Chapitre 3 : variables aléatoires

Définitions
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilités.
• Une *variable aléatoire réelle* (v.a.r.) est une application ("mesurable")

$$X : \omega \in \Omega \mapsto X(\omega) \in \mathbb{R}.$$

• On appelle *espace d'états* l'image $X(\Omega)$ de Ω par X, autrement dit l'ensemble des valeurs prises par X. Si l'espace d'états est fini ou dénombrable, on dit que X est une v.a. *discrète*.
• *Loi image de* X: Si X a pour espace d'états E, on appelle loi de X, noté $\mathbb{P}_X$ l'application définie sur les parties de E par :

$$\mathbb{P}_X : B \subset E \mapsto \mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B).$$

Alors $\mathbb{P}_X$ est une probabilité sur E.
Remarque : On utilise les conventions de notation suivantes : $\{X \in B\} = \{w \in \Omega, X(w) \in B\}$ et $\mathbb{P}(X \in B) := \mathbb{P}(\{X \in B\})$.

Variables aléatoires discrètes
Soit X est une v.a. discrète prenant les valeurs $\{x_k, k \in I\}$, I fini ou dénombrable. Définir $\mathbb{P}_X$ revient à donner les probabilités $p_k = \mathbb{P}(X = x_k) = \mathbb{P}_X(\{x_k\})$.

1) Exemples de lois discrètes:
Loi de Bernoulli, $\mathcal{B}(p)$, $0 < p < 1$:

$$p_0 := \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p, \; p_1 = \mathbb{P}(X = 1) = p;$$

Loi binomiale, $\mathcal{B}(n; p)$, $n \in^*$, $0 < p < 1$:

$$0 \leq k \leq n, \, p_k = \mathbb{P}(X = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k};$$

Loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$**,** $\mathcal{G}_{\mathbb{N}^*}(p)$, $0 < p < 1$:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \; p_k = \mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^k;$$

Loi géométrique sur $\mathbb{N}$**,** $\mathcal{G}_{\mathbb{N}}(p)$, $0 < p < 1$:

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \; p_k = \mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1};$$

Loi de Poisson, $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \; p_k = \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

2) Espérance, variance:
L'*espérance* de la v.a. discrète X est donnée par :

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in I} x_k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k \in I} x_k p_k}$$

lorsque la série est absolument convergente.
La *variance* de la v.a. discrète X est donnée par :

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2}$$

où pour une fonction f,

$$\boxed{\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{k \in I} f(x_k) \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k \in I} f(x_k) p_k}$$

lorsque la série est absolument convergente.