

Les Arbres

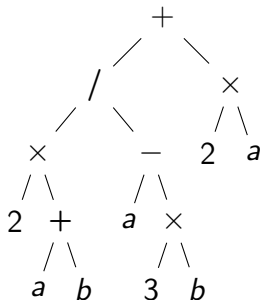
Sandrine Vial
`sandrine.vial@uvsq.fr`

Novembre 2020

Les arbres

Une des structures les plus importantes et les plus utilisées en informatique

- ▶ Arbres généalogiques
- ▶ Arbres de classification
- ▶ Arbres d'expression



Représentation de l'expression

$$(2 \times (a + b)) / (a - 3 \times b) + 2 \times a$$

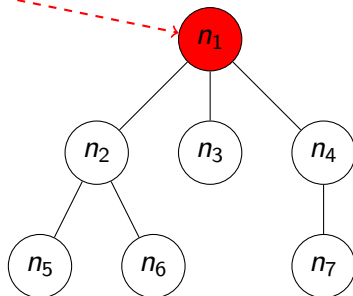
Terminologie

- ▶ Un **arbre** : un ensemble de nœuds reliés entre eux par des arêtes.
- ▶ Trois propriétés pour les arbres **enracinés** :
 1. Il existe un nœud particulier nommé **racine**. Tout nœud c autre que la racine est relié par une arête à un nœud p appelé **père** de c .
 2. Un arbre est **connexe**.
 3. Un arbre est **sans cycle**.

Terminologie

- Un nœud peut avoir 0 ou plusieurs fils.
- Un nœud a exactement un père.

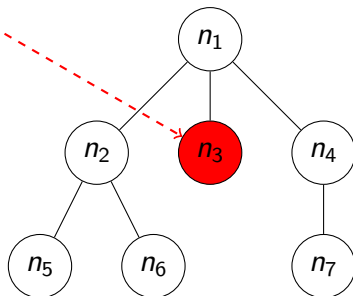
La racine



Terminologie

- Un nœud peut avoir 0 ou plusieurs fils.
- Un nœud a exactement un père.

La racine



Définition récursive

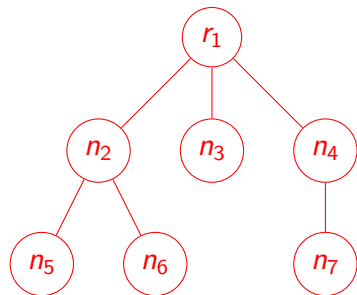
- ▶ **Base :**

- ▶ Un nœud unique n est un arbre
- ▶ n est la racine de cet arbre.

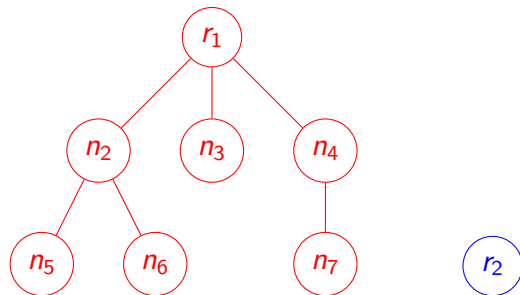
- ▶ **Récurrence :**

- ▶ Soit r un nouveau nœud
- ▶ T_1, T_2, \dots, t_k sont des arbres ayant pour racine r_1, r_2, \dots, r_k .
- ▶ Création d'un nouvel arbre ayant pour racine r et on ajoute une arête entre r et r_1 , r et r_2 , \dots , r et r_k .

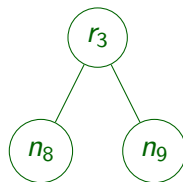
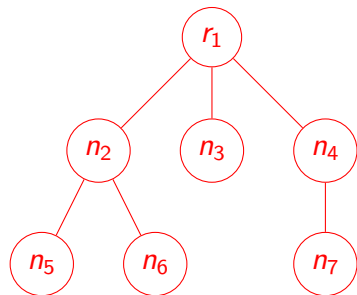
Définition récursive : un exemple



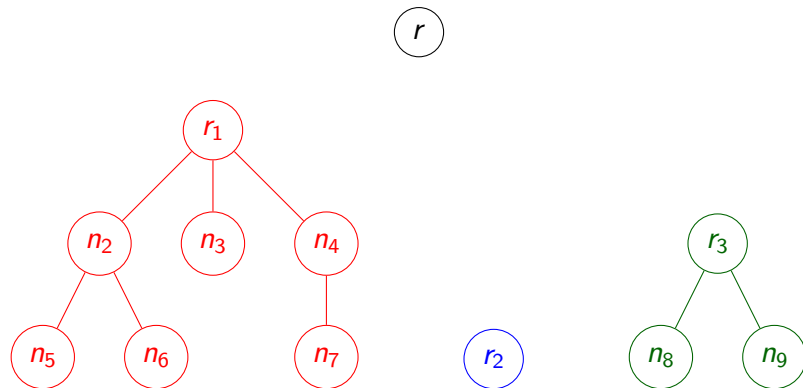
Définition récursive : un exemple



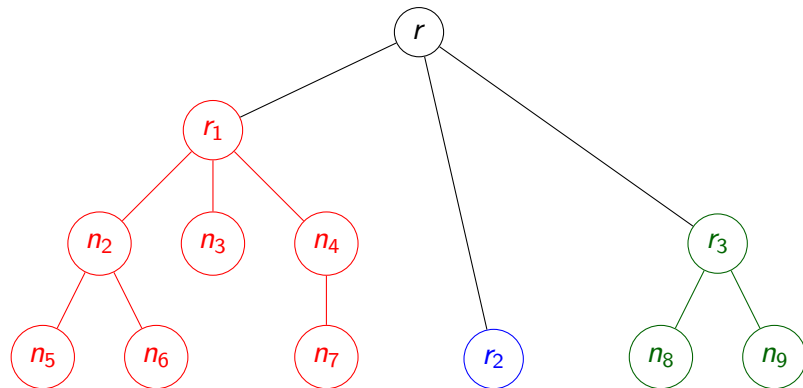
Définition récursive : un exemple



Définition récursive : un exemple



Définition récursive : un exemple



Propriétés d'un arbre

Pour un arbre T à n sommets il y a équivalence entre les propriétés :

- ▶ T est un arbre
- ▶ T est connexe, et la suppression de toute arête le rend non connexe
- ▶ T est acyclique à $n - 1$ arêtes
- ▶ T est acyclique et l'ajout de toute arête le rend cyclique.

Chemins, ancêtres, descendants, ...

- ▶ Les **ancêtres** d'un nœud : *Nœuds trouvés sur le **chemin unique** entre ce nœud et la racine.*
- ▶ Le nœud d est un **descendant** de a si et seulement si a est un ancêtre de d .
- ▶ **Longueur** d'un chemin = nombre d'arêtes parcourues.

Généalogie

- ▶ La racine est un ancêtre de tous les nœuds.
- ▶ Chaque nœud est un descendant de la racine.
- ▶ Les nœuds ayant le même parent = **enfants**.
- ▶ Un nœud n et tous ses descendants = **sous-arbre**

Feuilles et nœuds intérieurs

- ▶ Une feuille est un nœud qui n'a pas d'enfants
- ▶ Un nœud intérieur est un nœud qui a au moins 1 enfant.
- ▶ Tout nœud de l'arbre est :
 - ▶ Soit une feuille
 - ▶ Soit un nœud intérieur

Mesures sur les arbres

- ▶ **Taille** de l'arbre T , notée $taille(T)$ = nombre de nœuds.
- ▶ **Nombre de feuilles** noté $nf(T)$.
- ▶ **Longueur de cheminement** de l'arbre T , notée $LC(T)$ = somme des longueurs de tous les chemins issus de la racine.

$$LC(T) = \sum_{x \text{ nœud de } T} h(x).$$

- ▶ **Longueur de cheminement externe** de l'arbre T , notée $LCE(T)$ = somme des longueurs de tous les chemins aboutissant à une feuille issus de la racine.

$$LCE(T) = \sum_{x \text{ feuille de } T} h(x).$$

Hauteur

- ▶ La **hauteur d'un nœud** n , notée $h(n)$, est la longueur du chemin depuis la racine jusqu'à n .
- ▶ La **hauteur de l'arbre** T , notée $h(T)$:

$$h(T) = \max_{x \text{ nœud de l'arbre}} h(x)$$

Mesures

- **Hauteur moyenne** de l'arbre T , notée $HM(T)$ = moyenne des hauteurs de tous les nœuds.

$$HM(T) = \frac{LC(T)}{taille(T)}$$

- **Hauteur moyenne externe** de l'arbre T , notée $HME(T)$ = moyenne des longueurs de tous les chemins issus de la racine et se terminant par une feuille.

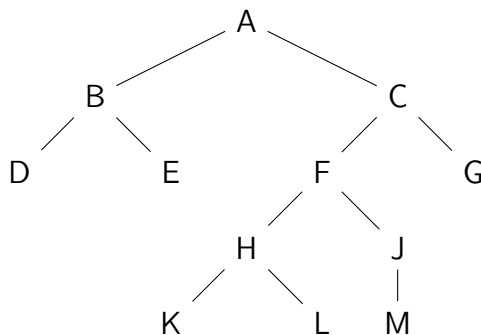
$$HME(T) = \frac{LCE(T)}{nf(T)}$$

Les arbres binaires

1. Etude d'une classe particulière d'arbres
2. Propriétés
3. Algorithmes

Les arbres binaires

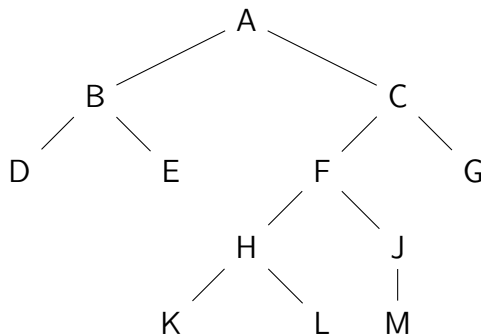
Tous les nœuds d'un arbre binaire ont 0, 1 ou 2 enfants.



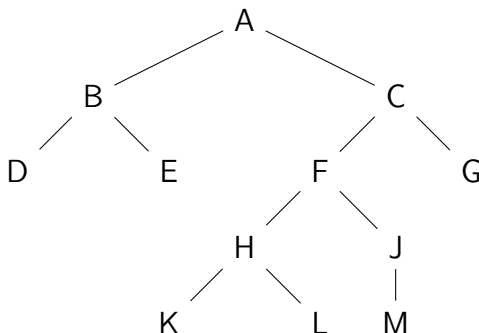
Les arbres binaires : Définitions

- ▶ **Enfant gauche** de n = racine du sous-arbre gauche de n .
- ▶ **Enfant droit** de n = racine du sous-arbre droit de n .
- ▶ **Bord gauche** de l'arbre = le chemin depuis la racine en ne suivant que des fils gauche.
- ▶ **Bord droit** de l'arbre = le chemin depuis la racine en ne suivant que des fils droits.

Exemple : arbre binaire



Exemple : arbre binaire



Taille de l'arbre :

Longueur de cheminement externe :

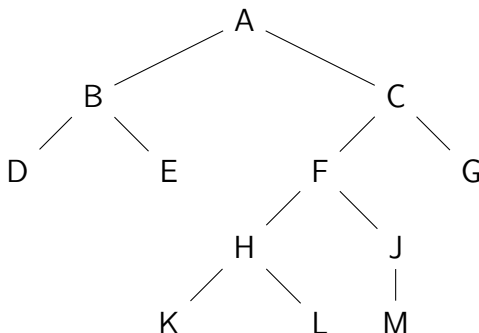
Hauteur moyenne :

Nombre de feuilles :

Longueur de cheminement :

Hauteur moyenne externe :

Exemple : arbre binaire



Taille de l'arbre : 12

Longueur de cheminement externe : 18

Hauteur moyenne : 2.33

Nombre de feuilles : 6

Longueur de cheminement : 28

Hauteur moyenne externe : 3