Feuille n^o 1 : Événements, mesure de probabilité, dénombrement

Exercice 1 :

Définir l'univers dans chacun des cas suivants

(a) On jette deux dés à 6 faces équilibrés, l'un jaune, l'autre vert. On considère le nombre dont le chiffre des dizaines est le chiffre du dé jaune, et celui des unités le chiffre du dé vert.

(b) Même question que (a) si les dés ne sont pas équilibrés.

(c) On tire une carte dans un jeu de 32 cartes qu'on nomme J, on la remet, puis on en tire une seconde.

(d) On tire une carte dans un jeu de 32 cartes, on ne la remet pas, puis on en tire une seconde.

(e) On lance un dé à 6 faces jusqu'à ce qu'il ne vaille ni 1 ni 2.

Dans chacun des cas ci-dessus, est-il possible ou raisonnable de considérer la probabilité uniforme sur Ω ?

Exercice 2 :

On lance 1 pièce deux fois. On note F_i l'évènement "obtenir face au $i^{\text{ème}}$ lancer". Écrire à l'aide de F_1 et F_2 les évènements suivants : $A_1 =$ "on a obtenu au moins une fois face", $A_2 =$ "on a obtenu exactement une fois face", $A_3 =$ "on a obtenu deux fois pile"

Exercice 3 :

Soit Ω un ensemble fondamental. Et A et B deux événements (ensembles inclus dans Ω). Peut-on avoir simultanément :

1. $\mathbb{P}(A) = 0.9, \quad \mathbb{P}(B) = 0.6, \quad A \cap B = \emptyset$?
2. $\mathbb{P}(A) = 0.8, \quad \mathbb{P}(B) = 0.1, \quad \mathbb{P}(A \cap B) = 0.2$?
3. $\mathbb{P}(A) = 0.8, \quad \mathbb{P}(B) = 0.4, \quad \mathbb{P}(A \cap B) = 0.1$?
4. $\mathbb{P}(A) = 0.8, \quad \mathbb{P}(B) = 0.4, \quad \mathbb{P}(A \cap B) = 0.3$?

Exercice 4 :

Une enquête effectuée auprès d'un grand nombre d'étudiants a permis d'estimer qu'il y a une probabilité :

- 0,6 pour qu'un étudiant aime les mathématiques ;
- 0,7 pour qu'un étudiant aime la physique ;
- 0,4 pour qu'un étudiant aime les maths et la physique.

Quelle est la probabilité pour qu'un étudiant : a) aime les mathématiques mais pas la physique ?
b) aime les mathématiques ou la physique ?
c) n'aime ni les mathématiques ni la physique ?

Exercice 5 :

Alice et Bob jouent en lançant à tour de rôle deux dés à 6 faces équilibrés. Alice marque 1 point si la somme fait 7 ou le produit fait 6, et Bob marque 1 point si la somme fait 6 ou le produit fait 4.

Si vous deviez soutenir le joueur qui a le plus de chances de marquer un point, qui choisiriez vous intuitivement ? et après calculs ?

Exercice 6 :

On lance un dé à 6 faces équilibré $n \geq 3$ fois. Après avoir décrit Ω, calculer la probabilité que l'on obtienne au moins un 6 ? exactement un 6 ? au moins deux 6 ?

Exercice 7 :

Lequel des deux événements suivants est le plus probable ? Obtenir au moins 1 fois un 6 en lançant 4 fois un dé, ou bien obtenir au moins 1 fois un double 6 en lançant 24 fois deux dés ?
(*problème posé par le Chevalier de Mérée à Pascal en 1654*)

Exercice 8 : Au tiercé, un certain nombre de chevaux disputent une course, et on note les 3 premiers arrivés en tenant compte de l'ordre.

1. Quel est le nombre de tiercé dans l'ordre possibles avec 20 chevaux ? (Pas d'ex-aequo).
2. Dans le désordre ?
3. On joue une grille de tiercé (c'est à dire, on choisit 3 chevaux dans un certain ordre, avec 20 chevaux en lice). On suppose que chaque ordre d'arrivée est équiprobable (ce qui n'est ipas très réaliste !). Quelle est la probabilité de toucher le montant associé au tiercé dans l'ordre ? Dans le désordre ?

Exercice 9 :

On lance une pièce jusqu'à obtenir pile. On note X le nombre de lancers effectués depuis le début de l'expérience. Calculer la probabilité que X soit égal à k.
(*la probabilité obtenue est appelée probabilité géométrique*)

Exercice d'approfondissement / supplémentaires

Exercice 10 :

Lequel de ces deux événements est le plus probable en lançant 3 dés à 6 faces ? Obtenir une somme de 9 ou bien une somme de 10 ? Pourtant, il y a autant de façons de sommer trois entiers entre 1 et 6 pour obtenir 9 que pour obtenir 10...
(*issu d'une correspondance entre Galilée et le Prince de Toscane, joueur invétéré*)

Exercice 11 :

Je tire une main de cinq cartes dans un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité que j'aie (exactement) :

1. une quinte flush (5 valeurs consécutives de même couleur) ?
   (attention : 10-valet-dame-roi-as est une quinte , as-2-3-4-5 aussi, mais dame-roi-as-2-3 n'en est pas une)
2. une quinte (5 valeurs consécutives) ?
3. un carré (4 valeurs identiques) ?
4. deux paires ? (mais pas un full, càd une paire plus un brelan)
5. un brelan (trois cartes de la même valeur) ? (mais pas un full)
6. une paire (mais pas mieux) ?

Exercice 12 :

Montrer de deux façons différentes l'égalité suivante : pour $1 \leq k \leq n-1$,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Exercice 13 :

Dans une urne de N boules dont Np blanches et $N(1-p)$ rouges ($p \in]0,1[$ tel que les deux nombres précédents soient des entiers), on tire sans remise n boules. Calculer la probabilité que X vaille k, pour une gamme de valeurs entières de k à déterminer en premier lieu, où X est le nombre de boules blanches tirées.
(*cet exercice justifie la caractérisation du modèle dit "hypergéométrique"*)

Exercice 14 :

On a mélangé 10 paires distinctes de chaussettes (distingables) et l'on tire simultanément 4 chaussettes au hasard : en supposant que tous les ensembles de 4 chaussettes ont la même probabilité d'être tirés, calculer la probabilité des évènements : a) on a reconstitué deux paires ;
b) on a obtenu au moins une paire ;
c) on a obtenu une seule paire.

Exercice 15 :

Un homme très distrait ferme les enveloppes de n lettres avant d'avoir écrit les adresses, et écrit les adresses au hasard ensuite. Quelle est la probabilité pour qu'un destinataire au moins reçoive sa propre lettre (*i.e.* celle qui lui est destinée) ? Limite de cette probabilité quand $n \to \infty$?