Electronics

Complexe weerstanden of reactanties

Opleiding: Bachelor Elektronica-ICT

Academiejaar: 2020-2021

P**atrick Van Houtven**
P**atrick.vanhoutven@ap.be**

Inhoud

3 Complexe weerstanden of reactanties

Een weerstand is een elektronische component welke een bepaalde weerstand biedt tegen de stroom. Hebben we nu te maken met een gelijkstroom of een wisselstroom, de weerstand zal steeds weerstand bieden ongeacht het type stroom. Naast een weerstand bestaan er ook andere componenten die “weerstand” bieden tegen stroom. Echter niet in alle situaties. We spreken van reactanties (voorgesteld door X) als we te maken hebben met het weerstand bieden tegen wisselstroom maar niet tegen gelijkstroom. Spoelen en condensatoren zijn voorbeelden van zulke componenten die enkel weerstand bieden tegen wisselstroom en/of wisselspanning. Ze beschikken bijgevolg over een zekere reactantie welke een vorm van “complexe weerstand” is. In het geen volgt gaan we het hebben over deze spoelen en condensatoren en wat hun zo bijzonder maakt binnen de wereld van “electronics”. Maar voor we hier dieper ingaan bespreken we eerst wat we verstaan onder een complex getal.

3.1 Complexe getallen

De complexe getallen vormen een uitbreiding op de verzameling van de reëele getallen $\mathbb{R}$. Binnen de elektronica zijn complexe getallen een nuttig hulpmiddel om allerlei berekeningen te kunnen uitvoeren op wisselstroomgebied. Naast berekeningen maken met combinaties van weerstanden en reactanties bieden ze ook de mogelijkheid om bepaalde vergelijkingen overzichtelijk voor te stellen en vormen ze een “basisalgebra” aangaande het bewerken van signalen.

Wat is een complex getal?

Om hierop een antwoord te kunnen formuleren beschouwen we eerst volgende kwadratische vergelijking:

$$x^2 + 1 = 0$$

Als we deze willen oplossen binnen de verzameling $\mathcal{R}$ bekomen we al snel voor een probleem te staan, immers na omvorming van bovenstaande vergelijking bekomen we:

$$x^2 = -1$$

Probleem is dat er geen reële oplossing bestaat voor de laatst gevormde vergelijking. De reden hiervoor is dat het kwadraat van een reëel getal steeds groter of gelijk aan nul moet zijn. Maar we bekomen nu een negatief getal. Hoe moet het nu verder? Wel stel dat we nu toch zuiver formeel de wortel uit beide delen van de vergelijking trekken dan bekomen we volgende twee “formele” oplossingen:

$$X^2 + 1 = 0 => x_1 = +\sqrt{-1};\;\; x_2 = -\sqrt{-1}$$

Beide wortels blijken dan $\sqrt{-1}$ te bevatten. Deze $\sqrt{-1}$ zouden we als volgt kunnen definiëren:

De worteluitdrukking $\sqrt{-1}$ is de imaginaire eenheid en wordt voorgesteld met het symbool j.

Bijgevolg verkrijgen we:

$$j = \sqrt{-1}$$

Het kwadraat van deze imaginaire eenheid j levert dan volgend resultaat op:

$$j^2 = -1$$

Wiskundigen stellen deze imaginaire eenheid voor met het symbool i. Echter binnen de IoT-wereld wordt de letter i gebruikt om stroomsterkte aan te duiden. Om verwarring te vermijden gebruiken we de letter j als symbool voor imaginaire eenheid.
Als we gebruik maken van de imaginaire eenheid kan de oplossing van de beschouwde kwadratische vergelijking als volgt worden geschreven:

$$X^2 + 1 = 0 => x_1 = +j; \;\; x_2 = -j$$

De worteloplossingen kan je vervolgens beschouwen als de vermenigvuldiging van een reëel getal met de imaginaire eenheid. We kunnen bijgevolg schrijven:

$$x_1 = 1 \times \sqrt{-1} = \sqrt{-1}\,; \;\; x_2 = -1 \times \sqrt{-1}$$

of:

$$x_1 = 1 \times j = j\,; \;\; x_2 = -1 \times j = -j$$

Deze vermenigvuldigingen kunnen we gebruiken om andere “formele” oplossingen te bedenken voor andere kwadratische vergelijkingen. Stel bijvoorbeeld volgende vergelijking:

$$X^2 + 16 = 0$$

Een “formele” oplossing hiervoor bedenken gaat als volgt:

$$X^2 + 16 = 0 => x_1 = +\sqrt{16}; \;\; x_2 = -\sqrt{16}$$

Gebruik maken van de imaginaire eenheid j:

$$X^2 + 16 = 0 => x_1 = +\sqrt{16 \times (-1)}; \;\; x_2 = -\sqrt{16 \times (-1)}$$

$$X^2 + 16 = 0 => x_1 = +\sqrt{16} \times \sqrt{-1}; \;\; x_2 = -\sqrt{16} \times \sqrt{-1}$$

$$X^2 + 16 = 0 => x_1 = +\sqrt{16} \times j; \;\; x_2 = -\sqrt{16} \times j$$

$$X^2 + 16 = 0 => x_1 = +4j; \;\; x_2 = -4j$$

De getallen $4j$ en $-4j$ worden imaginaire getallen genoemd. Een imaginair getal kan als volgt worden gedefiniëerd:

Het imaginair getal $\boldsymbol{bj}$ stelt het formele product voor dat bestaat uit een reëel getal $\boldsymbol{b \neq 0}$ met de imaginaire eenheid j.

Om een beter overzicht te hebben bij berekeningen schrijven we de imaginaire eenheid voor het reëel getal. Aldus bekomen we voor het voorbeeld $\pm j4$.

Breiden we de kwadratische vergelijking uit naar zijn meer algemene vorm dan verkrijgen we een vergelijking als volgt:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Stel volgende vierkantsvergelijking:

$$2x^2 - 2x + 5 = 0$$

Deze kan je oplossen door eerst de zogenaamde discriminant D te bepalen:

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = (-2)^2 - 4 \times 2 \times 5$$

$$D = 4 - 40 = -36$$

Vermits D negatief is zijn er geen oplossingen in de reële verzameling $\mathbb{R}$. Als we gebruik maken van de imaginaire eenheid bekomen we voor de wortels volgende “formele” oplossingen:

De wortels voor de vergelijking zijn dan gelijk aan:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-2) + \sqrt{-36}}{4}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-2) - \sqrt{-36}}{4}$$

Verder uitwerken:

$$x_1 = \frac{-(-2) + \sqrt{36}\,\sqrt{-1}}{4} = \frac{2 + 6\sqrt{-1}}{4}$$
$$x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{36}\,\sqrt{-1}}{4} = \frac{2 - 6\sqrt{-1}}{4}$$

De uiteindelijke “formele” oplossing:

$$x_1 = \frac{2}{4} + j\frac{6}{4} = 0{,}5 + j1{,}5$$

$$x_2 = \frac{2}{4} - j\frac{6}{4} = 0{,}5 - j1{,}5$$

De getallen $x_1$en x_2 die op deze wijze zijn bekomen worden complexe getallen genoemd. Algemeen kan men definiëren:

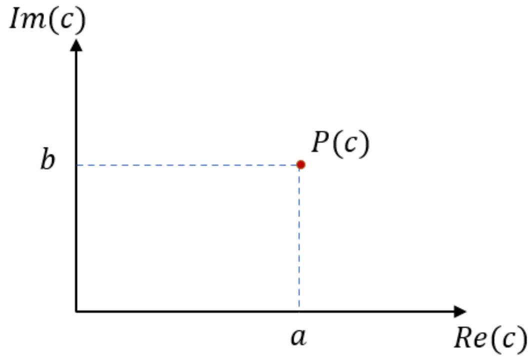
Een complex getal c is de formele som die bestaat uit een reëel getal a en een imaginair getal jb:

$$\boldsymbol{c = a + jb}$$

Een complex getal is bijgevolg een soort van samengesteld getal bestaande uit een reëel en een imaginair getal. De schrijfwijze $c = a + jb$ wordt de algebraïsche of cartesische vorm genoemd. De reële bestanddelen a en b worden het reële deel en het imaginaire deel van het complex getal c genoemd.

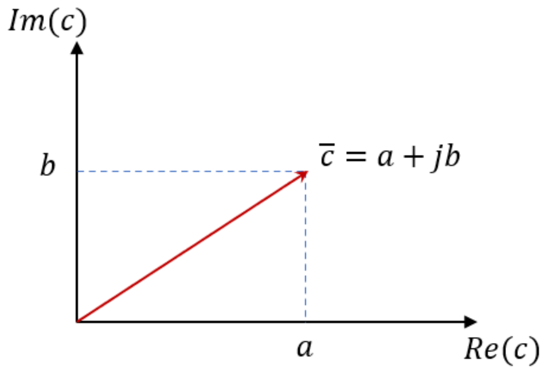
3.1.1 Het complexe vlak

Het reële en het imaginaire deel van een complex getal c kan je opvatten als cartesische coördinaten van een punt P. Dit punt P ligt in een zogenaamd reëel, imaginair-vlak. In dit vlak kan voor ieder complex getal één beeldpunt $P(c) = (a, b)$ worden toegevoegd en omgekeerd. Figuur 3-1 geeft hiervan een voorbeeld.



Figuur 3-1: Voorstelling van het complexe getal $c = a + jb$ door een punt in het complexe vlak

Bij gebruik van de complexe getallen, zoals bij berekeningen met sinusvormige signalen, worden ze meestal voorgesteld als fasoren. Een fasor kan je beschouwen als een “wijzer”. Deze “wijzer” wordt voorgesteld als een pijl die vanuit de oorsprong gericht is op het beeldpunt $P(c)$. We duiden deze fasor aan als $\overline{c}$ (het complexe getal krijgt een streep boven zich). Figuur 3-2 geeft de voorstelling van een complex getal c weer met een fasor.



Figuur 3-2: voorstelling van een complex getal via een fasor in het complexe vlak

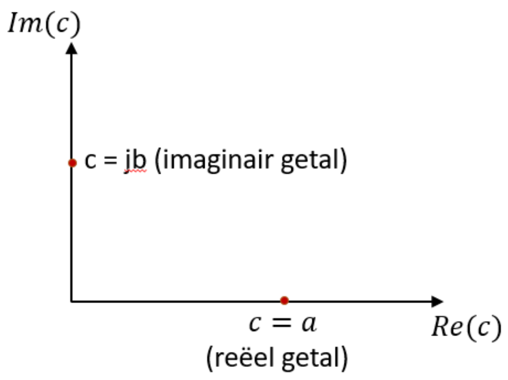
Waarom worden de assen in het complexe vlak nu reële- en imaginaire as genoemd? Het antwoord hierop vinden we door het complex getal verder te analyseren. Zo kan je een reëel getal opvatten als een complex getal waarvan het imaginair deel gelijk is aan nul. Dit houdt in dat je een reëel getal ook in volgende vorm kan schrijven:

$$c = a + j.0 \equiv a$$

Het beeldpunt van dit complex getal ligt dan op de horizontale coördinaatas waardoor deze logischerwijze als reële as wordt aangeduid. Immers alle getallen met imaginair deel gelijk aan 0 liggen op deze as.
Dezelfde redenering kan je maken voor de getallen die liggen op de imaginaire as. Dit zijn de complexe getallen waarbij het reëel deel gelijk is aan nul en als volgt weergegeven worden:

$$c = 0 + jb \equiv jb$$

Dit betekent dat alle beeldpunten van de imaginaire getallen op de verticale coördinaatsas liggen waardoor deze logischerwijze imaginaire as wordt genoemd. In figuur 3-3 kan je de grafische weergave hiervan zien.



Figuur 3-3 : de positie van een reëel respectievelijk imaginair getal in een complex vlak

3.1.2 Basisbegrippen bij complexe getallen

Volgende basisbegrippen zijn van belang bij het gebruik van complexe notatie voor het oplossen van berekeningen op wisselstroomgebied: gelijkheid van twee complexe getallen, complex toegevoegde getal en modulus van een complex getal.

3.1.2.1 Gelijkheid van twee complexe getallen

Twee complexe getallen worden als gelijk beschouwd als zowel hun reëel deel en hun imaginair deel aan elkaar gelijk zijn. De bijbehorende beeldpunten in het complex vlak vallen dan samen. Stel volgende complexe getallen c_1 en c_2

$$c_1 = a_1 + jb_1$$

$$c_2 = a_2 + jb_2$$

Deze twee getallen zijn aan elkaar gelijk als:

$$a_1 = a_2$$

en

$$b_1 = b_2$$

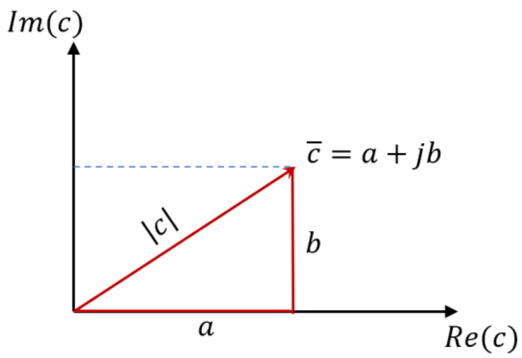
3.1.2.2 Complex toegevoegde van een complex getal

Algemeen noemt men $c^* = a - jb$ het complex toegevoegde getal aan het getal $c = a + jb$. De overgang van het getal c naar het complex toegevoegde getal $c^*$is de tekenwisseling van het imaginaire deel terwijl het reële deel onveranderd blijft.

Stel het getal $c_1 = 3 + j7$. De complex toegevoegde is dan $c_1^* = 3 - j7$. Een ander voorbeeld is het getal $C_2 = 200 - j450$. Hiervan is de complex toegevoegde gelijk aan $c_2^* = 200 + j450$.
Complex toegevoegde getallen zijn vooral interessant om delingen tussen complexe getallen onderling uit te voeren. Door gebruik te maken van complex toegevoegde kan men de noemer van de deling volledig reëel maken waardoor de deling kan uitgevoerd worden. Later hier meer over.
Merk op dat als een complex getal gelijk is aan zijn complex toegevoegde dit getal op de reële as ligt. Immers beide complexe getallen kunnen enkel maar gelijk zijn als ze een gelijk reëel deel hebben en een imaginair deel gelijk aan nul.

3.1.2.3 De modulus van een complex getal

De modulus (of absolute waarde) $|c|$ van een complex getal $c = a + jb$ is de lengte van de bijbehorende fasor. Dit is in figuur 3.4 weergegeven.



Figuur 3-4: De modulus van een complex getal

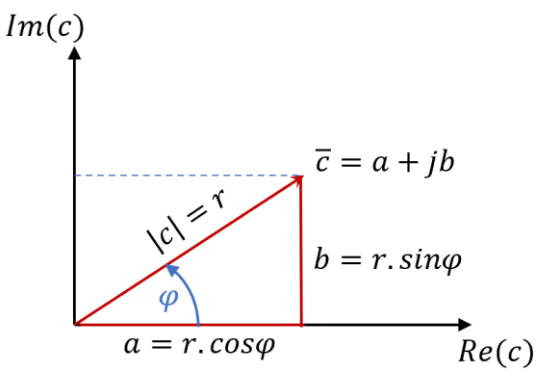
Zoals in figuur 3-4 te zien is kan je de moduluswaarde) $|c|$ beschouwen als de schuine zijde van een rechthoekige driehoek. Deze rechthoekige driehoek bestaat verder uit een zijde die gelijk is aan het reëel deel van dit complex getal en een andere zijde die het imaginair deel ervan voorstelt. De modulswaarde kan via de stelling van Pythagoras berekend worden:

$$|c| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Vermits de moduluswaarde een lengte voorstelt, is deze waarde steeds groter of gelijk aan nul.

3.1.3 De goniometrische voorstelling van een complex getal

Tot nu toe hebben we het complex getal voorgesteld in zijn algebraïsche vorm. Het complex getal bestaat uit een algebraïsche som van een reëel getal met een imaginair getal. Vermits het reëel deel en het imaginair deel van dit complex getal ook voorgesteld kunnen worden als cartesische coördinaten van een met het complex getal overeenstemmend beeldpunt $P(c)$ kan het complex getal ook op cartesische manier worden voorgesteld.
Het beeldpunt $P(c)$ kan echter ook worden voorgesteld door middel van poolcoördinaten r en φ. Hierbij is r de lengte van de fasor en φ de hoek tussen de fasor en de reële as. Figuur 3-5 geeft de goniometrische voorstelling weer van een complex getal $c = a + jb$.



Figuur 3-5 : goniometrische voorstelling van een complex getal

Via de transformatievergelijkingen

$$a = r.cos\varphi$$

en

$$b = r.sin\varphi$$

kan het complex getal c worden omgezet in zijn goniometrische vorm. Deze wordt als volgt weergegeven:

$$c = a + jb = r.cos\varphi + j\,r.sin\varphi$$

Verder uitwerken:

$$c = r.(\,cos\varphi + j\,sin\varphi)$$

De fasor $\overline{c}$ stelt de amplitude voor van een wisselstroomsignaal terwijl de hoek φ de fase voorstelt van de complexe wisselstroomwaarde c. Merk op dat de hoekcoördinaat φ “oneindig meerduidig” is. Iedere keer dat een periode van het wisselstroomsignaal doorlopen is, heeft de fasor één volledige toer gemaakt langs de goniometrische cirkel (zie hoofdstuk 2 paragraaf 2.1.6 Bepalen van de sinusgolfformule). Als een volledige toer is rondgedraaid, komt men terug in het oorspronkelijk beeldpunt $P(c)$ terecht.
In goniometrische vorm kan je de complex toegevoegde c^* van een compex getal c als volgt weergeven:

$$c = r.(\,cos\varphi + j\,sin\varphi)$$

$$c^* = r.(\,cos\varphi - j\,sin\varphi)$$

3.1.4 De exponentiële vorm van een complex getal

De exponentiële vorm van een complex getal kan je aanzien als een “bondige” manier om een goniometrisch complex getal voor stellen. De exponentiële vorm schrijf je als volgt:

$$c = r.e^{j\varphi}$$

Ook hier stelt r de moduluswaarde voor van het complexe getal en φ de fase van de complexe wisselstroomwaarde c. .Het voordeel van de exponentiële vorm van een complex getal is dat deze heel handig is bij het vermenigvuldigen en delen van complexe getallen.
De complex toegevoegde van een complex getal in exponentiële vorm kan als volgt worden geschreven:

$$c = r.e^{j\varphi} \leftrightarrow c^* = r.e^{-j\varphi}$$

Euler bewees dat:

$$e^{j\varphi} = cos\varphi + jsin\varphi$$

Bovenstaande formule wordt de formule van Euler genoemd. Hierbij wordt van uit gegaan dat de moduluswaarde van het complexe getal gelijk aan 1 is. Meer algemeen kan je schrijven:

$$r.e^{j\varphi} = r.(cos\varphi + jsin\varphi)$$

Waarbij r de moduluswaarde is van het complexe getal.
Merk op dat de in de formule van Euler voorkomende complexe exponentiële functie $e^{j\varphi}$ periodiek is met als periode $j2\pi$. Dit betekent dat:

$$e^{j\varphi + kj2\pi} = e^{j(\varphi + k2\pi)} = \; e^{j\varphi} \quad \text{met } k \in \mathbb{Z}$$

Hierin is k een geheel getal dat behoort tot de verzameling der gehele getallen $\mathbb{Z}$.

Voorbeeld 3-1:

Stel volgende complexe getallen voor via hun beeldpunt en fasor:

a) $c_1 = 3.e^{j45°}$
b) $c_2 = 5.e^{-j60°}$
c) $c_3 = 2.e^{j\pi}$

Oplossing:

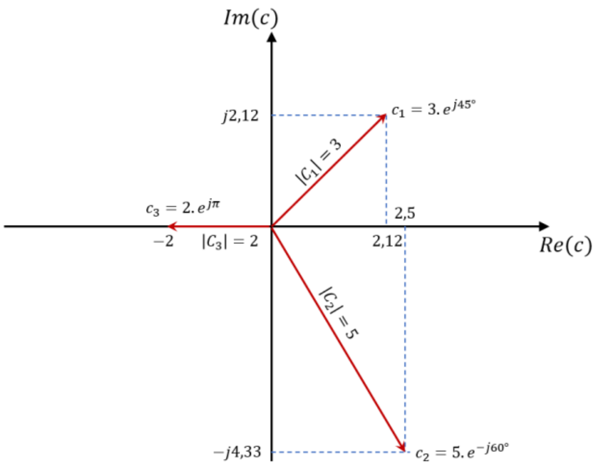
Een in poolcoördinaten gegeven complex getal (of zij exponentiële vorm) kan via volgende transformatievergelijkingen worden omgezet naar cartesische coördinaten:

$$c = r.e^{j\varphi} = r.cos\varphi + jrsin\varphi \; \leftrightarrow c = a + jb$$

$$a = r.cos\varphi \text{ en } b = r.sin\varphi$$

Toepassen op de gegeven complexe getallen:

a) $c_1 = 3.e^{j45°} = 3(cos45° + jsin45°) = 2{,}12 + j2{,}12$
b) $c_2 = 5.e^{-j60°} = 5(\cos(-60°) + jsin(-60°) = 2{,}5 - j4{,}33$
c) $c_3 = 2.e^{j\pi} = 2(cos\pi + jsin\pi) = \; -2 + j0 = \; -2$



Figuur vb-3-1

Voorbeeld 3-2:

Vorm de onderstaande complexe getallen om naar hun exponentiële vorm:

a) $C_1 = 2{,}5 - j4{,}33$
b) $C_2 = -2 + j0$

Oplossing:

Via volgende transformatievergelijkingen kan een complex getal weergegeven in zijn cartesische coördinaten omgevormd worden naar zijn goniometrische vorm:

Stel: $c = a + jb$

$$r = |c| = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad tan\varphi = \frac{b}{a}$$

In de goniometrische en exponentiële vorm:

$$c = r.(cos\varphi + jsin\varphi) = r.e^{j\varphi}$$

Om φ nauwkeurig te kunnen bepalen maak je best een schets om te kijken in welk kwadrant de hoekwaarde ligt. Afhankelijk van het kwadrant gelden volgende formules:

- Eerste kwadrant: $\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$
- Tweede en derde kwadrant: $\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi$
- Vierde kwadrant: $\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + 2\pi$

Merk op dat $arctan$ op het rekenmachine dikwijls gevonden wordt als tan^{-1}. Een andere schrijfwijze hiervoor is $Bgtan$

Toepassen op de gegeven complexe getallen:

a) $C_1 = 2{,}5 - j4{,}33$

$$r = \sqrt{2{,}5^2 + (-4{,}33)^2} = 5; \quad \arctan\left(\frac{-4{,}33}{2{,}5}\right) = -60°$$

De hoek φ ligt in het vierde kwadrant (resultaat $-60°$), het complex getal kan ook geschreven worden met volgende positieve hoekwaarde:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + 2\pi = -60° + 360° = 300°$$

Goniometrische en exponentiële vormen zijn gelijk aan:

$$c_1 = 5.(\cos 300° + jsin300°) = 5.e^{j300°}$$

b) $C_2 = -2 + j0$

$$r = \sqrt{(-2)^2 + (0)^2} = 2; \ \arctan\left(\frac{0}{-2}\right) = 0°$$

Via het reëel deel (-2) van het complex getal zie je de hoekwaarde in het tweede of derde kwadrant ligt. De hoekwaarde is bijgevolg:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi = 0° + \pi = \pi \ of \ 180°$$

Goniometrische en exponentiële vormen zijn gelijk aan:

$$c_2 = 2.(\cos 180° + jsin180°) = 2.e^{j180°}$$

Of:

$$c_2 = 2.(\cos \pi + jsin\pi) = 2.e^{j\pi}$$

3.1.5 Rekenen met complexe getallen

3.1.5.1 Optellen van complexe getallen

Stel volgende getallen:

$$c_1 = a_1 + jb_1$$
$$c_2 = a_2 + jb_2$$

Als je beide complexe getallen wil optellen dan tel je de reële delen met elkaar op en vervolgens de imaginaire delen. De som van de 2 complexe getallen is bijgevolg gelijk aan:

$$c_1 + c_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$$

Voorbeeld 3-3

Tel de volgende complexe getallen met elkaar op:

$$c_1 = 3 + j4$$
$$c_2 = 6 - j5$$

Oplossing:

$$c_1 + c_2 = (3 + 6) + j(4 - 5)$$
$$c_1 + c_2 = 9 - j$$

3.1.5.2 Aftrekken van complexe getallen

Stel volgende getallen:

$$c_1 = a_1 + jb_1$$
$$c_2 = a_2 + jb_2$$

Als je beide complexe getallen van elkaar wil aftrekken dan trek je de reële delen met elkaar af en vervolgens de imaginaire delen. Het resultaat van de aftrekking van 2 complexe getallen is bijgevolg gelijk aan:

$$c_1 - c_2 = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2)$$

Voorbeeld 3-4

Trek de volgende complexe getallen van elkaar af:

$$c_1 = 3 + j4$$
$$c_2 = 6 - j5$$

Oplossing:

$$c_1 - c_2 = (3 - 6) + j(4 - (-5))$$
$$c_1 - c_2 = -3 + j9$$

3.1.5.3 Vermenigvuldigen van complexe getallen

Stel volgende getallen:

$$c_1 = a_1 + jb_1$$
$$c_2 = a_2 + jb_2$$

Beide getallen kunnen op volgende wijze met elkaar worden vermenigvuldigd:

$$c_1 \times c_2 = (a_1 + jb_1) \times (a_2 + jb_2)$$

Verder uitwerken:

$$c_1 \times c_2 = a_1a_2 + ja_1b_2 + jb_1a_2 + j^2b_1b_2$$

Vermits $j^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2$, volgt dat $j^2b_1b_2 = -b_1b_2$. Verder uitwerken:

$$c_1 \times c_2 = a_1a_2 - b_1b_2 + ja_1b_2 + jb_1a_2$$

$$c_1 \times c_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + j(a_1b_2 + b_1a_2)$$

Voorbeeld 3-5

Vermenigvuldig de volgende complexe getallen met elkaar

$$c_1 = 3 + j4$$
$$c_2 = 6 - j5$$

Oplossing:

$$c_1 \times c_2 = (3 + j4) \times (6 - j5)$$
$$c_1 \times c_2 = 3 \times 6 + 3 \times (-j5) + j4 \times 6 + j4 \times (-j5)$$
$$c_1 \times c_2 = 18 - j15 + j24 - j^2 20$$
$$c_1 \times c_2 = (18 + 20\,) + j(24 - 15)$$
$$c_1 \times c_2 = 38 + j9$$

3.1.5.4 Delen van complexe getallen

Stel volgende getallen:

$$c_1 = a_1 + jb_1$$
$$c_2 = a_2 + jb_2$$

Beide getallen kunnen op volgende wijze met elkaar worden gedeeld:

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2}$$

Om de deling verder te kunnen uitwerken moet teller en noemer worden vermenigvuldigd met de complex toegevoegde c_2^* van het in de noemer staande getal c_2. We gebruiken deze complex toegevoegde om in de noemer enkel reële waarden te bekomen zodat de deling uitgevoerd kan worden.

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{(a_1 + jb_1) \times a_2 - jb_2}{(a_2 + jb_2)\ \times (a_2 - jb_2)}$$

Verder uitwerken:

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{(a_1 a_2 + jb_1(-jb_2)) + j(a_1(-b_2) + b_1 a_2)}{a_2^2 - \ ja_2 b_2 \ \ + \ ja_2 b_2 - j^2 b_2^2}$$

Vermits $j^2 = \ -1$ volgt:

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + j(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$$

Het uiteindelijke resultaat:

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + j\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

Voorbeeld 3-6

Deel de volgende complexe getallen met elkaar (c_1/c_2):

$$c_1 = 3 + j4$$
$$c_2 = 6 - j5$$

Oplossing:

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{3 + j4}{6 - j5}$$

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{(3 + j4) \times (6 + j5)}{(6 - j5) \times (6 + j5)}$$

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{3 \times 6 + 3 \times j5 + \ j4 \times 6 + j4 \times j5}{36 + j30 - j30 - j^2 25}$$

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{18 + j15 + \ j24 + j^2 20}{36 + j30 - j30 - j^2 25}$$

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{(18 - 20) + j\,(15 + \ 24)}{36 + 25}$$

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{-2 + j\,39}{36 + 25}$$

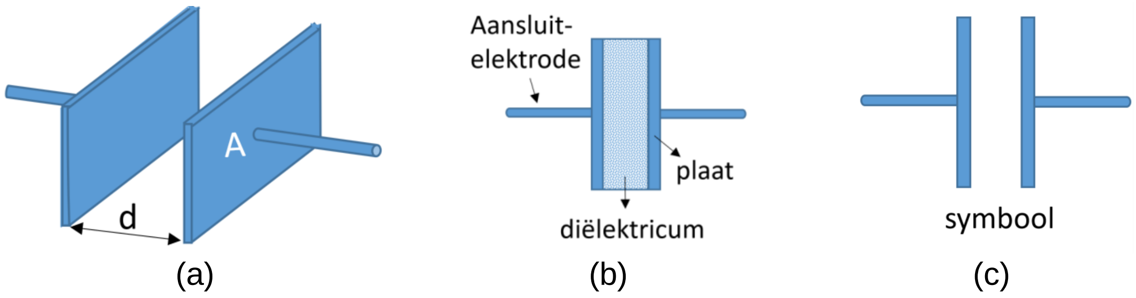
$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{-2}{61} + j\frac{39}{61}$$

$$\frac{c_1}{c_2} = -0{,}033 + j0{,}64$$

3.2 Condensatoren

3.2.1 Wat is een condensator?

Een condensator is een passieve elektrische component dat elektrische lading kan opslaan en de eigenschap capaciteit bezit. Figuur 3-6 toont de opbouw van een condensator. Daarin is te zien dat een condensator een elektrische component is die prinicipieel bestaat uit twee parallelle geleidende platen die van elkaar gescheiden zijn door een isolerend materiaal dat diëlektricum wordt genoemd. Het algemeen symbool van een condensator is in figuur 3-6 (c) weergegeven. De plaatoppervlakte A, de afstand d tussen de platen en de diëlektrische constante zijn belangrijke parameters aangaande capaciteit en werkspanning van de condensator.



Figuur 3-6 : algemene opbouw van een condensator

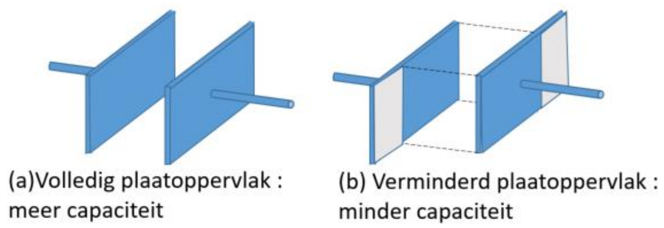
Sluit men een spanning aan op de condensator dan zullen er ladingsdeeltjes op de platen ontstaan. Voor elke condensator geldt dat de lading op de platen recht evenredig is met de spanning tussen de platen. Deze evenredigheidsconstante wordt capaciteit van een condensator genoemd. Het verband tussen lading en spanning kan als volgt worden uitgedrukt:

$$Q = C \times U$$

3.2.1.1 Fysische eigenschappen van een condensator

Plaatoppervlakte

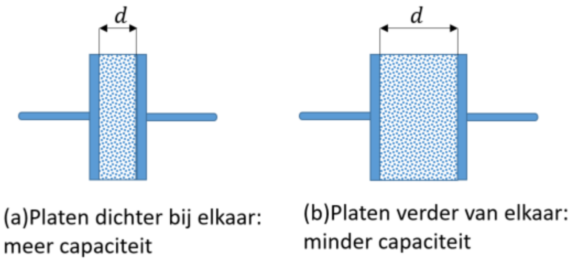
Capaciteit is recht evenredig met de plaatoppervlakte. Een grotere plaat produceert meer capaciteit terwijl een kleinere plaat minder capaciteit vormt. Bewegen de platen ten opzichte van elkaar, dan bepaalt de overlapping van de plaatoppervlakte de effectieve plaatoppervlakte. In figuur 3-7 geeft weer dat verschuiving van een plaat van de condensator ten opzichte van de andere de effectieve plaatoppervlakte verkleind waardoor ook de capaciteit verkleind.



Figuur 3-7 : Capaciteit is recht evenredig met het nuttig plaatoppervlak A.

Afstand tussen de platen

De capaciteit is omgekeerd evenredig met de afstand tussen de twee platen. De plaatafstand wordt weergegeven door d in figuur 3-8. Een grotere afstand tussen de platen levert een kleinere capaciteit op en een kortere afstand een grotere capaciteit. De doorslagspanning (breakdown) is de spanning waardoor er geleiding ontstaat in het diëlektricum. Als deze doorslagspanning bereikt wordt kan permanente schade aan de condensator het resultaat zijn. De doorslagspanning van een condensator is rechtstreeks evenredig met de afstand tussen de platen. Hoe verder de platen uit elkaar staan, hoe groter de doorslagspanning.



*Figuur 3-8: Capaciteit is omgekeerd evenredig met de afstand **d** tussen twee platen*

Diëlektrische constante ε

De isolatie tussen de platen wordt het diëlektricum genoemd. Elk diëlektrisch materiaal heeft de mogelijkheid om de elektrische krachtlijnen (veldlijnen) te concentreren tussen de tegengesteld geladen platen van de condensator. Hoe beter de krachtlijnen geconcentreerd worden tussen de twee platen, hoe groter de capaciteitswaarde wordt voor de energieopslag. De mate dat een bepaald materiaal het elektrisch veld kan doorlaten wordt diëlektrische constante of relatieve permittiviteit genoemd. De diëlektrische constante wordt gesymboliseerd door de Griekse letter epsilon (ε). De diëlektrische constante van vacuüm is gelijk aan $8{,}85\ \times 10^{-12}\ F/m$ en wordt gebruikt als referentiewaarde. Deze diëlektrische constante wordt voorgesteld door ε_0. De diëlektrische constante van lucht benaderd deze van vacuüm. Met de relatieve diëlektrische constante ε_r wordt aangegeven hoeveel maal deze groter is als deze van vacuüm. Vermits de diëlektrische constante van lucht deze van vacuüm heel goed benadert, is de relatieve diëlektrische constante ε_r voor lucht gelijk aan 1. Alle andere materialen hebben waarden en bepalingen ten opzichte van vacuüm of lucht. Hun diëlektrische constante wordt aangeduid ten opzichte van vacuüm en gesymboliseerd door ε_r. De formule voor de relatieve diëlektrische constante is de volgende:

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$$

Bijvoorbeeld een materiaal met ε_r gelijk aan vijf heeft een capaciteit die vijf keer groter is dan die van lucht of vacuüm. Tabel 8-1 geeft een aantal gebruikelijke diëlektrische materialen en hun typische relatieve diëlektrische constante ε_r.

Materiaal	Typische ε_r-waarde
Lucht	1
Teflon	2
Papier	2.5
Olie	4
Mica	5
Porselein	7
Glas	7.5
Aluminiumoxide	8
Tantaaloxide	26
Keramiek	1200

Tabel 3-1: Voorbeelden van ε_r – waarden

Formule voor capaciteit
Uit de fysische eigenschappen kan je afleiden dat de capaciteit van een condensator afhankelijk is van de gebruikte plaatoppervlakte, de afstand tussen de platen en het gebruikte materiaal als diëlektricum. Vermits de capaciteit recht evenredig is met de plaatoppervlakte A en de diëlektrische constante ε van het gebruikte materiaal als diëlektricum, en omgekeerd evenredig is met de afstand d tussen de platen wordt volgende formule bekomen om de capaciteit te bepalen:

$$C = \frac{A \times \varepsilon}{d}$$

Vermits ε gelijk is aan het product $\varepsilon_r \times \varepsilon_0$ wordt bekomen:

$$C = \frac{A \times \varepsilon_r \times \varepsilon_0}{d}$$

Aangezien ε_0 gelijk is aan $8{,}85 \times 10^{-12} \frac{F}{m}$ is de uiteindelijke formule :

$$C = \frac{(A \times \varepsilon_r \times 8{,}85 \times 10^{-12}\ F/m)}{d}$$

Voorbeeld 3-7:

Een condensator bestaat uit twee platen met een plaatoppervlakte van $0.01\ m^2$. Deze platen staan parallel en de afstand tussen de platen bedraagt $1{,}27 \times 10^{-5}\ m$. Als gebruik gemaakt werd van mica als diëlektricum, bepaal dan de capaciteit van de condensator in μF.

Oplossing:

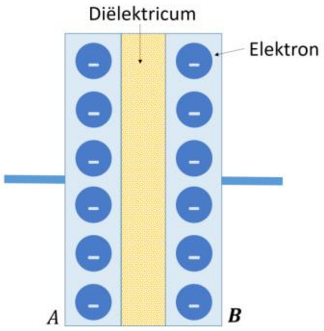
In tabel 3-1 kan je de relatieve diëlektrische constante ε_r aflezen voor mica. Deze bedraagt 5. Via de vergelijking $9-3$ kan je de capaciteit bepalen:

$$C = \frac{A \times \varepsilon_r \times 8{,}85 \times 10^{-12}\ F/m}{d}$$

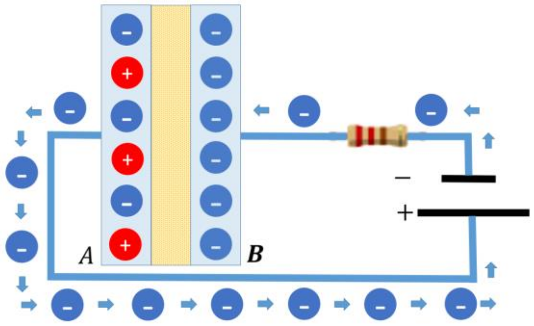
$$C = \frac{(0{,}01\ m^2) \times 5 \times 8{,}85 \times 10^{-12}\ F/m}{1{,}27 \times 10^{-5}\ m} = 3{,}48 \times 10^{-8}\ F = 0{,}035\ \mu F$$

3.2.1.2 Hoe slaat een condensator lading op?

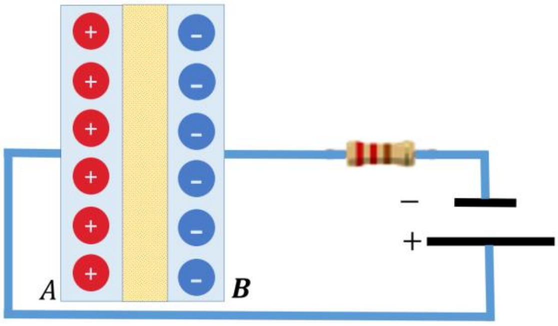
In de neutrale stand hebben beide platen van een condensator een gelijk aantal vrije elektronen. Dit is weergegeven in figuur 3-9 (a). Wanneer de condensator wordt aangesloten op een gelijkspanningsbron via een weerstand, zoals in figuur 3-9 (b) is weergegeven, worden elektronen uit plaat A (links) weggetrokken en evenveel elektronen komen op plaat B (rechts) terecht.



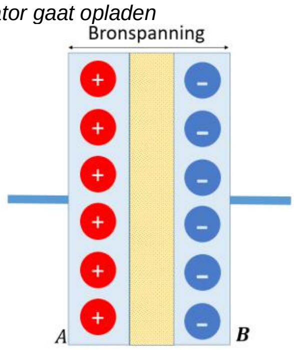
a) Een ongeladen condensator heeft dezelfde lading op beide platen



b) Verbonden met een spanningsbron: elektronen gaan stromen van plaat A naar plaat B en de condensator gaat opladen



c) Als condensator volledig opgeladen is tot de bronspanning vloeit er geen stroom meer



d) In het ideale geval behoudt een condensator zijn lading als hij is losgekoppeld van de spanningsbron

Figuur 3-9: Principe van opslaan van lading door een condensator

Tijdens het laadproces stromen de elektronen alleen door verbindingskabels en de spanningsbron. Door het diëlektricum van de condensator stroomt er geen lading vermits dit een isolator is. De beweging van elektronen wordt beëindigd wanneer de spanning over de condensator gelijk is aan de voedingsspanning zoals in figuur 3-9 (c) wordt weergegeven. Als de condensator wordt losgekoppeld van de bron behoudt hij de opgeslagen lading gedurende een lange periode en staat er nog steeds spanning over de condensator zoals getoond wordt in figuur 3-9 (d). De tijd van het bijhouden van de opgeslagen lading is afhankelijk van het type condensator. Een opgeladen condensator kan tijdelijk fungeren als een batterij.

3.2.1.3 Capaciteit

De hoeveelheid lading dat een condensator kan opslaan per spanningseenheid over zijn platen wordt capaciteit genoemd en voorgesteld door C. De capaciteit is een maateenheid voor condensatoren aangaande de mogelijkheid om lading te bewaren. Hoe meer lading per spanningseenheid een condensator kan opslaan, hoe groter zijn capaciteit. Wiskundig kan de capaciteit als volgt worden voorgesteld:

$$C = \frac{Q}{U}$$

Hierin stelt C de capaciteit voor, Q de hoeveelheid lading en U de opgeladen spanning. De eenheid van capaciteit is Farad (F). Eèn Farad is de hoeveelheid capaciteit wanneer één coulomb lading wordt bewaard op de platen van een condensator terwijl er één Volt over staat. De meeste condensatoren in elektronische schakelingen hebben capaciteitswaarden in de orde van microfarad (μF) tot picofarad (pF).

Voorbeeld 3-8

a) Een bepaalde condensator bewaard 50 μC lading terwijl er 10 V over zijn platen verschijnt. Wat is zijn capaciteitswaarde?
b) Een 47 nF condensator heeft 80 V over zijn platen staan. Hoeveel lading is er op zijn platen opgeslagen?
c) Bepaal de spanning over een 220 pF condensator als er 0,04 μC lading is opgeslagen.

Oplossing:

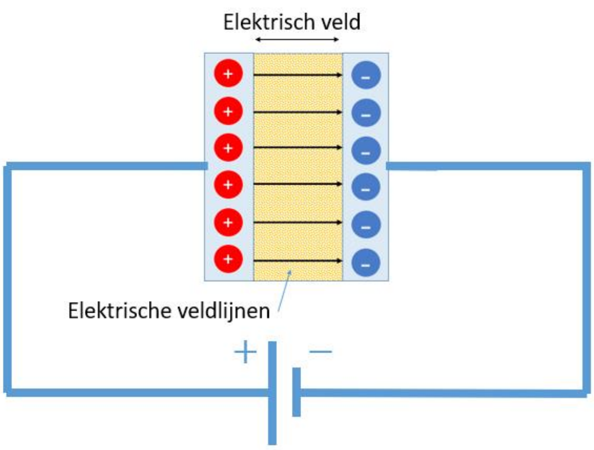
a) $C = \frac{Q}{U} = \frac{50\ \mu C}{10\ V} = 5\ \mu F$

b) $Q = C \times U = 47\ nF \times 80\ V = 3{,}76\ \mu C$

c) $U = \frac{Q}{C} = \frac{0{,}04\ \mu C}{220\ pF} = 181{,}81\ V$

3.2.1.4 Hoe kan een condensator energie opslaan?

Een condensator slaat energie op in een elektrisch veld dat ontstaat door de tegengestelde ladingen opgeslagen op de twee platen. Het elektrisch veld wordt weergegeven door krachtlijnen tussen de positieve en negatieve ladingen en is geconcentreerd in het diëlektricum, zoals getoond in figuur 3-10.



Figuur 3-10 : Het elektrisch veld slaat energie op in een condensator

De platen van de condensator in figuur 3-10 hebben een bepaalde lading gekregen doordat zij verbonden zijn met de gelijkspanningsbron. De grootte van het elektrisch veld is direct gerelateerd aan de grootte van de condensator en het kwadraat van de spanning. Dit is weergeven in volgende vergelijking :

$$W = \frac{1}{2} \times C \times U^2$$

Als de capaciteit C in Farad wordt weergegeven en de spanning U in Volt, dan wordt de energie W in Joules uitgedrukt.

3.2.1.5 De werkspanning

Elke condensator heeft een limiet op de hoeveelheid spanning hij aankan over de platen. De werkspanning specificeert de maximale gelijkspanning die kan worden toegepast zonder risico van beschadiging van de component. Deze maximale spanning wordt gewoonlijk de doorslagspanning of werkspanning genoemd. Als de opgegeven werkspanning overschreden wordt, kan permanente schade aan de condensator het resultaat zijn.
Vooraleer je een condensator in een schakeling gebruikt moet je rekening houden met zowel de capaciteit als de spanning. De keuze van de capaciteitswaarde is gebaseerd op bepaalde eisen die aan de schakeling worden gesteld. De werkspanning van de condensator moet steeds hoger zijn dan de maximale spanning die verwacht wordt in een bepaalde toepassing.

Diëlektrische sterkte
De doorslagspanning van een condensator wordt bepaald door de diëlektrische sterkte van het diëlektrisch materiaal. De diëlektrische sterkte wordt uitgedrukt in V/m of in MV/m. In tabel 8-2 worden typische waarden voor diverse materialen weergegeven. De exacte waarden variëren afhankelijk van de specifieke samenstelling van het materiaal.
De diëlektrische sterkte van een condensator kan het best worden verklaard door een voorbeeld. Veronderstel dat een bepaalde condensator een plaatscheiding heeft van $0{,}1\ mm$ en het diëlektrisch materiaal is mica. Volgens de tabel 8-2 heeft mica een diëlektrische sterkte van $59{,}1 MV/m$. Voor een dikte van het diëlektricum van $0{,}1\ mm$ komt dit overeen met een doorslagspanning van $5{,}910\ kV$

Materiaal	Diëlektrische sterkte (MV/m)
Lucht	3,152
Olie	14,775
Keramiek	39,4
Papier (parafine)	47,28
Mica	59,1
Teflon	59,1
Glas	78,8

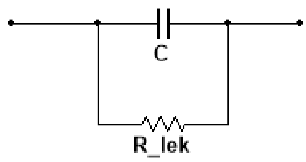
Tabel 3-2: de diëlektrische sterkte van bepaalde materiaalsoorten die gebruikt worden als diëlektricum bij condensatoren.

3.2.1.6 Temperatuurscoëfficiënt

De temperatuurscoëfficiënt geeft de mate aan van een verandering in capaciteitswaarde bij verandering van temperatuur. Een positieve temperatuurscoëfficiënt betekent dat de capaciteit toeneemt met een temperatuurstijging en een negatieve temperatuurscoëfficiënt betekent dat de capaciteit afneemt bij een temperatuurstijging. Temperatuurcoëfficiënten worden doorgaans gespecificeerd in parts per million (ppm) per graad Celsius ($\frac{ppm}{°C}$).
Stel bijvoorbeeld dat een $1\ \mu F$ condensator een negatieve temperatuurscoëfficiënt heeft van $150 \frac{ppm}{°C}$. Hiervoor geldt dat voor elke graad Celsius temperatuurstijging de capaciteit afneemt met $150\ pF$ (er zijn een milioen picofarads in één microfarad)

3.2.1.7 Lekkage

Geen isolatiemateriaal is perfect. Het diëlektricum van een condensator zal een kleine hoeveelheid stroom geleiden. Zo zal de lading op een condensator uiteindelijk weglekken. Sommige soorten condensatoren hebben een hogere lekkage dan andere condensatoren. Een equivalente schakeling van een niet ideale condensator wordt getoond in figuur 3-11. De parallelweerstand R_{lek} is de weerstand van het diëlektrisch materiaal waardoor de lekstroom vloeit. Deze weerstand is een extreem hoge weerstand van honderden $k\Omega$ of meer.



Figuur 3-11 : equivalent schema voor een niet-ideale condensator

3.2.1.8 De condensator als sensor

Capacitieve sensoren zijn gebruikelijk in systemen die hoeveelheden meten zoals druk, vochtigheid, vloeistofniveau en nog veel meer. Ook bewegingssensoren kunnen op het principe van capaciteit werken. Een capacitieve sensor is een variabele condensator die voldoet aan de fysische prikkel. Bij een druksensor vormt een geleidend flexibel diafragma één plaat van de condensator. De andere plaat is vast bevestigd. Druk zorgt ervoor dat het membraan beweegt waardoor de capaciteit verandert. De verandering in capaciteit kan worden gemeten door een externe schakeling. Bij een bewegingssensor is één plaat vastgemaakt aan een as. Hierdoor zal bij een bepaalde beweging de plaat verdraaien ten opzichte van de andere plaat waardoor de capaciteit verandert. Bij vloeistofsensoren verandert het diëlektricum als het vloeistofniveau de sensor bereikt.

3.2.1.9 Test jezelf : Algemene opbouw van een condensator

1. **Definieer capaciteit.**
2. **Hoeveel energie in Joule wordt opgeslagen door een $10\ nF$ condensator als er $15\ V$ over zijn platen staat?**

3. **Als de plaatafstand van een condensator vergroot, stijgt dan de capaciteit of daalt deze?**
4. **Als het plaatoppervlak van een condensator wordt vergroot, stijgt dan de capaciteit of daalt deze?**
5. **De platen van een keramische condensator staan $50\ \mu m$ uit elkaar. Wat is de typische doorslagspanning dan van deze condensator?**

3.2.2 Serie- en parallelschakelen van condensatoren

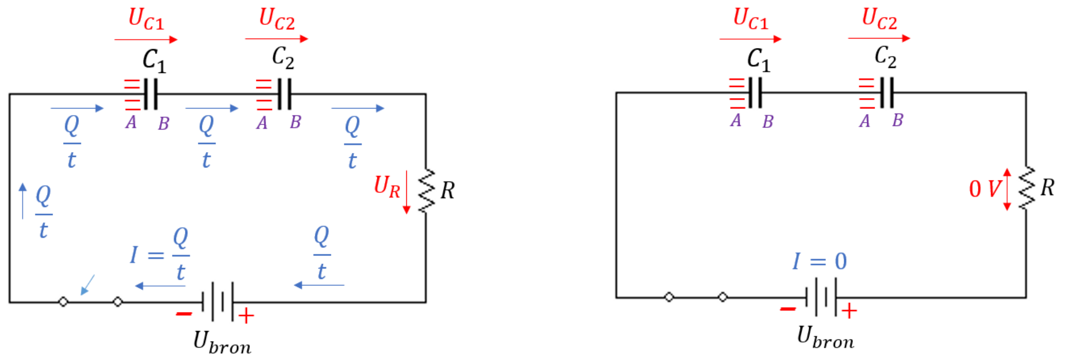
3.2.2.1 Serieschakeling van condensatoren

De totale capaciteit van een aantal in serie geschakelde condensatoren is steeds kleiner dan de kleinste individuele capaciteit van de in serie geschakelde condensatoren. In serie geschakelde condensatoren verdelen de spanning over hun platen omgekeerd evenredig met hun capaciteitswaarde. De grootste condensator in serie zal bijgevolg minder spanning bevatten dan de condensatoren in serie met een kleinere capaciteit dan deze grootste condensator.

Wat is belangrijk?

- **Je berekent de totale vervangingscapaciteit van een aantal in serie geschakelde condensatoren.**
- **Je bepaalt de spanning per condensator van een aantal in serie geschakelde condensatoren.**

Stel twee condensatoren in serie geschakeld tezamen met een weerstand over een gelijkspanningsbron zoals in figuur 3-12 is weergegeven. In eerste instantie staat de schakelaar open en zijn de condensatoren volledig ontladen. Van zodra de schakelaar wordt gesloten (zie figuur 3-12 (a)) begint er stroom door de schakeling te vloeien.



(a) *Tijdens het opladen is de stroom $I = \frac{Q}{t}$ overal hetzelfde. De condensatoren zijn aan het opladen*

(b) *Eenmaal opgeladen hebben beide condensatoren dezelfde hoeveelheid lading ($Q_T = Q_1 = Q_2$). Er vloeit geen stroom meer waardoor $U_R = 0V$.*

Figuur 3-12 : ladingsverloop bij condensatoren in serie

Vermits het een serieschakeling is vloeit de stroom door alle componenten met dezelfde stroomwaarde $\frac{Q}{t}$. Dit betekent dat dezelfde hoeveelheid negatieve lading op plaat A van beide condensatoren terecht komt. De hoeveelheid negatieve lading die op plaat A terecht komt van condensator C_1 zorgt ervoor dat eenzelfde hoeveelheid negatieve lading zich verplaats van plaat B van C_1 naar plaat A van C_2. Dit zorgt ervoor dat eenzelfde hoeveelheid negatieve lading van plaat B van C_2 verplaatst wordt door de weerstand R naar de positieve klem van de spanningsbron. Het resultaat van dit alles is dat over een bepaalde tijdsperiode gezien de hoeveelheid lading opgeslagen door C_1 gelijk is aan de hoeveelheid lading opgeslagen door C_2 en gelijk is aan de totale hoeveelheid lading Q_T die gedurende deze tijdsperiode verplaatst is geweest. In formulevorm:

$$Q_T = Q_1 = Q_2$$

Terwijl de condensatoren opladen stijgt de spanningsval tussen hun platen. De grootte van de spanningsval over elk van de condensatoren is afhankelijk van hun capaciteitswaarde en de hoeveelheid lading zij opgenomen hebben. De spanningsval kan bepaald worden via volgende formule :

$$U = \frac{Q}{C}$$

Figuur 3-12 (b) geeft de toestand weer wanneer beide condensatoren opgeladen zijn. De som van de spanningsvallen over beide condensatoren is dan gelijk aan bronspanning. Er geen spanningsverschil meer ten opzichte van de bronspanning waardoor er ook geen stroom meer vloeit. Vermits de stroom herleid is naar nul, staat er ook geen spanningsval meer over de weerstand.
Via de spanningswet van Kirchhoff kan je de spanningsvallen neerschrijven nadat de condensatoren samen opgeladen zijn tot de aangelegde bronspanning. Men bekomt het volgende:

$$U_{bron} = U_{C1} + U_{C2}$$

Herinner dat door het feit er geen stroom meer vloeit, de spanning over de weerstand gelijk is aan $0\ V$.
Vervangen we in bovenstaande formule de spanning door zijn equivalent inzake de verhouding van lading op capaciteit. Herinner eveneens dat de hoeveelheid lading in beide condensatoren gelijk is. De bronspanning kan je vervangen door de verhouding van de lading over de totale capaciteit C_T van de serieschakeling. Aanpassen van bovenstaande formule levert het volgende op:

$$\frac{Q}{C_T} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

Vermits de lading overal gelijk is:

$$\frac{1}{C_T} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Uitwerken naar C_T:

$$C_T = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

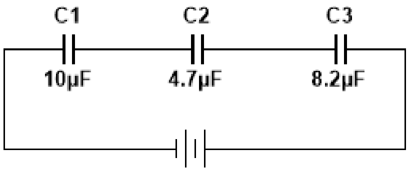
Meer algemeen is de uiteindelijke formule voor de serieschakeling van condensatoren gelijk aan:

$$C_T = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots + \frac{1}{C_n}}$$

Hoewel meer dan twee condensatoren in serie eerder zeldzaam is in elektronische schakelingen, moet je wel bewust zijn van de algemene formule indien de situatie zich toch zou voordoen. Merk op dat de formule voor het bepalen van de vervangingscapaciteit van een serieschakeling van condensatoren analoog is als de formule voor het bepalen van de vervangingsweerstand van een aantal weerstanden in parallel. Dit betekent dan ook dat de totale seriecapaciteit C_T steeds kleiner zal zijn dan de kleinste capaciteit in de serieschakeling.

Voorbeeld 3-9

Bepaal de totale capaciteit van de serieschakeling van condensatoren in figuur vb-3-2.



Figuur vb-3-2

Oplossing:

$$C_T = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}} = \frac{1}{\frac{1}{10\ \mu F} + \frac{1}{4{,}7\ \mu F} + \frac{1}{8{,}2\ \mu F}} = 2{,}3\ \mu F$$

De spanning over in serie geschakelde condensatoren

De spanning over elke in serie geschakelde condensator is afhankelijk van de capaciteitswaarde volgens de formule $U = \frac{Q}{C}$.

Vermits de opgeslagen lading in iedere condensator van de serieschakeling van condensatoren dezelfde is betekent dit dat ook de totale capaciteit van de serieschakeling deze dezelfde lading heeft. Stel drie condensatoren in serie dan kan je schrijven:

$$Q_T = Q_1 = Q_2 = Q_3$$

De opgeslagen lading kan je schrijven in functie van de capaciteit en de spanning die er over staat:

$$U_{bron} \times C_T = U_{C1} \times C_1 = U_{C2} \times C_2 = U_{C3} \times C_3$$

Hieruit kan je de spanning per condensator afleiden in functie van eigen capaciteit, totale capaciteit en bronspanning. Immers :

$$U_{bron} \times C_T = U_{C1} \times C_1$$

Waardoor :

$$U_{C1} = \frac{C_t}{C_1} \times U_{bron}$$

Naar analogie kan je voor U_{C2} en U_{C3} schrijven:

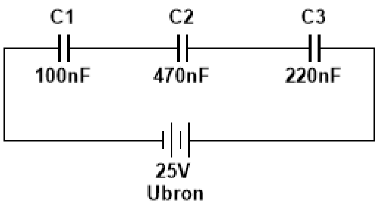
$$U_{C2} = \frac{C_t}{C_2} \times U_{bron} \text{ en } U_{C3} = \frac{C_t}{C_3} \times U_{bron}$$

Meer algemeen kan je dan de spanning vinden over C_x in een serieschakeling van n condensatoren:

$$U_{Cx} = \frac{C_T}{C_x} \times U_{bron}$$

Voorbeeld 3-10

Bepaal de spanning over iedere condensator in figuur vb-3-3



Figuur vb-3-3

Oplossing:

$$C_T = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}} = \frac{1}{\frac{1}{100\ nF} + \frac{1}{470\ nF} + \frac{1}{220\ nF}} \approx 60\ nF$$

$$U_{C1} = \frac{C_t}{C_1} \times U_{bron} = \frac{60\ nF}{100\ nF} \times 25\ V = 15\ V$$

$$U_{C2} = \frac{C_t}{C_2} \times U_{bron} = \frac{60\ nF}{470\ nF} \times 25\ V = 3{,}19\ V$$

$$U_{C3} = \frac{C_t}{C_3} \times U_{bron} = \frac{60\ nF}{220\ nF} \times 25\ V = 6{,}81\ V$$

3.2.2.2 Test jezelf : serieschakeling van condensatoren

1. **Is de totale capaciteit van in serie geschakelde condensatoren groter of kleiner dan de kleinste condensator in de serieschakeling?**
2. **Een condensator van $100\ pF$, $220\ pF$ en $560\ pF$ staan in serie. Bereken de totale capaciteit van de serieschakeling.**
3. **Een condensator van $10\ nF$ en $15\ nF$ staan in serie. Bereken de totale capaciteit van de serieschakeling.**
4. **Bepaal de spanning over de $10\ nF$ condensator in vraag 3 als er $10\ V$ is aangesloten over beide condensatoren.**

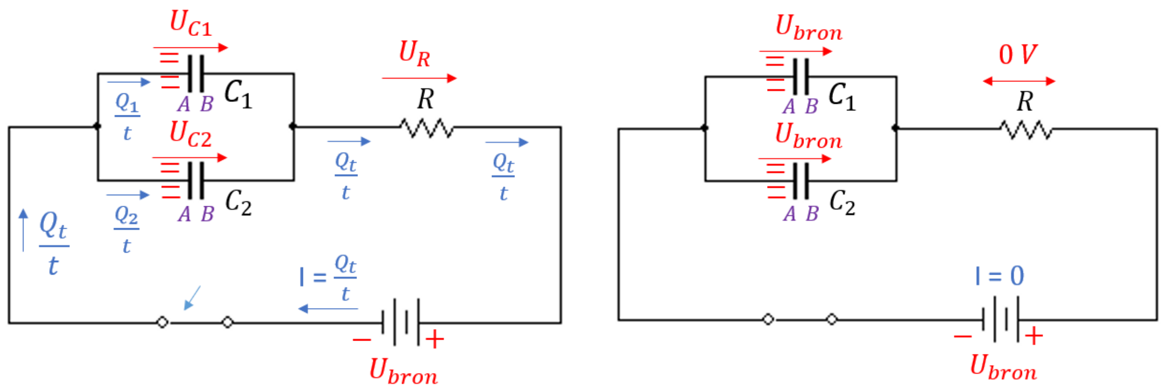
3.2.2.3 Parallelschakelen van condensatoren

De totale capaciteit van een aantal in parallel geschakelde condensatoren is gelijk aan de som van alle capaciteitswaarden die in parallel staan. De spanning over iedere in parallel geschakelde condensator is gelijk aan de bronspanning die gebruikt wordt over deze parallel geschakelde condensatoren.

Wat is belangrijk?

- **Je berekent de totale vervangingscapaciteit van een aantal in parallel geschakelde condensatoren.**

In figuur 3-13 (a) zie je twee condensatoren in parallel geschakeld. Deze parallelschakeling is in serie met een weerstand aangesloten op de bronspanning. Van zodra de schakelaar gesloten is vloeit er een stroom door de schakeling. Vermits C_1 parallel staat met C_2 splitst de totale stroom zich in een stroom I_{C1} door C_1 en een stroom I_{C2} door C_2. Dit betekent dat vanaf het sluiten van de schakelaar een bepaalde hoeveelheid totale lading Q_T zich beweegt naar de condensatoren toe. Een deel van deze lading, namelijk de hoeveelheid lading Q_1 beweegt zich naar de condensator C_1 en het overige deel van deze lading (Q_2) naar condensator C_2.



(a) *De hoeveelheid lading over iedere condensator in parallel is recht evenredig met zijn capaciteitswaarde*

(b) *Eens de condensatoren opgeladen vloeit er geen stroom meer. De totale opgeladen lading is de som van de afzonderlijke ladingen van de parallelcondensatoren*

Figuur 3-13 : ladingsverloop bij condensatoren in parallel

Vermits beide condensatoren in parallel staan hebben ze dezelfde spanning over zich. Aangezien $Q = C \times U$ en U hetzelfde is bij de parallelschakeling, zal de condensator met de grootste capaciteitswaarde de meeste lading bevatten. Achter de parallelschakeling komen beide ladingsbewegingen terug samen en vloeien via de weerstand naar de positieve klem van de spanningbron. Zolang de spanning over de condensatoren niet gelijk is aan de bronspanning zal er stroom door de weerstand vloeien en staat er een spanningsval over de weerstand. Eens de condensatoren opgeladen zijn tot de bronspanning, zie figuur 3-13 (b), vloeit er geen stroom meer door de schakeling en staat over de weerstand geen spanning meer.
Om de totale capaciteit te bepalen bij een parallelschakeling van condensatoren wordt vertrokken van de totale lading. De som van de deelladingen in de condensatoren is gelijk aan de totale lading Q_T. In formulevorm:

$$Q_T = Q_1 + Q_2$$

Wanneer de condensatoren volledig opgeladen zijn, is de spanning over deze condensatoren gelijk aan de bronspanning. Vervangen we de lading in voorgaande vergelijking door de het product van capaciteit met spanning bekomen we volgende formule:

$$C_T \times U_{bron} = C_1 \times U_{bron} + C_2 \times U_{bron}$$

Wegdelen van U_{bron} :

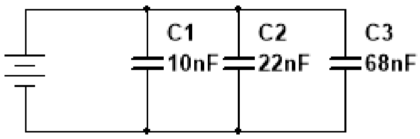
$$C_T = C_1 + C_2$$

Algemeen is de formule voor de totale capaciteit van een parallelschakeling met n condensatoren :

$$C_T = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots + C_n$$

Voorbeeld 3-11

Bepaal de totale capaciteit van de parallelschakeling van condensatoren in figuur vb-3-4.



Figuur vb-3-4

Oplossing:

$$C_T = C_1 + C_2 + C_3 = 10\ nF + 22\ nF + 68\ nF = 100\ nF$$

3.2.2.4 Test jezelf : parallelschakelen van condensatoren

1. Hoe wordt de totale capaciteit in parallel bepaald?

2. **Voor een bepaalde toepassing heb je een condensator van $0.05\ \mu F$ nodig. Je beschikt enkel over condensatoren van $10\ nF$. Hoe kan je de capaciteit bekomen die je nodig hebt?**
3. **De volgende condensatoren staan in parallel : $10\ pF$, $56\ pF$, $1\ nF$ en $33\ pF$. Wat is C_T?**

3.2.3 Het gedrag van condensatoren op gelijkstroom

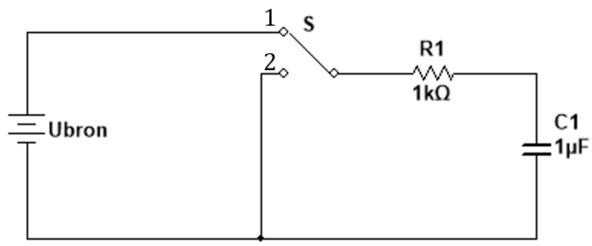
Wanneer een condensator verbonden wordt met een gelijkspanningsbron zal deze zich beginnen op te laden. De opbouw van de lading op zijn platen gebeurt op een voorspelbare manier die afhankelijk is van de capaciteit en de weerstand in het stroompad waarlangs de condensator zich aan het opladen is.

Wat is belangrijk?

- **Je verklaart het ladings- en ontladingsverloop van een condensator.**
- **Je zegt de definitie van tijdsconstante (RC of τ) op.**
- **Je verklaart het verband tussen tijdsconstante en het laden of ontladen van een condensator.**
- **Je verklaart waarom een condensator gelijkstroom blokkeert.**

3.2.3.1 Laden van een condensator

Indien we een condensator op een gelijkspanningsbron aansluiten dan zal de laadstroom van deze condensator niet constant blijven. Bij het aansluiten van de spanning zal de laadstroom in het begin zeer groot zijn. Bekijk hiervoor eerst de schakeling in figuur 3-14.



Figuur 3-14 : opladen van een condensator

Bepalen van de laadstroom

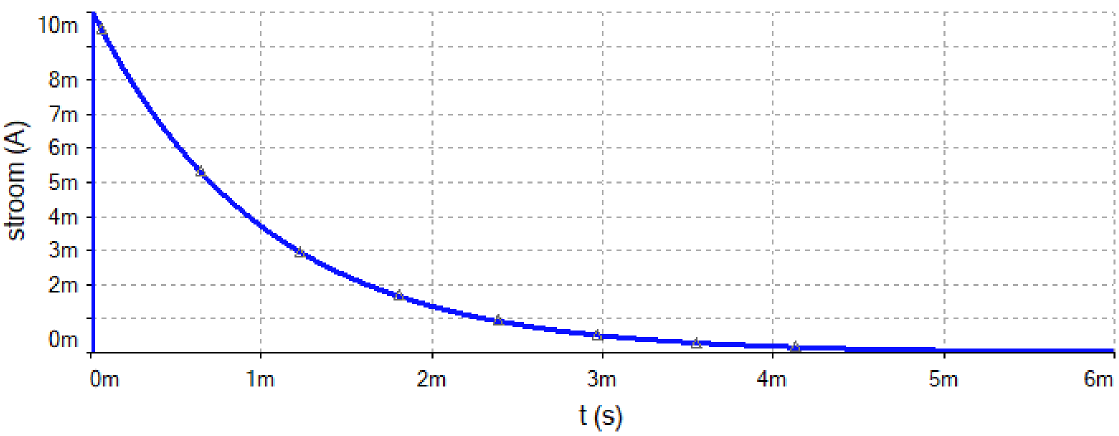
De condensator bevat op het moment dat de schakelaar in stand 1 wordt geschakeld nog geen lading. Vermits er nog geen lading aanwezig is, betekent dit dat de spanning over de condensator $0\ V$ moet zijn. Immers uit $Q = C \times U$ volgt dat als Q gelijk is aan nul coulomb de spanning nul volt moet zijn. Het gevolg hiervan is dat de volledige bronspanning op dit eerste moment over de weerstand moet staan (spanningswet van Kirchhoff). Vanaf het moment dat de stroom door de weerstand vloeit kan je de stroom berekenen. Als op het moment $t = 0$ de schakelaar in stand 1 wordt gebracht, is op dat moment de stroom te vinden via de wet van Ohm :

$$I = \frac{U_{bron}}{R_1}$$

Dit is de maximale laadstroom die er zal vloeien tijdens het laden van de condensator. Deze stroom wordt de maximale stroom I_{max} genoemd.
De stroom zal echter door het laden van de condensator gaan dalen. Er komen immers steeds meer ladingsdeeltjes op de condensator waardoor er over deze condensator een spanning komt te staan. Volgens de spanningswet van Kirchhoff zal door het feit dat de spanning over C_1 groter wordt, de spanning over R_1 evenredig gaan dalen waardoor de stroom doorheen R_1 ook gaat dalen. Naarmate dat de condensator zich verder aan het opladen is zal de stroom ook steeds meer en meer dalen. Op het moment dat de condensator C_1 volledig is opgeladen staat de volledige bronspanning over de condensator. Hierdoor is er geen spanningsval meer over de weerstand R_1 en is de stroom erdoor gelijk aan nul. Je kan hieruit concluderen dat vanaf je de schakelaar in stand 1 brengt er een bepaald overgangsmoment is. Dit overgangsmoment bestaat er in dat er stroom vloeit totdat de condensator volledig is opgeladen. Eens de condensator volledig is opgeladen gedraagt deze zich als een open keten voor de gelijkstroom en wordt deze niet meer doorgelaten. Het overgangsmoment wordt bepaald door de capaciteitswaarde en de weerstand waarlangs wordt opgeladen. Algemeen kan je zeggen dat dit moment relatief van korte duur is en dat een condensator gelijkstroom blokkeert.
Hoe zit het nu met de grootte van de laadstroom? Vanaf het moment dat de schakelaar in stand 1 is gebracht, vloeit er een stroom naar de condensator. Op het eerste moment is deze maximaal. Vermits de condensator zich exponentieel oplaadt, zal de stroom evenredig exponentieel afnemen tot deze de waarde nul bereikt. Algemeen kan het exponentieel verloop van de stroom op volgende wijze geformuleerd worden:

$$I = I_{max} \times e^{-\frac{t}{R \times C}}$$

Hierbij is I_{max} de stroom die er vloeit op het eerste moment dat de condensator begint op te laden en is te vinden door de verhouding aangelegde spanning ten opzichte de weerstand waarlangs de condensator zich oplaad. R is de weerstand waarlangs de condensator zich oplaad en C de capaciteitswaarde van de condensator.

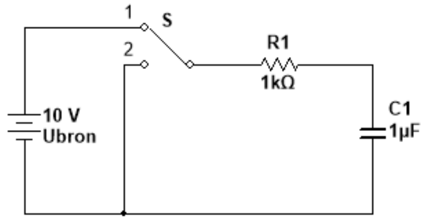


Figuur 3-15 : stroomverloop tijdens het laden van de condensator van de schakeling in figuur 3-14.

Het getal e is een belangrijke wiskundige constante en is het grondtal van de natuurlijke logaritme en heeft een benaderende waarde: $e = 2{,}718281828459$ ... Je vindt e op het rekenmachine als e^x of het inverse van ln.
Met de gegeven formule ben je in staat om op verschillende tijdsmomenten tijdens het laden van de condensator de stroom door de condensator of weerstand te bepalen. Ook de spanning over de weerstand kan je met deze formule bepalen. De figuur 3-15 geeft het stroomverloop tijdens het laden weer van de schakeling in figuur 3-14. Er is verondersteld dat de bronspanning gelijk is aan $10\ V$.
Merk op dat op het moment $t = 0\ ms$, als de schakelaar wordt geplaatst in stand 1, de stroom zeer snel verandert naar zijn maximale waarde ($10\ mA$) om vervolgens exponentieel te dalen naar $0\ mA$. In dit voorbeeld is na een tijdsduur van $5\ ms$ de stroom herleid tot $0\ mA$

Voorbeeld 3-12

Bepaal de stroom door de condensator en de weerstand op een tijdsmoment $2\ ms$ nadat de schakelaar in stand 1 is gebracht. Veronderstel dat de condensator daarvoor volledig ontladen was.



Figuur vb-3-5

Oplossing:

Eerst wordt de maximale stroom bepaald:

$$I_{max} = \frac{U_{bron}}{R_1} = \frac{10\ V}{1\ k\Omega} = 10\ mA$$

De stroom op het tijdsmoment $t = 2\ ms$ nadat de schakelaar is gesloten:

$$I = I_{max} \times e^{-\frac{t}{R_1 \times C_1}} = 10\ mA\ \times e^{-\frac{2\ ms}{1\ k\Omega \times 1\ \mu F}} = 10\ mA\ \times e^{-\frac{2\ ms}{1\ ms}} = 1{,}35\ mA$$

Bepalen van de spanning over de condensator

Als je de vergelijking (8-8) vermenigvuldigt met de weerstandswaarde R_1 bekom je de spanning over de weerstand. In formulevorm:

$$U_{R1} = R_1 \times I_{max}\ \times e^{-\frac{t}{R_1 \times C_1}}$$

De laadspanning over de condensator kan dan gevonden worden met de spanningswet van Kirchhoff:

$$U_{bron} = U_{R1} + U_{C1}$$

$$U_{C1} = U_{bron} - U_{R1}$$

Als voor U_{R1} terug zijn wet van Ohm equivalent gebruikt wordt :

$$U_{C1} = U_{bron} - (R_1 \times I_{max} \times e^{-\frac{t}{R_1 \times C_1}})$$

Op het moment dat de stroom I_{max} vloeit, staat alle spanning over de weerstand. Bijgevolg is op dat moment de spanning over de weerstand gelijk aan de bronspanning. Hieruit volgt:

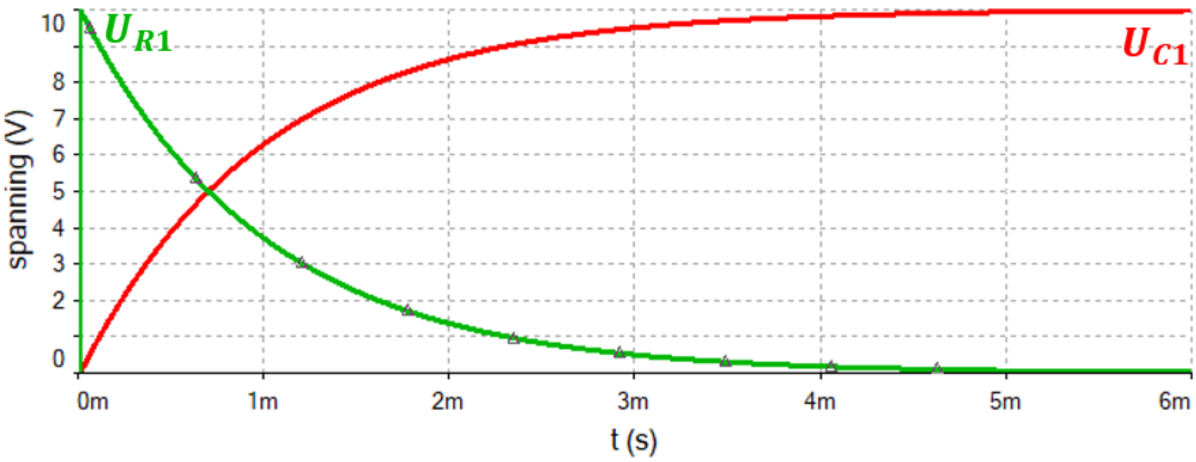
$$U_{bron} = R_1 \times I_{max}$$

Voor U_{c1} wordt dan verkregen:

$$U_{C1} = U_{bron} - U_{bron} \times e^{-\frac{t}{R_1 \times C_1}}$$

Of:

$$U_{C1} = U_{bron} \times \left(1 - e^{-\frac{t}{R_1 \times C_1}}\right)$$



Figuur 3-16 : spanningsverloop tijdens het laden over de condensator en weerstand van de schakeling in figuur 3-14 (in de veronderstelling dat de bronspanning gelijk is aan $10\ V$.

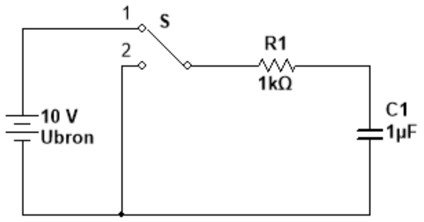
Met bovenstaande formule ben je in staat om op verschillende tijdsmomenten de spanning tijdens het laden van de condensator te bepalen. Ken je de spanning op een bepaald tijdsmoment over de condensator, dan heb je via de spanningswet van Kirchhoff ook snel de spanning over de weerstand. De algemene formule om de spanning te bepalen tijdens het laden van de condensator is:

$$U_C = U_{bron} \times \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

Figuur 3-16 toont het spanningsverloop over de condensator en de weerstand tijdens het laadproces. Merk op dat de spanning over de weerstand tegengesteld verloopt dan de spanning over de condensator.

Voorbeeld 3-16

Bepaal de spanning over de condensator (figuur vb-3-6) en de weerstand op een tijdsmoment 3 ms nadat de schakelaar in stand 1 is gebracht. Veronderstel dat de condensator daarvoor volledig ontladen was.



Figuur vb-3-6

Oplossing:

$$U_{C1} = U_{bron} \times \left(1 - e^{-\frac{t}{R1 \times C1}}\right) = 10\ V \times \left(1 - e^{-\frac{3\ ms}{1\ k\Omega \times 1\ \mu F}}\right) = 9{,}5\ V$$

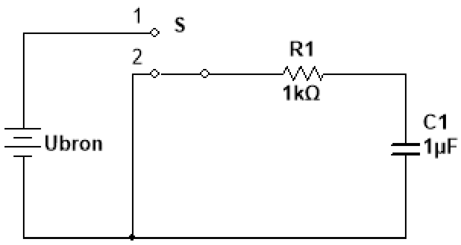
$$U_{R1} = U_{bron} \times e^{-\frac{t}{R1 \times C1}} = 10\ V \times e^{-\frac{3\ ms}{1\ k\Omega \times 1\ \mu F}} = 0{,}5\ V$$

Opmerking: U_{R1} kan ook met de spanningswet van Kirchhoff worden bepaald:

$$U_{R1} = U_{bron} - U_{C1} = 10\ V - 9{,}5\ V = 0{,}5\ V$$

3.2.3.2 Ontladen van een condensator

De condensator kan ontladen worden door de schakelaar in figuur 3-17 in stand 2 te schakelen.



Figuur 3-17: ontladen van een condensator

Stel dat tijdstip $t = 5\ ms$ het moment is dat de schakelaar in stand 2 wordt geschakeld. Vanaf dit moment zal er een ontlaadstroom vloeien door de weerstand die tegengesteld is aan de laadstroom. Dit betekent dat de spanning over de weerstand nu negatief gaat zijn omwille van de tegengestelde stroom. Merk op condensator nu fungeert als spanningsbron met de weerstand R_1 als belasting. Dit betekent dat de spanning over beide componenten dezelfde absolute waarde hebben maar tegengestel van teken. De ontlaadstroom vertrekt van de negatieve plaat van de condensator en stroomt door de weerstand naar de positieve plaat van de condensator. Door deze stroom zal het ladingsverschil op de twee platen verminderen waardoor ook het spanningsverschil tussen de twee platen zal dalen. Zolang er ladingsverschil is tussen de twee platen blijft de ontlaadstroom vloeien. Van zodra de lading op beide platen van de condensator gelijk is, is er geen spanningsverschil meer en vloeit er ook geen stroom meer door de schakeling. De condensatorspanning kan op ieder tijdsmoment als volgt worden bepaald:

$$U_{C1} = U_{C1max} \times e^{-\frac{t}{R1C1}}$$

Hierin is U_{C1max} de spanning die over de condensator staat op het moment dat de schakelaar in stand 2 wordt geplaatst. Als de condensator volledig is opgeladen is U_{C1max} gelijk aan de bronspanning. Dit is echter niet altijd het geval. Als de schakelaar wordt omgeschakeld nog voor de condensator volledig opgeladen is, is de spanning over de condensator bij het begin van het ontladen gelijk aan de spanningswaarde tot waar de condensator is opgeladen in plaats van de bronspanning.
De tegengestelde spanning over de weerstand is als volgt te bepalen:

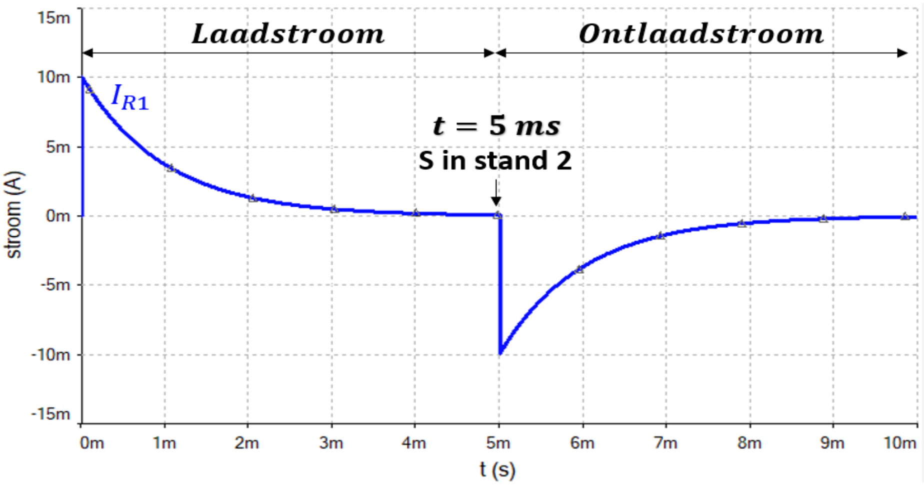
$$U_{R1} = -U_{C1max} \times e^{-\frac{t}{R1C1}}$$

De stroom op ieder tijdsmoment kan als volgt bepaald worden:

$$I = -I_{Cmax} \times e^{-\frac{t}{R1C1}}$$

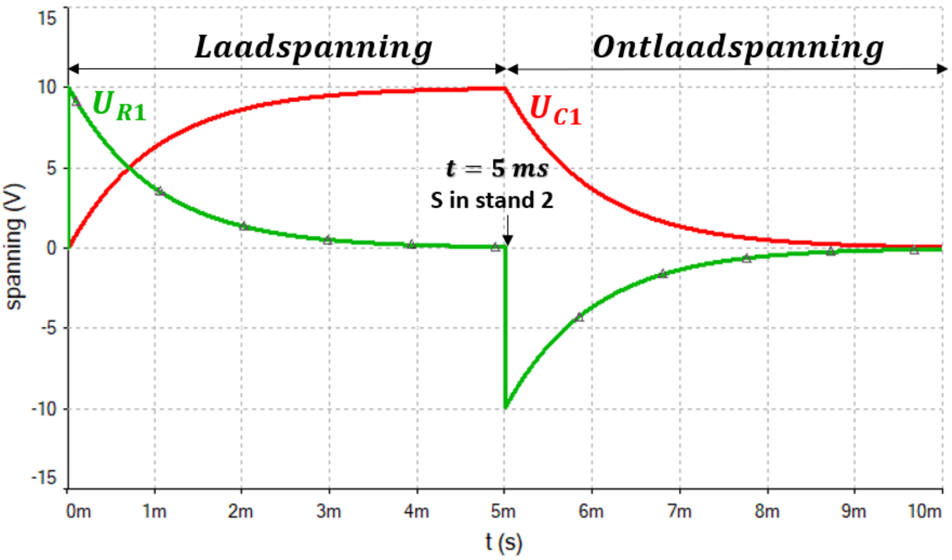
$$I = -\frac{U_{Cmax}}{R_1} \times e^{-\frac{t}{R1C1}}$$

Het stroomverloop tijdens het laden en ontladen is in figuur 3-18 weergegeven



Figuur 3-18 : laad- en ontlaadstroomverloop van de schakeling van figuur 3-14

Het laad- en ontladingsverloop van de condensator C_1 en het spanningsverloop over R_1 van de schakeling in figuur 3-14 is in figuur 3-19 weergegeven.



Figuur 3-19 : laad- en ontlaadspanningsverloop van de schakeling van figuur 3-14

3.2.3.3 De RC-tijdsconstante

In een praktische situatie staat er geen capaciteit zonder enige weerstand in een schakeling. Ook al is er niet direct een weerstand zichtbaar, toch is deze aanwezig. Al was het maar de kleine weerstand van een printbaan. Daarom is er bij het laden en ontladen van de condensator steeds een bepaalde weerstand aanwezig met een bepaalde invloed op dit laad- en ontlaadproces. De weerstand introduceert een tijdselement in het laden- en ontladen van een condensator. Wanneer een condensator wordt op- of ontladen via een weerstand zal er een zekere tijd nodig zijn om de condensator volledig op te laden of te ontladen. De spanning over een condensator kan niet ogenblikkelijk veranderen omdat een eindige tijd nodig is om de lading van het ene punt naar het andere te verplaatsen. De tijdconstante van de serie RC-keten bepaalt de snelheid waarmee de condensator zal opladen of ontladen. De RC-tijdsconstante is een vast tijdsinterval dat gelijk is aan het product van de weerstand en de condensator in de serie RC-kring. De tijdsconstante wordt uitgedrukt in eenheden van seconden wanneer de weerstand in Ohm is uitgedrukt en de capaciteit in Farad. Het symbool van de tijdsconstante is de Griekse letter *tau* (τ). In formulevorm:

$$\tau = R \times C$$

Merk op dat $I = Q/t$. De stroom hangt bijgevolg af van de hoeveelheid lading die verplaatst wordt in een bepaalde tijd. Wanneer de weerstand wordt verhoogd, vermindert de oplaadstroom waardoor de oplaadtijd van de condensator verhoogt. Wanneer de capaciteit wordt verhoogd, neemt de hoeveelheid lading toe. Dit heeft als gevolg dat bij éénzelfde stroom meer tijd nodig zal zijn om de condensator op te laden.

Een condensator wordt opgeladen tussen twee spanningsniveaus. De lading over de capaciteit verandert met ongeveer $63\ \%$ van zijn volledige ladingscapaciteit na een tijd gelijk aan één tijdsconstante. Dit betekent dat na $1\ \tau$ een volledig ontladen condensator opgeladen is tot $63\ \%$ van zijn volledig opgeladen waarde. Is een condensator opgeladen tot $100\ \%$, dan zal bij ontlading de condensator na $1\ \tau$ ongeveer $63\ \%$ ontladen zijn. De spanning over de condensator bedraagt dan nog $37\ \%$ van de maximaal opgeladen waarde.
Bij het gebruik van condensatoren wordt dikwijls vanuit gegaan dat deze een onderbreking voor gelijkstroom vormen zodat geen gelijkstroom door een condensator kan vloeien. In werkelijkheid blijkt dit pas te gelden na een bepaalde tijd gelijk aan $5\ \tau$. Na een tijd gelijk aan $5\ \tau$ kan je een condensator als volledig opgeladen of volledig ontladen beschouwen.

Wat als de condensator niet volledig op- of ontladen was?

Tot nu toe zijn we er van uit gegaan dat de condensator volledig opgeladen was vooraleer deze begint te ontladen of dat de condensator volledig ontladen was bij het starten van het oplaadproces. Wanneer dit niet het geval is moet je de formules voor het opladen en het ontladen aanpassen op volgende wijze: Stel dat V_{begin} de beginspanning die de condensator heeft. Voor het laden bekom je:

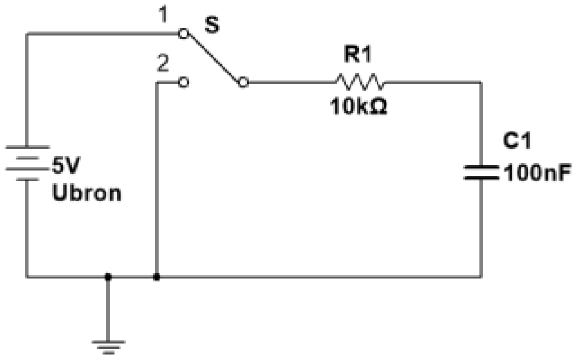
$$u_C = U_{bron} + \left(U_{begin} - U_{bron}\right) \times e^{-\frac{t}{RC}} \quad \text{en} \quad u_R = \left(U_{bron} - U_{begin}\right) \times e^{-\frac{t}{RC}}$$

Voor het ontladen :

$$u_C = U_{begin} \times e^{-\frac{t}{RC}} \text{ en } u_R = -U_{begin} \times e^{-\frac{t}{RC}}$$

Voorbeeld 3-17

Stel dat de condensator (figuur vb-3-7) volledig opgeladen was op het moment dat de schakelaar in stand twee komt te staan. Deze schakelaar wordt terug omgeschakeld naar stand 1 op het moment dat de spanning over de condensator nog 2 V is. Stel dat dit tijdsmoment t_A wordt genoemd. Bepaal de spanning over de condensator en weerstand op het moment $t = t_A + 2\ ms$.



Figuur vb-3-7

Oplossing:

Op het moment $t = t_A$ is de spanning over de condensator nog $2\ V$. Deze spanning is gelijk aan U_{begin}. Na $2\ ms$ is de spanning over de condensator gelijk aan:

$$u_C = U_{bron} + \left(U_{begin} - U_{bron}\right) \times e^{-\frac{t}{RC}} = 5\ V + (2\ V - 5\ V) \times e^{\frac{-2\ ms}{10\ k\Omega \times 100\ nF}} = 4{,}59\ V$$

De spanning over de weerstand:

$$u_R = \left(U_{bron} - U_{begin}\right) \times e^{-\frac{t}{RC}} = (5\ V - 2\ V) \times\ e^{\frac{-2\ ms}{10\ k\Omega \times 100\ nF}} = 0{,}41\ V$$

Voorbeeld 3-18

Stel de schakeling van figuur vb-3-7 en de condensator is volledig ontladen. Na hoeveel tijd staat er $1{,}5\ V$ over de condensator nadat de schakelaar in stand 1 wordt geplaatst?

Oplossing:

Invullen van de gekende gegeven :

$$u_C = U_{bron}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \rightarrow 1{,}5\ V = 5\ V(1 - e^{\frac{-t}{10\ k\Omega \times 100\ nF}})$$

$$1{,}5\ V = 5 - 5\ \times e^{\frac{-t}{10\ k\Omega \times 100\ nF}}$$

De e-macht proberen af te zonderen:

$$5\ \times e^{\frac{-t}{10\ k\Omega \times 100\ nF}} = 5 - 1{,}5\ V$$

$$e^{\frac{-t}{10\ k\Omega \times 100\ nF}} = \frac{3{,}5\ V}{5\ V}$$

Om de e-macht te verwijderen moet je van beide termen het natuurlijk logaritme (ln) nemen:

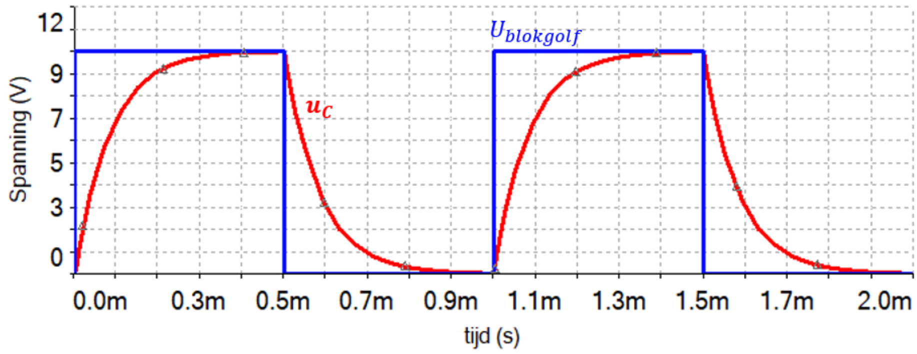
$$\ln\left(e^{\frac{-t}{10\ k\Omega \times 100\ nF}}\right) = \ln\left(\frac{3{,}5\ V}{5\ V}\right)$$

$$\frac{-t}{10\ k\Omega\ \times 100\ nF} = -0{,}36$$

$$t = 0{,}36\ \times (10\ k\Omega\ \times 100\ nF) = 0{,}36\ \times 1ms = 0{,}36\ ms$$

3.2.3.4 De response op een blokgolf

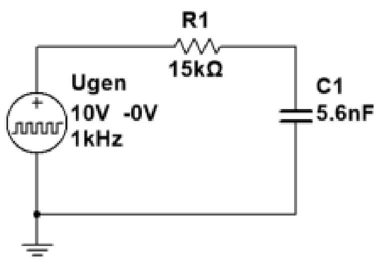
Een vaak voorkomende situatie dat illustreert dat het laden- en ontladen van een condensator exponentieel verloopt is de aansturing van een RC-schakeling met een blokgolf waarvan de periodetijd groter is dan de tijdsconstante. In figuur 3-20 is zo'n voorbeeld weergegeven. Hierin is de periodetijd van de blokgolf gelijk aan tien keer de tijdsconstante (10τ). De blokgolf kan je vergelijken met het aan en uitschakelen van de schakelaar. In tegenstelling met een gewone schakelaar biedt de generator, tijdens de momenten dat de blokgolf gelijk is aan $0\,V$, de condensator de gelegenheid om zich langs de generator te ontladen. Wanneer de blokgolf stijgt, stijgt de spanning over de condensator exponentieel naar de maximale waarde van de blokgolf in een tijd die afhankelijk is van de tijdsconstante. Telkens de blokgolf terug naar het nulniveau komt, gaat de condensatorspanning exponentieel afnemen. Dit afnemen is terug afhankelijk van de tijdsconstante. De interne weerstand van de blokgolfgenerator kan meestal worden verwaarloosd ten opzichte van de weerstandswaarde in de schakeling.



Figuur 3-20: exponentieel laden en ontladen van een condensator ten gevolge van een blokgolf

Voorbeeld 3-19

De serieschakeling van een weerstand met een condensator in figuur vb-3-8 wordt aangestuurd door een blokgolf met amplitude $10\,V$ en frequentie $1\,kHz$. Bepaal de spanning over de condensator iedere $0{,}1\,ms$ over een ganse periode. Veronderstel dat de inwendige weerstand van de blokgolfgenerator verwaarloosbaar is.



Figuur vb-3-8

Oplossing:

Eerst bepaal je de tijdsconstante van de RC-combinatie in de schakeling:

$$\tau = R_1 \times C_1 = 15\ k\Omega\ \times 5{,}6\ nF = 0{,}084\ ms$$

De periode van de blokgolf is $1\ ms$ wat ongeveer overeenkomt met $12\ \tau$. Dit betekent dat er een tijdsverloop van $6\ \tau$ is tijdens de halve periode dat de blokspanning een amplitude heeft van $10\ V$ en eveneens een tijd van $6\ \tau$. Vermits deze tijd groter is dan 5τ kan de condensator volledig op- en ontladen. Voor het laden ($U_{gen} = 10\ V$)

- $t = 0{,}1\ ms : U_{C1} = 10\ V\ \times \left(1 - e^{-\frac{0{,}1\ ms}{0{,}084\ ms}}\right) = 6{,}96\ V$
- $t = 0{,}2\ ms : U_{C1} = 10\ V\ \times \left(1 - e^{-\frac{0{,}2\ ms}{0{,}084\ ms}}\right) = 9{,}08\ V$
- $t = 0{,}3\ ms : U_{C1} = 10\ V\ \times \left(1 - e^{-\frac{0{,}3\ ms}{0{,}084\ ms}}\right) = 9{,}72\ V$
- $t = 0{,}4\ ms : U_{C1} = 10\ V\ \times \left(1 - e^{-\frac{0{,}4\ ms}{0{,}084\ ms}}\right) = 9{,}92\ V$
- $t = 0{,}5\ ms : U_{C1} = 10\ V\ \times \left(1 - e^{-\frac{0{,}5\ ms}{0{,}084\ ms}}\right) = 9{,}96\ V$

Eens de blokgolf de halve periode bereikt heeft, daalt de pulsamplitude van $10\ V$ naar $0\ V$. De condensator zal vanaf nu gaan ontladen. Door het feit de condensator start met het zich ontladen begint het tijdsmoment t voor de berekeningen terug op $0\ ms$ bij de start van het ontladen, bijgevolg wordt het tijdsmoment $t = 5\ ms$ nu terug $t = 0\ ms$. De berekeningen voor het ontladen:

- $t = 0{,}1\ ms$ (bij $6\ ms$) $: U_{C1} = 10\ V\ \times e^{-\frac{0{,}1\ ms}{0{,}084}} = 3{,}04\ V$
- $t = 0{,}2\ ms$ (bij $7\ ms$) $: U_{C1} = 10\ V\ \times e^{-\frac{0{,}2\ ms}{0{,}084}} = 0{,}92\ V$
- $t = 0{,}3\ ms$ (bij $8\ ms$) $: U_{C1} = 10\ V\ \times e^{-\frac{0{,}3\ ms}{0{,}084}} = 0{,}28\ V$
- $t = 0{,}4\ ms$ (bij $9\ ms$) $: U_{C1} = 10\ V\ \times e^{-\frac{0{,}4\ ms}{0{,}084}} = 0{,}08\ V$
- $t = 0{,}5\ ms$ (bij $10\ ms$) $: U_{C1} = 10\ V\ \times e^{-\frac{0{,}5\ ms}{0{,}084}} = 0{,}04\ V$

De grafische weergave van dit laden en ontladen van de condensator is in figuur 3-20 weergegeven.

3.2.3.5 Test jezelf : Het gedrag van condensatoren op gelijkstroom

1. **Bepaal de tijdconstante als $R = 1200\ \Omega$ en $C = 1\ nF$.**
2. **Stel dat $R = 1200\ \Omega$ en $C = 1\ nF$. Deze RC-combinatie wordt aangesloten op een bronspanning van $5\ V$.**
   a) **Na hoeveel tijd is de condensator volledig opgeladen. Stel dat deze volledig ontladen was.**
   b) **Welk is de waarde van de spanning over de condensator als deze volledig opgeladen is?**
3. **Een bepaalde schakeling heeft een tijdsconstante van $1\ ms$. Als deze opgeladen wordt met een batterijspanning van $10V$, hoeveel bedraagt de condensatorspanning dan na $2\ ms, 3\ ms, 4\ ms$ en $5\ ms$?**

4. **Een condensator is opgeladen tot $100\ V$. Als deze zich ontlaadt via een weerstand, hoeveel bedraagt dan de spanning over deze condensator na een tijd gelijk aan één tijdsconstante?**

3.2.4 Het gedrag van een condensator op wisselstroom

Een condensator blokkeert een constante stroom van zodra hij volledig is opgelaten maar laat de wisselstroom door met een zekere hoeveelheid aan oppositie, reactantie genoemd.

Wat is belangrijk?

- **Je legt uit waarom een condensator $90°$ faseverschuiving veroorzaakt tussen spanning en stroom.**
- **Je legt het begrip reactantie uit.**
- **Je berekent de waarde van de capacitieve reactantie (capacitantie)**
- **Je berekent de vervangreactantie van een aantal condensatoren in serie.**
- **Je berekent de vervangreactantie van een aantal condensatoren in parallel.**
- **Je legt het verschil uit tussen het werkelijk vermogen en het reactief vermogen.**

Wanneer over een condensator een gelijkspanning wordt aangesloten zal deze opladen met een laadstroom gelijk aan de ladingsverandering per tijdseenheid. In formulevorm:

$$i = \frac{dQ}{dt}$$

Hierin stelt dQ de steeds verminderde ladingstoevoer naar de condensator voor vermits deze steeds meer en meer opgeladen wordt terwijl dt de tijd voorstelt om deze ladingsverandering te laten plaatsvinden. Als je een wisselstroom aansluit over deze condensator, dan kan je nagaan hoe de laad- en ontlaadstroom door de condensator verloopt in functie van deze spanning. Algemeen geldt bij een condensator:

$$Q = C \times U$$

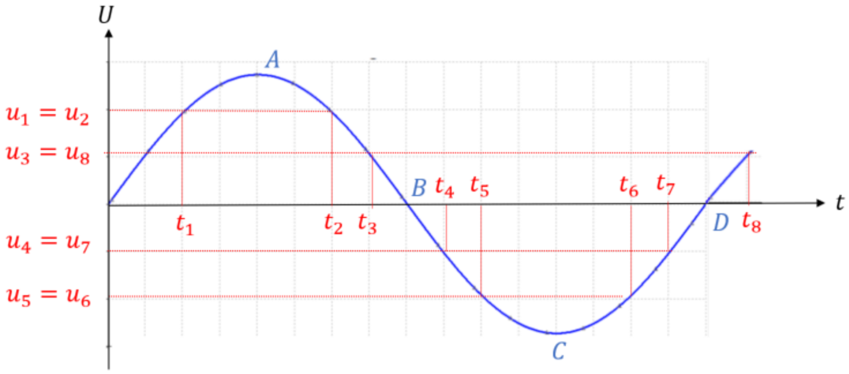
Aangezien een wisselspanning een steeds veranderende spanning in de tijd is, kan bovenstaande formule omgevormd worden tot:

$$i \times dt = C \times du$$

Of:

$$i = C \times \frac{du}{dt}$$

Dit betekent dat de momentele stroomwaarde op een bepaald punt gelijk is aan de capaciteitswaarde vermenigvuldigt met de spanningsverandering per tijdseenheid. Beschouw figuur 3-21. We gaan de stroom bepalen voor de punten A, B, C en D.



Figuur 3-21: Bepalen van de wisselstroom door de condensator

Eerst bepalen we de stroom door de condensator bij het punt A. Dit kan gedaan worden door rond dit punt een bepaalde spanningsval te nemen door bijvoorbeeld de spanning te bepalen tussen de tijdsmomenten t_1 en t_2. Merk op dat beide tijdspunten even ver van punt A liggen waardoor beide overeenkomstige momentele spanningen (u_1 en u_2) even groot zijn. Het tijdsinterval dt is dan als volgt te bepalen:

$$dt = t_2 - t_1$$

Het overeenkomstig spanningsinterval du is dan gelijk aan :

$$du = u_2 - u_1$$

Vullen we dit in voor de stroom dan vinden we:

$$i_A = C \times \frac{du}{dt} = C \times \frac{u_2 - u_1}{t_2 - t_1} = C \times \frac{0}{t_2 - t_1} = 0\ A$$

Hieruit kan je concluderen dat wanneer de wisselspanning positief maximum is, de stroom nul ampère is. Vervolgens bepalen we de stroom tijdens de doorgang in punt B. De tijdsintervallen zijn t_3 en t_4 en liggen symmetrisch rond punt B. Merk op dat de spanning op tijdsmoment t_3 positief is en op tijdsmoment t_4 negatief. Vullen we dit terug in voor de stroom dan verkrijgen we:

$$i_B = C \times \frac{du}{dt} = C \times \frac{-u_4 - u_{3)}}{t_3 - t_4} = C \times \frac{-(u_4 + u_{3)}}{t_3 - t_4} = -I_{max}$$

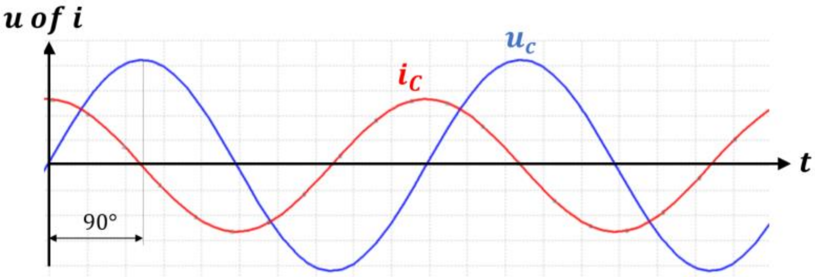
De stroom bereikt in punt B zijn maximale negatieve waarde die kan voorkomen, namelijk de som van twee momentele deelspanningen. Dit maximum komt omdat de spanning van polariteit omkeert. In punt C kan je terug twee intervallen nemen rondom dit punt. Ook hier zullen de twee momentele spanningsvallen (net als bij punt A) aan elkaar gelijk zijn als beide tijdsmomenten even ver van punt C worden genomen. We bekomen voor de stroom in punt C:

$$i_C = C \times \frac{du}{dt} = C \times \frac{u_6 - u_5}{t_6 - t_5} = \ C \times \frac{0}{t_6 - t_5} = 0\ A$$

Als de spanning positief maximum is, is de stroom gelijk aan nul ampère. Beschouwen we tenslotte punt D. In dit punt gaat de spanning over van een negatieve momentele waarde naar een positieve momentele waarde. Ook nu verkrijgen we een maximum:

$$i_D = C \times \frac{du}{dt} = C \times \frac{u_8 - (-u_7)}{t_8 - t_7} = \ C \times \frac{u_8 + u_7)}{t_8 - t_7} = \ +I_{max}$$

Hieruit kunnen we besluiten dat als de wisselspanning vanuit negatieve waarde het nulniveau doorkruist, de stroom maximaal is door de condensator. Figuur 3-22 toont de faserelatie tussen de wisselspanning en de wisselstroom bij de condensator.



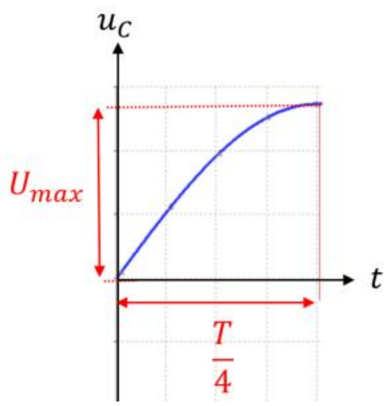
Figuur 3-22: stroom-spanningsverloop bij een condensator

Uit de figuur 3-22 blijkt dat bij een condensator de stroom $90°$ voorijlend is op de spanning. Telkemale de stroom maximaal is, is de spanning gelijk aan nul en omgekeerd. Door het feit dat er eerst lading op de platen van een condensator moet staan vooraleer er spanning kan over staan moet er bijgevolg eerst een stroom met ladingsdragers vloeien vooraleer het elektrisch veld tussen de platen kan opgebouwd worden en er een spanning kan ontstaan.

3.2.4.1 Capacitieve reactantie XC

Nu je het spannings- en stroomverloop van een condensator op wisselstroom kent, kunnen we de mate van tegenwerking bepalen (lees weerstand bieden) die de condensator biedt op wisselstroomgebied. Deze mate van tegenwerking doet zich niet voor bij gelijkstroom. Weerstand bieden enkel bij wisselstroom en niet bij gelijkstroom wordt reactantie genoemd. Reactantie wordt voorgesteld met X_C en wordt uitgedrukt in Ω. Als het een condensator is die deze weerstand biedt wordt ook wel eens gesproken van capacitantie. Voor het bepalen van de reactantie beschouw je eerst de figuur 3-23.
Vertrek terug vanuit de basisformule $Q = C\ \times U$. Hierin wordt terug Q vervangen door het product $I\ \times t$. Wanneer er een wisselstroom door de condensator vloeit, dan kan deze bepaald worden op volgende wijze (zie het bepalen van de stroom door een condensator) :

$$i = C \times \frac{du}{dt}$$



Figuur 3-23 : bepalen van de reactantie van een condensator

Beschouw een tijdsinterval tussen $t = 0$ en $t = \frac{T}{4}$. Dit komt overeen met ¼ van de periode. De spanning over de condensator varieert dan tussen $0\,V$ en U_{max}. De stroom die je hiermee vindt door de formule uit te rekenen is gelijk aan de gemiddelde stroom over deze ¼ periode. Vullen we deze waarden in de formule voor de stroom:

$$I_{gem} = C \times \frac{U_{max}}{\frac{T}{4}}$$

De gemiddelde stroom I_{gem} kan in functie van de maximale stroom I_{max} geschreven worden op volgende wijze:

$$I_{gem} = \frac{2}{\pi} \times I_{max}$$

Invullen in de formule voor de stroom:

$$\frac{2}{\pi} \times I_{max} = C \times \frac{U_{max}}{\frac{T}{4}}$$

Vereenvoudigen van bovenstaande formule:

$$\frac{2}{\pi} \times \frac{T}{4} \times I_{max} = C \times U_{max}$$

$$\frac{T}{2 \times \pi} \times I_{max} = C \times U_{max}$$

De reactantie X_C is de weerstand die de condensator biedt op wisselstroom. De weerstandswaarde kan je vinden via de wet van Ohm en bijgevolg de verhouding te nemen van de maximale spanning over de maximale stroom. Omvormen naar deze reactantie levert volgende formule op:

$$\frac{U_{max}}{I_{max}} = X_C = \frac{T}{2 \times \pi \times C}$$

Vermits de periode het omgekeerde is van de frequentie kan je de formule van de reactantie verder verfijnen tot :

$$X_C = \frac{1}{2 \times \pi \times f \times C}$$

of

$$X_C = \frac{1}{2\pi f\ C}$$

Uit de laatste vergelijking is af te leiden dat de reactantie X_C afhankelijk is van de frequentie van de wisselstroom. Hoe hoger deze frequentie wordt, hoe kleiner de waarde van X_C wordt en omgekeerd. Uit de formule kan je ook afleiden dat hoe groter de capaciteitswaarde is, hoe kleiner de X_C -waarde zal zijn.
Opmerking vermits $2\pi f$ gelijk is aan de hoeksnelheid ω, wordt de formule voor X_C ook op volgende wijze geschreven:

$$X_C = \frac{1}{\omega\ C}$$

Voorbeeld 3-20

Over een condensator met waarde 2,2 µF wordt een sinusoïdale spanning geplaatst met frequentie gelijk aan $1\ kHz$.
Bepaal de capacitieve reactantie X_C.

Oplossing:

$$X_C = \frac{1}{2\pi f\ C} = \frac{1}{2\pi \times 1\ kHz \times 2{,}2\ \mu F}$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi \times 10^3\ Hz \times 2{,}2 \times 10^{-6}\ F} = 72{,}34\ \Omega$$

Reactantie van condensatoren in serie en/of parallel

Stel twee condensatoren C_1 en C_2 in serie. De vervangingscapciteit van deze serieschakeling is met volgende formule te vinden:

$$C_t = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

Wanneer door deze serieschakeling een bepaalde wisselstroom met frequentie f stroomt, moet de reactantie van de totale capaciteit even groot zijn als de reactantie die wordt geboden door de condensatoren in serie. Vervangen we de condensatoren door hun respectievelijke reactanties dan bekomen we:

$$\frac{1}{X_{Ct}} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{X_{C1}}}} + \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{X_{C2}}}}}$$

Herwerken van de vergelijking en rekening houdend dat een breuk delen door een breuk gelijk is aan de breuk vermenigvuldigt met het omgekeerde van de tweede breuk.

$$X_{Ct} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{X_{C1}}}} + \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{X_{C2}}}}$$

$$X_{Ct} = \frac{1}{1} \times \frac{X_{C1}}{1} + \frac{1}{1} \times \frac{X_{C1}}{1}$$

$$X_{Ct} = X_{C1} + X_{C2}$$

De totale reactantie X_{Ct} van een aantal condensatoren in serie is gelijk aan de som van de afzonderlijke reactanties van de in serie staande condensatoren. Merk op dat deze formule overeenkomt met de formule van de serieschakeling van weerstanden. Stel nu twee condensatoren in parallel. De totale vervangingsreactantie van deze parallelschakeling kan je op analoge wijze vinden. Vertrek terug van de formule voor parallelschakeling van condensatoren en vervang de capaciteiten door hun overeenkomstige reactanties:

$$C_t = C_1 + C_2$$

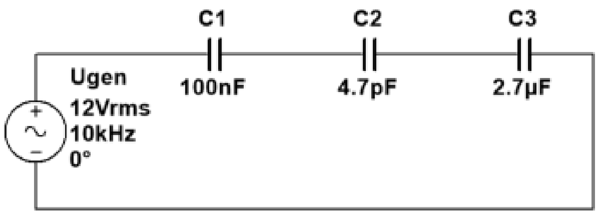
$$\frac{1}{X_{Ct}} = \frac{1}{X_{C1}} + \frac{1}{X_{C2}}$$

$$X_{Ct} = \frac{1}{\frac{1}{X_{C1}} + \frac{1}{X_{C2}}}$$

Ook hier valt de gelijkenis op met de formule voor parallelschakeling van weerstanden.

Voorbeeld 3-21

Wat is de totale reactantie X_{Ct} van de serieschakeling van capaciteiten in figuur vb-3-9?



Figuur vb-3-9

Oplossing:

Bepalen van de afzonderlijke reactanties:

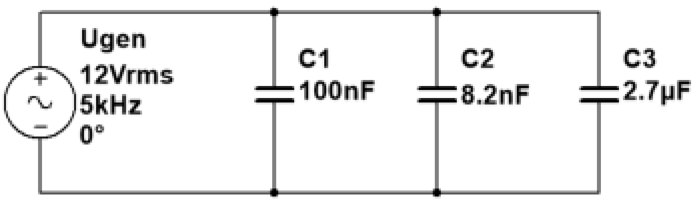
$$X_{C1} = \frac{1}{2\pi \times 10\ kHz \times 100\ nF} = 159{,}15\ \Omega$$

$$X_{C2} = \frac{1}{2\pi \times 10\ kHz \times 14{,}7\ pF} = 3{,}39\ M\Omega$$

$$X_{C3} = \frac{1}{2\pi \times 10\ kHz \times 2{,}7\ \mu F} = 5{,}89\ \Omega$$

Voorbeeld 3-22

Wat is de totale reactantie X_{Ct} van de serieschakeling van capaciteiten in figuur vb-3-10?



Figuur vb-3-10

Oplossing:

Bepalen van de afzonderlijke reactanties:

$$X_{C1} = \frac{1}{2\pi \times 5\ kHz \times 100\ nF} = 318{,}3\ \Omega$$

$$X_{C2} = \frac{1}{2\pi \times 5\ kHz \times 8{,}2\ nF} = 3{,}882\ k\Omega$$

$$X_{C3} = \frac{1}{2\pi \times 5\ kHz \times 2{,}7\ \mu F} = 11{,}79\ \Omega$$

De totale reactantie :

$$X_{Ct} = \frac{1}{\frac{1}{X_{C1}} + \frac{1}{X_{C2}} + \frac{1}{X_{C3}}} = \frac{1}{\frac{1}{313{,}3\ \Omega} + \frac{1}{3{,}882\ k\Omega} + \frac{1}{11{,}79\ \Omega}} = 11{,}34\ \Omega$$

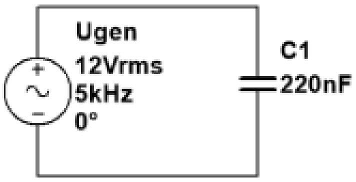
Toepassing van wet van Ohm via reactantie

De weerstand (reactantie) die een condensator biedt tegen wisselstroom is analoog aan de weerstand die een normale weerstand biedt tegen gelijkstroom. Beide worden uitgedrukt in Ohm. Vermits de reactantie weerstand biedt tegen de wisselstroom kan ook de wet van Ohm toegepast worden op deze reactanties. In formulevorm:

$$I = \frac{U}{X_C}$$

Voorbeeld 3-23

Bepaal I_{eff} door de schakeling van figuur vb-3-11.



Figuur vb-3-11

Oplossing:

Eerst wordt X_C bepaald:

$$X_{C1} = \frac{1}{2\pi \times 5\ kHz \times 220\ nF} = 144{,}69\ \Omega$$

Toepassen van wet van Ohm:

$$I_{eff} = \frac{U_{eff}}{X_{C1}} = \frac{12\ V_{eff}}{144{,}69\ \Omega} = 82{,}94\ mA$$

3.2.4.2 Capacitieve spanningsdeler

In wisselstroomschakelingen kunnen condensatoren gebruikt worden in toepassingen die een spanningsdeler nodig hebben. De spanning over een bepaalde condensator in serie met een andere condensator kan worden gevonden via volgende formule;

$$U_{Cx} = \frac{C_t}{C_x} \times U_{bron}$$

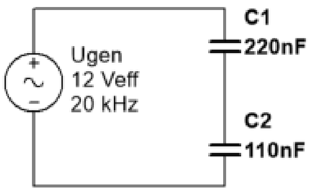
Een resistieve spanningsdeler wordt uitgedrukt in termen van een overbrengingsverhouding . Je kan denken aan de capacitieve spanningsdeler door het toepassen van dit idee van een resistieve spanningsdeler. Echter nu met behulp van een reactantie in plaats van een weerstand. De vergelijking voor de spanning over een condensator in een capacitieve spanningsdeler kan worden geschreven als volgt:

$$U_x = \frac{X_{Cx}}{X_{Ct}} \times U_{bron}$$

Hierbij is X_{Cx} de reactantie van de condensator C_x en X_{Ct} de totale capacitieve reactantie. U_{bron} is de aangelegde wisselspanning over de capacitieve spanningsdeler.

Voorbeeld 3-24

Bepaal de spanning over C_2 in de schakeling van figuur 8-29



Figuur vb-3-12

Oplossing:

Eerst wordt afzonderlijke reactanties bepaald :

$$X_{C1} = \frac{1}{2\pi \times 20\ kHz \times 220\ nF} = 36{,}17\ \Omega$$

$$X_{C1} = \frac{1}{2\pi \times 20\ kHz \times 110\ nF} = 72{,}34\ \Omega$$

De totale reactantie is dan gelijk aan:

$$X_{Ct} = X_{C1} + X_{C2} = 36{,}17\ \Omega + 72{,}34\ \Omega = 108{,}51\ \Omega$$

De spanning over condensator C_2 :

$$V_{C2} = \frac{X_{C2}}{X_{Ct}} \times U_{gen} = \frac{72{,}34\ \Omega}{108{,}51\ \Omega} \times 12\ V_{eff} = 8\ V_{eff}$$

Alternatieve bepaling:

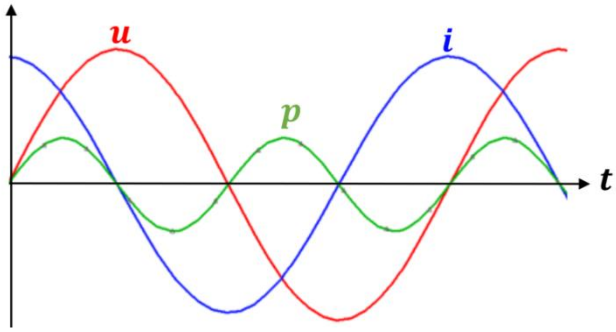
$$V_{C2} = \frac{C_t}{C_2} \times U_{gen} = \frac{73.33\ nF}{110\ nF} \times 12\ V_{eff} = 8\ V_{eff}$$

3.2.4.3 Het vermogen in een condensator

Zoals in het begin van paragraaf 8.5 reeds vermeld is, ijlt de stroom $90°$ voor op de spanning bij een condensator. Deze stroom en spanning zorgen voor een bepaald gedissipeerd vermogen in de condensator. Bij een condensator kan je drie soorten vermogens onderscheiden. Het momenteel of ogenblikkelijk vermogen, het werkelijk vermogen en het reactief vermogen.

Momenteel vermogen p

Het product van de momentele spanning u met de momentele stroom i levert het momentele vermogen p op. Op de punten waar de spanning en de stroom nul zijn, is het vermogen ook gelijk aan nul.



Figuur 3-24 : vermogencurve (groene lijn) voor een condensator

De groene lijn in figuur 3-24 stelt het vermogen voor bij een condensator. Wanneer er een spanning over de condensator verschijnt, wordt er een elektrisch veld opgebouwd tussen de platen van de condensator. Het elektrisch veld manifesteert zich in het diëlektricum. Wanneer er een wisselspanning is aangesloten over de condensator dan wordt er energie opgeslagen in de condensator gedurende één vierde van de spanningscylclus. Gedurende het volgende vierde cyclus wordt deze energie teruggegeven aan de spanningsbron. Als de condensator ideaal verondersteld kan worden is hierbij geen energieverlies.

Het werkelijk vermogen $P_{werkelijk}$

In het ideale geval wordt alle energie die door de condensator is opgeslagen tijdens het positieve gedeelte van de vermogencyclus teruggegeven aan de bron gedurende het negatieve deel van deze vermogencyclus. Er is geen energie verloren gegaan als gevolg van de omzetting van warmte in de condensator. Hierdoor volgt dat het werkelijk vermogen over een hele spanningscyclus gelijk is aan nul. In de werkelijkheid zal, vanwege lekkage en de weerstand van het folie, in een echte condensator een klein percentage van het totale vermogen worden gedissipeerd in de vorm van het werkelijk vermogen $P_{werkelijk}$.

Het reactief vermogen P_r

De snelheid waarmee een condensator energie opslaat en terug afgeeft wordt zijn reactief vermogen P_r genoemd. Het reactief vermogen is verschillend van nul omdat op elk moment in de tijd door de condensator energie vanuit de spanningsbron wordt opgenomen of energie wordt afgegeven aan deze spanningsbron. Het reactief vermogen stelt dus geen energievelies voor. De volgende formules zijn van toepassing voor het bepalen van het reactief vermogen:

$$P_r = U_{eff} \times I_{eff}$$

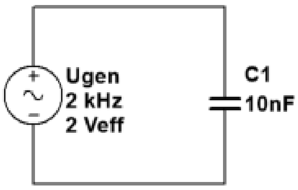
$$P_r = \frac{U_{eff}^2}{X_C}$$

$$P_r = I_{eff}^2 \times X_C$$

De eenheid van reactief vermogen is VAR (*V*olt *A*mpère *R*eactief). De spanningen en stromen worden in effectieve waarde gegeven (of geplaatst) om het reactief vermogen te kunnen bepalen.

Voorbeeld 3-25

Bepaal het werkelijk en het reactief vermogen in de schakeling van figuur vb-3-13.



Figuur vb-3-13

Oplossing:

Voor een ideale condensator is het werkelijk vermogen steeds gelijk aan nul. Om het reactief vermogen te vinden bepaal je eerst de reactantie van de condensator.

$$X_{C1} = \frac{1}{2\pi \times 2\ kHz \times 10\ nF} = 7{,}96\ k\Omega$$

Het reactief vermogen is dan gelijk aan :

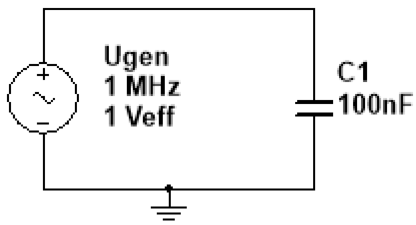
$$P_r = \frac{U_{eff}^2}{X_C} = \frac{(2\ V)^2}{7{,}96\ k\Omega} = 503\ \mu VAR$$

$$P_{werkelijk} = 0\ W$$

3.2.4.4 Test jezelf : Het gedrag van condensatoren op wisselstroom

1. Bereken X_C voor een condensator van $47\ pF$ bij een frequentie van $5\ kHz$.
2. Bij welke frequentie is de reactantie van een $100\ nF$ condensator gelijk aan $2\ k\Omega$?

3. Bereken de effectieve stroom in de schakeling van figuur TJ-3-1



Figuur TJ-3-1

4. Verklaar de faserelatie tussen de spanning over een condensator en stroom die er door vloeit.
5. Als een 1 μF condensator verbonden is over een spanningsbron van 12 V_{eff}, bepaal dan zijn werkelijk vermogen en zijn reactief vermogen bij een frequentie van 500 Hz.

3.2.5 Toepassingen met condensatoren

In elektrische en elektronische systemen wordt veel gebruik gemaakt van condensatoren. In deze sectie wordt een overzicht gegeven van de voornaamste toepassingen van condensatoren.

Wat is belangrijk?

- **Je beschrijft het principe hoe een condensator gebruikt kan worden als afvlakfilter in een spanningsbron.**
- **Je verklaart het doel van het koppelen en ontkoppelen met condensatoren.**
- **Je beschrijft de principes hoe een condensator kan gebruikt worden in afgestemde kringen, timing circuits en computergeheugen.**

3.2.5.1 Stockeren van elektrische lading

Een van de meest eenvoudige toepassingen van een condensator is deze te gebruiken als back-upspanningsbron voor laagvermogenschakelingen zoals bepaalde typen halfgeleidergeheugens in computers. Deze specifieke toepassing vereist een zeer hoge capaciteitswaarde en verwaarloosbare lekkage.
Een opslagcondensator wordt aangesloten tussen de plusklem van een spanningsbron en de massa. Zolang de schakeling werkt met de normale spanningsbron blijft de condensator volledig opgeladen tot deze gelijkstroomvoedingsspanning. Van zodra de normale spanningsbron wordt onderbroken (of verwijderd) zal de opslagcondensator tijdelijk gebruikt worden als voedingsbron voor de schakeling.
Zolang de lading in de condensator nog voldoende aanwezig is kan deze spanning en stroom leveren aan een bepaalde schakeling. Wanneer er stroom door de schakeling vloeit, wordt de lading uit de condensator verwijderd en neemt de spanning af. Om deze reden kan een opslagcondensator alleen als tijdelijke spanningsbron worden gebruikt. De lengte van de tijd dat een condensator voldoende stroom kan leveren voor een bepaalde schakeling is afhankelijk van de capaciteitswaarde en de hoeveelheid stroom die door de schakeling wordt getrokken.

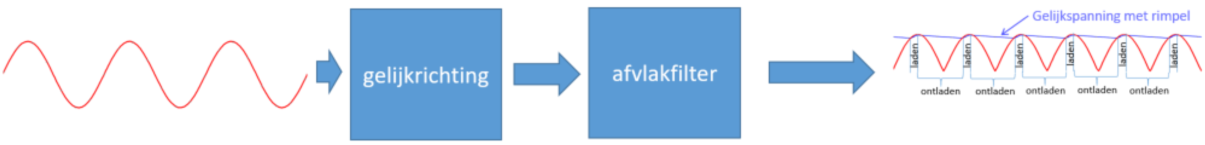
Hoe kleiner de stroom en hoe hoger de capaciteit, hoe langer de condensator stroom kan leveren.

3.2.5.2 Afvlakcondensatoren in spanningsbronnen

Een gelijksspanningsbron bevat een schakeling die gelijkrichter wordt genoemd en daarachter staat een zogenaamde afvlakfilter die uit één of meerdere condensatoren bestaat. De gelijkrichter converteert de sinusvormige spanning vanuit het net naar een pulserende gelijkspanning. Afhankelijk van het gebruikte type gelijkrichterschakeling wordt ofwel elke negatieve halve cyclus verwijderd ofwel de polariteit van het negatieve deel omgekeerd. Zie hiervoor figuur 3-25. Zoals weergegeven in Figuur 3-25 (a) verwijdert een enkelzijdige gelijkrichter elke negatieve halve cyclus van de sinusvormige spanning. Een dubbelzijdige gelijkrichter 8-35 (b) keert in feite de polariteit van het negatieve deel van iedere cyclus om. In beide situaties wordt de wisselspanning die afkomstig is van het elektriciteitsnet omgevormd tot een unipolaire spanning. Om nuttig te zijn voor het voeden van elektronische schakelingen moet de unipolaire gelijkgerichte spanning worden gewijzigd in een constante gelijkspanning. Om dit te kunnen verwezenlijken wordt een afvlakfilter, bestaande uit een condensator, achter de gelijkrichterschakeling geplaatst.

Figuur 3-25 : principes van gelijkrichting

De condensator elimineert de schommelingen in de gelijkgerichte spanning en verstrekt een vlotte constante gelijkstroomspanning aan de belasting. Het principe van deze afvlakking is weergegeven in figuur 3-26.



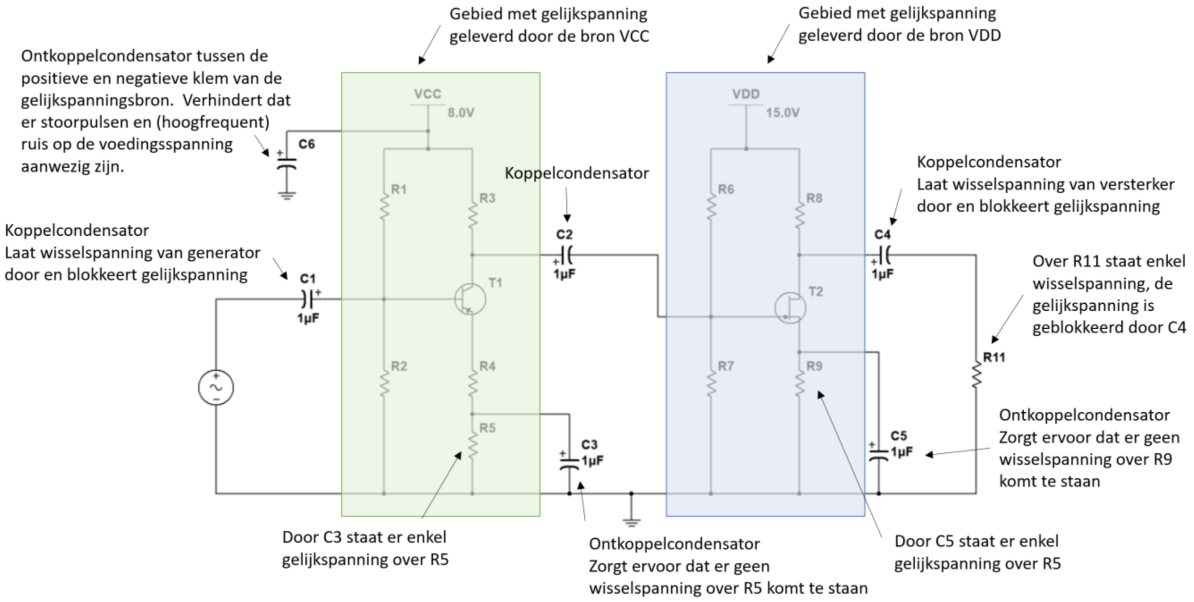
Figuur 3-26 : principe van afvlakking met een condensator

Omwille van hun vermogen om elektrische lading op te slaan worden condensatoren in gelijkstroomvoedingen gebruikt om het unipolair signaal dat uit de gelijkrichterschakeling komt verder af te vlakken tot een gelijkspanning. Figuur 3-26 toont het principe van een voeding met een dubbelzijdige gelijkrichter en een condensatorfilter (afvlakfilter).
Het werkingsprincipe kan vanuit het laad- en ontlaad-oogpunt beschreven worden. Stel dat de condensator aanvankelijk niet is opgeladen. Wanneer de spanningsbron wordt ingeschakeld en de eerste cyclus van de gelijkgerichte spanning optreedt, laadt de condensator snel op door de lage weerstand van de gelijkrichter. De spanning volgt de

gelijkgerichte spanningskromme tot het maximum van de gelijkgerichte spanning. Als de gelijkgerichte spanning dit maximum (piek) passeert en begint te dalen, begint de condensator zich langzaam te ontladen via de hoge belastingsweerstand. De hoeveelheid van ontlading is typisch zeer klein en ter illustratie overdreven weergegeven in figuur 3-26. Tijdens de volgende cyclus van de gelijkgerichte spanning laadt de condensator weer op tot de piekwaarde. Hierdoor kan de lading in de condensator terug aangevuld worden zodat de kleine hoeveelheid lading die verloren is gegaan sinds de vorige piek terug wordt opgeladen. Zolang de spanningsbron is ingeschakeld blijft dit patroon van een kleine hoeveelheid opladen en ontladen voortduren.
Een gelijkrichter is zo ontworpen dat deze alleen stroom in de richting van de condensator toelaat om de condensator opnieuw op te laden. De condensator kan zich bijgevolg niet ontladen via de gelijkrichterschakeling. De enige weg waarlangs de condensator zich kan ontladen is via de belastingsweerstand die aan de spanningsbron is aan gesloten.
De kleine fluctuatie in gelijkspanning, ten gevolge van het op- en ontladen van de condensator, wordt de rimpel genoemd. Een goede gelijkstroomvoeding heeft een zeer kleine hoeveelheid rimpeling op zijn gelijkstroomoutput. De ontlaadtijdconstante van een voedingsfiltercondensator is afhankelijk van de capaciteit en weerstandswaarde van de belasting. Hoe hoger de capaciteitswaarde hoe langer de ontlaadtijd duurt en hoe kleiner de rimpelspanning is. In een ideale afvlakfilter is er op de gelijkspanning helemaal geen rimpel meer aanwezig.

3.2.5.3 Koppel- en ontkoppelcondensatoren

Condensatoren worden gebruikt om te verhinderen dat een bepaalde gelijkspanning in bepaald deel van de schakeling ongewenst invloed uitoefent op een ander deel van de schakeling. Er wordt gebruik gemaakt van de eigenschap dat de condensator voor gelijkstroom een open keten vormt en voor de wisselspanning een frequentie-afhankelijke weerstand. Bij een goede keuze van de capaciteitswaarde gedraagt de condensator zich voor een bepaald frequentiegebied als een kortsluiting.
Gelijkspanning wordt gebruikt om actieve componenten zoals transistoren in te stellen. Versterkers kunnen opgebouwd worden met transistoren. Om te verhinderen dat de instellingsspanning van een bepaalde transistor een andere transistor beïnvloed kan de wisselspanning via een condensator van de ene transistorschakeling worden overgebracht naar de andere. Men spreekt in dit geval van een koppelcondensator. Dit omwille van het feit dat de condensator de uitgang van de ene schakeling koppelt met de ingang van de volgende schakeling.
In bepaalde schakelingen is het nodig om te vermijden dat er een wisselstroom door een bepaalde component vloeit. Dit kan bekomen worden door een condensator parallel met deze component te plaatsen. Door te zorgen dat X_C-waarde van de condensator in het beschouwde frequentiegebied minstens tien keer kleiner is dan de weerstandswaarde van de component waardoor geen wisselstroom mag vloeien wordt deze component gevrijwaard van de wisselstroom. Men spreekt in dit geval van een ontkoppelcondensator. Figuur 3-27 toont de functie van koppel- en ontkoppelcondensator.



Figuur 3-27: voorbeeld van koppel- en ontkoppelcondensatoren

Op printplaten zie je heel dikwijls condensatoren aangesloten tussen een gelijkstroomvoedings-spanningslijn en de massa. Deze ontkoppelcondensatoren worden gebruikt om ongewenste spanningsovergangen of pieken die optreden op de gelijkstroomvoedingsspanning te ontkoppelen. Deze ongewenste storingen op de voedingsspanning zijn dikwijls afkomstig van snel schakelende digitale schakelingen op de printplaat. Telkens een digitaal 0 in een digitaal 1 verandert of omgekeerd, ontstaan er stroomveranderingen op de voedingslijn waardoor stoorspanningen kunnen ontstaan. Zulke stooorspanningen bevatten hogere frequenties die de werking van de schakelingen kunnen beïnvloeden. Door de koppelcondensatoren aan te brengen worden deze storingen kortgesloten naar massa toe. Je vindt ze dikwijls in de onmiddellijke buurt van de geïntegreerde circuits (IC's) die deze stroomveranderingen op de voedingsspanning veroorzaken. Op die wijze kan je de mogelijke storing bij zijn ontstaat meteen elimineren. Een ontkoppelcondensator heeft een zeer lage reactantiewaarde waardoor deze zich gedragen als een kortsluiting voor wisselstroom naar massa toe. de zeer lage reactantie van de ontkoppelcondensatoren..

3.2.5.4 Signaalfilters

Filters worden gebruikt voor het selecteren van een bepaald wisselstroomsignaal met een bepaalde gespecificeerde frequentie van uit een breed bereik van signalen met veel verschillende frequenties. Ze worden eveneens gebruikt voor het selecteren van een bepaalde groep (band) van frequenties en het elimineren van alle andere. Een bekend voorbeeld van deze toepassing is in radio- en televisieontvangers waar het nodig is om het signaal te selecteren dat wordt uitgezonden door een gegeven station en de signalen van de andere stations die in dat gebied worden uitgezonden te elimineren.
Wanneer je de radio of tv afstemt, verander je eigenlijk de capaciteit in de tunerschakeling (wat een type filter is), zodat alleen het signaal van het station of kanaal dat je wilt doorlaten naar het ontvangstgedeelte van de schakeling wordt doorgelaten. Condensatoren worden

gebruikt in combinatie met weerstanden en spoelen (zie hoofdstuk 9) en andere (actieve) componenten in dit soort filters.
Het belangrijkste kenmerk van een filter is de frequentieselectiviteit, die is gebaseerd op de het feit dat de reactantie van een condensator afhankelijk is van de frequentie $X_C = \frac{1}{2\pi f C}$.

3.2.5.5 Timingcircuits

Een ander belangrijk gebied waar condensatoren worden gebruikt zijn de timingcircuits die zorgen voor gespecificeerde tijdsvertragingen of golfvormen produceren met specifieke kenmerken. Bedenk dat de tijdsconstante van een schakeling via het selecteren van een weerstand en een capaciteit kan worden ingesteld. De oplaadtijd van een condensator kan als basis worden gebruikt voor de tijdsvertraging in verschillende soorten schakelingen. Een voorbeeld hiervan is de schakeling die de e richtingaanwijzers van een auto bestuurt waarmee het licht met regelmatige tussenpozen aan en uit gaat.

3.2.5.6 Computergeheugen

Dynamische computergeheugens gebruiken condensatoren als het basisopslag-element voor binaire informatie op te slaan. Een geladen condensator kan een opgeslagen 1 voorstellen en een ontladen condensator kan een opgeslagen 0 vertegenwoordigen. Patronen van enen en nullen die de binaire data vormen worden opgeslagen in een geheugen dat bestaat uit een reeks condensatoren met bijbehorende MOSFET-schakelingen.

3.2.5.7 Test jezelf aangaande toepassingen met condensatoren

1. **Verklaar hoe de unipolaire spanningsvorm die uit een enkelzijdige- of dubbelzijdige gelijkrichter komt wordt afgevlakt tot een gelijkspanning door een afvlakcondensator.**
2. **Verklaar het doel van een koppelcondensator.**
3. **Hoe groot moet een de capaciteit zijn om goed te functioneren als koppelcondensator?**
4. **Verklaar het doel van een ontkoppelcondensator.**
5. **Leg uit waarom het verband tussen frequentie en capacitieve reactantie belangrijk is bij frequentieselectieve schakelingen zoals signaalfilters.**

3.3 Spoelen

Inductantie is een eigenschap van een draadspiraal die tegengesteld is aan een verandering in stroom. De basis voor het verschijnsel inductantie is het elektromagnetisch
veld dat eender welke geleider omringt wanneer er stroom doorheen vloeit. De elektrische component die ontworpen is met de eigenschap van inductantie wordt een spoel of inductor genoemd. In sommige toepassingen wordt in plaats van een spoel gesproken over een “choke”. De term choke is meestal geassocieerd met spoelen die worden gebruikt om hogere frequenties te blokkeren. Ze worden op grote schaal gebruikt in communicatiesystemen en in radiofrequentieschakelingen.
In dit hoofdstuk bestudeer je de elementaire spoel en zijn kenmerken. Verschillende soorten spoelen zijn opgebouwd in functie van hun fysieke constructie en hun

elektrische eigenschappen. Het basisgedrag van een spoel in zowel gelijkstroom- als wisselstroomschakelingen wordt besproken, en serie- en parallelcombinaties van spoelen worden geanalyseerd.
Alvorens de werking en eigenschappen van een spoel te bespreken frissen we eerst de voornaamste eigenschappen van (elektro)magnetisme op.

3.3.1 Elektromagnetisme

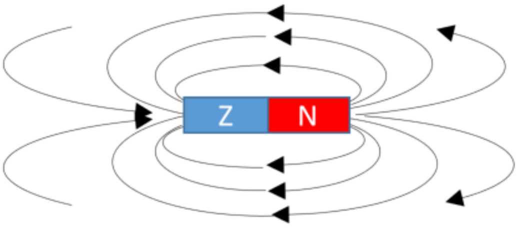
Elektromagnetisme kan samengevat worden als het genereren van een magnetisch veld door een stroom door een geleider te sturen.

Wat is belangrijk?

- **Je bepaalt de richting van de magnetische veldlijnen (krachtlijnen).**
- **Je zegt de definitie van permeabiliteit op.**
- **Je zegt de definitie van reluctantie op.**
- **Je past de linkerhandregel toe (elektronenzin)**

3.3.1.1 Magnetische flux ϕ

De groep krachtlijnen die zich bewegen van de Noordpool van een magneet naar de Zuidpool wordt de magnetische flux genoemd. De magnetische flux wordt voorgesteld door de Griekse letter ϕ ("phi"). Een sterker veld resulteert in meer krachtlijnen. Er zijn verschillende factoren die de kracht van een magneet bepalen. Onder deze factoren bevinden zich de aard van het materiaal, de fysische geometrie en de afstand waar de krachtlijn zich bevind ten opzichte van de magneet. Proeven hebben aangetoond dat magnetische veldlijnen meer geconcentreerd zijn rondom de polen.



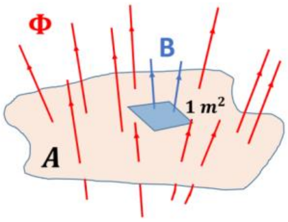
Figuur 3-28 : voorstelling van krachtlijnen (ϕ) rondom een magneet

De eenheid van magnetische flux is Weber (Wb). $1\ Wb$ komt overeen met 10^8 veldlijnen. De Weber is een grote eenheid. In vele praktische situaties zal eerder μWb gebruikt worden. $1\ \mu Wb$ komt overeen met 100 veldlijnen van de magnetische flux.

3.3.1.2 Magnetische fluxdichtheid B

De magnetische fluxdichtheid is de hoeveelheid flux per oppervlakte-eenheid loodrecht op het magnetische veld. Het symbool van de magnetische fluxdichtheid is B en de eenheid hiervan is de Tesla (T). $1\ T$ komt overeen met $1 Wb/m^2$. In formulevorm:

$$B = \frac{\phi}{A}$$

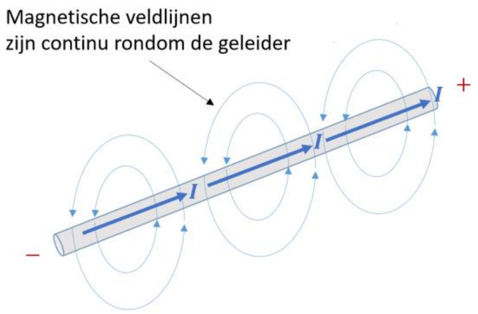


Figuur 9-2 : voorstelling magnetische fluxdichtheid B

Hierin is ϕ de flux in Weber en A de doorsnede in vierkante meter van het magnetische veld.

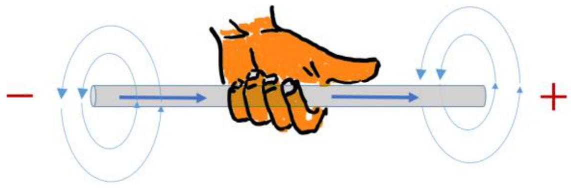
3.3.2 Elektromagnetisch veld

De stroom door een geleider produceert een magnetisch veld rondom de geleider. Dit wordt een elektromagnetisch veld genoemd. De vorm van het magnetisch veld is weergegeven in Figuur 3-29.



Figuur 3-29 : Magnetisch veld rondom een stroomvoerende geleider; de blauwe pijlen geven de richting van de stroom aan in elektronenzin.

De onzichtbare magnetische krachtlijnen (veldlijnen) vormen een concentrisch cirkelvormig patroon rondom de geleider. Dit patroon verschijnt over de gehele lengte van een stroomvoerende geleider. De magnetische veldlijnen zijn tegen de klok in gericht in de richting van de stroom volgens elektronenzin. (Indien conventionele stroomzin wordt gebruikt zijn de veldlijnen in de richting van de klok gericht).
Hoewel het magnetisch veld niet kan worden gezien, kan het zichtbare effecten produceren. De veldlijnen kunnen zichtbaar gemaakt worden door een blad te nemen waardoor in het midden een stroomvoerende geleider gaat. Door ijzervijlsel te strooien op het blad zal dit ijzervijlsel zichzelf cirkelvormig plaatsen rondom de geleider. Hierdoor zijn de magnetische veldlijnen rondom de geleider zichtbaar gemaakt. Brengt men een kompas in dit magnetisch veld dan kan men vaststellen dat het veld sterker wordt naarmate je het kompas dichter bij de geleider brengt.
Wanner je de richting van het magnetisch veld rondom een geleider kent, kan je eenvoudig bepalen welke de stroomzin is door deze geleider. Wanneer gebruik gemaakt wordt van de elektronenzin kan je via je linkerhand eenvoudig deze stroomzin bepalen. Dit doe je als volgt: neem de geleider denkbeeldig met je linkerhand vast en krom je vingers in de richting van het magnetisch veld rondom. Je gestrekte duim geeft nu de richting van de stroom aan (elektronenzin).



Figuur 3-30 : Voorbeeld van gebruik van linkerhandregel. De linkerhandregel wordt gebruikt bij een elektronenstroom gaande van de negatieve klem naar de positieve klem van de aangelegde spanningsbron.

3.3.2.1 Elektromagnetische eigenschappen

Permeabiliteit (μ)

Het gemak waarmee een magnetisch veld zich kan vestigen in een gegeven materiaal wordt weergegeven door de permeabiliteit van dat materiaal. Hoe hoger de doorlaatbaarheid van magnetische veldlijnen, hoe gemakkelijker een magnetisch veld kan zich kan vestigen in dat specifiek materiaal.. Het symbool van permeabiliteit is μ ((de Griekse letter mu) en wordt uitgedrukt in Weber per Ampèretoeren meter ($\frac{Wb}{At \times m}$)

De permeabiliteit van een materiaal hangt af van het soort materiaal. Als referentie wordt de permeabiliteit van een vacuüm (μ_0) gebruikt. De formule van μ_0 is de volgende:

$$\mu_0 = 4 \times \pi \times 10^{-7} \frac{Wb}{At \times m}$$

Ferromagnetische materialen hebben doorgaans doorlaatbaarheden die honderden keren groter zijn dan die van een vacuüm. Dit betekent dat een magnetisch veld relatief eenvoudig in ferromagnetische materialen kan worden opgesteld. Ferromagnetische materialen omvatten ijzer, staal, nikkel, kobalt en hun legeringen. De relatieve permeabiliteit (μ_r van een materiaal is de verhouding van de absolute permeabiliteit (μ) op de doorlaatbaarheid van een vacuüm (μ_0). In formulevorm:

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$$

μ_r heeft geen eenheid vermits het een verhoudingsfactor is. Materialen met een hoge permeabiliteit kunnen een relatieve permeabiliteit hebben van 100.000.

Reluctantie ($\mathcal{R}$)

De reluctantie is een mate van weerstand dat geboden wordt in een materiaal tegen een magnetisch veld. De waarde van de reluctantie $\mathcal{R}$ is recht evenredig met de lengtre van het magnetisch pad en omgekeerd evenredig met de permeabiliteit μ en de doorsnede A van het materiaal. In formulevorm:

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu \times A}$$

De eenheid van reluctantie is:

$$\mathcal{R} = \frac{m}{\frac{Wb}{At \times m} \times m^2} = \frac{At}{Wb}$$

Voorbeeld 3-26

Bereken de reluctantie van een torus (een donutvormige kern) die gemaakt is van koolstofarm
staal. De binnenradius van de torus is $1{,}75\ cm$ en de buitenstraal van de torus is $2{,}25\ cm$. Stel dat de permeabiliteit μ van koolstofarm staal gelijk is $2\ \times 10^{-4}\ \frac{Wb}{At\times m}$ is.

Oplossing:

Eerst moet je de centimeters omrekenen naar meters voordat je het gebied en de lengte berekent.
Uit de gegeven afmetingen van de kern is de dikte (diameter) $0{,}5\ cm$. Dit komt overeen met $0{,}005\ m$. Nu kan je de oppervlakte van de dwarsdoorsnede berekenen. Dit kan als volgt:

$$A = \pi \times \frac{d^2}{4} = \pi \times \frac{(0{,}005\ m)^2}{4} = 1{,}96\ \times 10^{-5}\ m^2$$

De lengte is gelijk aan de omtrek van de torus gemeten op de gemiddelde straal r van $2\ cm$ of $0{,}020\ m$.

$$l = 2 \times \pi \times r = 2 \times \pi \times 0{,}020\ m = 0{,}125\ m$$

Vul nu deze gegevens in de formule voor de reluctantie $\mathcal{R}$:

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu \times A} = \frac{0{,}125\ m}{2 \times 10^{-4} \frac{Wb}{Atm} \times 1{,}96\ \times 10^{-5}\ m^2} = 31{,}9\ \times 10^{6} \frac{At}{Wb}$$

Merk op dat de vergelijking om $\mathcal{R}$ te bepalen analoog is aan de soortelijke weerstandsformule. Deze is gelijk aan:

$$R = \rho \times \frac{l}{A}$$

Het tegenovergestelde van de soortelijke weerstand ρ is de geleidbaarheid σ. Hierdoor wordt volgende formule verkregen voor de weerstand:

$$R = \frac{l}{\sigma \times A}$$

Wanneer je de formule voor weerstand in functie van de geleidbaarheid vergelijkt met de formule voor de reluctantie kan je concluderen dat de geleidbaarheid in een elektrische schakeling analoog is aan de permeabiliteit in een magnetisch circuit. De reluctantie van een magnetisch circuit is typisch $50000 \frac{At}{Wb}$ of meer. Dit is vooral afhankelijk van de grootte en het type materiaal waarlangs de magnetische veldlijnen moeten passeren

Voorbeeld 3-27

Mild staal heeft een relatieve permeabiliteit (μ_r) van 800. Bereken de reluctantie van een mild-
stalen kern met een lengte van $10\ cm$ en een doorsnede van $1{,}0\ cm \times 1{,}2\ cm$

Oplossing:

Eerst bepaal je de permeabiliteit van mild staal:

$$\mu = \mu_r \times \mu_0 = 800 \times 4 \times \pi \times 10^{-7} \frac{Wb}{At \times m} = 0{,}001 \frac{Wb}{At \times m}$$

Vervolgens converteer je de lengte naar meter en de oppervlakte naar vierkante meter:

$$l = 10\ cm = 0{,}01\ m$$

$$A = 0{,}01\ m \times 0{,}012\ m = 1{,}2 \times 10^{-4}\ m^2$$

Deze gegevens invoeren in de vergelijking voor de reluctantie:

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu \times A} = \frac{0{,}01\ m}{0{,}001 \frac{Wb}{At \times m} \times 1{,}2 \times 10^{-4}\ m^2} = 8{,}33 \times 10^{-5} \frac{At}{Wb}$$

.

3.3.2.2 Test jezelf : elektromagnetisme

1. ***Wat is het verschil tussen de magnetische flux en magnetische fluxdichtheid?***
2. ***Welk is de eenheid om de magnetische fluxdichtheid te meten?***
3. ***Hoe groot is de magnetische fluxdichtheid als de flux $\boldsymbol{\phi = 4{,}5\ \mu Wb}$ en het oppervlak $\boldsymbol{A = 5 \times 10^{-3}\ m^2}$?***
4. ***Wat gebeurt er met het magnetisch veld rondom een geleider als de stroom door deze geleider wordt omgekeerd?***
5. ***Wat wordt verstaan onder permeabiliteit?***
6. ***Wat wordt verstaan onder reluctantie?***

3.3.3 Elektromagnetische inductie

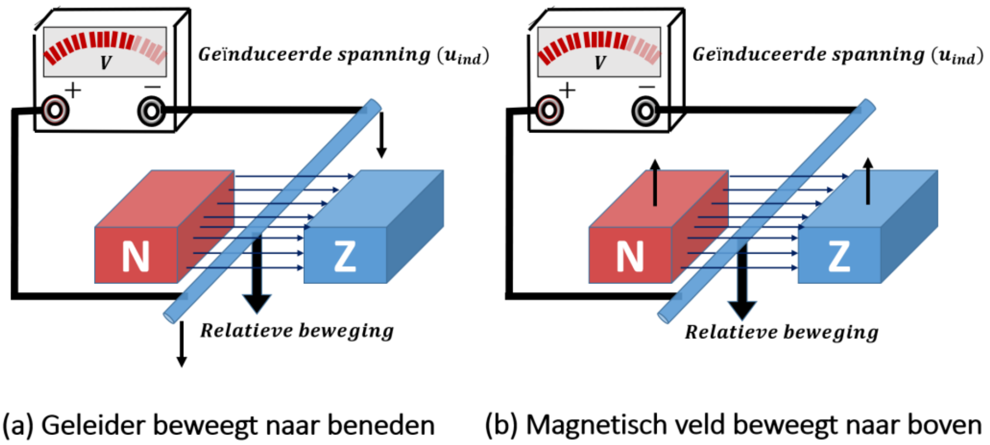
In dit gedeelte maakt je kennis met elektromagnetische inductie. Elektromagnetische inductie is dat wat onder andere het mogelijk maakt om via een transformator een transformatie van spanningen te maken, elektrische motoren en generatoren te laten werken en nog vele andere apparaten.

Wat is belangrijk?

- **Je verklaart het principe van magnetische inductie.**
- **Je verklaart hoe spanning kan worden opgewekt in een geleider in een magnetisch veld.**
- **Je bepaalt de polariteit van een geïnduceerde spanning.**
- **Je verklaart het principe van hoe krachten op een geleider ontstaan en deze laat bewegen.**

3.3.3.1 Relatieve beweging

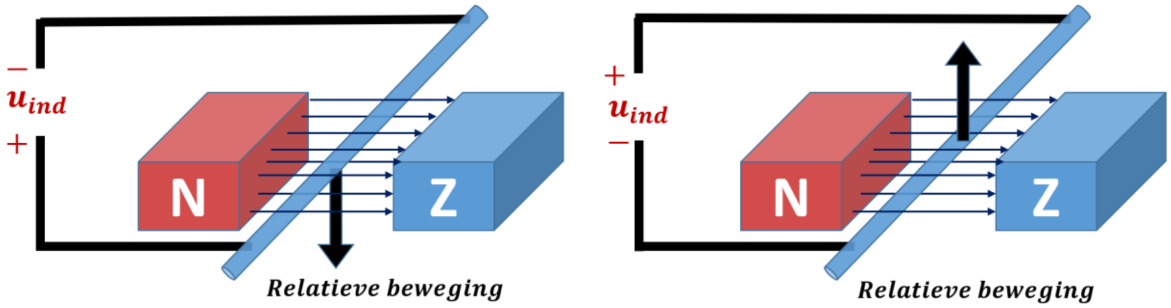
Wanneer een rechte geleider loodrecht beweegt in een magnetisch veld is er een relatieve beweging tussen de geleider en het magnetisch veld. Evenzo, indien een magnetisch veld langs een stationaire geleider wordt bewogen, is er relatieve beweging. In beide gevallen resulteert deze relatieve beweging in een geïnduceerde spanning (u_{ind}) over de geleider, zoals Figuur 3-31 aangeeft. Dit principe staat bekend als elektromagnetische inductie**.** De kleine letter u staat voor ogenblikkelijke spanning. De grootte van de geïnduceerde spanning is afhankelijk van de snelheid waarmee de geleider en het magnetisch veld bewegen ten opzichte van elkaar: hoe sneller de relatieve beweging, hoe groter de geïnduceerde spanning.



Figuur 3-31: relatieve beweging tussen een rechte geleider en een magnetisch veld

3.3.3.2 Polariteit van de geïnduceerde spanning

Wanneer de geleider (zie Figuur 3-32) in een magnetisch veld eerst naar beneden wordt bewogen en dan naar boven, zal een omkering van de polariteit van de geïnduceerde spanning worden waargenomen. Wanneer de relatieve beweging van de geleider naar beneden is, wordt een spanning geïnduceerd met de polariteit zoals in Figuur 3-32 (a). Wanneer de relatieve beweging van de geleider omhoog is, wordt de polariteit zoals aangegeven in 9-6 (b).



Figuur 3-32 : de polariteit van de geïnduceerde spanning is afhankelijk van de richting van de beweging van de geleider ten opzichte van het magnetisch veld.

Een rechte geleider die loodrecht in een constant magnetisch veld beweegt wekt volgende inductiespanning op:

$$\boldsymbol{u_{ind} = B_{\perp} \times l \times v}$$

Hierbij is:

- u_{ind} : geïnduceerde spanning in Volt
- $B_{\perp}$: component van de magnetische fluxdichtheid dat loodrecht op de bewegende geleider staat; wordt uitgedrukt in Tesla
- l : de lengte van het deel van de geleider dat zich in het magnetisch veld bevindt
- v : de snelheid waarmee de geleider beweegt in m/s

Voorbeeld 3-28

Stel dat de geleider in Figuur 3-32 (b) $10\ cm$ lang is en het poolvlak van de magneet is $5\ cm$ breed. De fluxdichtheid is $0{,}5\ T$ en de geleider wordt naar boven verplaatst met een snelheid van $0{,}8\ m/s$. Welke spanning wordt in de geleider veroorzaakt?

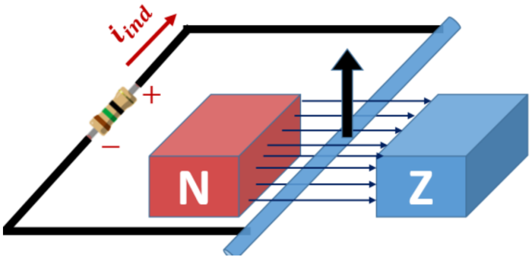
Oplossing:

Alhoewel de geleider $10\ cm$ lang is bevindt er slechts $5\ cm$ ervan in het magnetisch veld. De reden hiervan is dat de polen maar $5\ cm$ breed zijn. Daardoor is de inductiespanning gelijk aan:

$$u_{ind} = B_{\perp} \times l \times v = 0{,}5\ T \times 0{,}05\ m \times 0{,}8\ m/s = 20\ mV$$

3.3.3.3 Geïnduceerde stroom

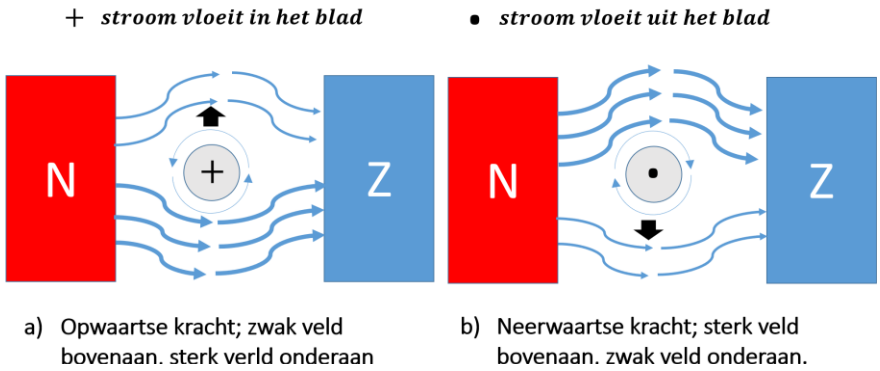
Wanneer een belastingsweerstand is verbonden met de geleider in Figuur 3-32, zal de spanning, veroorzaakt door de relatieve beweging tussen de geleider en het magnetisch veld, in de belasting een stroom veroorzaken, zoals getoond in Figuur 3-33.



Figuur 3-33 : geïnduceerde stroom in een belasting op het moment dat de geleider beweegt tussen het magnetisch veld

Deze stroom wordt de geïnduceerde stroom i_{ind} genoemd. De kleine letter i staat voor ogenblikkelijke stroom. Het produceren van een spanning en een stroom in een belasting door verplaatsing van een geleider in een magnetisch veld is de basis voor elektrische generatoren**.** Een enkele geleider zal een kleine geïnduceerde stroom veroorzaken. Wanneer een spoel met veel wikkelingen wordt gebruikt, zijn er veel geleiders in het magnetisch veld waardoor een hogere spanning kan worden opgewekt. Praktische generatoren maken gebruik van spoelen met veel wikkelingen. Het principe van een geleider in een bewegend magnetisch veld is eveneens fundamenteel voor het concept van inductantie in een elektrische schakeling.

3.3.3.4 Krachten op een stroomvoerende geleider in een magnetisch veld



Figuur 3-34 : kracht op een stroomvoerende geleider in een magnetisch veld

Figuur 3-34 (a) toont de stroom die naar binnen gaat door een draad in een magnetisch veld. Het elektromagnetische veld van de geleider komt in wisselwerking met het permanente magnetische veld. Hierdoor hebben de permanente krachtlijnen boven de draad de neiging te worden afgebogen omdat ze haaks op de elektromagnetische veldlijnen van de geleider komen te staan. Daarom wordt de flux boven de geleider verminderd en het magnetische veld verzwakt. De fluxdichtheid onder de geleider wordt verhoogd, en het magnetische veld wordt versterkt. Een opwaartse kracht op de geleider is hierdoor het resultaat en de geleider neigt te bewegen naar het zwakkere magnetisch veld. Fig-9-8 (b) toont de stroom die naar ons toe is gericht. Hierdoor ontstaat er een kracht op de geleider in de neerwaartse richting. Deze opwaartse en neerwaartse krachten op een geleider zijn de basis voor elektrische motoren. De kracht op een stroomvoerende geleider wordt gegeven door de vergelijking:

$$F = B \times I \times l$$

Met :

- F : de kracht in Newton (N)
- B : de magnetische fluxdichtheid
- l : de lengte van de geleider in het magnetisch veld
- I : de stroom door de geleider

Voorbeeld 3-29

Stel dat een magnetisch poolvlak een vierkant is met lengte $3\ cm$ per zijde. Zoek de kracht op een geleider die loodrecht op het veld staat en waardoor een stroom van $2\ A$ vloeit. De fluxdichtheid bedraagt $0{,}35\ T$.

Oplossing:

De lengte van de geleider die aan het magnetisch veld blootgesteld wordt bedraagt $3\ cm$. Omgevormd naar meter is dit $0{,}03\ m$. De kracht op de geleider is dan gelijk aan:

$$F = B \times I \times l = 0{,}35\ T\ \times 2\ A\ \times 0{,}03\ m = 0{,}21\ N$$

3.3.3.5 Test jezelf : elektromagnetische inductie

1. Wat is de geïnduceerde spanning over een stationaire geleider in een stationair magnetisch veld?
2. Stel dat de snelheid waarmee een geleider door een magnetisch beweegt wordt verhoogd. Neemt dan de geïnduceerde spanning toe, af of blijft deze hetzelfde?
3. Wat gebeurt er wanneer er stroom door een geleider vloeit in een magnetisch veld?

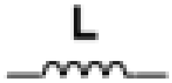
3.3.4 Het werkingsprincipe van een spoel

Een spoel is een passieve elektrische component, gevormd door een draadspiraal, die de eigenschap vertoont van inductantie. Inductantie is de eigenschap van een spoel die een verandering in stroom tegenwerkt. De basis voor inductantie is het elektromagnetische veld dat eender welke geleider omringt wanneer er stroom doorheen gaat.

Wat is belangrijk?

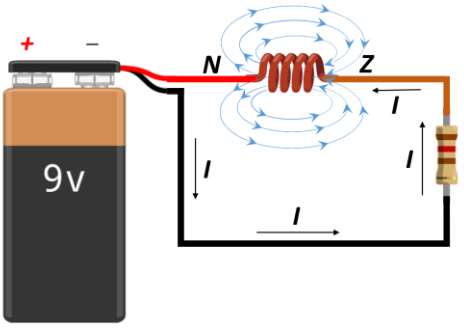
- **Je beschrijft de opbouw en de eigenschappen van een spoel.**
- **Je definieert inductantie en kent zijn eenheid.**
- **Je verklaart het begrip inductiespanning.**
- **Je verklaart hoe een spoel zijn energie opslaat.**
- **Je geeft aan welke fysische eigenschappen van een spoel de inductantie beïnvloeden.**
- **Je beschrijft de begrippen windingsweerstand en windingscapaciteit.**
- **Je verklaart aan de hand van de wet van Faraday en de wet van Lenz hoe spanning wordt geïnduceerd over een spoel.**

Figuur 3-35 toont het elektrisch symbool van een spoel.



Figuur 3-35 : elektrisch symbool van een spoel

Men bekomt een spoel met een bepaalde inductantie door een geleider spiraalvormig op te rollen. Een voorbeeld hiervan is te zien in Figuur 3-36. De stroom door de opgerolde geleider produceert een elektromagnetisch veld. Rond iedere gemaakte lus (winding) ontstaat een elektromagnetisch veld.
De velden van de individuele windingen staan in dezelfde richting zodat ze samen een krachtiger veld vormen in en rondom de spoel. De richting van het veld creëert een magnetische noord- en zuidpool.
Als de stroom verandert, verandert ook het elektromagnetische veld. Een toename van de stroom zorgt voor een toenamen van het veld en een afname in stroom vermindert het elektromagnetisch veld. Een veranderende stroom produceert een veranderend elektromagnetisch veld rond de inductantie (ook bekend als spoel of choke). Op zijn beurt veroorzaakt het veranderende elektromagnetische veld een geïnduceerde spanning. Deze eigenschap wordt zelfinductie genoemd en gesymboliseerd met L.



Figuur 3-36 : De stroom door een spoel creëert een 3D-elektromagnetisch veld rondom de spoel. De weerstand begrenst de stroom.

Inductantie is een maat voor het vermogen van een spoel om een geïnduceerde spanning te verkrijgen als resultaat van een verandering in zijn stroom. De geïnduceerde spanning staat steeds in een zodanige richting zodat deze zich verzet tegen die verandering in stroom.

Eenheid van inductantie

De eenheid van inductantie is de Henry (H). Per definitie is de inductantie van een spoel gelijk aan $1\ H$ als deze een geïnduceerde spanning opwekt van $1\ V$ ten gevolge van een stroomverandering van $1\ A$ per seconde door deze spoel. Henry is een grote eenheid. In praktische toepassingen wordt veel gebruik gemaakt van spoelen in de orde van µH en mH. Nanohenry wordt bijvoorbeeld toegepast voor zeer kleine spoeltjes.

Opslaan van energie

Als gevolg van een bepaalde stroomdoorgang in een spoel wordt er rondom de spoel energie opgeslagen in de vorm van een elektromagnetisch veld. De hoeveelheid opgeslagen energie is gelijk aan:

$$W = \frac{1}{2} \times L \times i^2$$

De hoeveelheid opgeslagen energie is recht evenredig met de grootte van de inductantie en het kwadraat van de stroom.

3.3.4.1 Fysische eigenschappen van een spoel

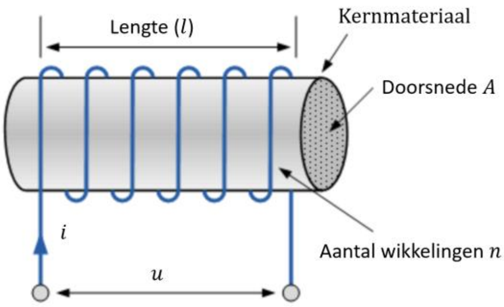
Kernmateriaal

Een spoel is in feite een draadspiraal die rondom een bepaald materiaal gewikkeld wordt. Dit bepaald materiaal wordt de kern genoemd. Spoelen worden zowel over magnetisch materiaal als niet magnetisch materiaal gewikkeld. Voorbeelden van niet-magnetische materialenzijn lucht, hout, koper, plastic en glas. De permeabiliteiten van deze materialen zijn hetzelfde als voor een vacuüm. Voorbeelden van magnetische materialenzijn ijzer, nikkel, staal, kobalt of legeringen. Deze materialen hebben permeabiliteiten die honderden of duizenden malen groter zijn dan die van vacuüm en zijn geclassificeerd als ferromagnetisch. Een ferromagnetische kern zorgt voor een lager reluctantiepad ($\mathcal{R}$) voor de magnetische krachtlijnen en maakt zo een sterker magnetisch veld mogelijk. De permeabiliteit μ bepaalt hoe gemakkelijk een magnetisch veld zich kan nestelen in een bepaald materiaal. De inductantie is recht evenredig met de permeabiliteit van het kernmateriaal.

De zelfinductie L

Zoals aangegeven in Figuur 3-37 is het aantal windingen van de draad, de lengte en de dwarsdoorsnede van de kern factoren bij het instellen van de waarde van inductie. De inductie is omgekeerd evenredig met de lengte van de kern en direct) evenredig met het oppervlak van de dwarsdoorsnede. Ook is de inductantie direct gerelateerd aan het aantal windingen in het kwadraat. Deze relatie is als volgt:

$$\boldsymbol{L = N^2 . \frac{\mu_r . \mu_0 . A}{l}}$$



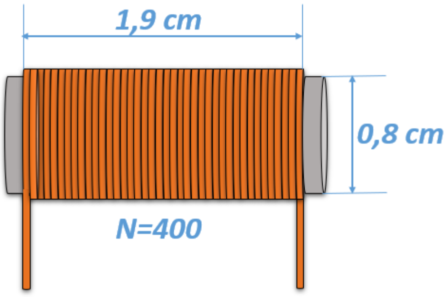
Figuur 3-37 : factoren die de inductiewaarde van een spoel bepalen

Met :

- $\boldsymbol{L}$: de zelfinductie in Henry
- μ_0 : de absolute permeabiliteit en gelijk aan $\frac{4\pi 10^{-7}\,Wb}{Am}$. Dit is de permeabiliteit van vacuüm
- $\boldsymbol{A}$: de oppervlak van de doorsnede van de wikkelingen van de spoel in meter
- $\boldsymbol{l}$: de lengte van de (werkelijke) spoel in meter
- $\boldsymbol{N}$: het aantal wikkelingen van de spoel

Voorbeeld 3-30

Bepaal de zelfinductie van de spoel in Figuur vb-3-14. De permeabiliteit van de kern bedraagt $0{,}25\ \times 10^{-3}\ H/m$



Figuur vb-3-14

Oplossing:

$1{,}9\ cm$ komt overeen met $0{,}019\ m$ en $0{,}8\ cm$ met 0,008 m. De oppervlakte van de doorsnede van de kern is als volgt te berekenen:

$$A = \boldsymbol{\pi} \times \frac{\boldsymbol{D^2}}{\boldsymbol{4}} = \boldsymbol{\pi}\ \times \frac{(0{,}008\ m)^2}{4} = 5{,}03\ \times 10^{-5}\ m^2$$

De zelfinductie L is dan gelijk aan:

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{N^2} \times \frac{\mu\ \times \boldsymbol{A}}{\boldsymbol{l}} = \boldsymbol{400^2}\ \times \frac{0{,}25\ \times 10^{-3}\ H/m\ \times 5{,}03\ \times 10^{-5}\ m^2}{0{,}019\ m} = 111{,}58\ mH$$

De windingsweerstand R_W

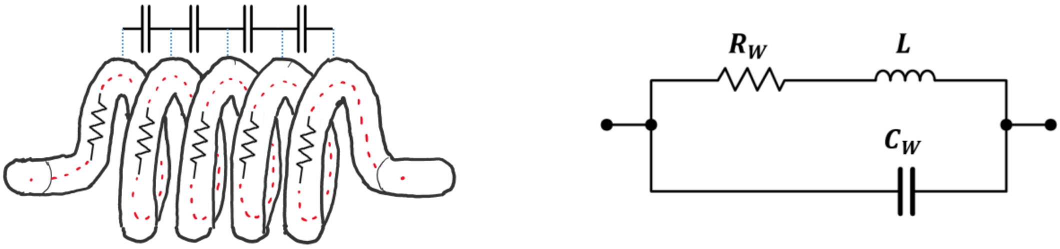
De draad van een spoel bestaat uit een bepaald materiaal (bijvoorbeeld geïsoleerde koperdraad). Deze draad heeft een bepaalde weerstand per lengte-eenheid. Wanneer vele draadwindingen worden gebruikt om een spoel te vormen kan deze totale weerstand aanzienlijk zijn. Deze inherente weerstand wordt de gelijkstroom-weerstand of de wikkelweerstand R_W genoemd
Hoewel deze weerstand wordt verdeeld over de lengte van de draad, zoals weergegeven in de Figuur 3-38 (a), wordt dit soms in een schema aangegeven als de weerstand die in serie verschijnt met
de inductantie van de spoel, zoals weergegeven in figuur 10-6 (b). In veel toepassingen kan de windingsweerstand worden genegeerd waardoor de spoel als ideaal beschouwd kan worden. In andere toepassingen dient rekening gehouden te worden met deze weerstand.

(a) (b)

Figuur 3-38 : Windingsweerstand van een spoel

Windingscapaciteit C_W

Wanneer twee geleiders (windingen) naast elkaar worden geplaatst, is er altijd een bepaalde capaciteit tussen hen. Dit houdt in dat tussen twee windingen van een spoel er een parasitaire capaciteit aanwezig is zoals te zien is in Figuur 3-39 (a). Deze parasitaire capaciteit wordt ook wel eens strooicapaciteit genoemd. Meer algemeen wordt bij een spoel deze parasitaire capaciteit als de windingscapaciteit (C_w) aangegeven.
In veel toepassingen is de windingscapaciteit zeer klein en heeft deze geen significant effect op de werking van de spoel. Bij hoge frequenties kan de waarde van de windingscapaciteit behoorlijk belangrijk worden en dient hiermee rekening gehouden te worden. Bij deze frequenties moet je de spoel aanzien zoals in het equivalent schema in Figuur 3-39 (b). De capaciteit werkt effectief in parallel. Het totaal van de strooicapaciteiten tussen elke lus van de winding is aangegeven in dit schema als een capaciteit die parallel met de spoel en zijn wikkelweerstand verschijnt.



(a) (b)

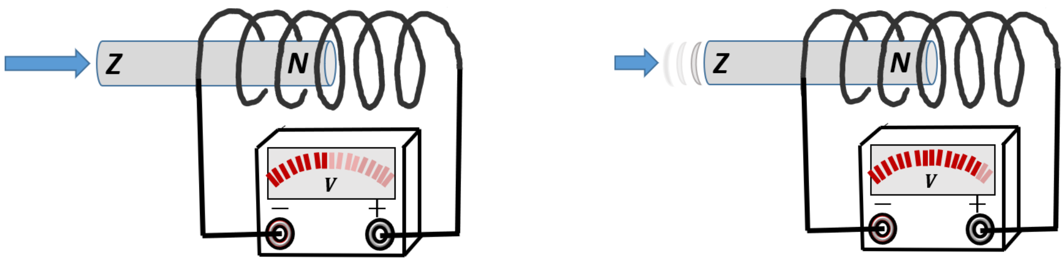
Figuur 3-39 : de windingscapaciteit van een spoel

3.3.4.2 De wet van Faraday

Michael Faraday ontdekte het principe van elektromagnetische inductie in 1831. Het belangrijkste idee achter de wet van Faraday is dat een veranderend magnetisch veld een spanning in een geleider kan induceren. Soms wordt de wet van Faraday ook vermeld als de inductiewet van Faraday.
Faraday experimenteerde met spoelen en zijn wet is een uitbreiding van het principe van elektromagnetische inductie voor rechte geleiders. Wanneer een geleider wordt gewikkeld in meerdere bochten kunnen meerdere delen van deze geleider worden blootgesteld aan het magnetische veld waardoor de geïnduceerde spanning groter is. Wanneer de flux op een of andere manier verandert, zal er een geïnduceerde spanning ontstaan.
De verandering in het magnetische veld kan worden veroorzaakt door relatieve beweging tussen het magnetische veld en de spoel. De opmerkingen van Faraday kunnen als volgt worden weergegeven:

- De hoeveelheid spanning geïnduceerd in een spoel is recht evenredig met de mate van verandering van het magnetisch veld ten opzichte van de spoel.
- De hoeveelheid spanning geïnduceerd in een spoel is recht evenredig met het aantal windingen in de spoel.

Dat de hoeveelheid geïnduceerde spanning recht evenredig is met de mate van verandering in het magnetisch veld kan aangetoond worden door een staafmagneet door een spoel te laten bewegen. De beweging van de staafmagneet creëert een veranderlijk magnetisch veld rondom de spoel waardoor er een bepaalde spanning wordt geproduceerd.
Deze spanning kan zichtbaar gemaakt worden met een voltmeter. Dit principe wordt weergegeven in Figuur 3-40.

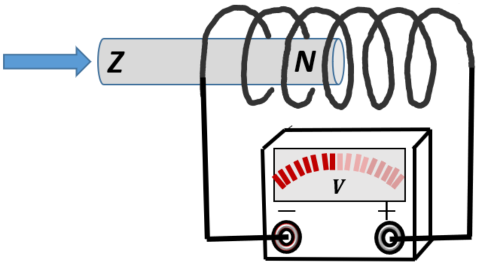


(a) Magneet beweegt door een spoel met een bepaalde snelheid

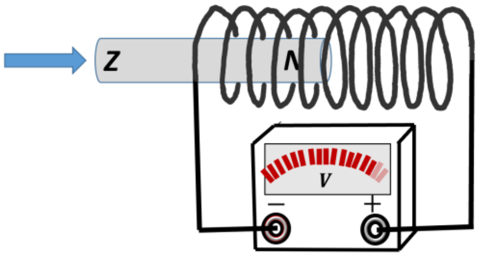
(b) Magneet beweegt door dezelfde spoel als in (a) maar met een hogere snelheid

Figuur 3-40 : Een voorbeeld van Faraday's eerste observatie. De hoeveelheid geïnduceerde spanning is recht evenredig met de snelheid van verandering van het magnetisch veld ten opzichte van de spoel.

In Figuur 3-40 (b) beweegt de staafmagneet trager door de spoel dan in Figuur 3-40 (a). Via de figuren is goed te zien dat hoe sneller de magneet beweegt, hoe groter de opgewekte inductiespanning is.



(a) Magneet beweegt door een spoel en induceert een spanning



(b) Magneet beweegt met dezelfde snelheid door een spoel met meer windingen en induceert hierdoor een grotere spanning.

Figuur 3-41 : Een voorbeeld van Faraday's tweede observatie. De hoeveelheid geïnduceerde spanning is direct evenredig met het aantal windingen van een spoel.

Wanneer men dezelfde staafmagneet door een spoel beweegt en men verhoogt het aantal wikkelingen dan zal in de spoel met de meeste wikkelingen de meeste spanning worden geïnduceerd. Dit is weergegeven in Figuur 3-41.
De wet van Faraday houdt het volgende in:

De spanning over een spoel is gelijk aan het aantal windingen van de spoel vermenigvuldigt met de snelheid van verandering van de magnetische flux.

Iedere relatieve beweging tussen het magnetisch veld en de magneet veroorzaakt de verandering van dat magnetisch veld waardoor een inductiespanning wordt geïnduceerd in de spoel. Het veranderlijk magnetisch veld kan ook veroorzaakt worden door een wisselstroom te sturen doorheen een elektromagneet. Een elektromagneet is een spoel die gewikkeld is op een materiaal met een grote waarde voor de permeabiliteit. Enkel als er stroom door deze spoel vloeit ontstaat er een magnetisch veld. Vandaar de naam elektromagneet. Door een veranderlijke stroom te sturen door zo'n spoel ontstaat er een veranderlijk magnetisch veld. Dit type van veranderlijk magnetisch veld ligt aan de basis van transformatie-acties in wisselstroomschakelingen.

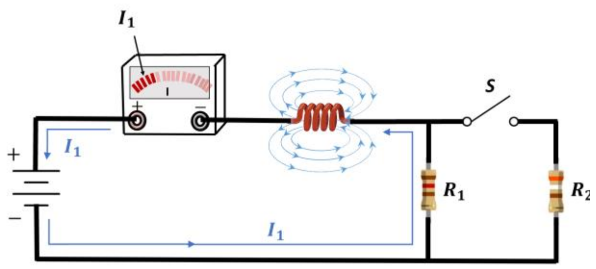
3.3.4.3 De wet van Lenz

De wet van Lenz vult de wet van Faraday aan door de richting te bepalen van de geïnduceerde spanning. De wet van Lenz vertelt ons het volgende:

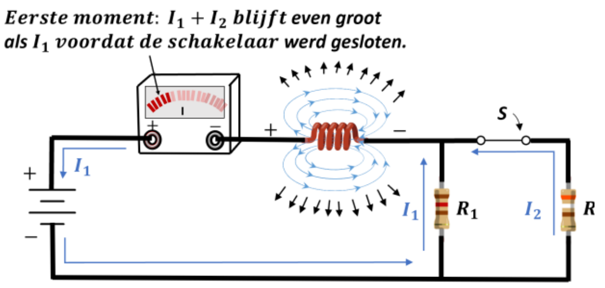
Wanneer de stroom door een spoel verandert en een geïnduceerde spanning wordt gecreëerd als een resultaat van het veranderende magnetische veld, dan is de richting van de geïnduceerde spanning zodanig dat het altijd tegen de verandering in stroom is.

Figuur 3-42 illustreert de wet van Lenz. In deel (a) is de stroom constant en beperkt door
door weerstand R_1. Er is geen geïnduceerde spanning omdat het magnetische veld niet verandert.

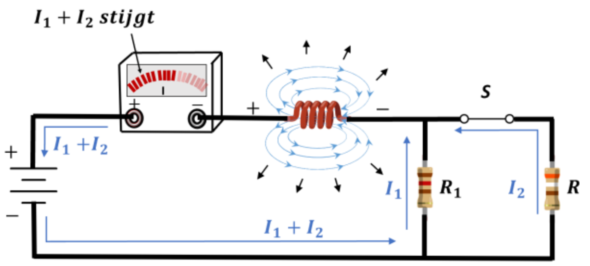
In Figuur 3-42(b) wordt de schakelaar wordt plotseling gesloten, R_2 wordt parallel geplaatst met R_1 en vermindert dus de totale weerstand. De stroom probeert te vergroten en het magnetische veld begint uit te zetten. Echter de geïnduceerde spanning verzet zich tegen deze poging tot stroomtoename en kan dit gedurende een ogenblik verhinderen. In Figuur 3-42 (c) neemt de geïnduceerde spanning geleidelijk af waardoor de stroom zal gaan toenemen. In Figuur 3-42 (d) heeft de stroom een constante waarde bereikt zoals bepaald door de parallelweerstanden en de geïnduceerde spanning is nul.
In Figuur 3-42(e) is de schakelaar plotseling geopend. Voor een ogenblik zal ook nu de geïnduceerde spanning voorkomen dat er een afname van de stroom zal zijn. In Figuur 3-42 (f) neemt de geïnduceerde spanning geleidelijk af waardoor de stroom terug naar de waarde kan dalen die bepaald is door R_1. Merk op dat de geïnduceerde spanning een polariteit heeft die tegen elke stroomverandering is. De polariteit van de geïnduceerde spanning is tegenovergesteld aan die van de batterijspanning voor een toename van stroom en helpt de batterijspanning voor een afname van stroom.



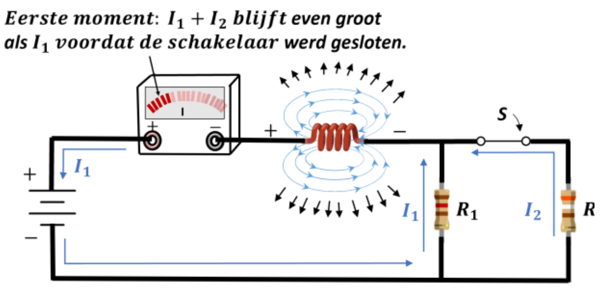
(a) *Schakelaar open : constante stroom en constant magnetisch veld waardoor er geen geïnduceerde spanning aanwezig is*



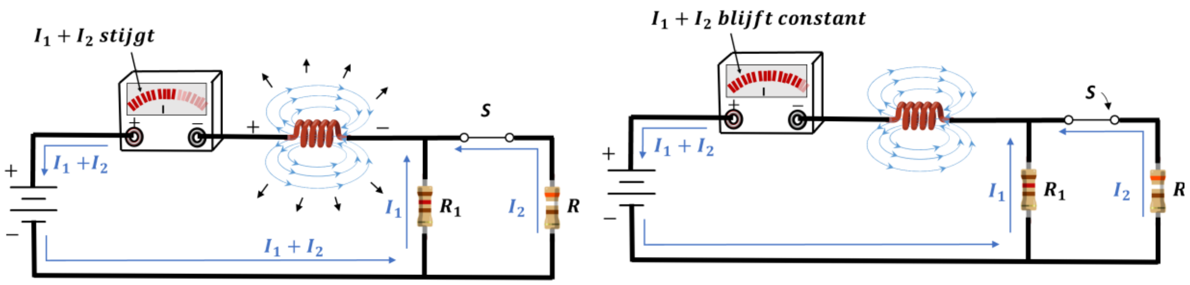
(b) *Op het moment dat de schakelaar gesloten wordt vergroot het magnetisch veld en induceert een spanning die zodanig gericht is dat ze een stijging van de stroom verhindert. De totale stroom blijft hetzelfde als tijdens het moment dat de schakelaar open was.*



(c) *Direct nadat de schakelaar gesloten is zal de snelheid waarmee het magnetisch veld zich uitbreidt verminderen. Dit laat toe dat de stroom exponentieel zal stijgen vermits de geïnduceerde spanning afneemt door het minder snel uitbreiden van het magnetische veld.*



(d) *De schakelaar blijft gesloten. De stroom en het magnetisch veld blijven constant waardoor er geen geïnduceerde spanning meer aanwezig is.*



(e) *Op het moment dat de schakelaar terug wordt geopend begint het magnetisch veld in te zakken. Hierdoor wordt een spanning geïnduceerd die zich verzet tegen het dalen van de stroom.*

(f) *Nadat de schakelaar geopend is zal de snelheid van het in elkaar zakken van het magnetisch veld dalen waardoor ook de geïnduceerde spanning zal dalen. Hierdoor kan de stroom vergroten naar zijn oorspronkelijke waarde.*

Figuur 3-42 : Demonstratie van de wet van Lenz in een inductieve schakeling.

3.3.4.4 Test jezelf : Het werkingsprincipe van een spoel

1. **Noem de parameters op die een bijdrage leveren tot de inductantie van een spoel.**
2. **Beschrijf wat er gebeurt met L als :**
   a. **N stijgt**
   b. **De lengte van de kern stijgt**
   c. **De doorsnede van de kern daalt**
   d. **Een ferromagnetische kern wordt vervangen door een luchtkern.**
3. **Verklaar waarom spoelen een bepaalde windingsweerstand hebben.**
4. **Verklaar waarom spoelen een bepaalde windingscapaciteit bezitten.**
5. **Wat houdt de wet van Faraday in?**
6. **Wat houdt de wet van Lenz in?**

3.3.5 Serie- en parallelschakelen van spoelen

Als spoelen in serie worden geschakeld, verhoogt de totale inductantie. Als spoelen in parallel worden geschakeld, verlaagt de totale inductantie.

Wat is belangrijk?
- **Je bepaalt de totale inductantie van een serieschakeling van spoelen.**
- **Je bepaalt de totale inductantie van een parallelschakeling van spoelen.**

3.3.5.1 De totale inductantie van spoelen in serie geschakeld

De algemene formule voor de zelfinductie is gelijk aan :

$$U_L = -L \times \frac{dI}{dt}$$

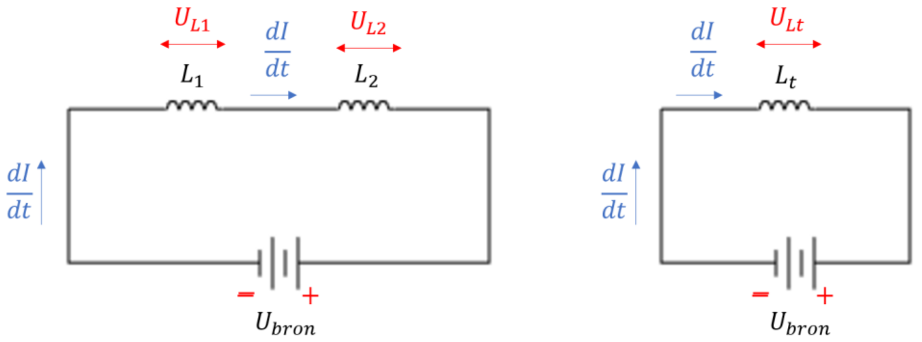
Hierbij is :
- U_L : de geïnduceerde spanning in Volt over de spoel (minteken duidt op het feit dat deze spanning zijn oorzaak tegenwerkt)

- L : de zelfinductie in Henry
- $\frac{dI}{dt}$: de stroomverandering per tijdseenheid in Ampère per seconde

Om de totale inductantie L_t te vinden van een aantal spoelen in serie, moet de totale inductantie hetzelfde gedrag vertonen als de serieschakeling van de spoelen die deze totale inductantie vervangt. Beschouw hiervoor Figuur 3-43.

Volgens de spanningswet van Kirchhoff is de spanning over de totale inductantie gelijk aan de som der spanningsvallen van de in serie staande inductanties. Bijgevolg is:

$$U_{Lt} = U_{L1} + U_{L2}$$



Figuur 3-43 : bepalen van de totale inductantie van een serieschakeling

Vervangen we deze spanningen aan de hand van de formule van de zelfinductie dan is:

$$-L_t.\frac{dI}{dt} = -(L_1.\frac{dI}{dt}) + (-L_2.\frac{dI}{dt})$$

Verder uitwerken:

$$L_t.\frac{dI}{dt} = \frac{dI}{dt}(L_1 + L_2)$$

$$L_t = L_1 + L_2$$

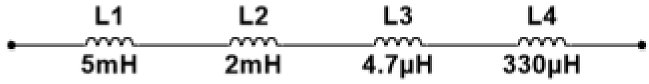
Algemeen wordt bekomen:

$$L_t = L_1 + L_2 + \cdots + L_n$$

De totale inductantie van een serieschakeling van spoelen is gelijk aan de som van de inductanties van deze spoelen in serie.

Voorbeeld 3-31

Bereken de totale inductantie van de serieschakeling in Figuur vb-3-15



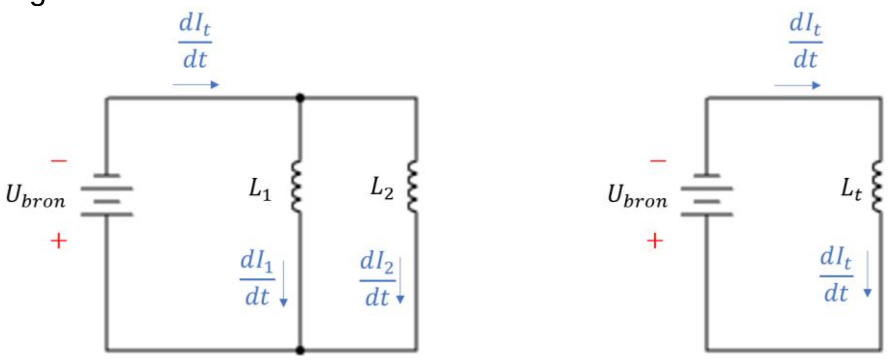
Figuur vb-3-15

Oplossing:

$$L_t = 5\,mH + 2\,mH + 4{,}7\,\mu H + 330\,\mu H = \;7{,}3347\,mH$$

3.3.5.2 De totale inductantie van spoelen in parallel geschakeld

Beschouw Figuur 3-44.



Figuur 3-44 : Bepalen van de totale inductantie van spoelen in parallel

Uit Figuur 3-44 kan je het volgende afleiden:

$$\frac{dI_t}{dt} = \frac{dI_1}{dt} + \frac{dI_2}{dt}$$

Via vergelijking van de zelfinductie kan je bovenstaande vergelijking omvormen tot:

$$\frac{U_{Lt}}{L_t} = \left(\frac{U_{L1}}{L_1} + \frac{U_{L2}}{L_2}\right)$$

Het minteken kan weggedeeld worden. Bij een parallelschakeling hebben de spanningen dezelfde waarde. Deze kunnen dus ook weggedeeld worden. Dit leidt tot :

$$\frac{1}{L_t} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$

Uitwerken naar L_t :

$$L_t = \frac{1}{\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}}$$

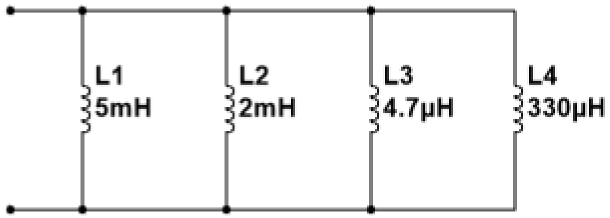
Meer algemeen:

$$L_t = \frac{1}{\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_n}}$$

De totale inductantie van een parallelschakeling van spoelen is steeds kleiner dan de kleinste inductiewaarde in de parallelschakeling

Voorbeeld 3-31

Bereken de totale inductantie van de parallelschakeling in figuur vb-3-16



Figuur vb-3-16

Oplossing:

$$L_t = \frac{1}{\frac{1}{5\ mH} + \frac{1}{2\ mH} + \frac{1}{4{,}7\ \mu H} + \frac{1}{330\ \mu H}} = 4{,}62\ \mu H$$

.

3.3.5.3 Test jezelf : serie- en parallelschakelen van spoelen

1. **Geef de regel om de totale inductantie te vinden bij een serieschakeling van spoelen.**
2. **Wat is L_t voor een serieschakeling van spoelen bestaande uit een spoel van $500\ \mu H, 200\ \mu H$ en $2\ mH$.**
3. **Vijf spoelen van $100\ mH$ worden in serie geschakeld. Wat is de totale inductantie van deze serieschakeling?**
4. **Vergelijk de totale inductantie van een parallelschakeling met de kleinste inductantie in deze parallelschakeling van spoelen.**
5. **Is de berekening voor de totale inductantie bij een parallelschakeling van spoelen analoog als de berekening van de totale weerstand bij een parallelschakeling van weerstanden? Ja of neen?**
6. **Bepaal de vervangingsinductantie voor volgende parallelcombinaties van spoelen**
   (a) $100\ mH, 50\ mH$ en $10\ mH$
   (b) $40\ \mu H$ en $60\ \mu H$

3.3.6 Het gedrag van een spoel op gelijkstroom

Wanneer een spoel is aangesloten op een gelijkspanning wordt energie in het elektromagnetische veld van een spoel opgeslagen. De opbouw van stroom door de spoel gebeurt op een voorspelbare manier afhankelijk van de tijdconstante van de schakeling. De tijdconstante wordt bepaald door de inductantie en de weerstand in de schakeling.

Wat is belangrijk?

- **Je definieert de RL-tijdsconstante.**
- **Je beschrijft het stijgen en dalen van de stroom in een spoel.**
- **Je beschrijft de toename en afname van de stroom in een spoel.**

- **Je beschrijft het verband tussen de tijdsconstante met het bekrachtigen en ontkrachtigen van een spoel.**
- **Je beschrijft de inductiespanning.**
- **Je schrijft de exponentiële vergelijkingen voor de stroom in een spoel**

3.3.6.1 Gedrag van een spoel op gelijkspanning

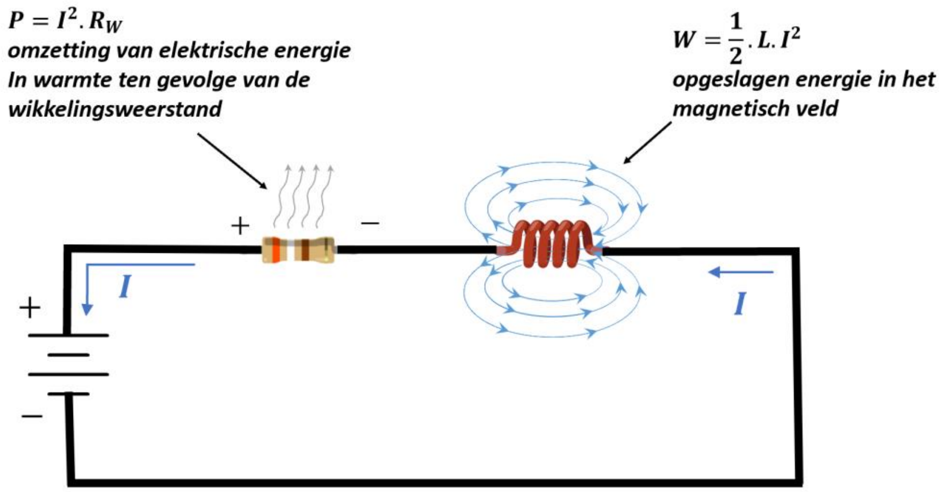
Wanneer er constante gelijkstroom door een spoel stroomt, is er geen geïnduceerde spanning. Er is echter wel een spanningsval over de spoel als gevolg van de windingsweerstand van de spoel. De inductantie zelf gedraagt zich als een kortsluiting voor gelijkspanning. De energie wordt opgeslagen in het magnetische veld volgens de formule:

$$W = \frac{1}{2}Li^2$$

De enige energieomzetting in warmte vindt plaats in de windingsweerstand. Het gedissipeerd vermogen in de windingsweerstand kan bepaald worden met volgende formule:

$$P = I^2Rw$$

Deze toestand is geïllustreerd in 9-22



Figuur 3-45 : energieopslag en warmtedissipatie in een spoel

3.3.6.2 De RL-tijdsconstante

Omdat de basisactie van de inductantie van een spoel het ontwikkelen is van een spanning die tegengesteld is aan de stroomverandering, volgt hieruit dat de stroom in eerste instantie niet kan veranderen in een spoel. Er is een bepaalde tijd nodig voor de stroom te laten variëren van de ene waarde naar de andere. De snelheid waarmee de stroom kan veranderen wordt bepaald door de RL-tijdconstante. De RL-tijdsconstante is een vast tijdsinterval dat gelijk is aan de verhouding van de inductantie tot de weerstand. In formulevorm :

$$\tau = \frac{L}{R}$$

Hierbij is $\boldsymbol{\tau}$ uitgedrukt in seconden, L in Henry en R in Ohm

Voorbeeld 3-32:

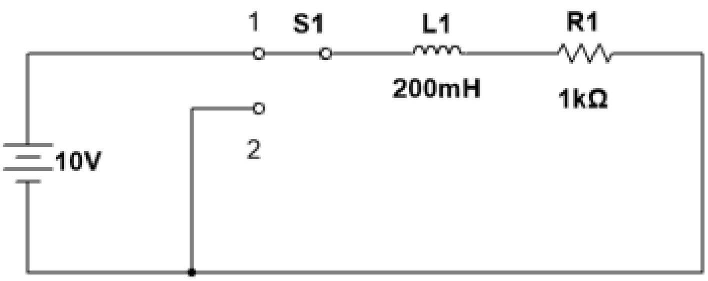
Stel $R = 1\ k\Omega$ en $L = 1\ mH$. Bepaal de tijdsconstante:

Oplossing:

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{1 \times 10^{-3} H}{1 \times 10^{3}\ \Omega} = 1\ \mu s$$

3.3.6.3 Laden en ontladen van een spoel

Beschouw de schakeling van Figuur 3-46. Stel dat er geen spanning aangesloten is en de schakelaar in positie 1 staat. Er is bijgevolg geen spanning over de spoel en over de weerstand. Vanaf het moment dat de spanningsbron wordt opgezet, zal de stroom vanaf waarde nul naar zijn regimewaarde stijgen. Een verandering van nul naar een bepaalde waarde is de maximale verandering die een stroom kan maken. Bijgevolg zal bij het opzetten van de spanningsbron de stroom maximaal veranderen. Deze maximale verandering betekend dat een zelfinductiespanning in de spoel wordt opgewekt die zijn oorzaak tegenwerkt. Hierdoor wordt de stroom in eerste instantie tegengehouden en staat de volle bronspanning over de spoel.



Figuur 3-46 : schakeling om het laad- en ontladingsverloop van een spoel te bepalen

$$I_{max} = \frac{U_{bron}}{R_1}$$

Naarmate de tijd vordert, verkleind de stroomverandering waardoor de opgewekte zelfinductie ook vermindert. Hierdoor gaat er meer en meer stroom vloeien in de schakeling met als gevolg dat de stroom stijgt. Van zodra de stroomwaarde constant is, wordt er geen zelfinductiespanning meer opgewekt.. De spanning over de spoel wordt gelijk aan nul en over de weerstand staat de volledige voedingsspanning. De stroom die dan door de schakeling vloeit is de maximale stroom. Deze is gelijk aan :

$$I_{max} = \frac{U_{bron}}{R_1}$$

Van zodra de stroomverandering kleiner wordt begint er stroom door de schakeling te vloeien en komt er ook een spanningsval over de weerstand te staan. Deze spanningsval kan gevonden worden via het spanningsverschil tussen bronspanning en spoelspanning. In formulevorm:

$$i = \frac{U_{bron} - U_L}{R}$$

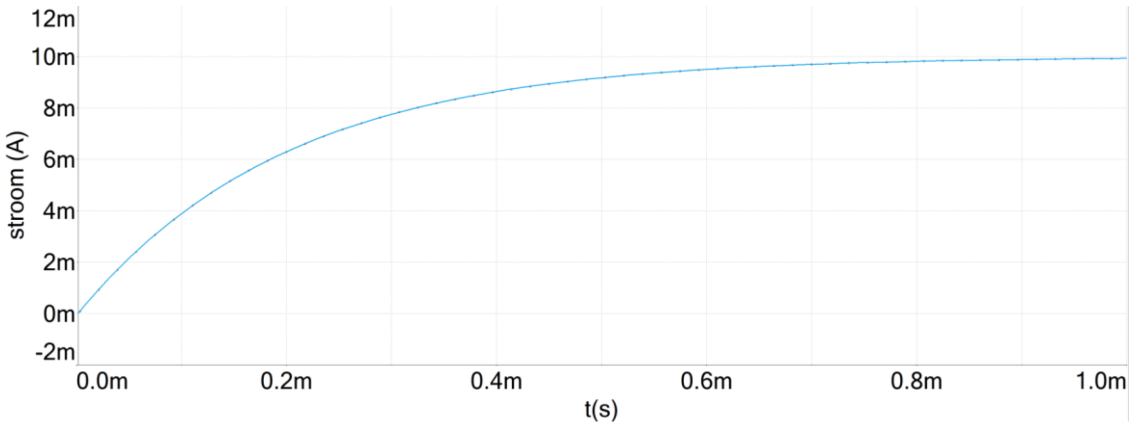
Verder uitwerken:

$$i = \frac{U_{bron} - L\frac{dI}{dt}}{R} = \frac{U_{bron}}{R} - \frac{L}{R}.\frac{dI}{dt} = I_{max} - \frac{L}{R}.\frac{dI}{dt}$$

Na verdere wiskundige uitwerking wordt volgende stroomformule bekomen:

$$i = I_{max} \times \left(1 - e^{-\frac{L}{R}\times t}\right)$$

Net als bij de condensator is de stroom op ieder moment in de schakeling afhankelijk van de tijdsconstante $\tau = L/R$. In een serie RL –circuit neemt de stroom toe naar ongeveer 63% van zijn volledige waarde na één tijdsconstante interval. Deze opbouw van stroom volgt een exponentiële curve en bereikt zijn maximale stroomwaarde na ongeveer vijf keer de tijdsconstante. Figuur 9-24 toont het stroomverloop door de schakeling.



Figuur 9-24 : stroomverloop door een serieschakeling van L en R na het aanschakelen van de bron

3.3.6.4 Bepalen van het spanningsverloop over de spoel en de weerstand tijdens het laden.

De spanning over de spoel is als volgt te bepalen:

$$u_{L1} = U_{bron} - U_{R1}$$

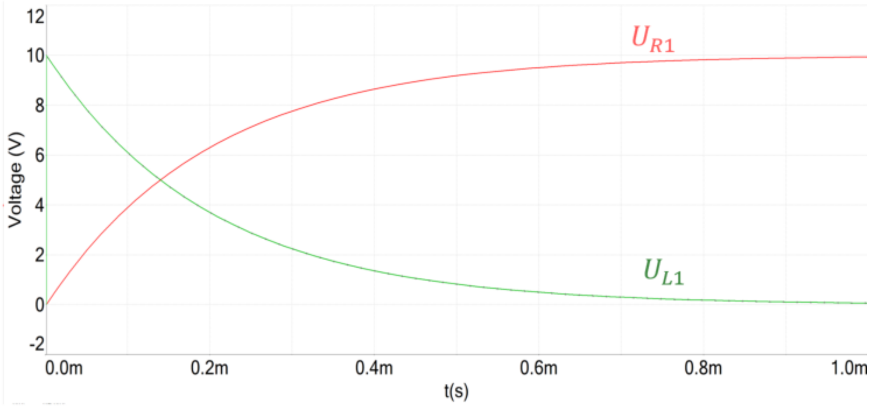
$$u_{L1} = U_{bron} - R_1 \times I_{max} \times (1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

$$u_{L1} = U_{bron} - U_{bron} \times (1 - e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$u_{L1} = U_{bron}(1 - (1 - e^{-\frac{R}{L}t}))$$

$$u_{L1} = U_{bron} \times e^{-\frac{R}{L}t}$$

Dit spanningsverloop over de spoel en weerstand is in Figuur 3-48 weergegeven.

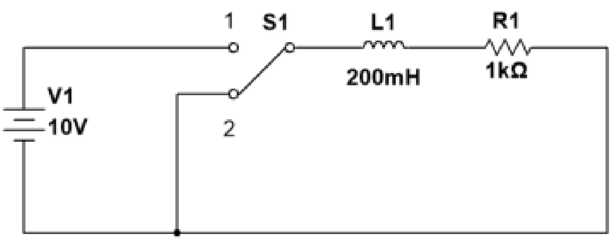


Figuur 3-48 : spanningsverloop over spoel en weerstand tijdens het laadproces

De spanning over de weerstand kan met volgende formule berekend worden:

$$u_{R1} = U_{bron} \times \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

Bepalen van het spanningsverloop over de spoel en weerstand tijdens het onladen
Op het moment dat de schakelaar in stand 2 wordt geschakeld, vloeit er een bepaalde stroom door de serieschakeling. Doordat de spanningsbron wordt kortgesloten ontstaat er een stroomverandering die een zelfinductiespanning opwekt in de spoel. Aangezien de stroom naar nul gaat, wordt er een zelfinductiespanning opgewekt die negatief is. Vermits de voedingsspanning is weggevallen klapt het magnetisch veld in waardoor de polariteit van de inductiespanning over de spoel negatief wordt.
Het inklappen van het magnetisch veld onderhoudt de stroom in dezelfde richting tot het magnetisch veld verdwenen is.



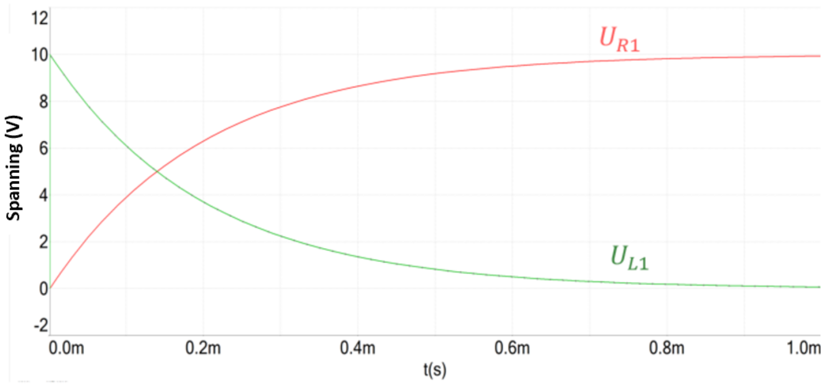
Figuur 3-49 : schakeling tijdens het ontladen

De spanning over de spoel op het moment dat de schakelaar in stand 2 wordt geplaatst is gelijk aan:

$$u_{L1} = \; - U_{R1\,max} \times \, e^{-\frac{R}{L}t}$$

Hierbij is U_{R1max} de spanning over R_1 op het moment dat de schakelaar in stand 2 wordt geschakeld.
De spanning over R_1 kan als volgt worden bepaald:

$$u_{R1} = \; U_{R1\,max} \times \, e^{-\frac{R}{L}t}$$



Figuur 3-50 laad- en ontlaadverloop bij een spoel

De stroom door de schakeling tijdens het ontladen wordt als volgt berekend:

$$i = \frac{U_{R1Max}}{R_1} \times \, e^{-\frac{R}{L}t}$$

3.3.6.5 Test jezelf : Het gedrag van een spoel op gelijkstroom

1. **Door een spoel met zelfinductie gelijk aan $15\ mH$ en een windingsweerstand gelijk aan $10\ \Omega$ vloeit een constante stroom gelijk aan $10\ mA$. Hoeveel bedraagt de spanningsval over deze spoel?**
2. **Een spanningsbron met $20\ V\ DC$ staat aangesloten op een RL-serieschakeling. Op het moment dat de spanningsbron wordt opgezet wat zijn dan de waarden van i en u_L?**
3. **Dezelfde schakeling als in vraag 2. Wat is de spanningswaarde van u_L na een tijdsinterval gelijk aan 5τ?**
4. **Een serieschakeling bestaat uit een spoel met $L = 500\ \mu H$ en een weerstand met $R = 1\ k\Omega$. Wat is de tijdsconstante van deze schakeling? Bepaal de stroom door de serieschakeling op het moment $0,25\ \mu s$ nadat een schakelaar de serieschakeling verbonden heeft met een spanningsbron van $10\ V$.**

3.3.7 Het gedrag van een spoel op wisselstroom

Een spoel laat wisselstroom door maar met een bepaalde oppositie die afhankelijk is van de frequentie van de wisselstroom.

Wat is belangrijk?

- **Je definieert de inductieve reactantie.**
- **Je bepaalt de waarde van de inductieve reactantie in een gegeven schakeling**
- **Je verklaart het werkelijk, ogenblikkelijk en reactief vermogen in een spoel**
- **Je verklaart de faserelatie tussen spanning en stroom bij een spoel**

3.3.7.1 De inductieve reactantie X_L

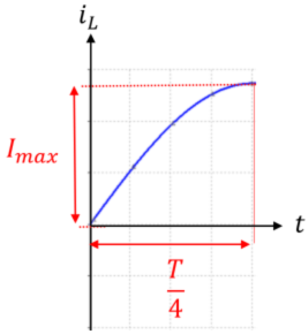
Wanneer de voedingsspanning op een constante amplitudewaarde wordt gehouden en de frequentie ervan wordt verhoogd, dan neemt de amplitude van de stroom af. Ook wanneer de frequentie van de bron afneemt neemt de stroomamplitude toe. Als de frequentie van de bronspanning wordt verhoogd, dan neemt de frequentie van de stroom ook toe. Volgens de wetten van Faraday en Lenz wordt er meer spanning geïnduceerd over de spoel in een richting om de stroom tegen te werken waardoor deze in amplitude afneemt. Evenzo veroorzaakt een afname van de frequentie een toename van stroom.
De inductieve reactantie X_L is datgene dat weerstand biedt tegen de wisselstroom in een spoel. Deze reactantie biedt geen weerstand tegen constante stroom. Hoe groter de inductantie L, hoe meer weerstand er geboden wordt aangaande de wisselstroom door de spoel. X_L is evenredig met de frequentie en de zelfinductie.

Bepalen van de inductieve reactantie

Beschouw hiervoor Figuur 3-51. In de figuur is het eerste vierde periode te zien van de wisselstroom door een spoel. Door de gemiddelde stroom te bepalen over $\frac{1}{4}$ periode kan je via vervangingen in de vergelijking de inductieve reactantie bepalen. Eerst schrijven we de algemene formule neer die de spanning over een spoel bepaald:

$$u_L = L \times \frac{dI}{dt}$$

Door het interval van de stroom te bepalen tussen de tijdstippen 0 en $\frac{T}{4}$ en deze in bovenstaande formule in te vullen bekomen we een vergelijking die de spanning weergeeft in functie van de stroom.



Figuur 3-51 : $\frac{1}{4}$ periode van de stroom om de inductieve reactantie te bepalen

Na een tijdsverloop van $\frac{T}{4}$ is de stroom gevarieerd van 0 tot I_{max}. Dit invullen in de vergelijking:

$$u_L = L \times \frac{I_{max} - 0}{\frac{T}{4} - 0}$$

$$u_L = L \times \frac{I_{max}}{\frac{T}{4}} = L \times \frac{4 \times I_{max}}{T}$$

Vermits de periode het omgekeerde is van de frequentie kan je de periode vervangen door de frequentie. Dit levert volgend resultaat op:

$$u_L = L \times 4 \times f \times I_{max}$$

De spanning u_L die op deze wijze gevonden wordt is de gemiddelde spanning gezien over het tijdsinterval tussen 0 en $\frac{T}{4}$. Om de correcte reactantiewaarde te vinden moet I_{max} ook omgevormd worden tot de gemiddelde waarde. De gemiddelde stroomwaarde kan op volgende wijze gehaald worden uit de maximale stroomwaarde:

$$I_{gemid} = \frac{2}{\pi} \times I_{max}$$

Of:

$$I_{max} = \frac{\pi}{2} \times I_{gemid}$$

Vullen we laatstgenoemde formule in de vergelijking van u_L dan bekomen we:

$$u_L = L \times 4 \times f \times \frac{\pi}{2} \times I_{gemid}$$

Deze formule vereenvoudigen en herschikken levert op :

$$u_L = 2 \times \pi \times f \times L \times I_{gemid}$$

De inductieve reactantie kan dan als volgt worden bepaald:

$$XL = \frac{u_L}{I_{gemid}} = 2 \times \pi \times f \times L$$

Of :

$$XL = 2 \pi f L$$

Soms spreekt men van een inductantie wat hetzelfde betekent als een inductieve reactantie. De inductieve reactantie wordt in Ohm uitgedrukt.

Voorbeeld 3-33

Een sinusvormige spanning van $10\ V$ met frequentie $5\ kHz$ wordt over een spoel aangesloten met een inductiewaarde gelijk aan $2\ mH$. Bepaal de inductieve reactantie.

Oplossing:

$$XL = 2 \pi f L$$

$$XL = 2 \times \pi \times 5\ kHz \times 2\ mH = 62{,}83\ \Omega$$

Serie- en parallelschakelen van inductieve reactanties

Vermits de inductieve reactanties weerstand bieden aan de wisselstroom gedragen ze zich als weerstanden (maar dan enkel op gebied van wisselstroom). Dit betekent dat de formules voor het vinden van de totale seriereactantie of parallelreactantie op dezelfde manier te vinden zijn als de formule voor de totale weerstand van een serieschakeling of parallelschakeling.
De formules voor de serieschakeling zijn:

$$XL_t = XL_1 + XL_2 + \cdots + XL_n$$

En voor de parallelschakeling :

$$XL_t = \frac{1}{\frac{1}{XL_1} + \frac{1}{XL_2} + \cdots + \frac{1}{XL_n}}$$

Voorbeeld 3-34

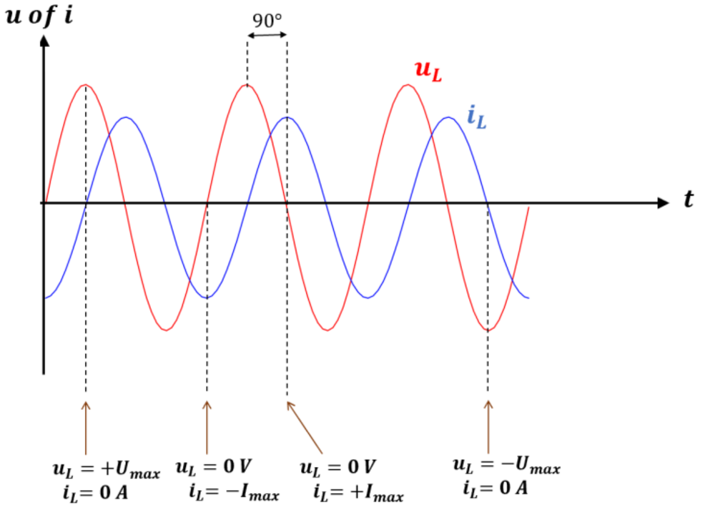
Een spoel van $5\ mH$ en een spoel van $8\ mH$ staan in parallel en zijn aangesloten op een spanningsbron van $20\ V$ met frequentie $15\ kHz$. Bepaal de totale reactantie van de schakeling.

Oplossing:

$$XL_t = \frac{1}{\frac{1}{2.\pi.15\ kHz\ .5\ mH} + \frac{1}{2.\pi.15\ kHz\ .8\ mH}} = 443{,}52\ \Omega$$

3.3.7.2 De faseverschuiving tussen spanning en stroom bij een spoel

Een sinusvormige spanning heeft een maximale veranderingssnelheid bij de nuldoorgang en een nul-snelheid van verandering op de pieken. Via de wet van Faraday weet je dat de hoeveelheid spanning die geïnduceerd wordt over een spoel recht evenredig is met de snelheid waarmee de stroom aan het veranderen is. Daarom is de spoelspanning maximaal bij de nuldoorgangen van de stroom waar de mate van verandering van de stroom het grootst is. Ook de hoeveelheid spanning bij de amplitude van de stroom is nul. Deze fase relatie is geïllustreerd in Figuur 3-52. Via de figuur zie je duidelijk dat bij een spoel de spanning 90° voor-ijlend is op de stroom.



Figuur 3-52 :bij een spoel ijlt de spanning 90° voor op de stroom

3.3.7.3 Vermogen in een spoel

Een spoel bewaart de energie in zijn magnetisch veld. Een ideale spoel (zonder windingsweerstand) dissipeert geen energie maar bewaart het enkel. Als een wisselspanning wordt aangelegd aan een spoel dan zal gedurende een deel van de cyclus de spoel de energie in zijn magnetisch veld bewaren en gedurende een ander deel van deze cyclus deze energie terug afgeven aan de bron.

Figuur 3-53 toont de vermogencurve gedurende een cyclus van het vermogen. Merk op dat deze curve veel gelijkenis toont met deze van de condensator. Het verschil is dat spanning en stroom omgewisseld zijn.

Het ogenblikkelijk of momenteel vermogen p

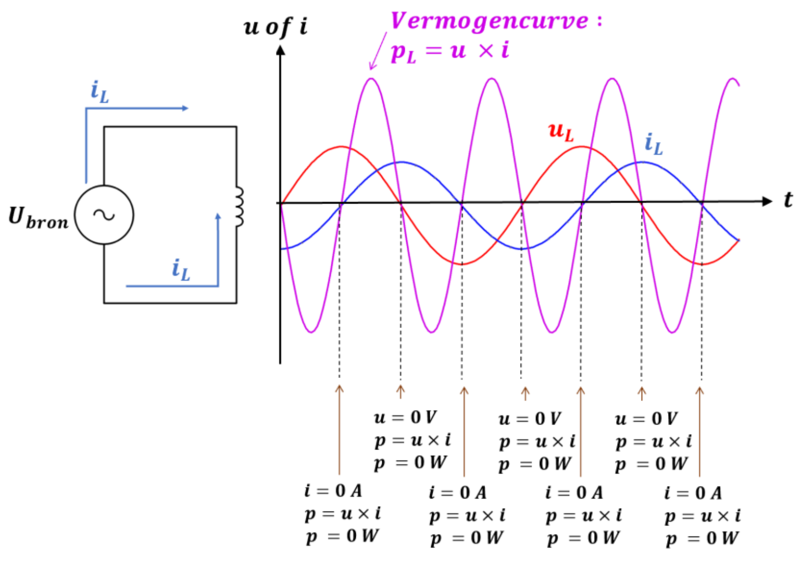
Het product van ogenblikkelijke spanning u met de ogenblikkelijke stroom i levert het ogenblikkelijk vermogen p op. Op punten waar u of i nul is, is p ook nul. Wanneer zowel u als i positief zijn, is p ook positief. Wanneer u of i positief is en het andere negatief, is p is negatief. Als zowel u als i negatief zijn, is p positief. Zoals in Figuur

3-53 te zien is volgt het ogenblikkelijk vermogen een sinusvormige curve. Positieve waarden van het vermogen geven aan dat er energie door de spoel wordt opgeslagen. Negatieve waarden van het vermogen duiden aan dat er energie wordt teruggestuurd van de spoel naar de bron. Merk op dat het vermogen fluctueert op een frequentie twee keer die van de spanning of stroom. Dit komt omdat energie afwisselend wordt opgeslagen en teruggestuurd
naar de bron.

Werkelijk vermogen $P_{werkelijk}$

Bij een ideale spoel wordt, alle tijdens het positieve deel van de vermogencyclus opgeslagen energie, tijdens het negatieve gedeelte teruggestuurd naar de bron. Er gaat geen netto energie verloren door omzetting in warmte in de ideale spoel, dus het vermogen is nul. In werkelijkheid zal er vanwege de windingsweerstand er altijd wat vermogen gedissipeerd worden. Dit is slechts een zeer klein deel van het vermogen en kan in de meeste situaties worden verwaarloosd. Het werkelijk vermogen is te vinden met onderstaande formule:

$$P_{werkelijk} = I_{eff}^2 \times R_W$$



Figuur 3-53 : vermogencurve voor een spoel

Reactief vermogen P_r

De snelheid waarmee een spoel energie opslaat of retourneert wordt het reactief of blind vermogen Pr genoemd. De eenheid van het reactief vermogen is VAR (volt-ampère reactief). Het reactieve
vermogen is een niet-nulhoeveelheid omdat op elk moment in de tijd de spoel

eigenlijk ofwel energie uit de bron aan het nemen is ofwel energie terug naar de bron aan het afgeven is. Reactief vermogen vertegenwoordigt geen energieverlies door omzetting in warmte. De volgende formules zijn van toepassing :

$$P_r = I_{eff} \times U_{eff}$$

$$P_r = \frac{U_{eff}^2}{XL}$$

$$P_r = I_{eff}^2 \times XL$$

Voorbeeld 3-35:

Een $10\ V_{eff}$-signaal met een frequentie van $10\ kHz$ wordt over een spoel van $10\ mH$ geplaatst. De spoel heeft een windingsweerstand R_w gelijk aan $40\ \Omega$. Bepaal het reactief vermogen en het werkelijk vermogen.

Oplossing:

Eerst wordt de inductieve reactantie en de stroom bepaald :

$$XL = 2\pi f L = 2\pi \times 10\ kHz \times 10\ mH = 628\ \Omega$$

$$I = \frac{U_{eff}}{X_L} = \frac{10\ V}{638\ \Omega} = 15{,}9\ mA$$

Daarna P_r en $P_{werkelijk}$

$$P_r = \frac{U_{eff}^2}{XL} = \frac{(10\ V)^2}{628\ \Omega} = 159{,}2\ mVA$$

$$P_{werkelijk} = I^2 \times R_W = (15{,}9\ mA)^2 \times 10\ \Omega = 10{,}1\ mW$$

3.3.7.4 De kwaliteitsfactor Q

De kwaliteitsfactor (Q) is de verhouding van het reactieve vermogen in de spoel tot het werkelijke vermogen in de wikkelweerstand van de spoel. Het is een verhouding van het vermogen in L tot het vermogen in R_W. De kwaliteitsfactor is belangrijk in resonantieschakelingen. De kwaliteitsfactor kan als volgt worden bepaald:

$$Q = \frac{reactief\ vermogen}{werkelijkj\ vermogen} = \frac{P_r}{P_{werkelijk}} = \frac{I^2 \times XL}{I^2 \times R_W}$$

$$Q = \frac{XL}{R_W}$$

Merk op dat Q een verhouding van soortgelijke eenheden is en daarom zelf geen eenheid heeft. De kwaliteitsfactor is ook bekend als “$onbelast\ Q$” omdat het wordt gedefinieerd zonder belasting over de spoel. Tevens is Q afhankelijk van de frequentie omdat X_L afhankelijk is van de frequentie.

3.3.7.5 Test jezelf : Het gedrag van een spoel op wisselstroom

1. Omschrijf de faserelatie tussen stroom en spanning in een spoel.
2. Bereken XL voor $f = 500\ kHz$ en $L = 10\ mH$.
3. Voor welke frequentie is de reactantie van een $50\ \mu H$ spoel gelijk aan $800\ \Omega$?
4. Over een spoel van $10\ \mu H$ staat een effectieve spanning van $1\ V$ met een frequentie van $1\ MHz$. Bereken de effectieve stroom door de spoel.
5. Over een ideale spoel van $50\ mH$ staat een effectieve spanning van $12\ V$. Wat is het werkelijk vermogen en wat is het reactief vermogen bij een frequentie van $1\ kHz$?

3.4 Operationele rekenwijze (operator s)

De operationele rekenwijze is een methode om formules te kunnen schrijven zonder dat hierin expliciet differentiatie- en integratietekens in staan. Dikwijls leidt het werken aan de hand van operationele rekenwijze tot een beter overzicht van de formules.
Als een bepaalde functie wordt afgeleid naar de tijd kan dit wiskundig als volgt worden aangegeven:

$$y = \frac{dx}{dt} \text{ of } y = \frac{d}{dt}(x)$$

De operator is dan in feite $\frac{d}{dx}$ welke we kunnen schrijven als s. Met deze schrijfwijze kunnen we het afleiden van functies vereenvoudigd voorstellen. Immers door nu:

$$y = s.x$$

te schrijven geven we aan dat de betekenis van s de volgende is:

$$s = \frac{d}{dt}$$

Wiskundig gezien is integratie nodig om uit $y = \frac{dx}{dt}$ terug x te bepalen. In formulevorm:

$$y = \frac{dx}{dt} \leftrightarrow dx = y.dt \leftrightarrow x = \int y.dt$$

Door gebruik te maken van de operationele schrijfwijze bekomen we:

$$y = s.x \leftrightarrow x = \frac{1}{s}.y$$

We kunnen hieruit afleiden dat als we delen door de operationele schrijfwijze s, we in feite integreren.
Om dit te illustreren beschouwen we enkele operationele impedanties:

3.4.1 Spoel

De tegen-emk over een spoel is als volgt te vinden:

$$e_l = -L.\frac{di}{dt} \text{ en } u_l = -e_L$$

De spanning over de spoel is tegengesteld aan deze emk en is als volgt te vinden:

$$u_L = L.\frac{di}{dt}$$

De impedantie van de spoel is dan als volgt te schrijven:

$$u_L = L.s.i \leftrightarrow \frac{u_L}{i} = s.L$$

3.4.2 Condenstator

Op analoge wijze als bij de spoel kan je de operationele impedantie van een condensator bepalen. De laadspanning van een condensator kan geschreven worden als:

$$u_C = \frac{1}{C}.\int i.dt$$

Geschreven met de operationele rekenwijze komt dit overeen met:

$$u_c = \frac{1}{C}.\frac{1}{s}.i$$

Uit bovenstaande formule kan dan de operationele impedantie worden bepaald:

$$\frac{u_C}{i} = \frac{1}{sC}$$

3.4.3 Weerstand

Bij een lineaire weerstand wordt het verband tussen stroom en weerstand via de wet van Ohm bepaald:

$$u_R = i.R$$

Hierin komt geen s voor en de operationele impedantie van een weerstand is zijn weerstandswaarde zelf:

$$\frac{u_R}{i} = R$$

3.4.4 Bijzonder geval operationele rekenwijze: sinusregimes

Een sinusvormige spanning kan je schrijven als $u = U_{max} \sin{(\omega t)}$. Als we deze sinusvormige spanning naar de tijd willen afleiden vinden we in de wiskunde (calcalus):

$$\frac{d(\sin(a))}{da} = \cos(a)\,.\,D(a) = a.\cos(a)$$

Hierin stelt a een bepaalde functie van x voor. De berekening van de differentiatie van de functie $\sin{(a)}$ naar a toe is volgends de calcalus gelijk aan $\cos(a)\,.\,D(a)$. Hierbij stelt $D(a)$ de afgeleide van de functie a voor. Uitrekening van deze afleiding levert in deze situatie de functie zelf op.
In de situatie dat de functie a de spanning $u = U_{max} \sin{(\omega t)}$ is vinden we het volgend resultaat:

$$\frac{d(u)}{dt} = s.u = \omega.U_{max}.\cos(\omega t)$$

De cosinus-functie duidt op het feit dat de sinusvormige spanning $90°$ in fase verschoven is.
We kunnen ons afvragen wat het resultaat zal zijn als we het bekomen cosinus-signaal nogmaals afleiden naar de tijd, of vermenigvuldigen met s. Uit de calcalus weten we dat:

$$\frac{d(\cos(\mathrm{a}))}{dt} = -\sin(a)\,.\,D(a) = -a.\sin{(a)}$$

Toegepast op de cosinusspanning:

$$s.s.u = -\omega^2.U_{max}.\sin(\omega t) = -\omega^2.u \leftrightarrow s^2.u = -\omega^2.u \leftrightarrow s = \sqrt{-1}.\omega$$

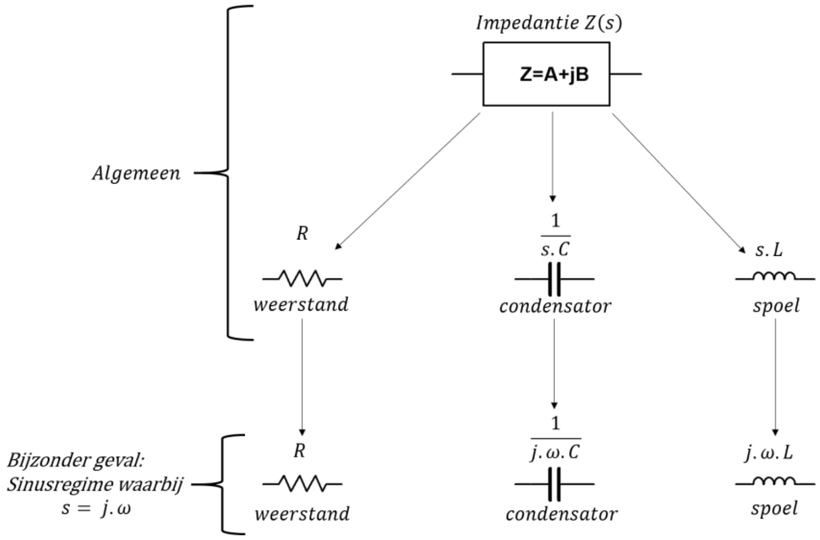
Via de complexe rekenwijze weten we dat $\sqrt{-1}$ gelijk is aan j. Voor het sinusregime vinden we dus dat de operationele parameter s gelijk is aan:

$$s = j\omega$$

Merk op dat $s = j\omega$ enkel geldig is in het sinusregime.

3.4.5 Symbolische voorstelling van operationele impedanties

In het algemeen kan een impedantie geschreven worden als $Z(s)$. Deze impedantie kan op complexe wijze geschreven worden als $Z = a + jb$. Hierbij stelt a het reële deel voor van de impedantie en b het complexe deel. (zie 3.1 Complexe getallen) Voor eender welke signaalvorm kan de impedantie van een condensator en van een spoel weergegeven worden als $1/sC$ en sL. In het bijzonder geval waarbij het signaal sinusvormig is, kan de impedantie van condensator en spoel weergeven worden als $1/j\omega C$ en $j\omega L$. Vermits de impedanties van condensator en spoel enkel zich enkel voordoen op wisselstroomgebied spreekt men eerder over reactanties ($-jXC$ en jXL).



Figuur 3-54: algemene voorstelling van een impedantie

Beschouwen we tenslotte als voorbeeld volgende componenten:

$$R = 120\ \Omega, C = 10\ pF, L = 4\ mH$$

De operationele impedantievoorstelling van bovenvermelde componenten is de volgende:

$$Z_R(s) = R = 120\ \Omega$$

$$Z_C(s) = \frac{1}{sC} = \frac{1}{s.10^{-11}}$$

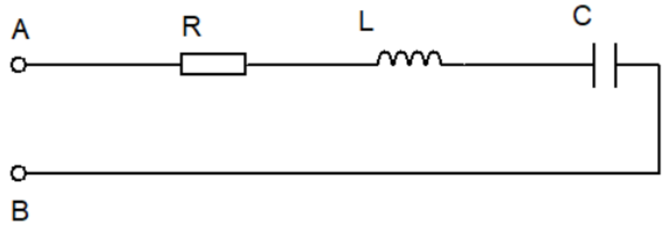
$$Z_L(s) = s.L = s.4.10^{-3}$$

3.5 Resonantieketens met R-L-C

Combinaties van weerstanden, spoelen en condensatoren leidt naar resonantieketens. Ze worden meestal in sinusregimes gebruikt. Een resonantieketen bestaat uit een weerstand, spoel en condensator met als kenmerk dat bij een bepaalde frequentie de totale reactantiewaarde gelijk is aan nul. Dit betekent dat bij die frequentie nog enkel de ohmse weerstandswaarde overblijft. Resonantieketens kunnen gebruikt worden als bandfilters. Met zo'n schakeling kan je een bijvoorbeeld een bepaalde frequentie afscheiden uit een heel gamma van frequenties (denk maar aan het ontvangen van een radiostation). Door de componenten op een andere manier te rangschikken kan je een schakeling bekomen die juist alle frequenties doorlaat behalve één bepaalde frequentie of een bepaalde groep van frequenties die dicht bij elkaar liggen.

3.5.1 R-L-C-serieketen

De weerstand R is niet steeds "fysiek" aanwezig en kan eveneens bestaan uit de windingsweerstand R_W van de spoel. In figuur 3-55 is een voorbeeld van een serieketen weergegeven.



Figuur 3-55: voorbeeld van een serieketen

3.5.1.1 Impedantieverloop van de serieketen

De impedantie die we zien vanaf de punten A en B in figuur 3-55 kan als volgt worden bepaald:

$$\bar{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

De imaginaire eenheid j halen we uit de noemer zodat we de complexe impedantie $\bar{Z}$ als een normaal complex getal kunnen schrijven. Door bij de capacitantie teller en noemer met j te vermenigvuldigen bekomen we:

$$\bar{Z} = R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C}$$

Uiteindelijk bekomen we:

$$\bar{Z} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$

De ohmse waarde van de impedantie van de serieschakeling kan gevonden worden door de moduluswaarde van $\bar{Z}$ te bepalen:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

De impedantiewaarde Z is frequentieafhankelijk. Immers ω kan je schrijven als $2\pi f$. Als we de frequentie laten variëren over de volledige frequentieband dan is er één bepaalde frequentie waarvoor geldt dat:

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

De hoeksnelheid waarvoor bovenstaande vergelijking geldt, noemen we ω_o. Aldus wordt bekomen:

$$\omega_o L = \frac{1}{\omega_o C}$$

Uitwerken naar ω_o :

$$\omega_o^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

De frequentie die bij de hoeksnelheid ω_o hoort stellen we voor als f_o. Het is de frequentie waarbij de totale impedantie van de serieketen gelijk is aan de weerstandswaarde en kan als volgt worden berekent:

$$\omega_o = 2\pi f_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$