

IN310 - Mathématiques pour l'informatique
3^{ème} contrôle continu 2020-2021

Durée : 1h10.

Les documents sont autorisés. Pas de calculatrices. Pas d'ordinateur. Pas de téléphone.

IMPORTANT : Pensez à noter votre numéro de groupe sur votre copie.

Barème : 25 points (5 points par exercice)

Question 1

Soit la relation \mathcal{R} sur \mathbb{R} définie comme

$$x\mathcal{R}y \text{ si et seulement si } x - y \in \mathbb{Z},$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

- (a) Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence sur \mathbb{R} .
- (b) Décrire la classe d'équivalence de 1.
- (c) Décrire la classe d'équivalence de 2, 2.

Question 2

1. Soient a, b et m trois entiers avec $m \geq 2$. Montrer par induction que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 1$,

$$\text{si } a \equiv b \pmod{m} \text{ alors } a^n \equiv b^n \pmod{m}.$$

2. Calculer $3^9 \pmod{6}$ et $5^{13} \pmod{9}$.

Question 3

Les matrices suivantes sont elles inversibles ?

$$\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Question 4

Calculer l'inverse de la matrice suivante par la méthode de Gauss.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Question 5

On se fixe un réel c , avec $c \neq 3$. Calculer une solution du système linéaire suivant en fonction de c par la méthode de Cramer.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & c \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$