Rappels sur l'exponentielle et le logarithme

Des longues années passées à en étudier les propriétés analytiques font souvent oublier à l'étudiant la nature purement arithmétique de la fonction exponentielle et de son inverse, le logarithme.

S'il est vrai que l'étude analytique de ces fonctions a grandement contribué à l'avancée des mathématiques du XVI au XIX siècle, ce qui justifie largement l'intérêt qui leur est porté dans les études secondaires, l'informaticien a beaucoup plus souvent à faire avec les propriétés arithmétiques de celles-ci.

Dans ce qui suit, nous donnons les définitions et les quelques propriétés élémentaires que tout informaticien devrait connaître sur le bout des doigts.

Les fonctions exponentielles

Soit a un nombre réel strictement positif différent de 1, la *fonction exponentielle* de base a est la fonction

$$\exp_a : x \mapsto a^x$$

qui à tout réel x associe a^x. Il s'agit d'une fonction définie pour tout réel x, continue partout, prenant toutes les valeurs de 0 à l'infini, croissante si $a > 1$ et décroissante si $0 < a < 1$.

En analyse, lorsque on ne précise pas la base, il est sous-entendu qu'on parle de la fonction exponentielle de base e, où

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \sim 2.78\dots$$

est la constante de Néper.

En informatique, au contraire, ce sont les bases entières qui sont les plus intéressantes, et la fonction exponentielle la plus importante est sans doutes celle de base 2.

Indépendamment de la base, les propriétés fondamentales de la fonction exponentielle se résument à

- $a^x a^y = a^{x+y}$,
- $(a^x)^y = a^{xy}$,
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.

Les logarithmes

Le *logarithme* en base a, noté $\log_a$ est par définition la **fonction inverse** de l'exponentielle en base a. Les égalités

$$\log_a a^x = a^{\log_a x} = x$$

la définissent univoquement. Le logarithme est une fonction définie pour tout réel $x > 0$, continue partout où elle est définie, prenant toute valeur réelle, strictement croissante si $a > 1$ et décroissante si $0 < a < 1$.

Lorsque on ne précise pas la base, les analystes sous-entendent la base e. Le logarithme est dans ce cas appelé *logarithme naturel* ou *logarithme népérien*. Une autre notation pour le logarithme naturel est $\ln x$.

Les informaticiens, au contraire, ont plutôt tendance à sous-entendre la base 2, ou parfois une base entière quelconque.

En plus des propriétés le définissant, le logarithme a les propriétés élémentaires suivantes, découlant directement des propriétés élémentaires de l'exponentielle:

- $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$,
- $\log_a b^c = c \log_a b$,
- $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$.

La preuve de ces égalités est assez simple. À titre d'exemple, nous allons donner une ébauche de la première. On suppose que b et c sont strictement positifs, sans quoi les logarithmes ne seraient pas bien définis. Par conséquent, à cause des propriétés de l'exponentielle, il existe des réels positifs B et C tels que

$$b = a^B, \qquad c = a^C.$$

Or, on a d'une part

$$\log_a bc = \log_a a^B a^C = \log_a a^{B+C} = B + C,$$

où la dernière égalité découle de la définition du logarithme. D'autre part on a

$$\log_a b + \log_a c = \log_a a^B + \log_a a^C = B + C.$$

Exercice: prouver les deux autres égalités.

Grâce au logarithme, on peut donner une formule de changement de base pour l'exponentielle et pour le logarithme. Soient a et b deux entiers strictement positifs et différents de 1. On a

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

En effet

$$b^{(\log_b a)(log_a b)} = \left(b^{\log_b a}\right)^{\log_a b} = a^{\log_a b} = b,$$

d'où on déduit, grâce à l'injectivité de l'exponentielle de base b,

$$(\log_b a)(\log_a b) = 1.$$

De cette propriété découlent les formules de changement de base suivantes

$$a^x = b^{x \log_b a} = b^{\frac{x}{\log_a b}},$$

$$\log_a b = (\log_c b)(\log_a c) = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

En effet, la première égalité découle immédiatement des propriétés vues plus haut, puisque

$$b^{x \log_b a} = (b^{\log_b a})^x = a^x.$$

Exercice: démontrer la deuxième égalité.