EM503 - Métodos Numéricos aplicados à Engenharia

1S/2022

Projeto Computacional 4 – Problema térmico estacionário 2D
Entrega : 12/07/2022

Instruções

Os alunos devem fazer o upload no Moodle dos seguintes arquivos (não usar arquivos comprimidos, suba diretamente os arquivos nos formatos especificados):

- Arquivos **.m** contendo os scripts desenvolvidos pelo aluno para solucionar as questões deste projeto.
- Um arquivo **.pdf** com um relatório de nível técnico, abordando cada uma das questões do projeto. O relatório ser de nível técnico quer dizer que: o relatório deve ser digitalizado, com equações digitalizadas, não devem haver prints de tela, nem figuras escaneadas; os resultados devem ser apresentados através de figuras ou tabelas, não com trechos de códigos; as equações, figuras e tabelas devem ser numeradas; o trabalho deve ser organizado em seções; o texto deve ser justificado, em fonte razoável; as equações devem ser escritas num editor de equações.

Nota: haverá penalização para trabalhos fora do formato exigido.

Introdução

Deseja-se analisar o comportamento térmico de uma chapa retangular, composta por dois materiais. As condições são aplicadas por um longo período de tempo, de forma que o sistema a ser análisado está em regime estacionário. O problema está ilustrado na Figura 1: tem-se um fluxo uniforme de $1\, kW/m$ que entra pela face esquerda; e uma temperatura imposta de 0^oC na face direita; as faces superior e inferior são adiabáticas. O material 1 está representado em verde e o material 2 está representado em vermelho. Não há geração volumétrica de calor.

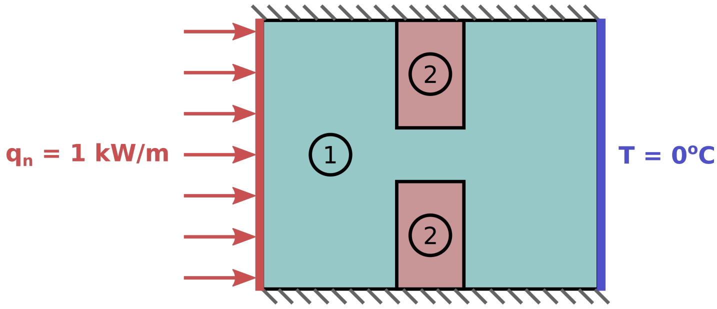

Figura 1: Chapa Condutora

Consideram-se 3 configurações para a distribuição dos materiais, apresentadas na Figura 2 (as cotas estão em centímetros).

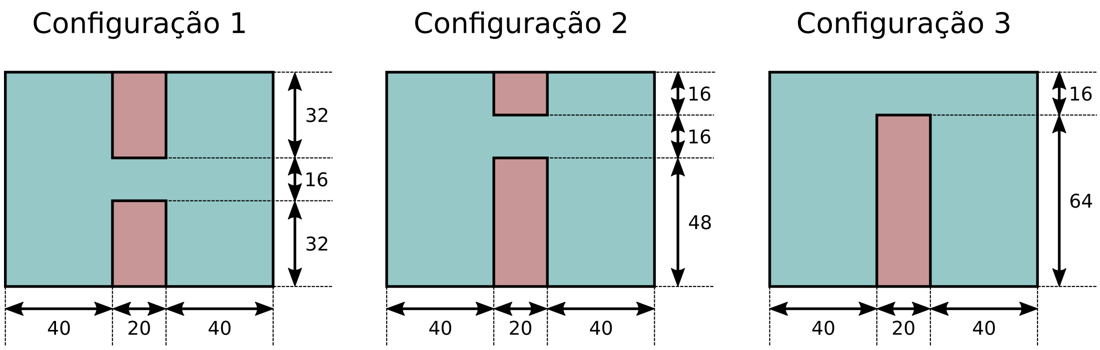

Figura 2: Geometria das Diferentes Configurações (cotas em centímetros)

A equação diferencial que rege o problema é dada por:

$$
\begin{cases}
k(x,y)\left[\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2}(x,y)\right] = 0\,, & (x,y) \in \,]0.0, 1.0[\, \times \,]0.0, 0.8[\\
T(1.0, y) = 0\,, & y \in [0.0, 0.8] \\
-k(0.0,y)\,\dfrac{\partial T}{\partial x}(0.0,y) = 1000\,, & y \in [0.0, 0.8] \\
-k(x,0.0)\,\dfrac{\partial T}{\partial y}(x,0.0) = 0 \quad , & x \in [0.0, 1.0] \\
-k(x,0.8)\,\dfrac{\partial T}{\partial y}(x,0.8) = 0 \quad , & x \in [0.0, 1.0]
\end{cases}
\tag{1}
$$

Deseja-se simular o comportamento da chapa através do Método de Elementos Finitos, usando elementos retangulares de quatro nós. Sendo k_e a condutividade térmica do elemento, dada as dimensões e numeração dos nós apresentadas na Figura 3, tem-se a seguinte matriz elementar:

$$\mathbf{K_e} = \frac{k_e}{6\,b\,h}\begin{bmatrix} 2\,[b^2+h^2] & b^2-2\,h^2 & -[b^2+h^2] & h^2-2\,b^2 \\ b^2-2\,h^2 & 2\,[b^2+h^2] & h^2-2\,b^2 & -[b^2+h^2] \\ -[b^2+h^2] & h^2-2\,b^2 & 2\,[b^2+h^2] & b^2-2\,h^2 \\ h^2-2\,b^2 & -[b^2+h^2] & b^2-2\,h^2 & 2\,[b^2+h^2] \end{bmatrix} \tag{2}$$

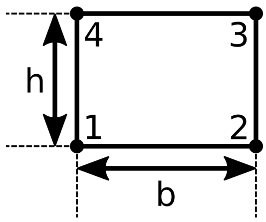

Figura 3: Dimensões de um Elemento e Numeração dos Nós

Supondo um fluxo uniforme q_e que entra pela aresta esquerda do elemento, tem-se o seguinte vetor de carga nodal equivalente para o elemento:

$$\mathbf{f_e} = \frac{q_e\,h}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix} \tag{3}$$

Pode-se calcular o fluxo dentro de cada elemento usando a matriz $\mathbf{B_e}$, calculada usando coordenadas locais $(\bar{x},\bar{y}) \in [0,b] \times [0,h]$:

$$\mathbf{B_e} = \frac{1}{b\,h}\begin{bmatrix} -[h-\bar{y}] & [h-\bar{y}] & \bar{y} & -\bar{y} \\ -[b-\bar{x}] & -\bar{x} & \bar{x} & [b-\bar{x}] \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\mathbf{q}(\bar{x},\bar{y}) = -k_e\,\mathbf{B_e}(\bar{x},\bar{y})\,\mathbf{T_e} \tag{5}$$

Assim, dada a malha, faz-se o *assembly* das matrizes $\mathbf{K_e}$; aplicam-se as restrições de temperatura nos nós da face direita; cria-se um vetor de cargas nodais equivalentes, dadas pelo fluxo que entra na face esquerda; e obtém-se o vetor de temperaturas da estrutura resolvendo-se o sistema linear obtido. Uma vez computado o vetor de temperaturas, pode-se calcular o fluxo de calor no centro de cada elemento.

Deseja-se que o programa possa gerar malhas automaticamente, com elementos retangulares idênticos. Considera-se como base uma malha de 5×5 elementos retangulares. Dados os parâmetros $m_x \in \mathbb{N}^*$ e $m_y \in \mathbb{N}^*$, os números de elementos em cada direção são dados por:

$$\begin{aligned} n_x &= 5\,m_x \\ n_y &= 5\,m_y \end{aligned} \tag{6}$$

O refino da malha é dado conforme ilustrado na Figura 4. Para gerar as malhas automaticamente, o programa deve receber três parâmetros de entrada: m_x, m_y e c. Sendo $c \in \{1,2,3\}$ a configuração selecionada para a distribuição dos materiais. Então, respeitando a convenção de numeração definida, geram-se: a matriz de coordenadas nodais; a matriz que relaciona cada elemento aos seus respectivos nós; a matriz que relaciona cada elemento ao valor de condutividade térmica de seu material.

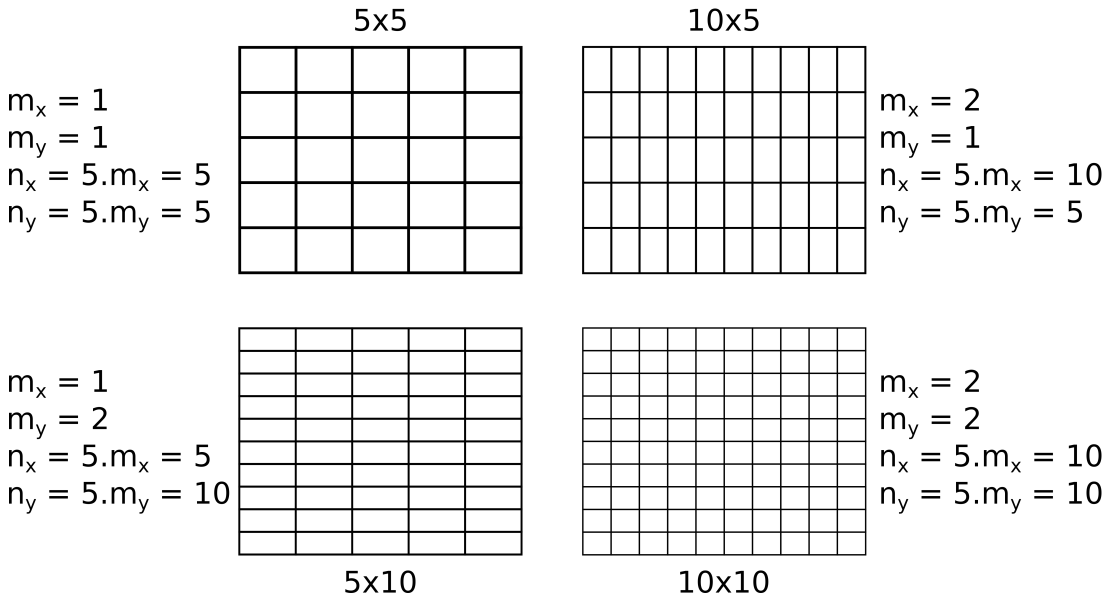

Figura 4: Parâmetros de Refino da Malha

Questão 1

Estabeleça as convenções de numeração global para os nós e elementos e, respeitando a numeração elementar da Figura 3, implemente a geração automática da malha. O programa deve receber como entradas os parâmetros: m_x, m_y e c. Dadas as entradas, devem-se gerar as matrizes de coordenadas e as matrizes que relacionam cada elemento a seus nós e ao material que o compõe. Além disso, o programa deve *plotar* a malha em uma figura.

Questão 2

Implemente o programa que simula o problema térmico apresentado através do Método de Elementos Finitos. Considere as condutividades de $k_1 = 100\, W/[m\, ^oC]$ para o material 1; e de $k_2 = 25\, W/[m\, ^oC]$ para o material 2. O programa deve calcular o vetor de temperaturas da chapa condutora; e o vetor de fluxos (horizontais e verticais) no centro de cada elemento.

Apresente os resultados para cada uma das três configurações ($c = 1$, $c = 2$ e $c = 3$), em figuras e/ou tabelas, considerando $m_x = 2$ e $m_y = 1$.

Questão 3

Considerando $m_x = m_y = m = 1, 2, 4, 8, 16, 32$, faça uma análise de convergência para diferentes medidas do vetor de temperaturas $\mathbf{T}$:

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{\|\mathbf{T}\|_1}{\|\mathbf{1}\|_1} = \frac{\sum_{i=1}^{G} |T_i|}{\sum_{i=1}^{G} |1|} = \frac{1}{G} \sum_{i=1}^{G} |T_i| \\ v_2 &= \frac{\|\mathbf{T}\|_2}{\|\mathbf{1}\|_2} = \frac{\left[\sum_{i=1}^{G} |T_i|^2\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[\sum_{i=1}^{G} |1|^2\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{G}} \left[\sum_{i=1}^{G} |T_i|^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ v_\infty &= \frac{\|\mathbf{T}\|_\infty}{\|\mathbf{1}\|_\infty} = \frac{\max\limits_{i\in\{1,\ldots,G\}} |T_i|}{\max\limits_{i\in\{1,\ldots,G\}} |1_i|} = \max_{i\in\{1,\ldots,G\}} |T_i| \\ v_k &= \|\mathbf{T}\|_{\mathbf{K_g}} = \sqrt{\mathbf{T}^T\, \mathbf{K_g}\, \mathbf{T}} \end{aligned} , \tag{7}$$

sendo G o número de nós da malha e $\mathbf{K_g}$ a matriz global do sistema (irrestrita).

Para calcular o erro de cada medida, use os valores apresentados na Tabela 1 como referência, que foram computados para uma malha de 409.600 elementos ($m_x = m_y = 128$).

Tabela 1: Valores de referência para as medidas do vetor de temperaturas

Configuração	v_1 $[^oC]$	v_2 $[^oC]$	v_∞ $[^oC]$	v_k $[W^{\frac{1}{2}}\, ^oC^{\frac{1}{2}}]$
1	6,7685	8,1023	13,5814	104,0653
2	6,7892	8,1315	13,8150	104,2245
3	6,9139	8,3007	14,1294	105,1783

Para cada uma das três configurações ($c = 1$, $c = 2$ e $c = 3$), apresente as curvas de v_1, v_2, v_∞ e v_k (assim como as curvas de erro para cada medida) em função do número de elementos presentes na malha. Discuta os resultados e defina um valor apropriado para m.

OBS: Para valores de m muito altos, o Matlab gasta muita memória para plotar a malha. Ao fazer a análise de convergência, é aconselhado comentar a parte do código que plote as malhas e resultados ou que se manipule o código para que tenha 2 partes: 1) **questões** 1 **e** 2 **e;** 2) **questão 3.**