Feuille n^o 3 : Variables aléatoires discrètes

Exercice 1 :

Un panier contient 4 pommes dont une de type Muchos Delicios qu'un singe aime par dessus tout. Le singe met la main dans le panier (sans regarder) pour prendre une pomme, sans remise, et on note X le nombre d'essais qui lui ont été nécessaires pour récupérer sa pomme préférée.

1. Quel est l'espace d'état de X ? Déterminer la loi de X.
2. Même question si on remet la pomme piochée dans le panier à chaque fois.

Exercice 2 :

Trois lemmings arrivent à la fin de leur grand voyage, et ont respectivement (et indépendamment) une chance sur deux, une chance sur trois et une chance sur quatre de survivre à la grande migration dans les steppes glacées. Déterminer la loi du nombre N de lemmings survivants.

Exercice 3 :

On considère l'expérience consistant à lancer un dé à 6 faces équilibré et à noter $X = -1$ si le résultat est 1 ou 2, $X = 0$ si le résultat est 3, $X = 2$ si le résultat est 4, 5 ou 6.

1. Déterminer les éléments suivants : l'espace d'état de X, la loi de X, $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}ar(X)$.
2. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de $Y = X^2$.

Exercice 4 :

On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé équilibré à 6 faces.

1. Préciser la loi de la variable aléatoire X, égale au nombre de fois où le chiffre 6 est apparu au cours de 100 lancers.
2. Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.
3. Soit $Y = X/100$. Calculer l'espérance et la variance de Y.

Exercice 5 :

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur l'ensemble $\{0, 1\}$. Déterminer la loi, l'espérance et la variance des variables $Y = X_1 + X_2$ et $Z = (X_1 - X_2)^2$.

Exercice 6 :

Un texte imprimé comporte $N = 10$ erreurs typographiques. Lors de la relecture, un correcteur détecte une erreur avec probabilité 3/4. La détection des différentes erreurs sont supposées indépendantes.

1. On relit le texte une fois. Soit X le nombre d'erreurs non détectées.
   (a) Quelle est la loi de X ?
   (b) Calculer $\mathbb{P}(X = 0)$, $\mathbb{P}(X = 1)$, $\mathbb{P}(X = 2)$ et $\mathbb{P}(X = 10)$.
   (c) Calculer $\mathbb{P}(X \geq 1)$ et $\mathbb{P}(X \geq 2)$, puis la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(X \geq 2 \,|\, X \geq 1)$.
   (d) Déterminer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}ar(X)$.
2. On suppose maintenant que le texte est soumis à deux relectures indépendantes. Soit Y_k la variable aléatoire telle que $Y_k = 1$ si la k-ième faute n'est pas détectée après les deux relectures et $Y_k = 0$ si l'erreur est détectée.
   (a) Calculer $\mathbb{P}(Y_k = 1)$.
   (b) Déterminer la loi et l'espérance de la somme $Y = Y_1 + \ldots + Y_{10}$.

Exercice 7 :

Montrer qu'une loi géométrique est une loi sans mémoire, c'est à dire si X est une variable aléatoire géométrique de paramètre p, alors pour tout entiers m et n,

$$\mathbb{P}(X > m + n | X > m) = \mathbb{P}(X > n).$$

Exercice 8 :

Soient X et Y deux variables indépendantes de lois géométriques (sur $\mathbb{N}$) de paramètres respectifs p et q. On définit la variable aléatoire

$$Z \ = \ \min\{\, X \,, Y \,\}.$$

Déterminer la loi de Z.

Exercice 9 :

Pour se rendre à son travail, une personne passe par une station de métro par laquelle passent deux lignes différentes mais menant toutes deux à son travail. Pour la première ligne, le trajet dure 11 minutes mais le temps d'attente est une v.a. de loi géométrique sur $\mathbb{N}$ d'espérance 2 mn, tandis que pour la seconde ligne, le trajet dure 9 minutes mais le temps d'attente est de loi géométrique d'espérance 3 mn. Les temps d'attente sont considérés (être des variables aléatoires) indépendant(e)s.

1. Refaire le calcul de l'espérance d'une loi géométrique sur $\mathbb{N}$ et en déduire les paramètres des deux lois géométriques de cet exercice.
2. Quelle est la probabilité que le métro de la première ligne ne soit toujours pas arrivé au bout de 5 mn ?
3. Quelle est la probabilité qu'aucun des deux métros ne soit arrivé au bout de 5 mn ?
4. Laquelle des deux lignes vaut-il mieux prendre, si le critère est le temps moyen entre l'arrivée de la personne à cette station de métro et son arrivée au travail ? Même question si le critère est la probabilité que le temps entre l'arrivée à la station et l'arrivée au travail dépasse 20 minutes.

Exercice 10 :

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{B}(p)$ et $\mathcal{P}(\lambda)$. On définit alors la variable aléatoire U de la manière suivante :

$$U = \begin{cases} 0 & \text{si } X = 0, \\ Y & \text{si } X = 1. \end{cases}$$

Donner la loi de U ainsi que son espérance et sa variance.

(Ces lois sont utiles dans de nombreux domaines, ce sont des zero-inflated Poisson random variables *: elles sont un peu comme des lois de Poisson, mais sans avoir leur espérance égale à leur variance.)*

Exercice 11 :

On considère X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois binomiales respectives $\mathcal{B}(n, p)$ et $\mathcal{B}(m, p)$.

1. Déterminer la loi de $X + Y$ en se servant de la description du schéma binomial.
2. Déterminer la loi de X sachant que $X + Y = N$, pour des valeurs de N à préciser.