$x \in [0, L_x]$; $y \in [0, L_y]$; $t \in [0, T]$

Laplace 2D: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,y,t) - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y,t) - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y,t) = f(x,y,t)$

Com condições de contorno

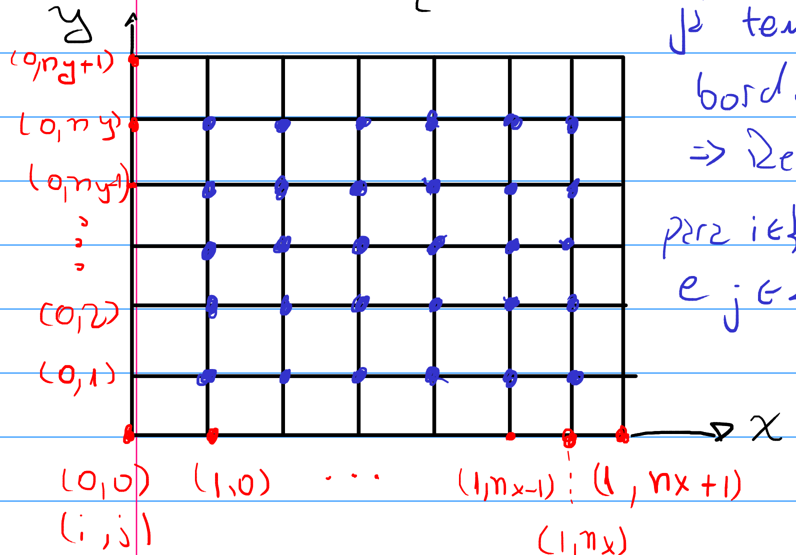
{ (1) $u(0,y,t) = u(L_x,y,t) = u(x,0,t) = u(x,L_y,t) = 0$

→ Borda com valor nulo em qualquer tempo → Dirichlet }

(2) $u(x,y,0) = u_0(x,y)$

(3) $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = v_0(x,y)$ } → Perfis Dados

→ Discretização



já temos a borda

⇒ Resolveremos

para $i \in \{1,\dots,nx\}$

e $j \in \{1,\dots,ny\}$

Discretização temporal

$t_0 \quad t_1 \quad \dots \quad t_{nt-1} \quad t_{nt}$

$m \in \{0, nt\}$

$$\begin{cases} \Delta x = Lx/(nx+1) \\ \Delta y = Ly/(ny+1) \\ \Delta t = T/nt \end{cases}$$

fórmulas de diferenças finitas

- $\dfrac{\partial^2 u_{i,j}^m}{\partial x^2} = \dfrac{u_{i-1,j}^m - 2u_{i,j}^m + u_{i+1,j}^m}{\Delta x^2}$ $\qquad O(\Delta x^2)$
- $\dfrac{\partial^2 u_{i,j}^m}{\partial y^2} = \dfrac{u_{i,j-1}^m - 2u_{i,j}^m + u_{i,j+1}^m}{\Delta y^2}$ $\qquad O(\Delta y^2)$
- $\dfrac{\partial^2 u_{i,j}^m}{\partial t^2} = \dfrac{u_{i,j}^{m+1} - 2u_{i,j}^m + u_{i,j}^{m-1}}{\Delta t^2}$ $\qquad O(\Delta t^2)$

Substituindo na EDP discretizada

$$\frac{u_{i,j}^{m+1} - 2u_{i,j}^m + u_{i,j}^{m-1}}{\Delta t^2} - c^2\left(\frac{u_{i+1,j}^m - 2u_{i,j}^m + u_{i-1,j}^m}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1}^m - 2u_{i,j}^m + u_{i,j-1}^m}{\Delta y^2}\right) = f_{i,j}^m$$

$$\Leftrightarrow u_{i,j}^{m+1} = f_{i,j}^m \Delta t^2 + \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2}(u_{i+1,j}^m - 2u_{i,j}^m + u_{i-1,j}^m) + \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta y^2}(u_{i,j+1}^m - 2u_{i,j}^m + u_{i,j-1}^m)$$

$$+ 2u_{i,j}^m - u_{i,j}^{m-1}$$

$$u_{i,j}^{m+1} = f_{i,j}^{m}\Delta t^2 + \underbrace{\frac{c^2\Delta t^2}{\Delta x^2}}_{\alpha x^2}\left(u_{i+1,j}^{m} - 2u_{i,j}^{m} + u_{i-1,j}^{m}\right) + \overbrace{\frac{c^2\Delta t^2}{\Delta y^2}}^{\alpha y^2}\left(u_{i,j+1}^{m} - 2u_{i,j}^{m} + u_{i,j-1}^{m}\right)$$

$$+\,2u_{i,j}^{m} - u_{i,j}^{m-1}$$

$$\boxed{u_{i,j}^{m+1} = -u_{i,j}^{m-1} + 2\left(1 - \alpha x^2 - \alpha y^2\right)u_{i,j}^{m} + \alpha x^2 u_{i-1,j}^{m} + \alpha x^2 u_{i+1,j}^{m} + \alpha y^2 u_{i,j-1}^{m} + \alpha y^2 u_{i,j+1}^{m} + \Delta t^2 f_{i,j}^{m}}$$

Converge quando $|\alpha x| \le 1$ E $|\alpha y| \le 1$ ao mesmo tempo

surge um problema quando $m = 0$, pois necessitamos de $u_{i,j}^{-1}$

→ Utilizando a condição de contorno

$$\frac{\partial u}{\partial t}{}_{i,j}^{0} = \frac{u_{i,j}^{1} - u_{i,j}^{-1}}{2\Delta t} = v_{0\,i,j} \iff \boxed{u_{i,j}^{-1} = u_{i,j}^{1} - v_{0\,i,j}\cdot(2\Delta t)}$$

⇒ $u_{i,j}^{1} = -\left(u_{i,j}^{1} - v_{0\,i,j}\cdot(2\Delta t)\right) + \Sigma$, onde Σ é o resto da expressão

⇒ $\boxed{u_{i,j}^{1} = \frac{1}{2}\left(2\Delta t\, v_{0\,i,j} + \Sigma\right)}$

tendo agora $u_{i,j}^{1}$, com $m=1$ o termo $m-1 = 0$ e temos $u_{i,j}^{0}$ dado

⇒ Calcular próximos pontos usando o for do MATLAB!

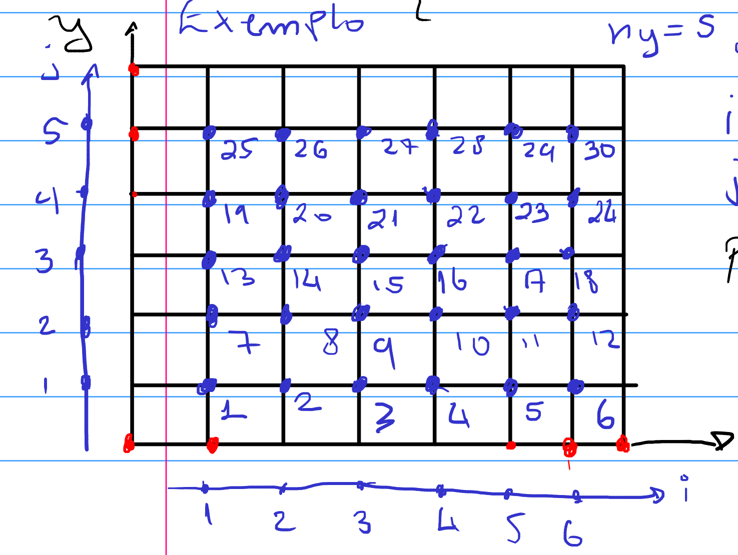
→ Índice único para identificar os pontos na malha

$I = i + (j-1)nx$

Exemplo

$nx = 6$

$ny = 5$



coordenada I em azul

$i = 1$, $j = 3$ → $I = 1 + (3-1).6 = 13$

Ponto à direita: $I+1$

Ponto à esquerda: $I-1$

Ponto acima: $I + nx$

Ponto abaixo: $I - nx$