UNICAMP

Projeto Computacional 4 – Problema de condução 2D e análise de convergência

Raphael Alves Hailer - RA: 223852

r223852@dac.unicamp.br

Disciplina: EM503

Turma: A

Professor: Renato Pavanello

Data: 10/07/2022

Introdução

O projeto 4 consiste em estudar a condução de calor bidimensional em uma chapa, utilizando o método dos elementos finitos para determinar qual o comportamento de regime permanente obtido por diferentes configurações de materiais na geometria proposta. Em adição, será feita uma análise de convergência do método, para avaliar a sua confiabilidade.

A geometria da chapa, juntamente com a distribuição de materiais com diferentes condutividades térmicas e as condições de contorno do problema a ser estudado estão ilustradas na figura abaixo:

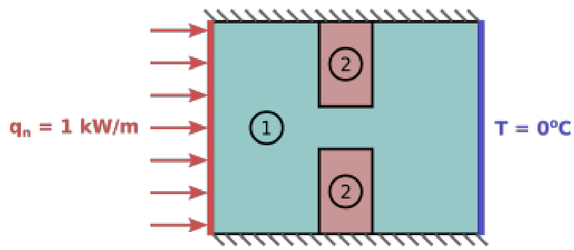


Figura 1: Chapa com diferentes materiais, com condições de contorno ilustradas.

A equação que rege o comportamento térmico de cada elemento pertencente ao domínio Ω, que representa a chapa inteira, é a equação de condução de calor, descrita a seguir:

$$k(x,y)\left(\frac{\partial^2 T}{\partial^2 x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial^2 y^2}\right) = -Q(x,y) \tag{1}$$

Onde $k(x,y)$ é a condutividade térmica na coordenada $(x,y) \in \Omega$ e $Q(x,y)$ é o termo de geração de calor.

Para prosseguir, temos que as condições de contorno são:

- Fluxo imposto na superfície lateral esquerda;
- Superfícies do topo e inferior são adiabática;
- Geração de calor nula no interior da chapa;
- Temperatura da superfície lateral direita é imposta.

De forma matemática, podemos descrever as condições de contorno da seguinte forma:

$$\begin{cases} -k(0,y)\frac{\partial T}{\partial x}(0,y) = q_n = 1000W/m & \forall y \in [0, L_y] \\ -k(x,0)\frac{\partial T}{\partial y}(x,0) = 0 & \forall x \in [0, L_x] \\ -k(x,L_y)\frac{\partial T}{\partial y}(x,L_y) = 0 & \forall x \in [0, L_x] \\ Q(x,y) = 0 & \forall (x,y) \in \Omega \\ T(L_x,y) = 0 & \forall y \in [0, L_y] \end{cases}$$

Em que L_x é o comprimento total na direção horizontal da chapa e L_y é a altura total da chapa.

Para o estudo, iremos utilizar dois materiais diferentes, denotados por 1 e 2, com condutividades térmicas iguais a k_1 e k_2, respectivamente. Temos que o domínio Ω possui dois subdomínios, Ω_1 e Ω_2, onde temos condutividade térmicas k_1 e k_2, respectivamente.

Ademais, iremos utilizar elementos de 4 nós retangulares, como ilustrado na figura a seguir, com a orientação dos nós dada.

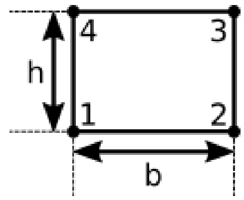


Figura 2: Elemento retangular com enumeração proposta para nós, para a aplicação do método dos elementos finitos.

Temos que a dimensão horizontal do elemento finito é dada por b e sua altura é dada por h.

Selecionado o tipo de elemento, precisamos definir a distribuição de materiais na geometria da chapa. Existem 3 configurações a serem estudadas, ilustradas a seguir, com cotas dadas em centímetros:

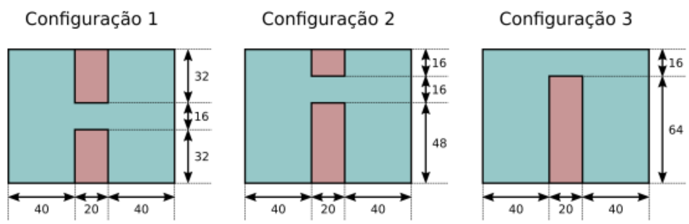


Figura 3: Configurações para distribuição dos materiais da chapa.

De forma que $L_x = 1m$ e $L_y = 0.8m$. Em adição, temos que o número de elementos nas direções x e y são dados por n_x e n_y, respectivamente, de forma que

$$n_x = 5m_x \wedge n_y = 5m_y$$

Onde m_x e m_y são parâmetros, de modo que o número de elementos em ambas as direções sejam sempre múltiplos de 5.

Sendo assim, temos tudo que é necessário para iniciarmos a análise via método dos elementos finitos.

Explorando o método dos elementos finitos no problema de condução 2D

Para a solução do problema utilizando o método dos elementos finitos, é necessário compreender que o problema que queremos resolver é da forma $[K_g]\{T_g\} = \{f_g\}$, onde $[K_g]$ é o equivalente à matriz de rigidez global para problemas advindos dos estudos da resistência dos materiais, $\{T_g\}$ é o vetor de temperaturas nodais global e $\{f_g\}$ é o equivalente do vetor de cargas externas global para problemas da resistência dos materiais. Os termos que constituem as cargas externas são termos relacionados à geração de calor interna e relacionados a fluxos térmicos impostos nos elementos da discretização.

Para a obtenção da matriz $[K_g]$ e do vetor $\{f_g\}$, é necessário analisar um elemento por vez, de forma que se tenha uma matriz de rigidez elementar $[K_e]$ e um vetor de cargas elementar $\{f_e\}$. Ao final, se constrói um sistma linear global constituido pela contribuição de todos os elementos de Ω.

A dedução formal da matriz de rigidez elementar e do vetor de cargas elementar é extensa e está fora do escopo do projeto. A dedução parte da aplicação do método dos resíduos ponderados, em que temos um resíduo R_n $\forall(x, y) \in \Omega$ dado por

$$R_n = k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial^2 x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial^2 y^2}\right) + Q(x, y) \tag{2}$$

E o método consiste em determinar quando

$$\int_\Omega v_n R_n d\Omega = 0 \tag{3}$$

Onde v_n é a função ponderadora do método. Existem diversas formas de definir as funções ponderadoras, mas o método adotado foi o método de Galerkin.

De forma breve, temos que a temperatura de cada elemento, em coordenadas locais $(\overline{x}, \overline{y})$, com $\overline{x} \in [0, b]$ e $\overline{y} \in [0, h]$ é dada por

$$T(\overline{x}, \overline{y}) = \sum_{i=1}^{4} \phi_i(\overline{x}, \overline{y}) T_i \tag{4}$$

Onde os subíndices 1, 2, 3 e 4 são baseados na enumeração de nó para o elemento, dada pela figura 2. Por exemplo, a temperatura no centro de um elemento cujas temperaturas do elemento equivalentes a T_1, T_2, T_3 e T_4 em 2 sejam T_a, T_b, T_c e T_d, respectivamente, é

$$T\left(\frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right) = \phi_1\left(\frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right) T_a + \phi_2\left(\frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right) T_b + \phi_3\left(\frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right) T_c + \phi_4\left(\frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right) T_d$$

As funções ϕ_i com $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ são denominadas funções de forma. Ao impor que $T(0, 0) = T_1, T(b, 0) = T_2, T(b, h) = T_3$ e $T(0, h) = T_4$, obtemos as funções de forma, que são mostradas abaixo:

$$\begin{cases} \phi_1(\overline{x}, \overline{y}) = \frac{(b-\overline{x})(h-\overline{y})}{bh} \\ \phi_2(\overline{x}, \overline{y}) = \frac{\overline{x}(h-\overline{y})}{bh} \\ \phi_3(\overline{x}, \overline{y}) = \frac{(\overline{x})(\overline{y})}{bh} \\ \phi_4(\overline{x}, \overline{y}) = \frac{(b-\overline{x})\overline{y}}{bh} \end{cases}$$

O método de Galerkin impõe a utilização das funções ponderadoras v_n como sendo $v_n = \phi_n$, com $n \in \{1, 2, 3, 4\}$, fazendo com que seja possível, a partir da Equação 3 obtermos uma matriz de rigidez elementar e um vetor de cargas elementar, para análise via elementos finitos.

É válido mencionar que além de substituir v_n na Equação 3, é necessário a utilização da integração por partes para reduzir a ordem das derivadas parciais de T, de forma que obtenhamos a forma fraca.

Sendo assim temos que ,após a dedução formal, a matriz de rigidez elementar $[K_e]$ é dada por

$$[K_e] = \frac{k_e}{6bh}\begin{bmatrix} 2\left[b^2+h^2\right] & b^2-2h^2 & -\left[b^2+h^2\right] & h^2-2b^2 \\ b^2-2h^2 & 2\left[b^2+h^2\right] & h^2-2b^2 & -\left[b^2+h^2\right] \\ -\left[b^2+h^2\right] & h^2-2b^2 & 2\left[b^2+h^2\right] & b^2-2h^2 \\ h^2-2b^2 & -\left[b^2+h^2\right] & b^2-2h^2 & 2\left[b^2+h^2\right] \end{bmatrix} \tag{5}$$

E o vetor de cargas elementar $\{f_e\}$ é dado para cada elemento a depender se há ou não cargas térmicas. Como não temos geração de calor no problema a ser analisado, resta apenas considerarmos cargas térmicas devido a fluxos de calor impostos. Para a chapa, temos que há somente fluxo térmico na superfície lateral esquerda, de forma que para os elementos em $x = 0$ com $y \in [0, L_y]$ o vetor é:

$$\{f_e\} = \frac{q_n h}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{6}$$

Dessa forma, podemos partir para a montagem do sistema global. Temos que o sistema global possui matriz de rigidez singular, de forma que não há solução. Para resolver isso, precisamos aplicar as condições de contorno, de forma que iremos retirar as linhas e colunas correspondentes às temperaturas já conhecidas (temperatura imposta na parede da direita), fazendo com que seja possível resolver o sistema linear resultante e obter as temperaturas de todos os nós.

Por fim, é de interesse do projeto obter os fluxos térmicos nas direções x e y dentro de cada elemento. Para fazer isso, devemos obter, em coordenadas locais, os valores de $\frac{\partial T}{\partial \overline{x}}(\overline{x},\overline{y})$ e $\frac{\partial T}{\partial \overline{y}}(\overline{x},\overline{y})$. Como temos a expressão para a temperatura dentro de cada elemento, dada pela Equação 4, obtemos

$$T(\overline{x},\overline{y}) = \sum_{i=1}^{4}\phi_i(\overline{x},\overline{y})T_i \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial T}{\partial \overline{x}}(\overline{x},\overline{y}) = \sum\limits_{i=1}^{4}\frac{\partial \phi_i}{\partial \overline{x}}(\overline{x},\overline{y})T_i \\ \\ \frac{\partial T}{\partial \overline{y}}(\overline{x},\overline{y}) = \sum\limits_{i=1}^{4}\frac{\partial \phi_i}{\partial \overline{y}}(\overline{x},\overline{y})T_i \end{cases}$$

Onde, novamente, utiliza-se a enumeração de nós proposta na figura 2. Dessa forma, precisamos das derivadas parciais das funções de forma nas direções locais $\overline{x}$ e $\overline{y}$. Para a direção $\overline{x}$ temos

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi_1}{\partial \overline{x}}(\overline{x},\overline{y}) = \frac{\overline{y}-h}{bh} \\ \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial \overline{x}}(\overline{x},\overline{y}) = \frac{h-\overline{y}}{bh} \\ \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial \overline{x}}(\overline{x},\overline{y}) = \frac{\overline{y}}{bh} \\ \\ \frac{\partial \phi_4}{\partial \overline{x}}(\overline{x},\overline{y}) = -\frac{\overline{y}}{bh} \end{cases}$$

Enquanto que para a direção $\overline{y}$ temos

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi_1}{\partial \overline{y}}(\overline{x},\overline{y}) = \frac{\overline{x}-b}{bh} \\ \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial \overline{y}}(\overline{x},\overline{y}) = -\frac{\overline{x}}{bh} \\ \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial \overline{y}}(\overline{x},\overline{y}) = \frac{\overline{x}}{bh} \\ \\ \frac{\partial \phi_4}{\partial \overline{y}}(\overline{x},\overline{y}) = \frac{b-\overline{x}}{bh} \end{cases}$$

Portanto, as derivadas parciais de T em $\overline{x}$ e em $\overline{y}$ são dadas por

$$\frac{\partial T}{\partial \overline{x}}(\overline{x},\overline{y}) = \left\{\frac{\partial \phi_1}{\partial \overline{x}}(\overline{x},\overline{y}) \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial \overline{x}}(\overline{x},\overline{y}) \quad \frac{\partial \phi_3}{\partial \overline{x}}(\overline{x},\overline{y}) \quad \frac{\partial \phi_4}{\partial \overline{x}}(\overline{x},\overline{y})\right\}\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \overline{y}}(\overline{x},\overline{y}) = \left\{\frac{\partial \phi_1}{\partial \overline{y}}(\overline{x},\overline{y}) \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial \overline{y}}(\overline{x},\overline{y}) \quad \frac{\partial \phi_3}{\partial \overline{y}}(\overline{x},\overline{y}) \quad \frac{\partial \phi_4}{\partial \overline{y}}(\overline{x},\overline{y})\right\}\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix}$$

Tendo calculado as derivadas espaciais da temperatura dentro dos elementos, podemos agora calcular o fluxo térmico dentro dos elementos. Sendo k_e a condutividade térmica do elemento, temos que o vetor de fluxo térmico $\{q(\overline{x},\overline{y})\}$ é dado por

$$\{q(\overline{x},\overline{y})\} = \begin{Bmatrix} q_x(\overline{x},\overline{y}) \\ q_y(\overline{x},\overline{y}) \end{Bmatrix} = -k_e \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial \overline{x}}(\overline{x},\overline{y}) \\ \\ \frac{\partial T}{\partial \overline{y}}(\overline{x},\overline{y}) \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \{q(\overline{x},\overline{y})\} = -k_e \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial \overline{x}}(\overline{x},\overline{y}) & \frac{\partial \phi_2}{\partial \overline{x}}(\overline{x},\overline{y}) & \frac{\partial \phi_3}{\partial \overline{x}}(\overline{x},\overline{y}) & \frac{\partial \phi_4}{\partial \overline{x}}(\overline{x},\overline{y}) \\ \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial \overline{y}}(\overline{x},\overline{y}) & \frac{\partial \phi_2}{\partial \overline{y}}(\overline{x},\overline{y}) & \frac{\partial \phi_3}{\partial \overline{y}}(\overline{x},\overline{y}) & \frac{\partial \phi_4}{\partial \overline{y}}(\overline{x},\overline{y}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix}$$

Ou ainda, podemos dizer que

$$\{q(\overline{x},\overline{y})\} = -k_e\,[B_e]\,\{T_e\}$$

Onde $\{T_e\}$ é o vetor de temperaturas do elemento e a matriz $[B_e]$, após substituição dos termos, é dada por

$$[B_e] = \frac{1}{bh}\begin{bmatrix} (\overline{y}-h) & (h-\overline{y}) & \overline{y} & -\overline{y} \\ (\overline{x}-b) & -\overline{x} & \overline{x} & (b-\overline{x}) \end{bmatrix} \tag{7}$$

De modo que a expressão final para cálculo dos fluxos térmicos em uma coordenada genérica $(\overline{x},\overline{y})$ dentro de um elemento é dada por

$$\{q(\overline{x},\overline{y})\} = -\frac{k_e}{bh}\begin{bmatrix} (\overline{y}-h) & (h-\overline{y}) & \overline{y} & -\overline{y} \\ (\overline{x}-b) & -\overline{x} & \overline{x} & (b-\overline{x}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} \tag{8}$$

Um dos objetivos do projeto é calcular o fluxo térmico no centro de cada elemento. Para isso, basta fazermos $(\overline{x},\overline{y}) = (\frac{b}{2},\frac{h}{2})$, de modo que obtemos

$$\left\{q\left(\tfrac{b}{2},\tfrac{h}{2}\right)\right\} = -k_e \begin{bmatrix} -\frac{1}{2b} & \frac{1}{2b} & \frac{1}{2b} & -\frac{1}{2b} \\ -\frac{1}{2h} & -\frac{1}{2h} & \frac{1}{2h} & \frac{1}{2h} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} \tag{9}$$

Resolução do problema global - MATLAB

Questões 1 e 2

Para a resolução das questões 1 e 2, utilizou-se o código "projeto4_quest_1_e_2.m"anexado no envio deste relatório, que é baseado em um código para resolução do problema de condução 2D utilizando o método de elementos finitos feito em sala de aula, com o auxílio do professor Renato Pavanello, porém com diversas alterações.

Por meio desse código, é possível obter as temperaturas em todos os nós da malha, os fluxos térmicos nas direções x e y no centro de todos os elementos e também é possível obter representações visuais que auxiliam bastante na compreensão do resultado. Primeiramente, deve-se inserir os valores de m_x e m_y desejados, além de informar o valor de c, sendo que $c \in \{1, 2, 3\}$ corresponde à configuração desejada para distribuição dos materiais 1 e 2. Caso informe um valor de c que não corresponde às configurações 1, 2 ou 3, o programa irá exibir uma mensagem informando ao usuário que a configuração está indisponível.

Ademais, o programa gera vetores de coordenadas x e y dos nós, denominados "coordx"e "coordy", respectivamente. Em seguida, utilizando esses vetores, a matriz de incidência é gerada, onde cada linha corresponde ao elemento e temos a primeira coluna informando o material do elemento, enquanto as 4 colunas seguintes informam os nós do elemento. Para um índice de material igual a 1, significa que o elemento possui condutividade igual a k_1, sendo $k_1 = 100\ W/(m°C)$, enquanto que para um índice de material igual a 2 temos que a condutividade do elemento é igual a k_2, sendo $k_2 = 25\ W/(m°C)$. Essas condutividades podem ser alteradas pela entrada de dados do programa, caso o usuário deseje.

Outro aspecto interessante do programa é que ele gera uma malha com a enumeração dos nós e dos elementos, como ilustrado pela figura a seguir, utilizando $m_x = 2$ e $m_y = 1$:

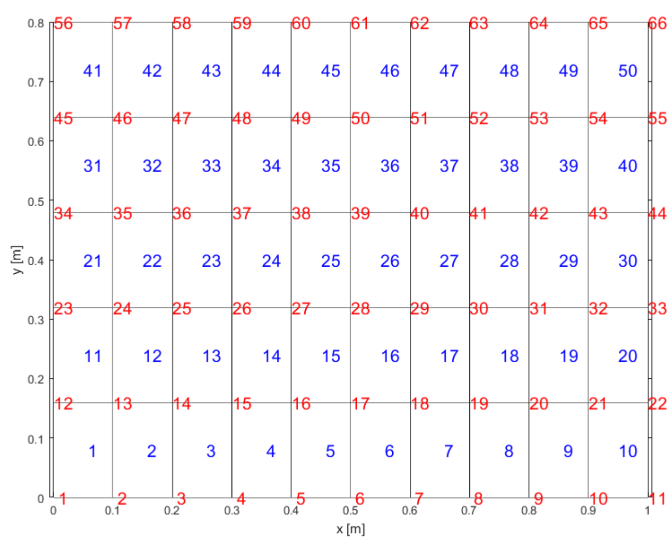
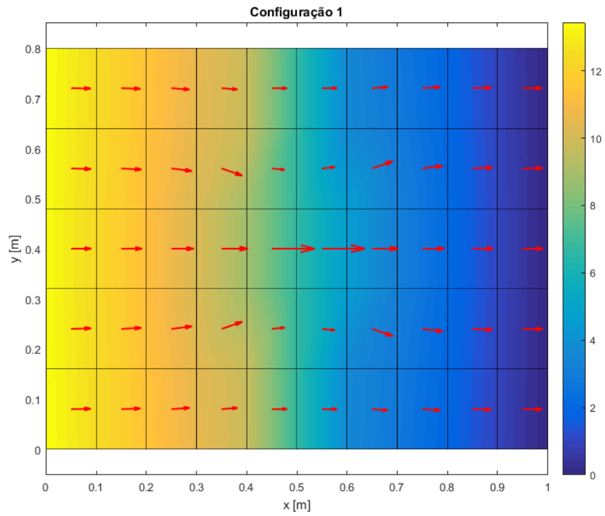


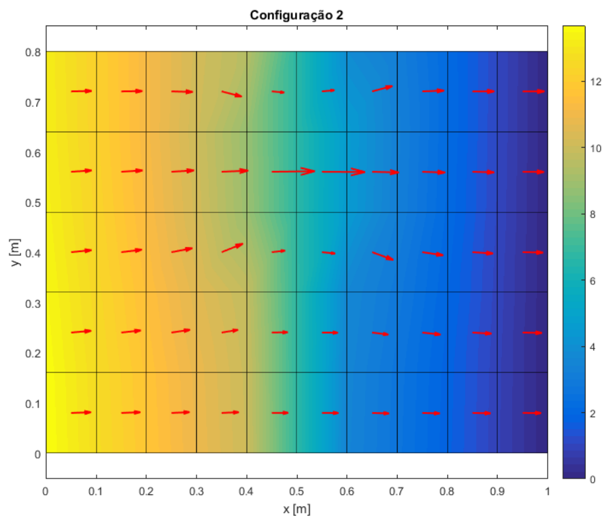
Figura 4: Malha discretizada para análise via método dos elementos finitos, com nós enumerados em vermelho e elementos enumerados em azul.

Ao inserirmos os dados de entrada, o programa irá gerar também uma malha onde a cor indica a temperatura nos nós e as setas indicam a magnitude, direção e sentido do fluxo térmico no centro de cada elemento. Os vetores com resultados numéricos para temperatura nos nós e fluxo térmico no centro dos elementos é dado no código pelas matrizes "Tel"e "q_centro", respectivamente. Na matriz "Tel", cada coluna corresponde a um elemento e as temperaturas nas linhas correspondem às temperaturas nos nós, de maneira ordenada como ilustrada na figura 4. Caso o usuário deseje, é possível analisar o vetor de temperaturas nodais "Tg", que é obtido diretamente pela resolução do sistema linear global, onde cada linha corresponde à numeração do nó e a Temperatura neste nó. Por fim, a matriz "q_centro"informa os fluxos nas direções x e y pelas linhas 1 e 2, respectivamente.

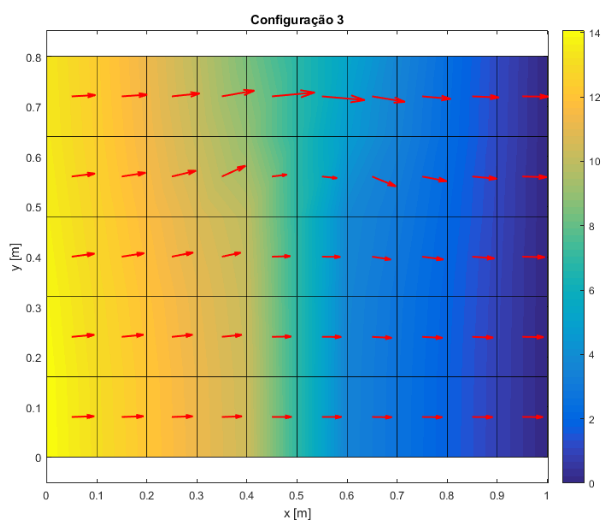
A seguir, temos o resultado visual obtido para as três configurações:



(a) Configuração 1.



(b) Configuração 2.



(c) Configuração 3.

Figura 5: Resposta obtida para as diferentes configurações de materiais, utilizando uma entrada de dados fixa.

Questão 3

Na questão três, iremos analisar a convergência do método de elementos finitos por meio de análise de diversas formas de medir o vetor de temperaturas.

Nós temos que as seguintes medidas se alteram conforme há o refino da malha discretizada, porém caso o método convirja, será possível observar e também será possível estudar a quantidade mínima de elementos para haver convergência satisfatória.

Considere G como sendo o número total de nós da malha, $\{T_g\}$ como sendo o vetor de temperaturas global em todos os nós da discretização e $[K_g]$ como sendo a matriz de rigidez global do sistema, sem aplicação das condições de contorno. Dessa forma, será conduzida uma análise de convergência em 4 medidas de vetor de temperaturas T, dadas por

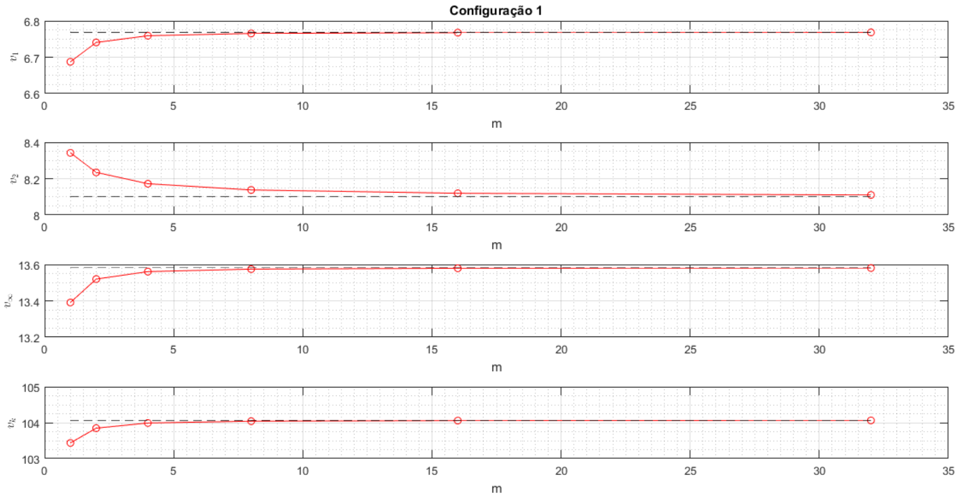
$$\begin{aligned}
v_1 &= \frac{\|T\|_1}{\|1\|_1} = \frac{\sum_{i=1}^{G}|T_i|}{\sum_{i=1}^{G}|1|} = \frac{1}{G}\sum_{i=1}^{G}|T_i| \\
v_2 &= \frac{\|T\|_2}{\|1\|_2} = \frac{\left[\sum_{i=1}^{G}|T_i|^2\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[\sum_{i=1}^{G}|1|^2\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{G}}\left[\sum_{i=1}^{G}|T_i|^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
v_\infty &= \frac{\|T\|_\infty}{\|1\|_\infty} = \frac{\max_{i\in\{1,\ldots,G\}}|T_i|}{\max_{i\in\{1,\ldots,G\}}|1_i|} = \max_{i\in\{1,\ldots,G\}}|T_i| \\
v_k &= \|\{T_g\}\|_{[K_g]} = \sqrt{\{T_g\}^T\,[K_g]\,\{T_g\}}
\end{aligned} \tag{10}$$

Para a análise, consideraremos $m_x = m_y = m = 1, 2, 4, 8, 16, 32$, de modo que os elementos sejam sempre quadrados e para que tenhamos uma malha cada vez mais refinada. É esperado que conforme se refine a malha, as medidas v_1, v_2, v_∞ e v_k convirjam. Como referência, temos os valores das medidas de temperatura para as 3 configurações utilizando $m = 128$, fazendo com que a malha seja de 409600 elementos. A seguir temos uma tabela com os valores de referência:

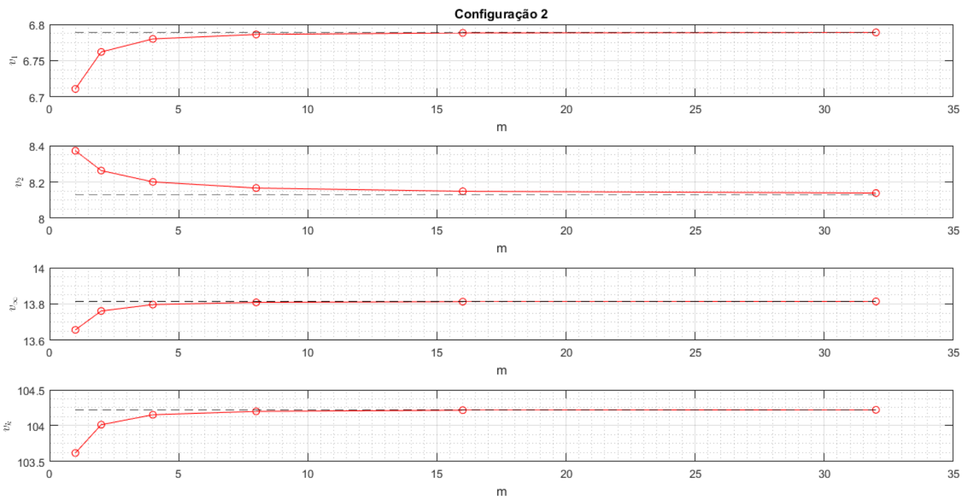
Configuração	v_1 [°C]	v_2 [°C]	v_∞ [°C]	v_k $\left[W^{\frac{1}{2}}°C^{\frac{1}{2}}\right]$
1	6,7685	8,1023	13,5814	104,0653
2	6,7892	8,1315	13,8150	104,2245
3	6,9139	8,3007	14,1294	105,1783

Tabela 1: Valores de referência em todas as configurações para as medidas do vetor de temperaturas global.

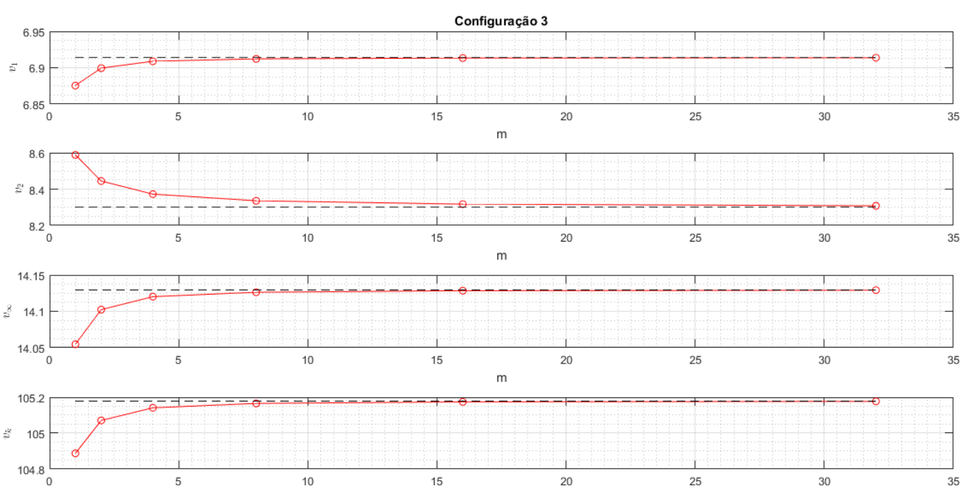
Portanto, com o auxílio do código "projeto4_quest_3.m", para $c \in \{1, 2, 3\}$, indicando a configuração de materiais da chapa, foi possível encontrar os valores de v_1, v_2, v_∞ e v_k para $m = 1, 2, 4, 8, 16, 32$. obtendo os valores calculados em função de m, podemos observar graficamente os resultados, como exposto a seguir:



(a) Configuração 1.



(b) Configuração 2.



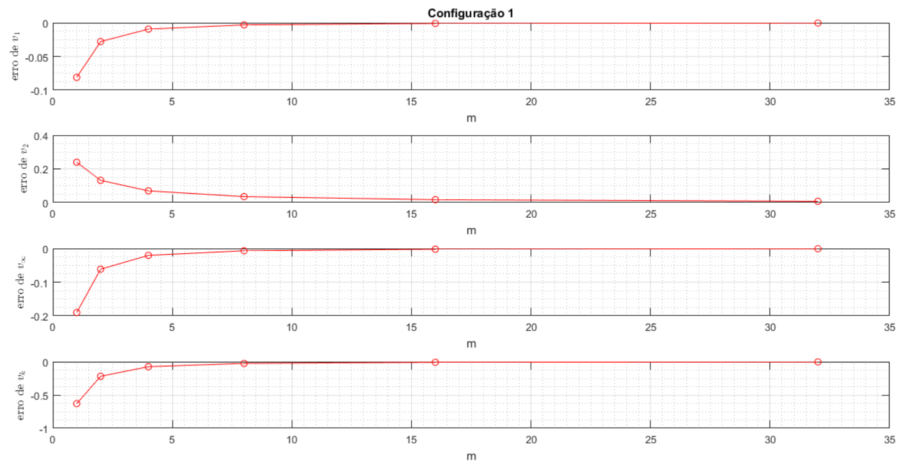
(c) Configuração 3.

Figura 6: Evolução de diferentes medidas do vetor de temperaturas global conforme a malha é refinada.

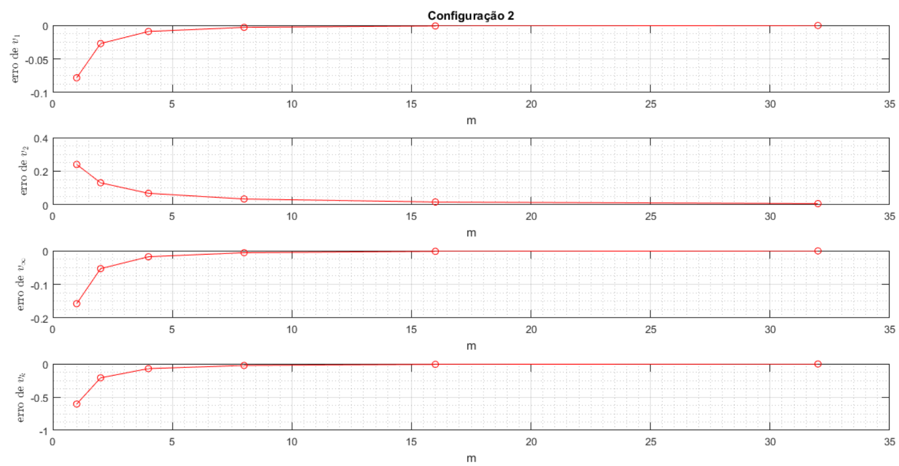
Para avaliar o erro de cada medida em função do m, será adotado

$$\text{erro} = \text{medida} - \text{referência}$$

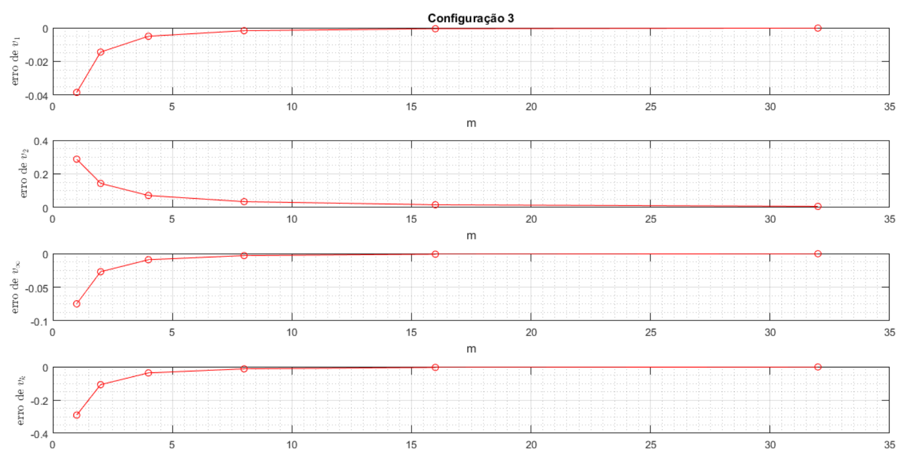
O que nos fornece os seguintes resultados:



(a) Configuração 1.



(b) Configuração 2.



(c) Configuração 3.

Figura 7: Evolução dos erros para as diferentes medidas do vetor de tempraturas global conforme a malha é refinada.

Nos gráficos obtidos, temos que a curva vermelha representa a evolução das medidas v_1, v_2, v_∞ e v_k para $m = 1, 2, 4, 8, 16, 32$, indicando a evolução conforme se refina a malha. Enquanto isso, o tracejado preto indica o valor de referência para uma malha com 409600 elementos. É possível observar que em todos os casos, e para todas as medidas do vetor de temperaturas global, há uma convergência sendo alcançada conforme se refina a malha, de modo que o método dos elementos finitos para a resolução do problema do projeto ganha confiabilidade.

Para definir um valor adequado de m, seria necessário ter em mente uma aplicação, para saber se é necessário haver mais ou menos rigor nos resultados numéricos. Por exemplo, problemas do setor aeroespacial são problemas com tolerâncias baixíssimas de erro, fazendo com que seja necessário o uso de uma malha com mais elementos, o que causa aumento no tempo de processamento para solução final no MATLAB. Portanto, ao analisarmos os gráficos das figuras 6 e 7, podemos ver que em m=32 temos um resultado bem precisos para inúmeras aplicações da engenharia, tornando assim um valor aceitável para a discretização da malha..