TD4 : Variables aléatoires à densité

Exercice 1 : Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$.

1. Déterminer la loi de $1-U$.
2. Quelle la loi de la variable aléatoire $X=\sqrt{U}$? celle de $Y=U^2$?

Exercice 2 Soit X une v.a.r. de loi uniforme sur l'intervalle $[-1,1]$. Déterminez la loi de $Y=|X|$, puis la loi de $Z=X^2$.

Exercice 3 On dispose d'un lot d'ampoules électriques, toutes de fabrication identique. On suppose que la durée de vie (exprimé en heures) de chaque ampoule est une variable aléatoire de loi exponentielle $\mathcal{E}(\mu)$. Pour les applications numériques on prendra $\mu=0.001$ et $T=200$.

a) Calculer la durée de vie moyenne de chaque ampoule $\mathbb{E}X$, ainsi que la variance de X.

b) Quelle est la probabilité qu'une ampoule s'éteigne avant un temps T de fonctionnement ? Utiliser l'expression obtenue pour calculer ces probabilités pour $T=200$.

c) On branche 2 ampoules simultanément à un instant noté 0. Quelles sont les probabilités qu'à un instant T :
c_1 : les deux ampoules soient encore allumées ?
c_2 : au moins l'une des deux ampoules soit encore allumée ?
c_3 : les deux ampoules sont éteintes ?

d) On branche 10 ampoules simultanément. Quelles sont les probabilités qu'à un instant T : toutes les ampoules soient encore en vie ? toutes les ampoules soient éteintes ?

Exercice 4
I. Soit $X\sim\mathcal{N}(0,1)$. Calculer son moment d'ordre 4, c'est à dire $\mathbb{E}(X^4)$.
2. On pose $Y=\sigma X+m$, où $m\in\mathbb{R}$, $\sigma>0$. Montrer que Y suit une loi $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$. En déduire $\mathbb{E}(X)$ et la variance de X.
Remarque : *Cette propriété de la loi gaussienne est très importante, elle permet d'exprimer la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ en fonction de la fonction de répartition Φ de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.*

Exercice 5 Un tube électronique a une durée de vie qui, exprimée en heures est une variable aléatoire X suivant une loi normale $\mathcal{N}(160,30^2)$.

1) Trouver la valeur de $p=\mathbb{P}(X\geq 200)$.
2) Trouver réels c et d vérifiant $\mathbb{P}(X\leq c)\geq 0.95$; $\mathbb{P}(X\geq d)\geq 0.8$.
3) Calculer la probabilité conditionnelle $q=\mathbb{P}(X\geq 200|X\geq 160)$. Comparer p et q.

Exercice 6 Une machine destinée à remplir automatiquement des boîtes de sucre en poudre est telle que le poids du sucre mis dans une boîte et exprimé en kilos est une variable aléatoire X suivant une loi normale $\mathcal{N}(a,\sigma^2)$. On désire que le poids du sucre contenu dans une boîte dépasse $980g=0.98kg$ avec une probabilité supérieure à 99%.

1. Lorsque $\sigma=0.01kg$, quelle valeur faut-il donner à a ?
2. Lorsque $a=1$, quelle valeur maximale faut-il donner à σ ?

Exercice 7 *La station-service*
Dans une station-service, la demande hebdomadaire en essence, en millier de litres, est une variable aléatoire X de densité $f(x)=c(1-x)^4 I_{[0,1]}(x)$.

1) Déterminer c.

2) La station est réapprivisionnée chaque lundi à 20h. Quelle doit être la capacité du réservoir d'essence pour que la probabilité d'épuise ce réservoir soit inférieure à 10^{-5} ?

Exercice 8 *Loi log-normale*
Véronique vend des cuisines intégrées par téléphone. Soit T la durée d'une communication téléphonique de Véronique. La variable $X=\ln T$ suit une loi normale $\mathcal{N}(a,\sigma^2)$.

1) Exprimer la fonction de répartition $F_T(t)$ de T en fonction de a et σ^2 et de la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite.

2) En déduire la densité de probabilité de T.