Logique mathématique

Son étude remonte à la fin du XIXème siècle, avec les travaux de Boole, De Morgan et Frege; mais le grand essor de la logique a eu lieu au tournant du XXème siècle, grâce aux travaux de Hilbert, Russel, Whitehead et puis Gödel.

Théories formelles

Le concept de *théorie formelle* est né au début du XXe siècle, lorsque les mathématiciens ont commencé à s'interroger sur le fondement des Mathématiques.

De façon générale, un *système formel* est une modélisation du langage du mathématicien, ou plus souvent d'une petite partie de celui-ci. Sa *théorie formelle* est l'ensemble de règles qui dictent quelles sont les façons possibles de manipuler les objets du système. Un système formel est en général composé d'une liste de **symboles**, d'une **syntaxe** qui dicte quelles sont les façons admissibles de combiner les symboles, et d'une **sémantique** ou **interprétation** qui détermine la façon dont les symboles doivent être interprétés par des objets mathématiques abstraits. Ces trois composants sont bien indépendants, et il est courant d'obtenir des théories formelles légèrement différentes en changeant tel ou tel détail de la sémantique ou de la syntaxe, par exemple. On appelle **formule** toute suite de symboles qui respecte les règles de la syntaxe.

Les systèmes de numération et les *expressions arithmétiques* sont des exemples de systèmes formels très simples. Par exemple, le système de numération en base cinq, est constitué des éléments suivants.

- Les symboles : 0, 1, 2, 3 et 4.
- Une seule règle de syntaxe : les symboles peuvent être juxtaposés pour former pour former un nombre, pourvu qu'on ne commence pas par le symbole 0. Ex. : 1234 est admissible, mais 0023 ne l'est pas.
- L'interprétation usuelle qui associe à une suite de chiffre le nombre correspondant. Ex. : à 123 il est associé le nombre **trente-huit**.

Comme dit plus haut, ces trois éléments sont indépendants : en changeant la liste des symboles et la sémantique, on obtient un système de numération différent, où à 123 sera associé un nombre différent, par exemple **cent-vingt-trois**.

Le système des expressions arithmétiques est obtenu à partir d'un système de numération en ajoutant les éléments suivants.

- Les symboles : $+, -, \times, \div, \mod, =, (,)$.
- Les règles de formation usuelle qui disent qu'il est correct d'écrire $123 + 345 = 678$, mais qu'il est incorrect d'écrire $12 + +45-($.
- L'interprétation usuelle qui à + associe le concept d'addition, à - celui de soustraction, etc.

Il est important de remarquer que la syntaxe est complétement ignorante de l'interprétation des formules, et qu'en particulier elle ne dit rien de la vérité ou de la fausseté de celles-ci. Par exemple, la formule $1 + 1 = 3$ est **syntaxiquement correcte**, tout en étant fausse dans toutes les interprétations possibles.

À nouveau, en changeant la base du système de numération sous-jaceant, on change l'interprétation des formules sans toucher à la syntaxe. Ainsi $5 + 5 = 10$ sera vrai en base dix, mais faux en base six.

Note : La frontière entre la syntaxe et la sémantique peut être floue. Par exemple, puisque les quatre opérations sont des procédés *algorithmiques*, il serait possible d'inclure les règles de l'addition, de la soustraction, etc. dans la syntaxe, en interdisant ainsi d'écrire des égalités fausses. Ce choix n'est en général pas le bon, car une théorie formelle sert justement à étudier la vérité et la fausseté des formules.

Le Calcul des proposition et le Calcul des prédicats sont d'autres exemples plus avancés (et plus intéressants) de systèmes formels.

Du bon usage des parenthèses

Les parenthèses $(,)$ jouent un rôle fondamental dans beaucoup de théories formelles, où elles sont normalement utilisées pour indiquer l'ordre d'application des opérateurs. Par exemple, il est bien connu que dans la théorie des expressions

$$(1 + 2) \times 3$$

et

$$1 + (2 \times 3)$$

sont des formules syntaxiquement et sémantiquement différentes. Pour compliquer les choses, il est bien connu que

$$1 + 2 \times 3$$

est équivalent à la deuxième formule ci-dessus. Mais cette équivalence, se situe-t-elle au niveau syntaxique, ou bien au niveau sémantique ? C'est à dire, s'agit-il de la même formule écrite de deux façons différentes, ou bien s'agit-il de deux formules différentes ayant la même interprétation ?

Différents auteurs appliquent des conventions différentes. Telle que nous l'avons présentée plus haut, la théorie des expressions inclut les parenthèses parmi ses symboles. Les trois formules sont donc syntaxiquement différentes, et leur équivalence n'a de sens qu'au niveau de la syntaxe.

Cependant dans le reste du wiki nous allons adopter une convention plus souple, qui délègue au niveau de la syntaxe ce genre d'équivalences. En gros, nous allons imposer que toute formule soit écrite avec le plus de parenthèses possibles.

Nous allons éliminer les parenthèses de la liste des symboles du système, et nous allons supposer que toute formule nous est donnée implicitement avec son **arbre de formation**, c'est à dire avec la liste des règles syntaxiques nécessaires pour la former. Ceci est analogue à la façon dont les compilateurs des langages de programmation interprètent les programmes (une technique appelée *syntax driven analysis*).

Par exemple, la règle syntaxique concernant le symbole + nous dit que si A et B sont deux formules, alors $A+B$ est aussi une formule. En utilisant deux fois cette règle, on peut former, par exemple, les deux formules

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & + & 1 & + & 1 \\
 & & & \swarrow & & \searrow & \\
 & 1+1 & & & & & 1 \\
 & \swarrow\searrow & & & & & \\
1 & & 1 & & & &
\end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & + & 1 & + & 1 & & \\
 & \swarrow & & \searrow & & & \\
1 & & & & & 1+1 & \\
 & & & & & \swarrow\searrow & \\
 & & & & 1 & & 1
\end{array}$$

Il est pratique de représenter les deux formules ci-dessus par $(1+1)+1$ et $1+(1+1)$ respectivement, mais dans ce cas le parenthèses ne font plus partie des symboles admissibles : elles sont là pour mettre en évidence la structure syntaxique des formules.

Cependant, il est souvent fastidieux et peu intéressant de noter toutes les parenthèses. Par exemple nous avons maintenant deux façons d'écrire le nombre 123, à savoir $(12)3$ et $1(23)$. Puisque notre sémantique ne fait pas de distinction entre les deux arbres de formation, nous ne noterons pas les parenthèses dans ce cas.

Une autre convention adoptée souvent pour réduire le nombre de parenthèses consiste à assigner une *priorité* par défaut aux opérateurs. Ainsi il est bien connu que la formule $1+2\times 3$ est à lire comme $1+(2\times 3)$ et non pas comme $(1+2)\times 3$. De la même façon, la syntaxe peut être utilisée pour interdire une formule comme $(1+2=3)\times 4$ et d'autre formules qu'on n'a pas envie de considérer au niveau de la sémantique.

Pour tous ces détails, nous allons faire appel à l'intuition et au bon sens du lecteur. Une étude détaillée de la syntaxe des systèmes (ou langages) formels sera abordée dans d'autres cours, lorsque le concept de *grammaire régulière* sera introduit.

Syntaxe, sémantique, métalogique

Voir Calcul des propositions, Calcul des prédicats.

Théorie de la preuve

Voir Théorie de la preuve.

Théories axiomatiques

Système de Peano

Système de Zermelo-Fraenkel

Théorèmes d'incomplétude de Gödel