivalentes**.

   - $(\exists x.P(x) \wedge Q(x))$ et $((\exists x.P(x)) \wedge (\exists x.Q(x)))$;

     Les deux formules **ne sont pas équivalentes**.

     Contre-exemple : Domaine $= \mathbb{N}$. Soit $P(x) =$ "x est pair" et $Q(x) =$ "x est impair".

     La formule $((\exists x.P(x)) \wedge (\exists x.Q(x)))$ est vraie, car il existe un nombre pair, par exemple 2 et il existe aussi un nombre impair, par exemple 3. Cependant, la formule $(\exists x.P(x) \wedge Q(x))$ est fausse, car il n'existe pas de nombre qui soit à la fois pair et impair.

     La première formule implique la deuxième.

   - $(\exists x.\forall y.P(x,y))$ et $(\forall y.\exists x.P(x,y))$.

     Les deux formules **ne sont pas équivalentes**.

     Contre-exemple : Domaine $= \mathbb{Z}$. Soit $P(x,y)$: "$x \leq y$".

     La formule $\exists x.\forall y.x \leq y$ est fausse car il n'existe pas d'entier relatif plus petit que tous les autres. Cependant, la deuxième formule $\forall y.\exists x.x \leq y$ est vraie, car pour tout entier y on peut trouver un entier plus petit que lui, par exemple $y - 1$. Ici aussi, la première formule implique la deuxième.

2. Écrire la négation des formules suivantes :

   - $\forall x.P(x) \Rightarrow Q(x)$

     $$\neg(\forall x.P(x) \Rightarrow Q(x)) \quad \equiv \quad \exists x.\neg(P(x) \Rightarrow Q(x)) \quad \equiv \quad \exists x.\neg(\neg P(x) \vee Q(x)) \quad \equiv \quad \exists x.(P(x) \wedge \neg Q(x))$$

   - $\exists x.P(x) \wedge Q(x)$

     $$\neg(\exists x.P(x) \wedge Q(x)) \quad \equiv \quad \forall x.\neg(P(x) \wedge Q(x)) \quad \equiv \quad \forall x.(\neg P(x) \vee \neg Q(x))$$

- $\forall x.\forall y.(P(x,y) \wedge Q(x,y)) \Rightarrow R(x,y)$

$$\begin{aligned}
\neg(\forall x.\forall y.(P(x,y) \wedge Q(x,y)) \Rightarrow R(x,y)) &\equiv \exists x.\neg(\forall y.(P(x,y) \wedge Q(x,y)) \Rightarrow R(x,y)) \\
&\equiv \exists x.\exists y.\neg((P(x,y) \wedge Q(x,y)) \Rightarrow R(x,y)) \\
&\equiv \exists x.\exists y.\neg(\neg((P(x,y) \wedge Q(x,y)) \vee R(x,y)) \\
&\equiv \exists x.\exists y.\neg(\neg P(x,y) \vee \neg Q(x,y)) \vee R(x,y)) \\
&\equiv \exists x.\exists y.\neg(\neg P(x,y) \vee \neg Q(x,y) \vee R(x,y)) \\
&\equiv \exists x.\exists y.(P(x,y) \wedge Q(x,y) \wedge \neg R(x,y))
\end{aligned}$$

- $\exists x.\forall y.Q(x,y) \Rightarrow (P(x,y) \vee R(x,y))$

$$\begin{aligned}
\neg(\exists x.\forall y.Q(x,y) \Rightarrow (P(x,y) \vee R(x,y))) &\equiv \forall x.\neg(\forall y.Q(x,y) \Rightarrow (P(x,y) \vee R(x,y))) \\
&\equiv \forall x.\exists y.\neg(Q(x,y) \Rightarrow (P(x,y) \vee R(x,y))) \\
&\equiv \forall x.\exists y.\neg(\neg Q(x,y) \vee (P(x,y) \vee R(x,y))) \\
&\equiv \forall x.\exists y.(Q(x,y) \wedge \neg P(x,y) \wedge \neg R(x,y))
\end{aligned}$$

4 Un peu de sémantique

Quelle est la valeur de vérité des prédicats suivants ?

- Il n'existe pas de contre-exemple a à l'affirmation "si pour tout b le produit ab équivaut à 0, alors a vaut 0 " ;

  Formule :

  $$\forall a.(\forall b.a \times b = 0) \rightarrow (a = 0)$$

  Cette formule est vraie.

- Pour tout couple n, m d'entiers, si n est pair et m est impair, alors $1 + 1 = 2$;

  $$\forall n.\forall m.((\exists k.n = 2 \times k) \wedge (\exists k.n = 2 \times k + 1)) \rightarrow (1 + 1 = 2).$$

  Comme $1 + 1 = 2$ est toujours vrai, l'implication est vraie, donc la formule est vraie.

- $\forall a \in \mathbb{Z}.(\exists b.(a = 2b) \wedge \exists c.(a = 2c + 1)) \Rightarrow 1 + 1 = 0$;

  Comme $(\exists b.(a = 2b) \wedge \exists c.(a = 2c+1)$ est faux pour n'importe quelle valeur de a, puisque un nombre ne peut pas être à la fois pair et impair, la formule est toujours vraie.

- Si le reste de la division de a par 3 est 1, et si le reste de la division de b par 3 est 2, alors $a + b$ est divisible par 3 ;

  $$(\exists k.(a = 3 \times k + 1)) \wedge (\exists \ell.(b = 3 \times \ell + 2)) \rightarrow (\exists n.(a + b = 3 \times n))$$

  Cette formule est vraie. En effet, on a que

  $$a + b = 3k + 1 + 3\ell + 2 = 3\underbrace{(k + \ell + 1)}_{m} = 3m.$$

- L'opposé de tout nombre est unique (**suggestion :** utilisez l'absurde).

  On va montrer que la formule inverse est fausse.

  $$\exists n.(\exists m.(m + n = 0)) \wedge (\exists k.(n + k = 0)) \wedge ((m > k) \vee (m < k))$$

  Elle est fausse puisque $m + n = 0 = n + k \Rightarrow m = k$.

5 Modèles du calcul des prédicats

1. On note **A1**, **A2** et **A3** les trois formules suivantes :
   A1 : $\forall x.\exists y.y = x + 1$;
   A2 : $\exists x.\forall y.x \leq y$;
   A3 : $\forall x.\forall y.\big((x + 1 = y + 1) \Rightarrow x = y\big)$.

   - Montrer que ces trois formules sont indépendantes.

     Définition : Deux propositions sont indépendantes s'il existe un modèle qui rend vraie l'une et fausse l'autre.

     Indépendance de A1 et A2

     On considère comme domaine $\mathbb{Z}$ avec les opérateurs usuels. La formule **A1** est vraie, car pour tout entier x, l'entier $x + 1$ existe toujours. Mais la formule **A2** est fausse car l'ensemble $\mathbb{Z}$ n'est pas borné, donc il n'existe pas un entier relatif inférieur à tous les autres.

     Indépendance de A2 et A3

     On considère à nouveau le domaine $\mathbb{Z}$ avec les opérateurs usuels. La formule **A2** est fausse comme on vient de le voir, mais la formule **A3** est vraie.

     Indépendance de A1 et A3

     On considère le domaine $(-\infty, 0)$, c.-à-d. les nombres réels négatifs. La formule **A3** est vraie, mais la formule **A1** est fausse. En effet, par exemple pour $x = -0.5$, le nombre $x + 1 = 0.5$ ne fait pas partie du domaine.

   - Donner trois modèles très différents vérifiant ces trois formules.

     (a) Le domaine $\mathbb{N}$ avec les interprétations usuelles.
     (b) Le domaine $\mathbb{Z}$ et $x \leq y$ interprété comme $|x| \leq |y|$.
     (c) Le domaine $\mathcal{M}^{n\times n}(\mathbb{N})$ des matrices carrées $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{N}$. La constante 1 doit être interprétée comme la matrice identité et $A \leq B$ comme $a_{1,1} \leq b_{1,1}$, où $a_{1,1}$ est le coefficient de la matrice A à l'intersection de la première ligne et la première colonne de A (pareil pour $b_{1,1}$).

2. Donner des contre-exemples pour montrer que les formules suivantes ne sont pas toujours vraies :

   - $\big(\forall x.\exists y.A(x, y)\big) \Rightarrow \exists y.A(y, y)$

     On considère comme domaine $\mathbb{N}$ et on interprète $A(x, y)$ comme $x < y$. La formule se lit comme :

     $$\big(\forall x.\exists y.x < y\big) \Rightarrow \exists y.y < y.$$

     Avec cette interprétation $(\forall x.\exists y.x < y)$ est vraie mais $(\exists y.y < y)$ est fausse. Donc $1 \to 0$ et par conséquent la formule est fausse.

   - $\big(\exists x.\exists y.A(x, y)\big) \Rightarrow \exists y.A(y, y)$

     On utilise le même domaine et la même interpétation que toute à l'heure. Le côté gauche de l'implication est vrai (par exemple $x = 3$ et $y = 4$) mais le côté droit est faux.

   - $\big((\exists x.A(x)) \Leftrightarrow (\exists x.B(x))\big) \Rightarrow \forall x.(A(x) \Leftrightarrow B(x))$

     On considère comme domaine $\mathbb{N}$ et on note $A(x)$: "x est pair" et $B(x)$: "x est impair".

     On a $\exists x.A(x)$ est vrai, $\exists x.B(x)$ est vrai. Donc $(\exists x.A(x)) \Leftrightarrow (\exists x.B(x))$ est vrai. Par contre $\forall x.(A(x) \Leftrightarrow B(x))$ est faux, car un nombre ne peut pas être à la fois pair et impair. Donc on a $1 \to 0$ et la formule est fausse.

- $\big(\exists x.A(x) \Rightarrow B(x)\big) \Rightarrow \big((\exists x.A(x)) \Rightarrow (\exists x.B(x))\big)$.

  On considère comme domaine $\mathbb{Z}$ et on interprète $A(x)$ comme "x est pair" et $B(x)$ comme $x^2 = -1$.

  On a donc $(\exists x.A(x))$ est vrai, $(\exists x.B(x))$ est faux, donc $(\exists x.A(x)) \Rightarrow (\exists x.B(x))$ est faux.

  De l'autre côté, pour $x = 3$, $A(x)$ et $B(x)$ est faux, donc $A(x) \Rightarrow B(x)$ est vrai. Donc, $(\exists x.A(x) \Rightarrow B(x))$ est vrai (notamment pour $x = 3$). Comme la partie gauche de l'implication est vraie et la partie droite est fausse, la formule est fausse.

3. Déterminer si les formules suivantes sont toujours vraies :

   - $\big((\exists x.A(x)) \Rightarrow (\exists x.B(x))\big) \Rightarrow \big(\exists x.A(x) \Rightarrow B(x)\big)$;

     On considère comme domaine $\mathbb{N}$ et on note $A(x)$: "x est pair" et $B(x)$: "x est impair".

     Avec cette interprétation, la partie gauche de l'implication est vraie et la partie droite est fausse, donc la formule est fausse.

   - $\neg\big(\exists y.\forall x.A(x,y) \Leftrightarrow \neg A(x,x)\big)$;

     Si un tel y existait, alors pour $x = y$ on aurait $A(x,x) \Leftrightarrow \neg A(x,x)$ ce qui est toujours faux. Alors un tel y ne peut pas exister et la formule est donc vraie.

   - $\big(\forall x.\exists y.A(x,y) \Rightarrow B(x,y)\big) \Leftrightarrow \big(\forall x.\exists y.\neg A(x,y) \vee B(x,y)\big)$.

     Puisque $A(x,y) \Rightarrow B(x,y) \equiv \neg A(x,y) \vee B(x,y)$ la formule est toujours vraie.