TD 12 : Inversion de matrices

christina.boura@uvsq.fr

7 décembre 2020

1 Formules de Cramer

Calculer à l'aide des formules de Cramer la solution des systèmes linéaires suivants.

1.

$$\begin{cases} 3x & +y & -4z & = 12 \\ & 2y & -z & = -1 \\ & & 3z & = 6 \end{cases}$$

On a $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$. On calcule $\det(A) = 3 \cdot 2 \cdot 3 = 18 \neq 0$.

On calcule les solutions x, y, z :

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} 12 & 1 & -4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}}{18} = \frac{6(-1+8)+3(24+1)}{18} = \frac{6 \cdot 7 + 3 \cdot 25}{18} = \frac{2 \cdot 7 + 25}{6} = \frac{39}{6} = \frac{13}{2}.$$

$$y = \frac{\det\begin{pmatrix} 3 & 12 & -4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}}{18} = \frac{3(-3+6)}{18} = \frac{3 \cdot 3}{18} = \frac{1}{2}.$$

$$z = \frac{\det\begin{pmatrix} 3 & 1 & 12 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}}{18} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 6}{18} = 2.$$

2.

$$\begin{cases} x & +y & +z & = 0 \\ 2x & +7y & -2z & = -1 \\ -x & -y & +z & = 0 \end{cases}$$

On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On calcule $\det(A) = 1 \cdot (7-2) - 2(1+1) - (-2-7) = 5 - 4 + 9 = 10 \neq 0$.

On calcule les solutions x, y, z :

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

$$y = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{10} = \frac{-(1+1)}{10} = -\frac{1}{5}$$

$$z = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}{10} = \frac{-1+1}{10} = 0.$$

3.

$$\begin{cases} x & & +2z & = 3 \\ x & +y & -z & = -1 \\ x & +2y & +3z & = 0 \end{cases}$$

On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On calcule $\det(A) = 1 \cdot (3+2) + 2(2-1) = 5 + 2 = 7 \neq 0$.

On calcule les solutions x, y, z :

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}}{7} = \frac{3(3+2)+(-4)}{7} = \frac{15-4}{7} = \frac{11}{7}$$

$$y = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}}{7} = \frac{(-3+2)+3(-1-3))}{7} = -\frac{-1-12}{5} = -\frac{13}{7}$$

$$z = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}}{7} = \frac{2+3(2-1)}{7} = \frac{5}{7}.$$

Calculer à l'aide des formules de Cramer l'inverse des matrices suivantes

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

   On calcule la commatrice de A : ComA $= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. On calcule également $\det(A) = -2 \neq 0$, la matrice est donc inversible.
   On obtient directement

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{ComA}^t = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 & -1 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -1 \\ -4 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & -2 \end{pmatrix}$

On calcule $\det(A) = -\det \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} - 2\det \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = 31 - 40 = -9 \neq 0.$

$$\det(A_{11}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} = -2$$
$$\det(A_{12}) = \det \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = 8$$
$$\det(A_{13}) = \det \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = -31$$
$$\det(A_{21}) = \det \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} = -1$$
$$\det(A_{22}) = \det \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = -5$$
$$\det(A_{23}) = \det \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = 16$$
$$\det(A_{31}) = \det \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$$
$$\det(A_{32}) = \det \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = -4$$
$$\det(A_{33}) = \det \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = 20$$

On a donc ComA $= \begin{pmatrix} -2 & -8 & -31 \\ 1 & -5 & -16 \\ 1 & 4 & 20 \end{pmatrix}$ et ComA$^t = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -8 & -5 & 4 \\ -31 & -16 & 20 \end{pmatrix}$.

Par conséquent,

$$A^{-1} = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -8 & -5 & 4 \\ -31 & -16 & 20 \end{pmatrix}.$$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On calcule $\det(A) = -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0.$

$$\det(A_{11}) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -1$$

$$\det(A_{12}) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\det(A_{13}) = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\det(A_{14}) = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\det(A_{21}) = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\det(A_{22}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\det(A_{23}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\det(A_{24}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\det(A_{31}) = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\det(A_{32}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\det(A_{33}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\det(A_{34}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\det(A_{41}) = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\det(A_{42}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\det(A_{43}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\det(A_{44}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$$

Par conséquent,

$$\mathrm{Com}A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ \mathrm{Com}A^t = \mathrm{Com}A \text{ et donc } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2 Méthode de Gauss-Jordan

Calculer par la méthode de Gauss-Jordan l'inverse des matrices suivantes La méthodologie est partout la même. On forme la matrice $(A|I)$, on applique des opérations élémentaires sur les lignes de cette nouvelle matrice jusqu'à obtenir une matrice sous la forme $(I|B)$. On sait alors que $B = A^{-1}$.

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

   On forme $(A|I)$ et on lui applique des opérations élémentaires sur les lignes.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \leftarrow (-1/2)L_2]{L_1 \leftarrow (-1)L_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3/2 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \end{array}\right)$$

   On a donc que $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3/2 & -1 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -1 \\ -4 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & -2 \end{pmatrix}$

   On forme $(A|I)$ et on lui applique des opérations élémentaires sur les lignes.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow 4L_3]{L_1 \leftarrow 3L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 12 & 12 & -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 12 & 28 & -8 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 12 & 12 & -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 16 & -5 & -3 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow (1/3)L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 16 & -5 & -3 & 0 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \leftarrow 16L_2]{L_3 \leftarrow 5L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 80 & -16 & 16 & 16 & 0 \\ 0 & 80 & -25 & -15 & 0 & 20 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 80 & -16 & 16 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & -31 & -16 & 20 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow (-1/9)L_3]{L_2 \leftarrow (1/16)L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 31/9 & 16/9 & -20/9 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 + L_3]{L_2 \leftarrow L_2 + L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 4 & 0 & 40/9 & 16/9 & -20/9 \\ 0 & 5 & 0 & 40/9 & 25/9 & -20/9 \\ 0 & 0 & 1 & 31/9 & 16/9 & -20/9 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \leftarrow (1/5)L_2]{L_1 \leftarrow (1/4)L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 10/9 & 4/9 & -5/9 \\ 0 & 1 & 0 & 8/9 & 5/9 & -4/9 \\ 0 & 0 & 1 & 31/9 & 16/9 & -20/9 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/9 & -1/9 & -1/9 \\ 0 & 1 & 0 & 8/9 & 5/9 & -4/9 \\ 0 & 0 & 1 & 31/9 & 16/9 & -20/9 \end{array}\right).$$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   On forme $(A|I)$ et on lui applique des opérations élémentaires sur les lignes.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

On a donc que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

   On forme $(A|I)$ et on lui applique des opérations élémentaires sur les lignes.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + L_1, L_3 \leftarrow L_3 + L_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_4 \leftrightarrow L_4 - 2L_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 + L_3]{L_1 \leftarrow L_1 + L_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 4 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_1 - 2L_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -6 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

   On a donc que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.