Complexe Rekenwijze

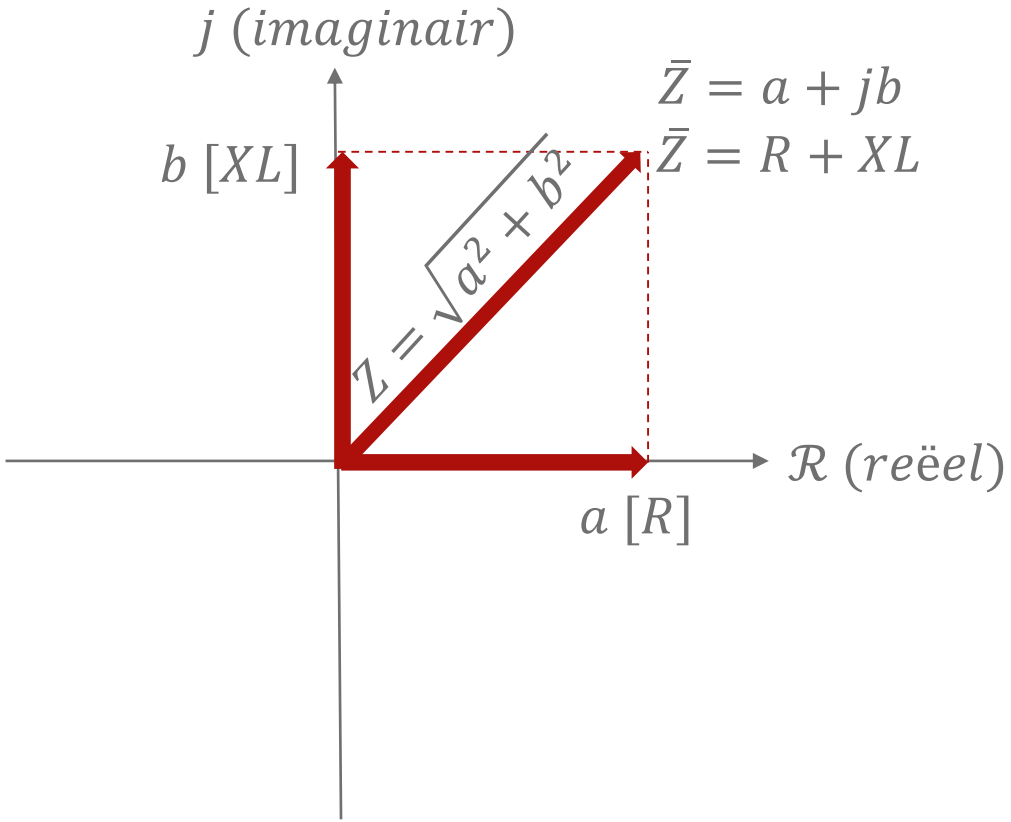
Wat is een impedantie?

- Soort weerstandswaarde (voorgesteld door Z)bij een bepaalde frequentie
  - Weerstand R: $Z = R$
  - Condensator C: $Z = XC = \frac{1}{2\pi f C}$
  - Spoel L: $Z = XL = 2\pi f L$

- Probleem :
  - Deze voorstelling geeft geen informatie aangaande de fase tussen spanning en stroom
  - Aan de waarde kan je niet zien of je te maken hebt met R, C of L

Complexe Impedantie

- Bestaat uit een reël deel en een imaginair deel
- Notatie:
  $\bar{Z} = a + jb\ [\Omega]$

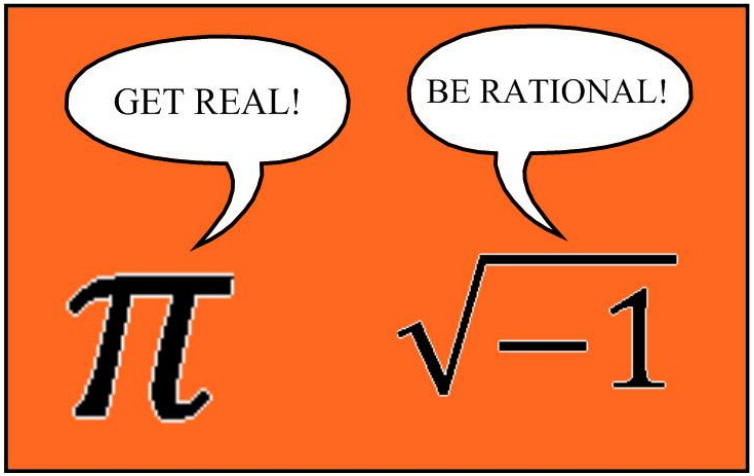


De j-operator

- j is de voorstelling van de operator bij complexe impedanties
- Impedantie van een weerstand is reëel (stroom en spanning in fase)
- Impedantie van een condensator is imaginair (stroom 90° voorijlend op de spanning)
- Impedantie van een spoel is imaginair (stroom 90° naijlend op de spanning)
- De j-operator wordt geplaatst bij de frequentiebepalende component van de impedantie.
  - C : $\mathrm{XC} = \frac{1}{2\pi jfC} = \frac{1}{j2\pi fC} = -j\frac{1}{2\pi fC} = -j\frac{1}{\omega C} \Rightarrow -jXC$
  - L : $XC = 2\pi jfL = j2\pi fL = j\omega L \Rightarrow jXL$

Rekenen met de j-operator

- $j = \sqrt{-1}$
- $j^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$
- $\frac{1}{j} = \frac{j}{j^2} = -j$
- $ja + jb = j(a + b)$
- $j(-a) = -ja$



Optellen van complexe impedanties

$\overline{Z_1} = a + jb$
$\overline{Z_2} = c + jd$

$\bar{Z} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$
$\bar{Z} = (a + jb) + (c + jd)$
$\bar{Z} = (a + c) + j(b + d)$

$\overline{Z_1} = 3 + j4\ \Omega$
$\overline{Z_2} = 6 + j(-5) = 6 - j5\ \Omega$

$\bar{Z} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$
$\bar{Z} = (3 + j4) + (6 - j5)\Omega$
$\bar{Z} = (3 + 6) + (j4 - j5)\Omega$
$\bar{Z} = 9 - j1 = 9 - j\Omega$

$Z = \sqrt{9^2 + (-1)^2} = \sqrt{82} = 9{,}06\ \Omega$

Aftrekken van complexe impedanties

$\overline{Z_1} = a + jb$
$\overline{Z_2} = c + jd$

$\bar{Z} = \overline{Z_1} - \overline{Z_2}$
$\bar{Z} = (a + jb) - (c + jd)$
$\bar{Z} = (a - c) + j(b - d)$

$\bar{Z} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$
$\bar{Z} = (3 + j4) - (6 - j5)\Omega$
$\bar{Z} = (3 - 6) + (j4 + j5)\Omega$
$\bar{Z} = -3 + j9\ \Omega$

$\overline{Z_1} = 3 + j4\ \Omega$
$\overline{Z_2} = 6 + j(-5) = 6 - j5\ \Omega$

$Z = \sqrt{(-3)^2 + 9^2} = \sqrt{82} = 9{,}49\ \Omega$

Vermenigvuldigen van complexe impedanties

$\overline{Z_1} = a + jb$
$\overline{Z_2} = c + jd$

$\bar{Z} = \overline{Z_1} \times \overline{Z_2}$
$\bar{Z} = (a + jb) \times (c + jd)$
$\bar{Z} = ac + jad + jbc + j^2bd$
$\bar{Z} = (ac - bd) + j(ad + bc)$

$\overline{Z_1} = 3 + j4\ \Omega$
$\overline{Z_2} = 6 + j(-5) = 6 - j5\ \Omega$

$\bar{Z} = (3 + j4) \times (6 - j5)\Omega$
$\bar{Z} = \big(18 - (-20)\big) + j\big((-15) + 24\big)\Omega$
$\bar{Z} = 38 + j9\ \Omega$

$Z = \sqrt{38^2 + 9^2} = \sqrt{1525} = 39{,}05\ \Omega$

Delen van complexe impedanties

$\overline{Z_1} = a + jb; \overline{Z_2} = c + jd$

Complex toegevoegde:

- Doel : geen imaginaire waarde in de noemer van een breuk
- Hoe? Teller (T) en Noemer (N) vermenigvuldigen met omgekeerd teken tussen het reëel deel en het imaginaier deel
  - $c + jd \Rightarrow Ten\ N\ maal\ c - jd$
  - $c - jd \Rightarrow Ten\ N\ maal\ c + jd$

$$\bar{Z} = \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}}$$

$$\bar{Z} = \frac{(a+jb)}{(c+jd)} = \frac{(a+jb)\times(c-jd)}{(c+jd)\times(c-jd)}$$

$$\bar{Z} = \frac{(a+jb)\times(c-jd)}{c^2+d^2}$$

$$\bar{Z} = \frac{(ac+bd)}{c^2+d^2} + j\frac{(bc-ad)}{c^2+d^2}$$

Delen van complexe impedanties

$$\overline{Z_1} = 3 + j4\ \Omega$$

$$\overline{Z_2} = 6 + j(-5) = 6 - j5\ \Omega$$

$$\bar{Z} = \frac{3 + j4\ \Omega}{6 - j5\ \Omega}$$

$$\bar{Z} = \frac{(3 + j4) \times (6 + j5)}{(6 - j5) \times (6 + j5)}$$

$$\bar{Z} = \frac{(3 + j4) \times (6 + j5)}{6^2 + 5^2}$$

$$\bar{Z} = \frac{18 - 20}{61} + j\frac{24 + 15}{61} = -0{,}033 + j0{,}64$$

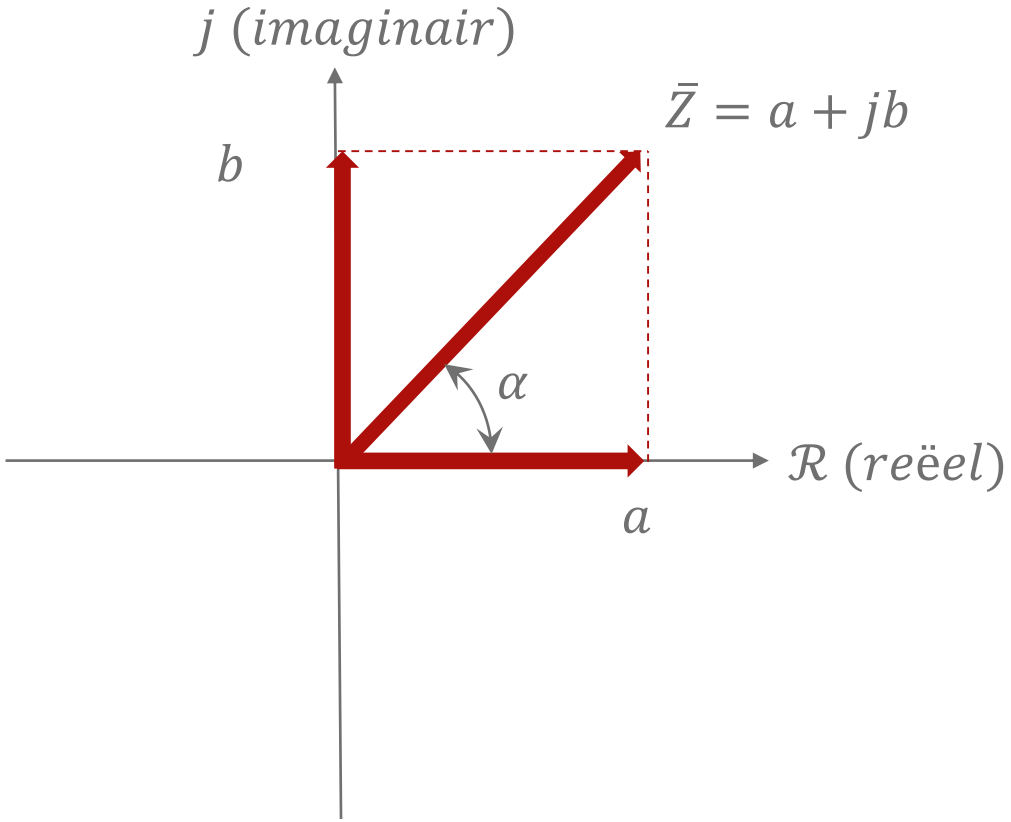
$$Z = \sqrt{0{,}033^2 + 0{,}64^2} = 0{,}064$$

Bepalen faseverschuiving

$\bar{Z} = a + jb\ \Omega$

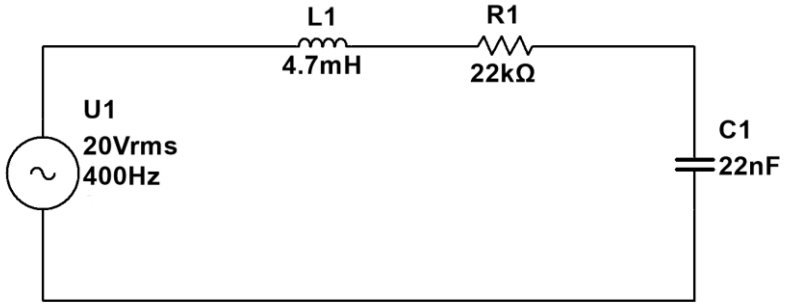
Faseverschuiving:

- $\tan(\alpha) = \frac{b}{a}$
- $\alpha = Bgtan\left(\frac{b}{a}\right)$

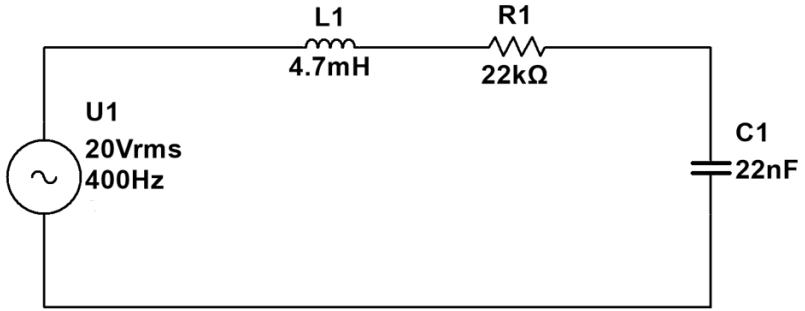


Voorbeeld van berekening

Bepaal het faseverschil tussen de uitgangsspanning (U_{C1}) en de ingangsspanning (U_1)



Voorbeeld van berekening



$$\overline{Z_{in}} = jXL_1 + R - jXC_1$$

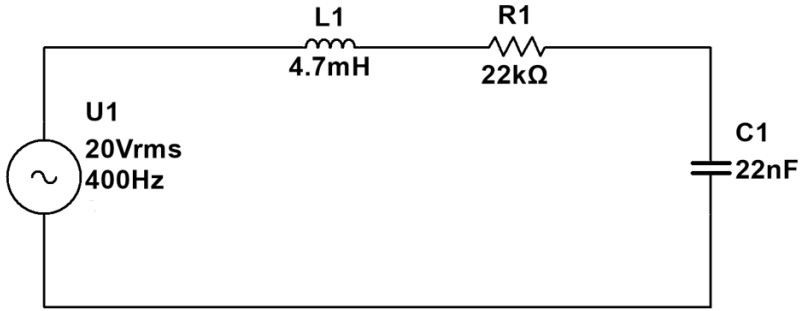
$$XL_1 = 2\pi f L_1 = 2.\pi.400Hz.22nF = 11{,}81\ \Omega$$

$$XC_1 = \frac{1}{2\pi f C_1} = \frac{1}{2.\pi.400\ Hz.22\ nF} = 18085{,}78\ \Omega$$

$$R_1 = 22\ k\Omega$$

$$\overline{Z_{in}} = j11{,}81\ \Omega + 22\ k\Omega - j\,18085{,}78\ \Omega = 22\ k\Omega - j18073{,}97\ \Omega$$

Voorbeeld van berekening

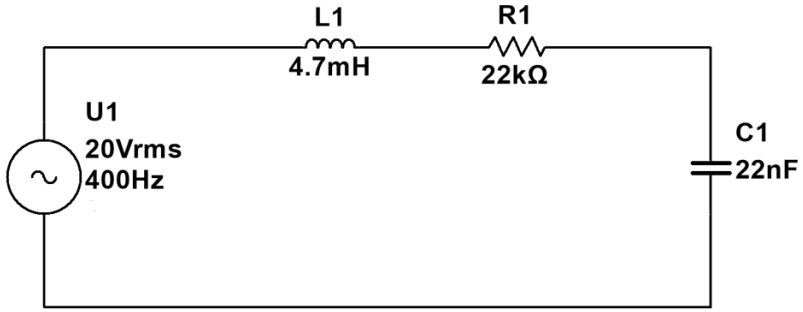


$$\frac{\overline{Z_{uit}}}{\overline{Z_{in}}} = \frac{-JXC_1}{jXL_1 + R - jXC_1} = \frac{\text{-}j18085{,}78\ \Omega}{22\ k\Omega - j18073{,}97\ \Omega}$$

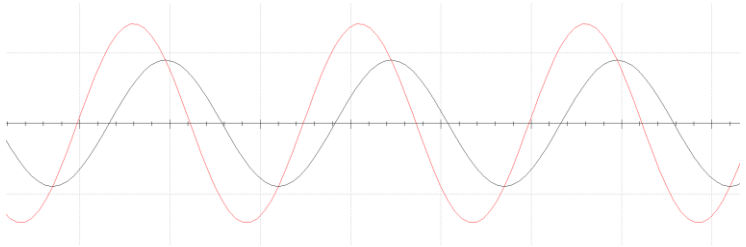
$$\frac{\overline{Z_{uit}}}{\overline{Z_{in}}} = \frac{-j18085{,}78\ \Omega \times (22\ k\Omega + j18073{,}97\ \Omega)}{(22\ k\Omega - j18073{,}97\ \Omega) \times (22\ k\Omega + j18073{,}97\ \Omega)}$$

$$\frac{\overline{Z_{uit}}}{\overline{Z_{in}}} = \frac{326880579{,}1 - j397887160}{(22000)^2 + (18073{,}97)^2\ \Omega} = 0{,}04\ - j0{,}49\ \Omega$$

Voorbeeld van berekening

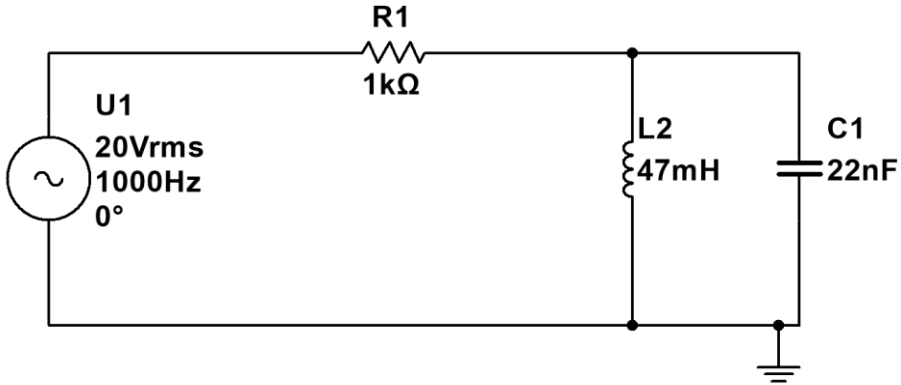


$$\frac{\overline{Z_{uit}}}{\overline{Z_{in}}} = 0{,}04 \; - j0{,}49$$



Faseverschuiving : $Bgtan\frac{imaginair\ deel}{reëel\ deel} = \frac{-0{,}49}{0{,}04} = -85{,}33°$

Voorbeeld 2



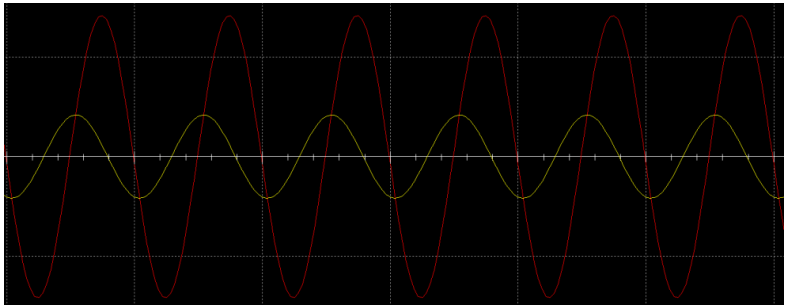
Bepaal het faseverschil tussen in- en uitgang

Bepalen $\overline{Z_{in}}$:

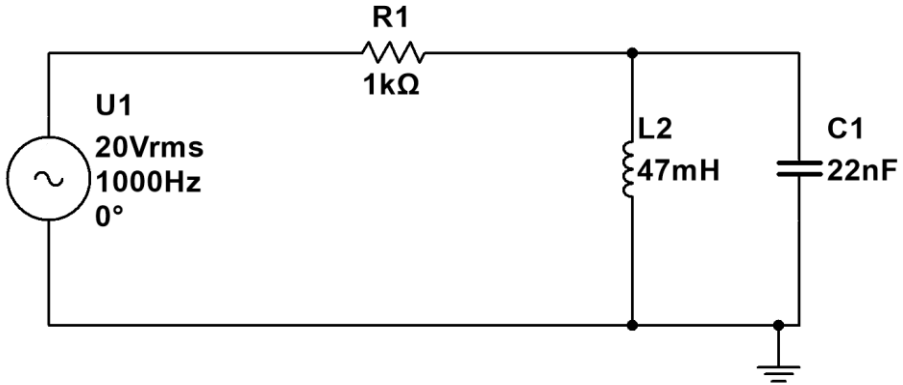
$$\overline{Z_{in}} = R_1 + \frac{jXL_2 \times (-jXC_1)}{jXL_2 + (-jXC_1)}$$

$$R_1 = 1\ k\Omega; \quad XL_2 = 2\pi.1000\ Hz\ .47\ mH = 295{,}31\ \Omega$$

$$XC_1 = \frac{1}{2\pi.1000\ Hz\ .22\ nF} = 7234{,}31\ \Omega$$



Voorbeeld 2



Bepaal het faseverschil tussen in- en uitgang

Bepalen $\overline{Z_{uit}}$:

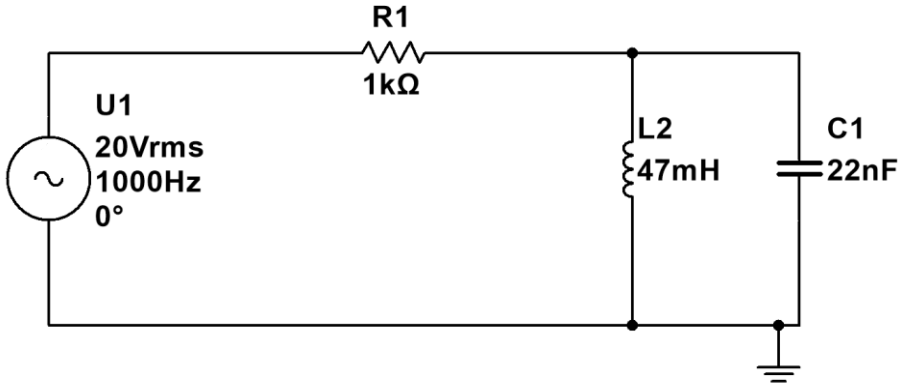
$$\overline{Z_{uit}} = \frac{jXL_2 \times (-jXC_1)}{jXL_2 + (-jXC_1)} = \frac{j295{,}31\ \Omega \times (-j7234{,}31\ \Omega)}{j295{,}31\ \Omega - j7234{,}31\ \Omega}$$

$$\overline{Z_{uit}} = \frac{2136364{,}09\Omega^2}{-j6939\ \Omega} = j\frac{2136364{,}09\ \Omega^2}{6939\ \ \Omega} = \text{j}307{,}88\ \Omega$$

Voorbeeld 2

Bepaal het faseverschil tussen in- en uitgang

Bepalen $\overline{Z_{in}}$:



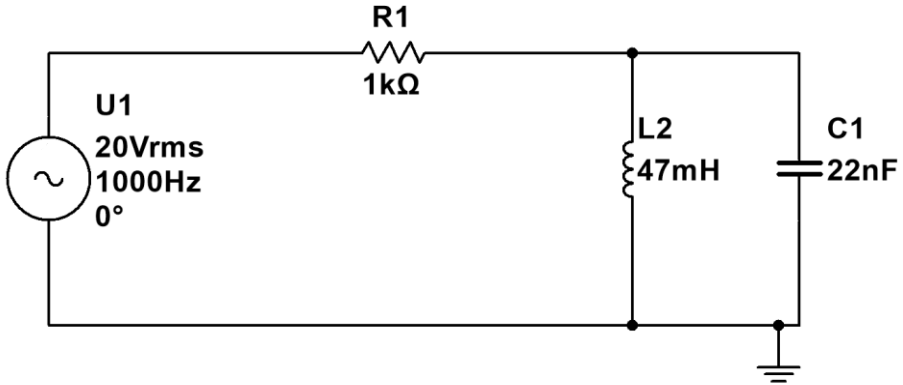
$$\overline{Z_{in}} = R_1 + \frac{jXL_2 \times (-jXC_1)}{jXL_2 + (-jXC_1)} = 1\ k\Omega + \frac{j295{,}31\ \Omega \times (-j7234{,}31\ \Omega)}{j295{,}31\ \Omega - j7234{,}31\ \Omega}$$

$$\overline{Z_{in}} = 1\ k\Omega + \frac{2.136.364{,}09\ \Omega^2}{-j6939\ \Omega} = 1\ k\Omega + \frac{2.136.364{,}09\ \Omega^2 \times j6939\ \Omega}{-j6939\ \Omega \times j6939\ \Omega}$$

$$\overline{Z_{in}} = 1\ k\Omega + \text{j}307{,}88\ \Omega$$

Voorbeeld 2

Bepaal het faseverschil tussen in- en uitgang

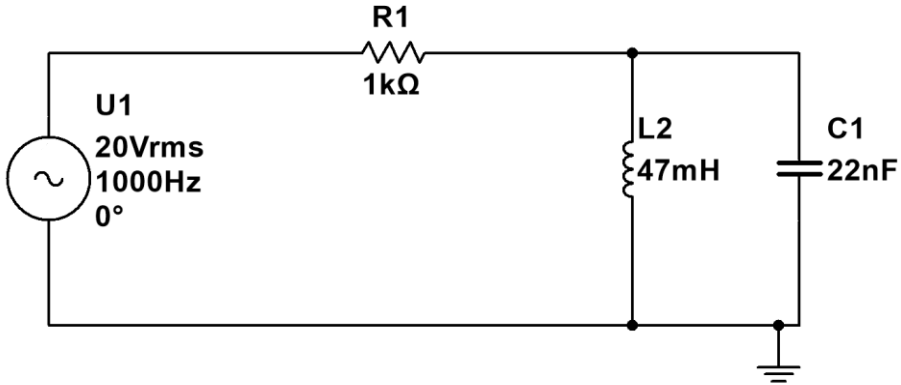


Bepalen faseverfschuiving tussen U_{in}en U_{uit}

$$\frac{\overline{Z_{uit}}}{\overline{Z_{in}}} = \frac{\frac{jXL_2 \times (-jXC_1)}{jXL_2 + (-jXC_1)}}{R_1 + \frac{jXL_2 \times (-jXC_1)}{jXL_2 + (-jXC_1)}} = \frac{j307{,}88\ \Omega}{1\ k\Omega + \mathrm{j}307{,}88\ \Omega} = \frac{j307{,}88\ \Omega \times (1\ k\Omega - \mathrm{j}307{,}88\ \Omega)}{(1\ k\Omega)^2 + (307{,}88\ \Omega)^2}$$

$$\frac{\overline{Z_{uit}}}{\overline{Z_{in}}} = \frac{-j^2(307{,}88\ \Omega)^2}{(1\ k\Omega)^2 + (307{,}88\ \Omega)^2} + \frac{1\ k\Omega \times j307{,}88\ \Omega}{(1\ k\Omega)^2 + (307{,}88\ \Omega)^2} = 0{,}087 + j0{,}28\ \Omega$$

Voorbeeld 2



Bepaal het faseverschil tussen in- en uitgang

Bepalen faseverschuiving tussen U_{in} en U_{uit}

$$faseverschuiving: \quad Bgtan\frac{O,28}{0{,}087} = 72{,}8°$$