Raphael Frey, Benni Kleisz

Frage 1.
Erinnerung: $S \subset \mathbb{C}$ ist diskret, wenn zu jedem $s \in S$ ein $\delta > 0$ existiert, s.d. $S \cap D_\delta(s) = \{s\}$ (speziell $S = \emptyset$ ist diskret). Zeigen Sie:

1. *Ist $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-p)^k$ nicht-konstant mit $R > 0$ und $w \in \mathbb{C}$, so sind die Nullstellen von P in $D_R(p)$ diskret und abgeschlossen.*
2. *Gilt 1.) für die w-Stellen (reellwertiger) $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen auf Intervallen?*
3. *Wenn $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und $S \subset \mathbb{C}$ diskret und abgeschlossen, dann ist $S \cap K$ endlich.*

Für $f : U \to \mathbb{C}$ und $w \in \mathbb{C}$ sind die $w-$ Stellen $= \{z \in U : f(z) = w\} = f^{-1}(w)$.

Antwort 1.

1. *Da die Funktion eine Potenzreihe ist, ist sie Holomorph auf ihrem Konvergenzradius R. Es folgt, dass $P'(z) \neq 0$ in jedem Punkt, insbesondere in den Nullstellen oder*
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} \neq 0$$
Ist S nicht diskret so existiert eine Folge $h_n \in$ NS(P) mit $h_n \to z_0$, daraus würde folgten
$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(z_0+h_n) - f(z_0)}{h_n} = 0$$
welches ein widerspruch wäre. Die abgeschlossenheit von NS(P) ist klar, da NS(P) keine Häufungspunke besitzt und somit keine konvergenten folgen besitzt (daher konverigiert jede konvergente folge in S gegen einen Punkt in S).

2. *Nein, man betrachte*
$$f : [-2R, 2R] \to [0,1] : x \mapsto \begin{cases} 0 & |x| \geq R \\ \exp\left(\frac{1}{(x-R)^2}\right) & |x| < R \end{cases}$$
dies ist $\mathcal{C}^\infty$ in $[-2R, 2R]$, es gilt jedoch NS$(f) = [-2R, 2R] \setminus (-R, R)$, welches nicht diskret ist.

3. *Da S und K abgeschlossen sind, ist der Schnitt abgeschlossen und beschränkt und somit kompakt, und Jede offene Überdeckung besitzt eine endliche Teilüberdeckung. Da S diskret ist, ist $S \cap K$ diskret. Wählt man $(D_{\delta_s})_{s \in K \cap S}$ als Teilüberdeckung, so existiert eine endliche Teilüberdeckung. Da aber die D_{δ_s} bijektiv auf die Punkte von $S \cap K$ abgebildet werden können, folgt die Endlichkeit von $S \cap K$.*

Frage 2.

1. *Berechnen Sie*

$$\int_{[-i,i]} z \cos z dz \tag{1}$$

$$\int_{|z-p|=r} \operatorname{Im} z dz \tag{2}$$

2. *Seien* $c > d > 0$ *reell,*$\gamma(t) = ce^{it} + de^{-it}$ *für* $t \in [0; 2\pi]$. *Zeigen Sie,dass* γ *die Punkte einer Ellipse parametrisiert und berechnen Sie*

$$\int_{\gamma} z^2 dz \tag{3}$$

$$\int_{\gamma} ze^{\pi z^2} dz \tag{4}$$

(Ellipse = Lösungsmenge von $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ *in* $\mathbb{R}^2 \cong C$ *für feste* $a, b \in \mathbb{R}^+$*)*

Antwort 2.

1. *Es gilt*

$$\begin{aligned}\int_{[-i,i]} z \cos z dz &\overset{\text{def}}{=} \int_{-1}^{1} ix \cos(ix) dx \\ &= i \int_{-1}^{1} x \cosh(x) dx\end{aligned}$$

und als symmetrisches Integral über eine ungerade Funktion folgt

$$\int_{[-i,i]} z \cos z dz = 0$$

Für Gleichung (2) gilt $p \mapsto (x, y)$

$$\begin{aligned}\int_{|z-p|=r} \operatorname{Im} z dz &\overset{\text{def}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Im}(p + re^{it}) dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} y + r \sin t dt \\ &= 2\pi y + \int_{-\pi}^{\pi} r \sin t dt\end{aligned}$$

und als symmetrisches Integral über eine ungerade Funktion folgt $\int_{-\pi}^{\pi} r \sin t dt = 0$ *und somit*

$$\int_{|z-p|=r} \operatorname{Im} z dz = 2\pi y$$

2. *Es gilt*

$$\begin{aligned}x &= \operatorname{Re} \gamma = c \cos t + d \cos t = (c + d) \cos t \\ y &= \operatorname{Im} \gamma = c \sin t - d \sin t = (c - d) \sin t\end{aligned}$$

mit $a = c + d$ *und* $b = c - d$ *folgt nun*

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

Es folgt also für die Integrale

$$\int_\gamma z^2 dz = \int_0^{2\pi} (ce^{it} + de^{-it})^2 dt = \int_0^{2\pi} c^2 e^{2it} + 2cd + d^2 e^{-2it} dt = 4\pi cd$$

und mit $F(z) = \frac{1}{2\pi} e^{\pi z^2}$ *und* $F' = f$ *folgt*

$$\int_\gamma z e^{\pi z^2} dz = 0$$

Frage 3. *Sei $\gamma : [0;1] \to \mathbb{C}$ eine hyperbolische Geodäte, d.h. eine $\mathcal{C}^2-$ Kurve, die folgende*

$$\gamma'' - \frac{2}{\gamma - \overline{\gamma}}(\gamma')^2 = 0$$

DGL erfüllt: Schreiben Sie $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ und zeigen Sie:

1. $x'' - \frac{2x'y'}{y} = 0$ *und* $y'' + \frac{(x')^2-(y')^2}{y} = 0$. *Folgern Sie (Tipp: nach t ableiten)*
$$\frac{1}{y^2}\left((x')^2 + (y')^2\right) = c_0^2 \tag{5}$$
2. $\frac{x'}{y^2} = c_1 \in \mathbb{R}$
3. *Wenn $x' = 0$, dann verläuft γ in einer Parallele zur Imaginärachse*
4. *Wenn $x' \neq 0$, dann $c_1 \neq 0$.Setzt man $r := \frac{c_0}{|c_1|}$, dann $y^2 \leq r^2$ und $(x')^2 = \frac{y^2(y')^2}{r^2-y^2}$. Folgern Sie: γ verläuft in einem Kreis senkrecht auf der $\mathbb{R}$-Achse, d.h.*
$$(x-m)^2 + y^2 = r^2 \text{ für ein } m \in \mathbb{R}$$
(Tipp: $\sqrt{r^2-y^2}$ nach t ableiten und mit x' vergleichen).

Antwort 3.

1. *Es gilt*
$$x'' + iy'' - \frac{2}{x+iy-(x-iy)}(x'+iy')^2 = 0$$
oder durch trennen von Real-
$$x'' - \frac{1}{y}2x'y' = 0$$
und Imaginärteil
$$y'' + \frac{1}{y}\left((x')^2 - (y')^2\right) = 0.$$
Es gilt
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{y^2}\left[(x')^2 + (y')^2\right]\right) = y^{-2}\left[(2x'x'' + 2y'y'') - 2y^{-1}y'\left((x')^2 + (y')^2\right)\right]$$
und durch einsetzen folgt
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{y^2}\left[(x')^2 + (y')^2\right]\right) = y^{-2}\left[\left(2x'y^{-1}2x'y' - 2y'y^{-1}\left((x')^2 - (y')^2\right)\right) - 2y^{-1}y'\left((x')^2 + (y')^2\right)\right] = 0.$$
Somit ist der Ausdruck konstant.
2. *Es gilt*
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{x'}{y^2}\right) = \frac{y^2x'' - 2yx'y'}{y^4} = \frac{2x'y'y - 2yx'y'}{y^4} = 0$$
woraus folgt dass $\frac{x'}{y^2}$ konstant ist.
3. *Es folgt aus 5, mit $x' = 0$*
$$y' = c_0 y$$
und somit gilt $\gamma : [0;1] \to \mathbb{C} : t \mapsto (k_1, k_2 e^{c_0 t})$ mit $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Es folgt, dass γ in einer Parallele zur Imaginärachse verläuft.

4. *Es gilt*

$$r^2 = \underbrace{\frac{(x')^2 + (y')^2}{|x'|^2}}_{\geq 1} |y|^2 \geq y^2$$

und

$$\frac{y^2(y')^2}{r^2 - y^2} = \frac{y^2(y')^2}{\frac{(y')^2}{(x')^2} y^2} = (x')^2.$$

Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{r^2 - y^2}\right) = -\frac{y'y}{\sqrt{r^2 - y^2}} = x' \implies x' = -\frac{y'y}{x}.$$

Es folgt

$$r^2 = \frac{(x')^2 + (y')^2}{x'^2} = y^2 + \frac{(y')^2}{(x')^2} y^2 = y^2 + x^2.$$