EA de Topologie Algébrique

Antoine Scheid, Maxime Guigon et Raphaël Kalfon

8 février 2023

Table des matières

1 Résumé

L'objectif de ce papier est de proposer une introduction à la notion d'ensemble simplicial et à la théorie de l'homotopie des ensembles simpliciaux. Nous mentionnons dans un premier temps différents aspects de la catégorie des ensembles simpliciaux, avant de détailler la notion de leur réalisation géométrique. Nous passons ensuite aux objets simpliciaux dans d'autres catégories, en passant par le concept de nerfs et le théorème de Dold-Kan. Nous introduisons ensuite le cadre privilégié de la théorie de l'homotopie des ensembles simpliciaux, à savoir les complexes de Kan. Nous passons ensuite à la notion de groupe d'homotopie, dont nous détaillons la construction et introduisons l'intérêt topologique. Pour des raisons de temps, nous avons omis la notion d'homotopie relative, non essentielle à la compréhension du coeur du sujet.

Nos sources principales sont les écrits de May [7], Curtis [1], et Friedman [3] à ce sujet. L'approche que nous proposons dans cet article est une approche relativement élémentaire, en comparaison avec des approches plus catégoriques et plus modernes proposées par Goerss et Jardine dans [4]. Ce point de vue met davantage l'accent sur les fibrations de Kan que sur les complexes du même nom, et porte également une grande importance aux catégories de modèles. Nous avons fait le choix de nous concentrer sur l'approche élémentaire, afin de proposer un article accessible à tout lecteur ayant quelques connaissances en homologie simpliciale et en homotopie.

2 Introduction de la Notion d'Ensemble Simplicial

Nous introduisons dans cette partie la manière dont nous allons tenter d'encoder la structure géométrique des complexes simpliciaux dans des ensembles abstraits munis d'applications.

2.1 Des Simplexes Aux Ensembles Simpliciaux Abstraits

2.1.1 Intuition Géométrique Provenant des Complexes Simpliciaux

Nous commencerons ici par revoir les notions de simplexe et de complexe simplicial telles que nous les avions vues en cours afin d'obtenir par là une première intuition géométrique des outils que nous allons développer par la suite.

> [**Simplexes Euclidiens**] Un simplexe σ de dimension n dans un espace euclidien $\mathbb{R}^m$ pour $m \geq n$ est l'enveloppe convexe de n+1 points indépendants. Ces points sont appelés *sommets* de σ.

Un cas particulier des simplexes euclidiens est le simplexe standard que nous définissons ci-dessous.

> [**Simplexe standard**] Le simplexe standard de dimension n est le simplexe de $\mathbb{R}^{n+1}$ qui est l'enveloppe convexe de n+1 points $x_0, x_1, ..., x_n$ qui vérifient :
>
> $$\forall i \in 0, ..., n,\ x_i \geq 0, x_0 + x_1 + ... + x_n = 1$$
>
> On le note $|\Delta_n|$.

Une remarque que l'on peut faire sur ces objets est que les simplexes "contiennent" eux-mêmes d'autres simplexes. En effet : si on regarde tous les points du simplexe $|\Delta_n|$ tels que la coordonnée i est nulle, on obtient un sous-ensemble parfaitement homéomorphe au simplexe $|\Delta_{n-1}|$. Avec ces n choix de coordonnée, on peut ainis dire qu'un simplexe de dimension n possède n sous-simplexes de dimension $n-1$, que nous appelons ses faces, et ainsi de suite. Ainsi, une première idée "ensembliste" à avoir du simplexe de dimension n, c'est que c'est un objet dont on peut dériver n simplexes de dimension $n-1$.

A partir des simplexes standards, on peut construire des ensembles plus grand, les complexes simpliciaux.

> [**Complexe simplicial**] Un complexe simplicial est un ensemble K de simplexes vérifiant les propriétés suivantes :
>
> . Toutes les faces de chaque simplexe de K sont aussi dans K.
>
> . L'intersection non disjointe de deux simplexes de K est exactement leur face commune - qui correspond à l'enveloppe convexe de leurs sommets communs.

. Pour tout simplexe de K, il existe un voisinage U de ce simplexe tel que U ne rencontre qu'un nombre fini de simplexes de K.

Si l'on se concentre sur le premiers points de cette définition, on obtient une idée qui complète la première pour développer une théorie simpliciale dans un cadre ensembliste : un ensemble simplicial pourrait être un ensemble de simplexes de diverses dimensions entière, dont chaque simplexe de dimension n contient n simplexes de dimension $n-1$. Notre objectif sera de nous affranchir de la partie géométrique intrinsèque à la notion de complexe simplicial. Nous obtenons ici une première vision purement combinatoire d'un tel ensemble.

Nous pouvons donc nous dire que si l'on veut définir une notion ensembliste de simplexe, il va nous falloir une notion de **dimension**, et une notion de **faces**.

2.1.2 Intuition Géométrique Provenant des Complexes de Chaînes Singulières

Nous allons ici redéfinir les complexes de chaîne singulière et définir intuitivement comment on pourrait "prendre les faces" d'un simplexe de dimension n et comment on pourrait "dégénérer" un simplexe de dimension n. Le faire rigoureusement, en introduisant les applications D_i et S_i, et en définissant les applications d_i et s_i. Nous arriverons au point clef dans la définition des ensemles simpliciaux : les relations que vérifient d_i et s_i.

Les remarques précédentes nous incitent à définir deux applications continues sur le simplexe de dimension n, pour $n > 0$.

[**Applications d'Inclusion**] Considérons $|\Delta_n|$ le simplexe de dimension n. Les n+1 applications faces se définissent de la manière suivante :

$$\forall i \in [0, 1, ..., n] : d_i((v_0, v_1, ..., v_n)) = (v_0, v_1, ..., v_{i-1}, v_{i+1}, ..., v_n)$$

Remarque : On remarque donc que chacune de ces applications envoie le simplexe sur une de ses propres faces (la i-ième pour l'application d_i). De plus, il convient de noter que l'application face que l'on définit permet d'obtenir l'application frontière définie sur le complexe de chaînes associé (en effet on sommera plusieurs simplexes, d'où le fait que l'on obtient une chaîne) :

$$\partial = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i$$

Remarque : Par la suite, on notera simplement : $(v_0, v_1, ..., \widehat{v_i}, ..., v_n)$ le n-simplexe où on a enlevé le sommet i. Il faut faire attention : ces applications ne sont absolument pas définies sur un espace topologique mais simplement d'un point de vue combinatoire.

Dans un complexe de chaînes singulières, on peut aussi prendre les faces d'un simplexe. Néanmoins, il nous faut une étape supplémentaire avant de faire cela, comme nous allons le voir.

Applications d'inclusion D_i et d'écrasement S_i

> $[D_i]$ On note l'application $D_i : \Delta_{n-1} \to \Delta_n$ l'application qui prend le simplexe de dimension $n-1$ et l'inclut dans Δ_n en tant que i-ième face.

Or, en homologie singulière, les simplexes sont définis comme des applications elles-mêmes définies sur des simplexes standards. Si l'on note Δ^n l'ensemble des n-simplexes standards et que X est un espace topologique, les n-simplexes singuliers de X sont les applications continues :

$$\sigma_{sing} : \Delta^n \to X$$

> [**Application prise de face** d_i] On définit ensuite $d_i : \sigma \to \sigma \circ D_i$, l'application prise de face. On a donc ici les éléments nécessaires pour définir notre application frontière en homologie singulière.

Ainsi, nous avons défini une application qui nous permet d'obtenir des (n-1)-simplexes en partant de n-simplexes. On peut donc se poser la question de l'existence d'un morphismes qui irait en "sens inverse", c'est-à-dire qui nous donnerait des (n+1)-simplexes en partant de n-simplexes. Cela est possible et c'est l'application dégénérescence qui nous permettra de faire cela. Nous allons donc voir comment faire cela.

Sur un simplexe standard, on peut définir une application S_i de la manière suivante :

$$S_i : \Delta_{n+1} \to \Delta_n, (s_0, s_1, ..., s_i, ..., s_{n+1}) \mapsto (s_0, s_1, ..., s_{i-1}, s_{i+1}, ..., s_{n+1})$$

Plus explicitement, à $\sum_{k=0}^{n+1} t_k s_k$ elle associe $\sum_{k=0}^{n+1} u_k s_k$ avec $u_k = t_k$ pour $k \neq i, i+1$, $u_i = 0$, et $u_{i+1} = t_i + t_{i+1}$ (Si i est différent de n. Quand i est égal à n, on a $u_n = 0$ et $u_{n-1} = t_{n-1} + t_n$). Pour imager notre propos, on peut considérer qu'elle prend un simplexe de dimension $n+1$ et l'écrase sur sa i-ième face.

Soit $s_i : \sigma \to \sigma \circ S_i$ défini sur Δ^{n+1}. C'est l'application dégénérescence. Celle-ci sera nécessaire pour pouvoir définir l'application prise de face dans le cadre de complexes de chaînes singulières.

> [**Application dégénérescence**] Etant donné un n-simplexe de Δ^n, on peut définir (n+1) applications dégénérescence $s_0, s_1, ..., s_n$:
>
> $$\forall i \in 0, ..., n : s_i((x_0, x_1, ..., x_n)) = (x_0, x_1, ..., x_i, x_i, ..., x_n))$$
>
> C'est-à-dire le n-simplexe $(x_0, x_1, ..., x_n)$ où l'on a répété une fois le sommet i.

S_i peut être décrite de manière combinatoire tandis que s_i est défini sur des σ singuliers (c'est-à-dire que pour s_i, on manipule des objets qui sont définis sur des espaces topologiques).

On retrouve les générateurs de l'application bord en homologie singulière que nous avions défini en cours :

$$s_i : \Delta^n \to \Delta^{n-1}, \sigma \mapsto \sigma \circ S_i$$

Et on a de plus défini :

$$d_i : \Delta^n \to \Delta^{n+1}, \sigma \mapsto \sigma \circ D_i$$

Voici une illustration de l'effet des applications d_i et s_i sur des chaînes singulières, en lien avec leur construction par les applications D_i et S_i.

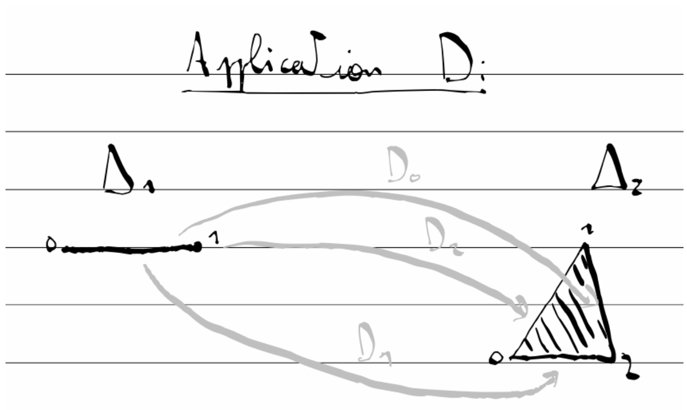

FIGURE 1 – Les applications D_i pour $n = 2$

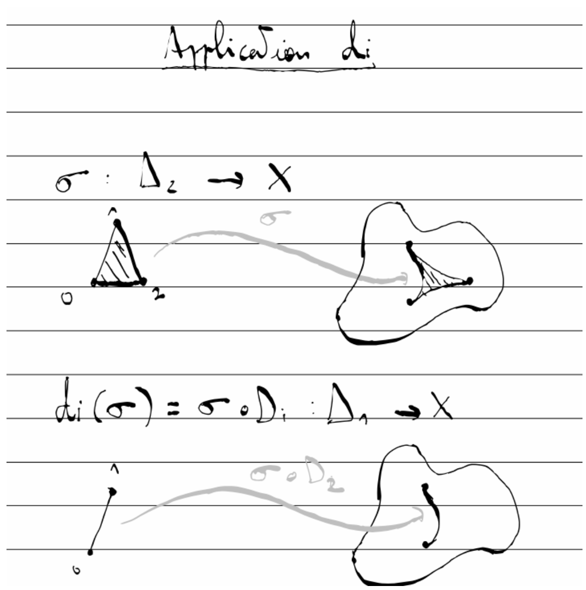

FIGURE 2 – Les applications d_i correspondantes

FIGURE 3 – Une application S_i pour $n = 2$

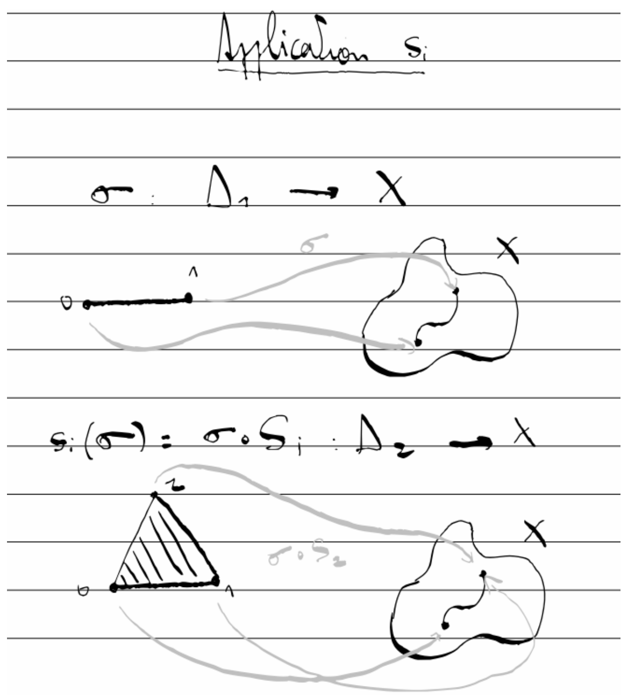

FIGURE 4 – Une application s_i correspondante

Composition des applications dégénérescences. Comme nous le verrons par la suite, nous aurons souvent besoin de composer des applications face ou dégénérescence. Commençons donc par composer d_i et d_j. Nous allons montrer que :

$$d_i d_j = d_{j-1} d_i$$

Démonstration : Soient $i < j$: $d_i d_j[0, ..., n]$ est l'application face itérée deux fois sur un simplexe standard. Elle correspond au simplexe où on a enlevé les sommets qui avaient initialelement les labels i et j ($i < j$ donc appliquer d_i n'est pas influencé par le fait qu'on ait enlevé d_j juste avant). Cela est donc égal au simplexe $d_{j-1} d_i[0, ..., n]$. En effet, une fois que l'on a retiré le sommet i, pour retirer le sommet j dont l'indice est plus grand, il faut appliquer d_{j-1} car l'indice de ce sommet a décrû.

Composition des applications face et dégénérescence : Nous avons dit précédemment que pour définir notre notion abstraite d'ensembles simpliciaux, nous voudrions conserver l'intuition géométrique correpsondant à prendre des faces de simplexes ou bien en prendre des dégénérescences. Ces applciations d_i et s_i sont une bonne piste. Mais si nous voulons munir un ensemble quelconque de telles applications, nous devons d'abord étudier leur relations de composition dans un cadre géométrique pour ensuite l'adapter à un cadre ensembliste. Les relations génératrices des interactions entre les d_i et les s_i sont les suivantes :

$$\forall i < j : d_i s_j = s_{j-1} d_i$$
$$d_i s_i = d_{i+1} s_i = id$$
$$\forall i > j+1 : d_i s_j = s_j d_{i-1}$$

Démonstration : On va commencer par regarder $d_i s_j$ appliquée à (0, 1, ..., n).
1^{er} ***cas, i < j :***

$$d_i s_j((0,1,...,n)) = d_i((0,1,...,j,j,...,n)) = (0,1,...,i-1,i+1,...,j,j,...))$$
$$= (0,1,...,i,i+1,...,j,j,...,n) = s_{j-1} d_i((0,1,...,n))$$

car après avoir appliqué d_i, l'indice de l'élément j a décrû de 1.
2^{e} ***cas : i > j+1 :***

$$d_i s_j((0,1,...,n)) = d_i((0,1,...,j,j,...n)) = (0,1,...,i-2,i,...,n))$$

(car d_i s'applique au i-ième élément, ici i-1 du fait que l'on ait répliqué j < i-1)

$$= s_j((0,...,j,...,i-2,i,...,n)) = s_j d_{i-1}((0,1,...,n))$$

Les mêmes calculs donnent $d_i s_i = d_{i+1} s_i = id$.
En résumé :

$$\forall 0 \leq i < j \leq n : d_i s_j = s_{j-1} d_i$$
$$\forall 0 \leq i \leq n : d_i s_i = d_{i+1} s_i = id$$
$$\forall i > j+1 : d_i s_j = s_j d_{i-1}$$

Ce sont ces relations de composition que nous allons retenir pour donner notre définition abstraite des ensembles simpliciaux.

2.2 Définition Rigoureuse des Ensembles Simpliciaux

Nous allons donc définir les ensembles simpliciaux en partant des propriétés de composition que nous mentionnons précédemment pour des simplexes.

> [**Ensemble simplicial.**] Un ensemble simplicial est une suite d'ensembles $X_0, X_1, ...$ et d'applications $d_i : X_n \to X_{n-1}$, $s_i : X_{n-1} \to X_n$, pour $0 \leq i \leq n$, vérifiant cinq relations :
>
> $$\forall i < j : d_i d_j = d_{j-1} d_i$$
> $$\forall i < j : d_i s_j = s_{j-1} d_i$$

$$d_i s_i = d_{i+1} s_i = id$$

$$\forall i > j+1 : d_i s_j = s_j d_{i-1}$$

$$\forall i \leq j : s_i s_j = s_{j+1} s_i$$

Ces conditions peuvent sembler très abstraites dans un premier temps, mais pour les comprendre correctement, il faut garder en tête que ce ne sont que les traductions de ce que nous avons défini dans $\mathscr{S}(X)$, adapté à des ensembles quelconques. Comme dans ce qui précède, les applications d_i sont les applications **prise de face**, tandis que les applications s_i sont les applications de **dégérescence**. Nous en donnerons de nombreux exemples par la suite. D'abord, donnons une définition et une propriété :

[**Non-dégénérescence.**] On dit qu'un simplexe x est **non-dégénéré** s'il ne peut être écrit comme une image de l'application dégénérescence i.e on ne peut l'écrire $s_i(y) = x$. Autrement, on dit qu'il est **dégénéré**.

[**Ecriture de Simplexes dégénérés en Fonction d'un simplexe non dégénéré**] Un simplexe dégénéré est l'image par une composition d'applications s_i d'un unique simplexe non dégénéré.

Démonstration : Soit σ un simplexe dégénéré. Etant donné que σ est dégénéré, il existe un simplexe σ' et une application dégénérescence s tels que $\sigma = s\sigma'$. On peut ensuite réitérer le raisonnement sur σ' (s'il est dégénéré - dans le cas échéant, on a fini). Puis on peut itérer à nouveau le processus. Il faut donc voir que le processus s'arrête bien au bout d'un nombre fini d'étapes. Cela est évident car on abaisse de 1 la dimension du simplexe σ de départ et un simplexe ne peut avoir une dimension négative. Etant donné que l'on part d'un simplexe σ de dimension finie, on est bien sûrs d'obtenir $s_0, s_1, ..., s_n$ (indices arbitraires) et un simplexe non dégénéré σ' tels que :

$$\sigma = s_0 s_1 ... s_n \sigma'$$

Montrons enfin l'unicité du simplexe non dégénéré σ' obtenu : soient $\sigma_1 \neq \sigma_2$ deux simplexes tels que notre simplexe initial σ s'écrive comme une composition de dégénérescences appliquées à σ_1 et σ_2. Pour des questions de dimension, on a composé autant de fois la dégénérescence pour obtenir σ en partant de σ_1 et de σ_2.

En effet, chaque fois que l'on compose par l'application dégénérescence, on passe de Δ^n à Δ^{n-1} (pour un n quelconque ici), d'où le fait que l'on ait composé autant de fois la dégénérescence pour obtenir σ en partant de σ_1 et de σ_2.

On peut donc écrire :

$$s_0 ... s_n \sigma_1 = t_0 ... t_n \sigma_2$$

Avec $s_0, ..., s_n$ et $t_0, ..., t_n$ des applications dégénérescences - l'indice étant arbitraire. Or, d'après les axiomes que l'on a supposés pour les identités simpliciales, on peut écrire (en changeant l'ordre de la composition sur la deuxième ligne) :

$$\sigma_1 = TS\sigma_2 = S'T'\sigma_2$$

avec S, S' des compositions d'applications dégénérescences et T, T' des compositions d'applications faces. Or σ_1, σ_2 étant non dégénérés, on a nécessairement T' qui vaut l'identité et donc : $\sigma_1 = T'\sigma_2$. Cela revient à dire que σ_2 est une face de σ_1. Un raisonnement équivalent nous donnerait que σ_1 est une face de σ_2, ce qui est impossible à moins que $\sigma_1 = \sigma_2$. D'où l'unicité !

La meilleure manière de bien comprendre cette démonstration et plus généralement la notion de simplexe dégénéré ou non est de s'en rapporter à la définition correspondante dans $\mathscr{S}(X)$. Il apparaît alors qu'un simplexe dégénéré est un simplexe qui "abaisse la dimension" de son simplexe de départ, et dont toute l'information est comprise dans une seule de ces faces. L'écriture d'un simplexe dégénéré en tant que dégénérescence d'un unique simplexe non-dégénéré est la traduction de cette idée dans notre cadre ensembliste : toute "l'information" est contenue dans un unique simplexe non dégénéré.

2.3 Exemples d'ensembles Simpliciaux

Nous allons ici mentionner quelques exemples d'ensembles simpliciaux afin que le lecteur se familiarise avec cette nouvelle notion.

Ensemble Simplicial Associé au Simplexe Standard de Dimension n L'exemple le plus basique est celui du simplexe standard de dimension n, en tant qu'ensemble simplicial. On le note Δ^1. Nous allons le découvrir à travers l'exemple de $n = 1$.

Les ensembles $(\Delta^1_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont les combinaisons (avec répétition) de i éléments de $\{0, 1\}$, ordonnées. Plus explicitement, on a :

$$\Delta^1_0 = \{[0], [1]\}, \Delta^1_1 = \{[0, 0], [0, 1], [1, 1]\}, \Delta^1_2 = \{[0, 0, 0], [0, 0, 1], [0, 1, 1], [1, 1, 1]\}...$$

On généralise cela à des simplexes de dimension n en autorisant plus de nombres dans l'ensemble de départ. Les applications d_i et s_i sont définies ainsi : $d_i([x_0, x_1...x_n]) = [x_0, x_1...x_{i-1}, x_{i+1}...x_n]$, et $s_i([x_0, x_1...x_n]) = [x_0, x_1, x_{i-1}, x_i, x_i, x_{i+1}...x_n]$. On vérifie alors sans difficulté que ces applications munissent bien la suite des ensembles $(\Delta^n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'une structure d'ensemble simplicial.

Complexe simplicial associé Suivant cette construction, on peut l'étendre à tout complexe simplicial (ce qui nous donne un foncteur des complexes simpliciaux vers les ensembles simpliciaux) : si K est un complexe simplicial, construisons son ensemble simplcial $\tilde{K}$. On commence par considérer la suite d'ensembles $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constituée des simplexes standards élémentaires de dimension n contenus dans K. Cette suite d'ensemble possède naturellement des applications de prises de faces d_i, qui peuvent tout à fait se définir géométriquement : elles envoient un simplexe sur sa i-ème face, ce qui définit bien une application de $K_n \to K_{n-1}$. Pour les dégénérescences, on les ajoute de manière formelle : si (a_0, a_1, a_2) est un simplexe de dimension 2 de K, on ajoute alors toutes ses dégénérescences (a_0, a_0, a_1, a_2), (a_0, a_1, a_1, a_2), (a_0, a_1, a_2, a_2) à $\tilde{K}_3$. On fait cela pour tous les simplexes, et on définit l'application s_i comme pour un simplexe standard. On peut également vérifier que cela munit bien l'ensemble $\tilde{K}$ d'une structure d'ensemble simplicial.

Exemple de l'ensemble simplicial associé à $\mathscr{S}(X)$ Si X est un espace topologique, la suite indexée par n de ses chaînes singulières de dimension n définissent évidemment un ensemble simplicial, muni des applications d_i et s_i sur lesquelles nous nous sommes basés pour définir la notion même d'ensemble simplicial.

Ensemble simplicial libre. Il existe une autre construction accessible d'ensemble simplicial, comparable à celle d'un groupe libre pour un ensemble : on peut partir d'un ensemble quelconque E, noter E_n les mots de $n+1$ lettres de cet ensemble, et munir la suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'une structure d'ensemble simplicial.

[**Opérations élémentaires sur les mots**] Si $l_0 l_1 l_2 ... l_n \in E_n$, on définit les opérations suivantes :

$$d_i(l_0 l_1 l_2 ... l_n) = l_0 l_1 ... l_{i-1} l_{i+1} ... l_n$$

$$s_i(l_0 l_1 l_2 ... l_n) = l_0, l_1, ..., l_{i-1} l_i l_i l_{i+1} ... l_n$$

Par exemple, en partant de "lapin", on a s_0("lapin") = "llapin", puis $d_5 s_0$("lapin") = "llapi", puis $s_4 d_5 s_0$("lapin") = "llapii", etc...

On vérifie alors sans difficulté que les applications d_i et s_i munissent effectivement $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'une structure d'ensemble simplicial.

2.4 Point de Vue Catégorique sur la Définition

Nous donnons ici une définition alternative d'un ensemble simplicial, plus abstraite et catégorique, mais beaucoup plus succinte. Commençons par introduire la catégorie totalement ordonnée :

[**Catégorie totalement ordonnée**] On note $\widehat{\Delta}$ la catégorie dont les objets sont les ensembles $[0] = \{0\}$, $[1] = \{0,1\}$, $[2] = \{0,1,2\}$... totalement ordonnés par leur ordre naturel, et dont les morphismes sont les applications préservant l'ordre, c'est à dire les applications $f : [m] \to [n]$, vérifiant $i \leq j \Rightarrow f(i) \leq f(j)$.

Dans cette catégorie, on dispose des morphismes D_i et S_i qui correspondent aux applications élémentaires suivantes : pour tout $0 \leq i \leq m$ $D_i : [m] \to [m+1]$, $D_i(j) = j$ si $j < i$, et $D_i(j) = j+1$ si $j \geq i$. Cela correspond à "sauter" le point i. De manière similaire, $S_i : [m+1] \to [m]$, $S_i(j) = j$ si $j \leq i$, et $S_i(i+1) = i$ et $S_i(j) = j-1$ si $j > i+1$. Cette application consiste à "buter" sur l'élément i et à le recopier deux fois. Il y a deux observations fondamentales à faire sur ces morphismes :

[**Générateurs des morphismes de $\hat{\Delta}$**] Tout morphisme de $\hat{\Delta}$ s'écrit comme une composition d'applications D_i et S_i.

Preuve : Nous ne démontrons pas ce fait purement combinatoire, mais le lecteur est invité à tenter de trouver quelques décompositions sur des exemples.

La deuxième observation est que les relations de commutation vérifiées par les D_i et les S_i sont **exactement** les relations opposées de celles que l'on attend des relations dans les ensembles simpliciaux.

[**Propriété de Commutation dans $\hat{\Delta}$**]

$$\forall i < j : D_j D_i = D_i D_{j-1}$$

$$\forall i < j : S_j D_i = D_i S_{j-1}$$

$$S_i D_i = S_i D_{i+1} = id$$

$$\forall i > j+1 : S_j D_i = D_{i-1} S_j$$

$$\forall i \leq j : S_j S_i = S_i S_{j+1}$$

Preuve : C'est un fait combinatoire mais facile à vérifier. On notera que ces propriétés ne sont absolument pas un hasard : dans $\mathscr{S}(X)$, notre exemple canonique, les s_i et d_i agissaient à gauche, en précomposant (à droite !) par les D_i et les S_i qui se comportaient eux exactement comme dans Δ. Il est normal que les relations observées entre les d_i, s_i et les D_i, S_i soient opposées.

Cela permet donc de remplacer la définition que l'on a donnée initialement des ensembles simpliciaux par la définition suivante :

[**Ensemble simplicial (définition catégorique)**] Un ensemble simplicial est un foncteur contravariant $X : \hat{\Delta} \to \mathbf{Ens}$ (ou bien de manière équivalente un foncteur covariant $X : \hat{\Delta}^{op} \to \mathbf{Ens}$).

L'arrivée de la catégorie opposée trouve son origine dans l'opposition entre les relations de commutation trouvée dans $\hat{\Delta}$ et celles proposées pour définir un ensemble simplicial. Les applications d_i, et s_i dans la catégorie cible de notre foncteur sont les images des D_i^{op} et S_i^{op} (le foncteur s'étend alors immédiatement à toutes les applications de $\hat{\Delta}$, puisqu'on l'a défini sur des générateurs) et les ensembles de la suite sont les images de [0], [1]...

2.5 Les Ensembles Simpliciaux Comme une Catégorie

Maintenant que nous avons définis les objets "ensembles simpliciaux", nous pouvons en faire une catégorie en définissant des morphismes entre ensembles simpliciaux. Là aussi, c'est l'intuition géométrique qui nous guide pour en trouver une définition.

Commençons par redéfinir un morphisme de complexes simpliciaux $K \to L$.

[**Morphisme de complexe simplicial**] C'est une application continue f de |K| vers |L| qui envoie tous les sommets de K vers des sommets de L et telle que pour tout σ un simplexe de K : $f_{|\sigma}$ soit affine.

Dans un complexe simplicial, il suffit de définir un morphisme de complexe simplicial sur les sommets. En effet, si l'on considère un simplexe $\sum_{i=0}^{n} t_i v_i$, on a par linéarité :

$$f\left(\sum_{i=0}^{n} t_i v_i\right) = \sum_{i=0}^{n} t_i f(v_i)$$

Les morphismes de complexes simpliciaux (géométriques !) sont donc entièrement déterminés par l'image des sommets des simplexes. Cela donne déjà un point de vue plus combinatoire sur leur définition. Une autre remarque est la suivante :

Commutativité C'est un calcul classique de remarquer qu'un morphisme de complexe simplicial commute avec les applications de prises de face définies dessus. On définit donc de manière naturelle les morphismes d'ensembles simpliciaux de la manière suivante :

> [**Morphisme d'ensemble simplicial**] Soient X et Y deux ensembles simpliciaux. Un morphisme simplicial $f : X \to Y$ est la donnée d'applications $f_n : X_n \to Y_n$ qui commutent avec les applications de dégénérescence et de prise de face. Plus catégoriquement, cela équivaut à une transformation naturelle entre foncteurs $\Delta^{op} \to \mathbf{Ens}$ qui définissent X et Y.

On remarque alors facilement, par notre proposition sur les écritures des simplexes dégénérés en fonction d'un unique simplexe non-dégénéré, qu'un morphisme d'ensemble simplicial est caractérisé par son image des simplexes non dégénérés. On est dans une situation différente du cas des complexes simpliciaux : un morphisme n'est pas caractérisé par l'image des simplexes de dimension 0.

Pour donner des exemples, on peut citer qu'un morphisme de complexe simplicial induit un morphisme sur l'ensemble simplicial associé (ce qui complète la fonctorialité de notre construction de l'ensemble simplicial à partir d'un complexe simplicial donné).

Exemple : Soit K le complexe simplicial engendré par le 2-simplexe (v_0, v_1, v_2) et contenant les faces $(v_0, v_1), (v_1, v_2), (v_2, v_0)$ ainsi que les sommets v_0, v_1, v_2 et L le complexe simplicial composé du tétraèdre ainsi que de tous les sommets, arêtes, faces. Considérons le morphisme de complexe simplicial $f : K \to L$ qui inclut le 2-simplexe de K comme une face de L (disons sur les sommets notés (s_0, s_1, s_2).
On peut considérer les ensembles simpliciaux associés à ces complexes simpliciaux, engendrés par les simplexes non dégénérés [2] et [3]. Dans ces ensembles simpliciaux, f devient un morphisme d'ensemble simplicial qui vaut l'identité sur X_1, X_2, X_3 et n'est pas surjectif sur X_4. Il n'associe plus que les éléments 0, 1, 2, 3 entre eux de manière combinatoire.

Exemple : On peut considérer l'ensemble simplicial qui contient un seul point en dimension 0, noté $*$ et un seul simplexe non dégénéré en dimension 1 noté O. On peut alors obtenir deux morphismes simpliciaux de Δ_1 dans celui-ci : celui qui envoie $[0, 1]$ sur O, et le morphisme trivial qui envoie en toute dimension tout simplexe sur les dégénérescences successives de $*$. Ce sont deux morphismes distincts qui envoient tous deux tous les simplexes de dimension 0 sur $*$. Cela explicite d'autant plus pourquoi c'est l'image des simplexes non dégénérés qui compte plus que celle des simplexes de dimension 0.

La catégorie des ensembles simpliciaux contient bien d'autres objets, notamment les produits :

[**Produit d'Ensembles Simpliciaux**] Soient X et Y deux ensembles simpliciaux. On définit leur produit $X \times Y$ comme :

$$1.(X \times Y)_n = X_n \times Y_n = \{(x, y), x \in X_n, y \in Y_n\}$$

$$2.\text{Si } (x, y) \in (X \times Y)_n, \text{ alors : } d_i(x, y) = (d_i(x), d_i(y))$$

$$3.\text{Si } (x, y) \in (X \times Y)_n, \text{ alors : } s_i(x, y) = (s_i(x), s_i(y))$$

... et les coproduits.

[**Coproduit d'Ensembles Simpliciaux**] Soient X et Y deux ensembles simpliciaux. On définit leur coproduit $X \coprod Y$ comme :

$$(X \coprod Y)_n = X_n \coprod Y_n$$

...muni des applications d_i et s_i respectives de X et de Y (en fonction de l'ensemble d'appartenance de l'antécédent).

On peut montrer plus généralement que la catégorie des ensembles simpliciaux contient toutes les colimites.

3 Réalisation Géométrique des Ensembles Simpliciaux

Les ensembles simpliciaux sont des abstractions des complexes simpliciaux dans les ensembles. La realisation géometrique est une façon de revenir dans les espaces topologique en construisant un complexe simplicial à partir d'un ensemble simplicial.

3.1 Définition de la Réalisation Géométrique

[**Réalisation géometrique**] Soit X un ensemble simplicial. On munit chaque ensemble X_n de la topologie discrète et notons $|\Delta^n|$ le n-simplexe standard avec sa topologie standard. Alors la *réalisation* $|X|$ est donnée par :

$$|X| = \coprod_{n=0}^{\infty} X_n \times |\Delta^n| / \sim$$

Ou $\sim$ est une relation d'équivalence générée par les relations.

$$(x, D_i(p)) \sim (d_i(x), p) \text{ pour } x \in X_{n+1}, p \in |\Delta^n|$$

$$(x, S_i(p)) \sim (s_i(x), p) \text{ pour } x \in X_{n-1}, p \in |\Delta^n|$$

Avec D_i et S_i l'inclusion et collapse des faces induits sur le simplexe geometrique standard.

Pourquoi cette definition génère bien un complexe simplicial cohérent ? Déja X_n doit être pensé comme une collection de simplexes, $X_n \times |\Delta^n|$ est exactement un collection de simplexes disjoints, un pour chaque élément de X_n. Ensuite la relation $(x, D_i(p)) \sim (d_i(x), p)$ encode l'indentifaction des faces communes. Enfin, $(x, S_i(p)) \sim (s_i(x), p)$ supprime les simplexes dégénérés.

Explicitons un peu comment cette première relation permet de recoller les faces communes. d_i est une donnée de X, celle ci encode, quel sont les sous faces d'un élément de X_n. Prenons un élément $x \in X_n$ de X. Celui-ci est sensé representer une face de dimension n alors $d_0(x)$ est un élément de X_{n-1} qui représente une sous face de x. La relation que l'on étudie doit donc coller ces deux éléments. On voit que $\forall p \in |\Delta^n|$, donc tous les points du simplexe standard, $(x, D_i(p))$ est collé à $(d_i(x), p)$. Pour $n = 2$ on a l'identification suivante.

Figure 5 –

Les simplexes dégénérés, eux, sont supprimés. Par exemple, dans le simplexe standard, considérons me simplexe dégénéré $y = [0, 1, ..., j, j, ..., n] \in X_{n+1}$ alors $y = s_j(x)$ avec $x = [0, 1, ..., n] \in X_n$ non dégénéré. Et on a bien tous les points $p \in \Delta^{n+1}$, $(x, S_i(p)) \sim (y, p)$. Donc y vu comme un un $(n + 1)$-simplexe est collapsé sur x un n-simplexe non dégénéré.

3.2 Des Exemples de Réalisation Géométriques

Etudions ensembles deux exemples détaillés pour se convaincre de "l'effet" des deux relations définies plus tôt. Le premier sera celui du simplexe standard de dimension 0, on verifiera ainsi que seul les simplexes non dégénérés ont une importance pour la réalisation géometrique. Dans le second, on entrera dans la détaille de la relation qui identifie les faces, ainsi, on considèrera un ensemble simpliciale sans dégénérescence que l'on construira à partir d'un complexe simplciale et on vérifiera que la relation d'identification agit comme convenue.

3.2.1 Exemple du 0-simplex

Comment se représente le 0-simplexe vu comme un ensemble simpliciale ? Notons le X. Alors on a Nécéssairement $X_0 = \{[0]\}$ car on a un et un seul élément de dimension 0, et qui suffit a representé le 0-simplexe. Les autres ensembles X_i devrait donc à priorie être vide d'information, cela se traduit par le fait qu'ils ne contiennent pas de simplexe non-dégénéré. Cependant, pour être un ensemble simpliciale les fonctions s_i et d_i doivent pouvoir être définies. Les ensembles X_i ne peuvent donc pas être vide. Ils contiennent ds simplexe dégénérés. La fonction s_0^0 qui est définie de façon unique puisqu'il y a qu'un élément dans X_0 : $s_0^0([0]) = y \in X_1$. On a alors nécéssairement $d_0(y) = [0]$ et $s_1(y) = [0]$. D'où, $X_1 = \{[0, 0]\}$. On voit ainsi que l'ensemble simpliciale representant le 0-simplexe le plus simple (dans le cas du 0-simplexe, c'est le seul) est le suivant :

$$X_0 = \{[0]\}$$

$$X_1 = \{[0, 0]\}$$

$$X_2 = \{[0, 0, 0]\}$$

$$\vdots$$

$$X_n = \{[0, ..., 0]\}$$

$$\vdots$$

En dimension 1, on a un seul simplexe $[0, 0] = s_0([0])$. la relation de recollemement nous dit d'identifier, pour chaque point $p \in |\Delta^1|$, les éléments $([0, 0], p) \sim ([0], S_0(p))$ avec $S_0(p) = v \in |\Delta^0|$. Ainsi le $|\Delta^1|$ est collapsé sur le sommet. Ensuite, puisque chaque point du 2-simplexe $([0, 0, 0], |\Delta^2|)$ est identifié sur un point de $([0, 0], |\Delta^1|)$, et ainsi de suite, on voit que tous les simplexes sont collapsés sur un seul sommet. $|[0]|$ est un point.

3.2.2 Exemple détaillé de d'itentification des faces en dimension 2

Concentrons nous desormais sur la première relation, celle censée recoller les faces sur leurs sous-faces communes. Nous avons vu avec l'exemple précédent que nous n'avions pas besoin de nous soucier des simplexes dégénéré en ce qui concerne la réalisation géometrique car ceux-ci sont collapsé sur leur unique antécédant non-dégénéré. Considerons donc l'ensemble simpliciale X suivant, on explicite donc uniquement les simplexe non-dégénéré.

$$X_0 = \{a, b, c, d\}$$

$$X_1 = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon\}$$

$$X_2 = \{u, v\}$$

$$X_{i>2} = \{\}$$

Les fonctions d_i seront explicitées plus tard.
Voici donc $\coprod_{n=0}^{\infty} X_n \times |\Delta^n|$.

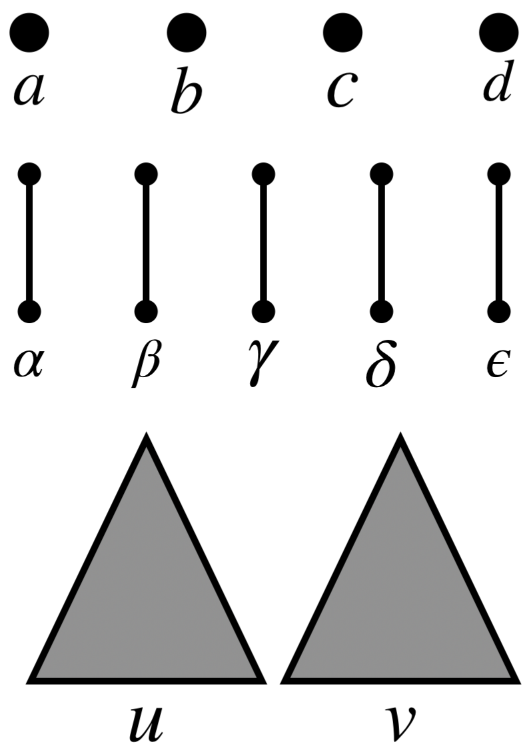

FIGURE 6 – $\coprod_{n=0}^{\infty} X_n \times |\Delta^n|$

Avec les fonctions d_i on peut réagencer les simplexes de cette manière.

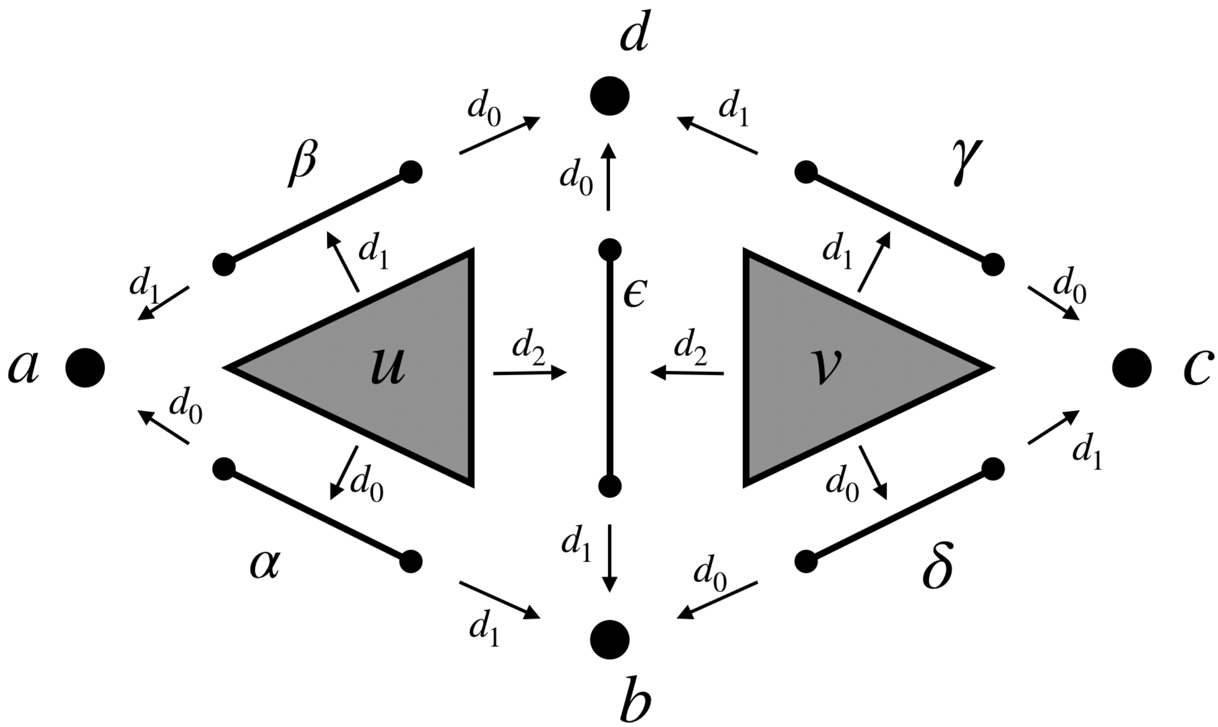

Figure 7 – Explicitaion des fonctions d_i

Etudions spécifiquement le recollement de la face u et v via l'arrète ϵ. Pour tous point $p \in |\Delta^1|$ on a $(u, D_2(p) \sim (d_2(u), p)$ et $(v, D_2(p)) \sim (d_2(v), p)$; or $d_2(u) = \epsilon = d_2(v)$. On a donc :

$$(u, D_2(p)) \sim (\epsilon, p) \sim (v, D_2(p))$$

Cela s'illustre ainsi.

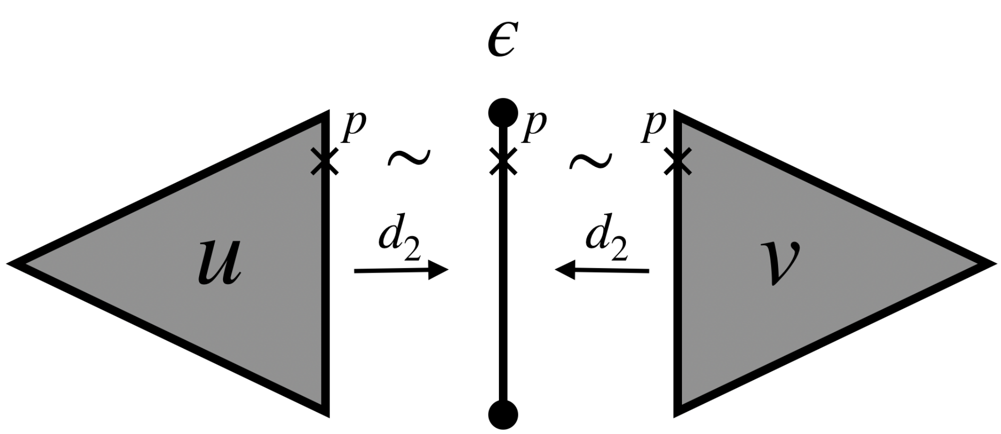

Figure 8 – Identifiaction des sous-faces communes de u et v

On comprend donc bien que l'action de la première relation sur u, v et ϵ via d_2 donnera dans la réalisation géométrique un recollement des faces sur l'arrète. Ainsi la réalisation géometrique de X est le complexe simplicial suivant.

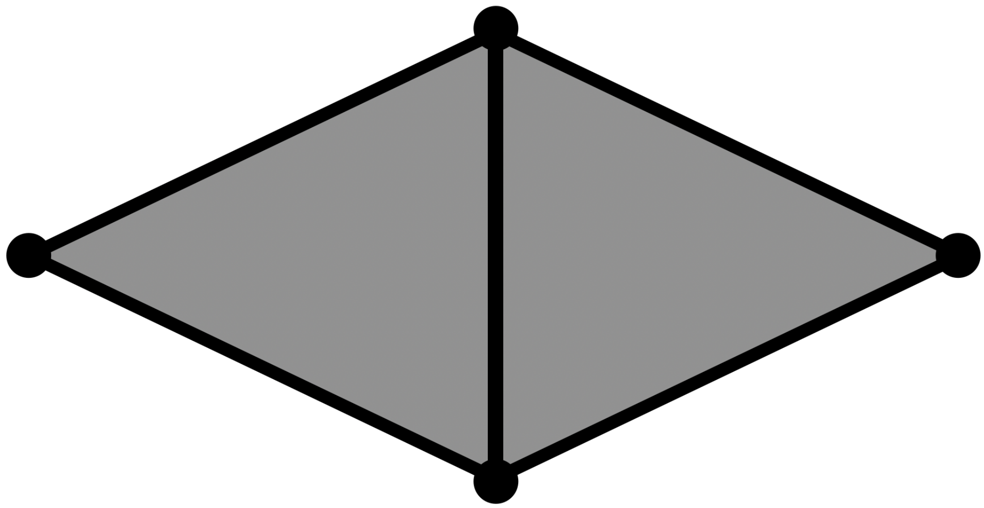

FIGURE 9 – Réalisation Géometrique de X

3.3 Fonctorialité de la Réalisation Géométrique

Nous avons ici défini une application, qui part d'un ensemble simplicial et l'envoie sur un espace topologique. Cette analogie peut être complétée en un foncteur, qui est défini sur les applications de la manière suivante : dès que l'on a un morphisme d'ensembles simpliciaux, qui à tout simplexe fait correspondre un simplexe de dimension identique et qui commute à la prise de face et à la dégénérescence, on peut définir une application continue entre leurs réalisations géométriques de la manière suivante.

Si on note X^1 et X^2 nos deux ensembles simpliciaux et f notre morphisme, on définit une première une application $\tilde{f}$ entre les ensembles $\coprod_{n=0}^{\infty} X_n^1 \times |\Delta^n|$ et $\coprod_{n=0}^{\infty} X_n^2 \times |\Delta^n|$, qui pour tout i dans $\mathbb{N}$, et pour tout $x_n^i \in X_n^i$ est l'identité entre le simplexe $x^i \times |\Delta^i|$ et $f(x^i) \times |\Delta^i|$. On vérifie alors sans difficulté que **parce que f est un morphisme d'ensemble simplicial**, l'application $\tilde{f}$, composée avec la projection canonique de $\coprod_{n=0}^{\infty} X_n^2 \times |\Delta^n|$ sur $\coprod_{n=0}^{\infty} X_n^2 \times |\Delta^n|/\sim$ passe elle-même au quotient pour la relation d'équivalence sur X_1, pour finalement donner une application continue de $|X_1| \to |X_2|$. On vérifie alors que cette application entre morphismes passe à la composition. Ainsi l'application de réalisation géometrique $|.|$ peut être considéré comme un foncteur de la catégorie des ensembles simpliciaux vers **Top**.

3.4 Adjonction de la Réalisation Géométrique

D'un point de vu plus catégorique, on le résultat intéressant suivant.

[**Adjonction de la Réalisation Géométrique et du Foncteur d'Ensemble Singulier**] Si X est un ensemble simplicial et Y un espace topologique, alors on dispose d'une bijection naturelle :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(|X|, Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{\Delta}}(X, \mathscr{S}(Y))$$

Autrement dit, le foncteur de réalisation géométrique $|.|$ est adjoint au foncteur d'ensemble singulier $\mathscr{S}(.)$.

Preuve : Pour prouver ce théorème il faut considérer les deux morphismes suivants $\Psi : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(|X|, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{\Delta}}(X, \mathscr{S}(Y))$ *et* $\Phi : \mathrm{Hom}_{\mathbf{\Delta}}(X, \mathscr{S}(Y)) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(|X|, Y)$ *définis de la façon suivante :*

Pour $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{\Delta}}(X, \mathscr{S}(Y))$*, qui attribue a chaque n-simplex* $x \in X$ *une fonction continue* $\sigma_x : |\Delta^n| \to Y$*,* $\Phi(f)$ *est la fonction continue que agit sur le simplexe* $(x, |\Delta^n|) \in |X|$ *en applicant* σ_x *a* $|\Delta^n|$*. On vérifie que la fonction* $\Phi(f)$ *est continue par le fait que* f *est un morphisme d'ensemble simplicial, qui associe donc aux bords communs de deux simplexes différents le même simplexe singulier.*

Pour $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(|X|, Y)$*, la restriction de* g *a un simplexe non-dégénéré* $(x, |\Delta^n|)$ *donne une fonction continue* $|\Delta^n|$ *et par conséquent un élément de* $\mathscr{S}(Y)_n$*. Si* $(x, |\Delta^n|)$ *represente un simplexe dégénéré alors on la précompose avec la fonction de collapse appropriéé de* $|\Delta^n|$ *dans* $|X|$*.*

On verifie ensuite que ces deux fonctions sont réciproques. Regardons par exemple $\Phi \circ \Psi$*.* $\Psi(g) : X \to \mathscr{S}(Y)$ *avec* $\Psi(g)(x) = g|_{(x,|\Delta^n|)}$ *donc* $\Phi \circ \Psi(g) : |X| \to Y$ *avec* $\Phi \circ \Psi(g)(x) = f$ *tel que* f *agit continuement sur* $|X|$ *et que* $f|_{(x,|\Delta^n|)} = g|_{(x,|\Delta^n|)}$ *donc finalement* $f = g$ *d'où* $\Phi \circ \Psi = \mathrm{Id}$*. Le même constat pourrait être fait pour* $\Psi \circ \Phi$*.*

Ce théorème donne une correspondance entre ensembles simpliciaux et géométrie d'une autre nature : on comprend que le fait de passer d'un ensemble simplicial à sa réalisation géométrique est la notion adjointe de celle permettant de passer d'un espace topologique à son ensemble singulier. Une adjonction n'est pas tout à fait une équivalence de catégories, mais c'est déjà une correspondance forte : cela suggère donc que les ensembles simpliciaux pourraient être équivalents à une certaine sous-catégorie des espaces topologiques. Et en effet, c'est le cas. Les résultats correspondants seront énoncés à la fin de cet article.

3.5 Réalisation Géométrique et produits

En ce qui concerne les relations entre produit d'ensembles simpliciaux et réalisation géometrique on peut citer le resultat suivant, très satisfaisant bien que sa démonstration soit très technique.

[**Produits et Réalisation Géométrique**] Si X et Y sont des ensembles simpliciaux et que l'un des deux est fini, ou bien que les deux sont dénombrables, alors la réalisation géométrique de leur produit est homéomorphe au produit de leur réalisation géométrique.

Ce résultat est satisfaisant car il démontre un avantage de la théorie des ensembles simpliciaux et de leurs réalisations géométriques par rapport à celle des complexes simpliciaux : si on considère deux complexes simpliciaux, leur produit n'a pas de structure évidente de complexe simplicial. Ici, c'est le cas : deux ensembles simpliciaux ont une structure de produit naturelle, qui est de plus compatible avec la structure de produit de la réalisation géométrique.

4 Objets Simpliciaux dans d'autres Catégories

4.1 Définition des Objets Simpliciaux dans une Catégorie

Rappelons le point de vue catégorique proposé pour la définition des ensembles simpliciaux, à savoir un foncteur contravariant de la catégorie appelée Δ (ou de façon équivalente, un foncteur covariant de Δ^{op}) vers la catégorie des ensembles.

$$F : \Delta^{op} \to \mathbf{Ens}$$

On peut observer que cette définition donne lieu à de nouvelles généralisations : pourquoi ne pas remplacer la catégorie **Ens** par une autre ? On obtient alors la définition d'un **objet simplicial** dans une catégorie quelconque notée $\mathcal{C}$. Formellement, il s'agit d'un foncteur contravariant de la catégorie Δ dans la catégorie de notre choix $\mathcal{C}$.

$$F : \Delta^{op} \to \mathcal{C}$$

Plus concrètement, c'est simplement la donnée d'une suite d'objets de la catégorie $\mathcal{C}$, notés $(o_i)_{i\in\mathbb{N}}$, avec pour tout $n > 0$, et $0 \leq j \leq n$ des morphismes $d_j : o_n \to o_{n-1}$ ainsi que pour tout $n \geq 0$, des morphismes $s_j : o_n \to o_{n+1}$ qui vérifient les relations énoncées dans la définition des ensembles simpliciaux.

De cette manière, on peut facilement imaginer un espace topologique simplicial, un complexe de chaîne simplicial, un ensemble simplicial simplicial (et même un ensemble simplicial simplicial simplicial, et ainsi de suite). Obtenir ces structures n'est toutefois pas trivial : nous exposerons une approche pour obtenir fidèlement des monoïdes unitaires commutatifs simpliciaux à partir de n'importe quel monoïde commutatif unitaire. Cela nous donnera donc une bonne source de groupes simpliciaux, anneaux simpliciaux, etc.

4.2 Exemples

Donnons quelques exemples pour rendre ce concept un petit peu plus concret.

4.2.1 Exemples Simples

On peut déjà définir dans n'importe quelle catégorie non vide l'exemple parfaitement trivial donné par le choix de n'importe quel objet, et son morphisme identité pour tous les morphismes d_i et s_i en tout ordre. Il n'est pas très difficile de vérifier que cela vérifie bien les bons critères.

Un autre exemple assez direct vient des chaînes singulières : si X est un espace toplogique, la succession des espaces $\mathbf{Hom}(|\Delta^n|, X)$ donne un espace topologique simplicial pour la topologie compacte ouverte : il est alors immédiat de comprendre pourquoi les applications d_i et s_i sont alors des applications continues pour la topologie compacte-ouverte, puisqu'elles consistent en une post-composition par certaines applications, qui sont coninues pour cette topologie. Pour une approche intuitive, si deux chaînes singulières sont "proches", leurs faces sont "proches" également.

Dans ce qui précède, on pourrait en fait remplacer la suite des espaces $(|\Delta^n|)_{n\in\mathbb{N}}$ par n'importe quel espace topologique cosimplicial ($(|\Delta^n|)_{n\in\mathbb{N}}$ en est un par la donnée des applications D_i et S_i mentionnées en introduction).

4.2.2 Nerf d'une Petite Catégorie

Le premier exemple "simple" d'ensembles simpliciaux non triviaux apparaît quand on considère le **nerf d'une petite catégorie**. On rappelle que, étant donné une petite catégorie $\mathcal{C}$, son **nerf** $N(\mathcal{C})$ est une suite d'ensembles $N(\mathcal{C})_0, N(\mathcal{C})_1$ et plus généralement $N(\mathcal{C})_i$ pour $i \in \mathbb{N}$, définis ainsi :

— $N(\mathcal{C})_0$ est l'ensemble des objets de $\mathcal{C}$.
— Pour tout $n > 0$, les objets de $N(\mathcal{C})_i$ sont les suites de n-uplets ordonnés de morphismes composables dans $\mathcal{C}$.

On peut alors définir sur le nerf d'une telle catégorie des opérateurs de dégéneres-cence et de prise de face. On pose pour cela (en notant pour tout i un morphisme f_i allant d'un objet x_i vers un objet x_{i+1}) :

$$\text{Pour } N(\mathcal{C})_0, s_0(x) = (\mathrm{Id}_x)$$
$$\text{Pour } N(\mathcal{C})_1 \text{ et } f : x \to y, d_0(f) = y, d_1(f) = x$$
$$\text{Pour } N(\mathcal{C})_n, n > 1, 0 < i < n, d_i(f_1, f_2, ..., f_n) = (f_1, ...f_i f_{i+1}...f_n)$$
$$\text{Pour } i = 0, d_i(f_1, f_2, ..., f_n) = (f_2, ..., f_n)$$
$$\text{Pour } i = n, d_i(f_1, f_2, ..., f_n) = (f_1, ..., f_{n-1})$$
$$\text{Pour } N(\mathcal{C})_n, n \geq 1, 0 < i \leq n, s_i(f_1, f_2, ..., f_n) = (f_1, f_2...f_i, \mathrm{Id}_{x_{i+1}}, f_{i+1}...f_n)$$
$$\text{Pour } i = 0, s_i(f_1, f_2, ..., f_n) = (\mathrm{Id}_{x_1}, f_1, f_2...f_n)$$

Il n'est alors pas difficile de vérifier que l'on a bien défini de cette manière un ensemble simplicial. Il est satisfaisant de constater que cette définition étant posée, nous disposons à présent d'une interface entre toute catégorie et les espaces topologiques. Plus précisément, nous avons ici défini un foncteur des petites catégories dans les ensembles simpliciaux, que l'on peut ensuite composer avec notre foncteur de réalisation géométrique défini précédemment.

4.2.3 Nerf d'un Monoïde Unitaire

Nous allons passer du langage des catégories à celui des monoïdes. Plus précisément, nous allons rappeler en quoi il est possible de voir tout monoïde unitaire comme une catégorie, puis en quoi lui appliquer la construction précédente nous donne une suite d'ensembles que l'on peut naturellement munir d'une loi qui lui confère une structure de monoïde simplicial.

Rappelons donc qu'étant donné un monoïde unitaire simplicial M, on peut lui associer une catégorie ayant un unique objet $*$, et avec $\mathrm{Hom}(*, *) = M$. Plus précisément, la catégorie possède exactement un morphisme par élément de M, et la loi de composition des morphismes est donnée par la loi sur M : l'hypothèse que M soit un monoïde est exactement la condition pour que la loi sur les morphismes soit associative, et le fait qu'il soit unitaire donne un élément valable à choisir comme Id_*.

Une fois cela construit, on définit le nerf de ce monoïde unitaire comme le nerf de sa catégorie associée. Plus explicitement, on obtient une suite d'ensembles $N(M)_i, i \in \mathbb{N}$, dont les éléments de $N(M)_0$ sont réduits à l'ensemble $\{*\}$, ceux de $N(M)_i$ pour $i \geq 1$ sont les n-uplets d'éléments de M, et où l'on a les lois de dégénérescence et de prises de faces suivantes (en notant e l'élément neutre du monoïde, et m_i ses éléments, et $m_i \cdot m_j$ la loi de composition) :

$$\text{Pour } N(M)_0, s_0(*) = (e)$$

$$\text{Pour } N(M)_1 \text{ et } m \in M, d_0(m) = d_1(m) = *$$

$$\text{Pour } N(M)_n, n > 1, 0 < i < n, d_i(m_1, m_2, ..., m_n) = (m_1, ..., m_i \cdot m_{i+1} ... m_n)$$

$$\text{Pour } i = 0, d_i(m_1, m_2, ..., m_n) = (m_2, ..., m_n)$$

$$\text{Pour } i = n, d_i(m_1, m_2, ..., m_n) = (m_1, ..., m_{n-1})$$

$$\text{Pour } N(M)_n, n \geq 1, 0 < i \leq n, s_i(m_1, m_2, ..., m_n) = (m_1, m_2 ... m_i, e, m_{i+1} ... m_n)$$

$$\text{Pour } i = 0, s_i(m_1, m_2, ..., m_n) = (e, m_1, m_2 ... m_n)$$

On peut alors remarquer que dans ce cadre, **si M est abélien, on peut considérer alors $N(M)_i$ lui-même comme un monoïde unitaire**, trivialement isomorphe à M^i avec la loi produit. Et alors les d_j et les s_j sont trivialement des morphismes de monoïdes unitaires abéliens, correspondant à des projections ou bien à des injections évidentes. On a donc obtenu ainsi une manière de faire de tout monoïde unitaire un objet simplicial dans la catégorie des monoïdes unitaires. Si c'est un groupe (abélien), on obtient un groupe (abélien) simplicial, si c'est un anneau, on obtient un anneau simplicial, si c'est un espace vectoriel, on obtient un espace vectoriel simplicial, et ainsi de suite.

4.2.4 Groupes Abéliens Simpliciaux, Complexes de Chaîne de Groupes Abéliens et Théorème de Dold-Kan

Un cas particulier sur lequel nous allons nous concentrer pour quelques lignes est celui des groupes abéliens simpliciaux, et ce pour une raison particulière : le théorème de Dold-Kan, présenté ci-dessous.

> [**Théorème de Dold-Kan**] La catégorie des groupes abéliens simpliciaux est naturellement équivalente à la catégorie des complexes de chaîne de groupes abéliens.

Autrement dit, il existe une manière naturelle de faire de tout groupe abélien simplicial un complexe de chaîne et réciproquement, et ce sans faire de choix. Nous donnons ci-dessous quelques éléments de démonstration :

Soit $C = (C_i)_{i \in \mathbb{N}}$ un complexe de chaînes. Pour en faire un groupe abélien simplicial, nous disposons déjà, en quelques sortes, d'un opérateur différentielle qui pourrait nous donner une forme de "prises de faces". Pour les dégénérescences, nous allons les ajouter formellement.

Cela se traduit rigoureusement ainsi : on définit le groupe abélien simplicial KC, qui en degré n, vaut

$$\bigoplus_{p=0}^{n} \bigoplus_{s=s_{i_p}s_{i_{p-1}}...s_{i_1}} (C_{n-p}, s)$$

C'est une somme directe finie de groupe abéliens, qui contient en facteur le groupe C_n, mais aussi les groupes C_{n-p}, pour $0 \leq p \leq n$, que l'on indexe par des dégénérescences formelles $s = s_{i_p}s_{i_{p-1}}...s_{i_1}$ avec $0 \leq i_1 \leq ... \leq i_p \leq n$, où l'on a toujours $i_j \in [0, j]$ et où l'on quotiente par les dégénérescences dont la composée dans Δ est identique. Les facteurs s indiquent en quelques sortes les chemins de dégénerescence qui ont été suivis pour passer de C_{n-p} à C_n.

On définit alors les lois suivantes : si $d_i s_a = s_b$, alors d_i envoie identiquement pour tout p, (C_{n-p}, s_a) sur (C_{n-p}, s_b). Autrement, elle est nulle. Si $d_i s_a = s_b d_0$, alors d_i envoie (C_{n-p}, s_a) sur (C_{n-p-1}, s_b) par l'opérateur ∂^{n-p}. Autrement, elle est nulle. Si $d_i s_a = s_b d_j$, avec $j > 0$ l'opérateur d_i vaut 0 sur (C_{n-p}, s_a). Enfin, si $s_i s_a = s_b$, l'opérateur s_i envoie identiquement (C_{n-p}, s_a) sur (C_{n-p}, s_b) et vaut 0 ailleurs.

On vérifie alors que ces lois définissent de manière unique une structure d'ensemble simplicial sur C. Pour la loi de groupe abélien, elle est induite par les sommes directes. Et il est clair que d_i et s_i sont partout des morphismes de groupes.

Maintenant, soit $G = (G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un groupe abélien simplicial. On peut lui associer un complexes de chaîne NG de groupes abéliens de la manière suivante : on pose $(NG)_i$ le sous-groupe de G_i correspondant à $\cap_{1\leq i\leq n} Ker\, d_i$, et on pose comme différentielle l'opérateur d_0. Il est bien défini, étant donné que pour tout $i > 0$, $d_i d_0 = d_0 d_{i-1}$ qui vaut toujours 0 si l'espace de départ est dans le Ker des d_i pour $i \neq 0$. Le seul cas litigieux est le cas $i = 1$, qui est résolu grâce à la relation $d_0 d_0 = d_0 d_1$. Cette relation nous permet également de voir que le carré de la différentielle que est bien nul.

On a défini des foncteurs N et K de la catégorie des groupes abéliens simpliciaux vers les complexes de chaînes de groupes abéliens et vice et versa. Il reste à montrer que KN et NK sont tous deux naturellement équivalents aux foncteurs identité de leurs catégories respectives, preuves que nous omettons car très techniques (et citées comme "not difficult" par Curtis dans [1]. le lecteur est invité à essayer de prouver ce fait et d'en évaluer par lui-même la difficulté).

Ce théorème sert de première justification à l'étude des ensembles simpliciaux abstraits, en fournissant un premier exemple de passerelle entre différents domaines des mathématiques qu'ils proposent. Nous en verrons d'autres de nature plus topologique quand nous introduirons la théorie de l'homotopie des ensembles simpliciaux.

Autre remarque : dans cette construction, on aurait pu remplacer le foncteur N par un autre foncteur, à savoir celui qui envoie un groupe abélien simplicial sur le complexe de chaînes dont le groupe abélien sous-jacent en degré n correspond au même ensemble que l'ensemble de degré n de l'ensemble simplicial de départ. L'opérateur de différentielle est alors donné par $x \mapsto \sum_{i=0}^{n}(-1)^n d_i(x)$, dont on peut vérifier par un calcul classique que le carré est nul. Si G est le groupe simplicial de départ, on appelle ce complexe CG. C'est en fait le même qui permet de passer de l'ensmeble simplicial naturel formé par des chaînes singulières à son complexe de chaînes associé !

Le remplacement est possible car l'inclusion $NG \to CG$ est un quasi-isomorphisme (voir [4]).

5 Complexes de Kan

Nous introduisons ici la notion de complexes de Kan : ce sont des ensembles simpliciaux d'un intérêt particulier pour la théorie de l'homotopie que nous allons développer dans les deux chapitres qui suivent. Nous commençons par justifier leur introduction avant de la donner rigoureusement. Nous donnons ensuite des exemples et des contre-exemples classiques d'objets étant, et n'étant pas des complexes de Kan. Puis nous l'appliquerons à la théorie de l'homotopie entre applications.

5.1 La Nécessité des Complexes de Kan pour une théorie de l'Homotopie

La manière la plus naturelle de définir l'homotopie dans le cadre des ensembles simpliciaux serait la suivante : si K et L sont deux ensembles simpliciaux, f et g deux morphismes entre K et L, on dit que $F : I \times K \to L$ (où I est le simplexe fondamental Δ^1 comme défini en partie 1) est une **homotopie** de f vers g si $F([0], \cdot) = f(\cdot)$ et $F([1], \cdot) = g(\cdot)$, où $[0]$ et $[1]$ désignent les dégénérescences successives (en fonction de la dimension) des simplexes de dimension 0 correspondant à 0 ou à 1.

Si l'on essaie de définir une théorie de l'homotopie dans les ensembles simpliciaux en toute généralité, un problème va rapidement se poser : on arrivera pas à faire de l'homotopie une relation d'équivalence entre les applications. Une des raisons en est que la définition intuitive que l'on voudrait donner aux composantes connexes par arcs dans les ensembles simpliciaux tombe en défaut par rapport à ce qu'il se passe dans les espaces topologiques. La solution à ce problème sera la définition des complexes de Kan, que l'on va introduire dans la partie suivante. Nous formaliserons ce problème et détaillerons sa résolution.

5.2 Définition des Complexes de Kan

Un complexe de Kan est un ensemble simplicial vérifiant l'une des deux propriétés équivalentes, que l'on appelle **condition d'extension de Kan**.

On définit le **cornet** n, k, et l'on note Λ_k^n le simplexe engendré par les toutes les faces du simplexe fondamental Δ_n, auquel on a retiré le simplexe principal $[0, 1, 2, ..., n]$ ainsi que la k-ième face de dimension $n-1$ de ce simplexe (soit $[0, 1, 2, ..., k-1, k+1, ...n]$). De manière équivalente, c'est l'ensemble des simplexes de $[\Delta_n]$ qui ne contiennent pas tous les entiers entre 0 et n, et qui ne contiennent pas tous les entiers sauf k.

[**Condition d'Extension de Kan**] Soit X un ensemble simplicial. La **condition d'extension de Kan** est l'une des deux propriétés équivalentes suivantes :

1. Tout morphisme d'ensemble simplicial $\Lambda_k^n \to X$ peut être étendu en un morphisme d'ensemble simplicial de $\Delta_n \to X$.
2. Pour toute collection de simplexes de dimension $n-1$, $x_0, x_1...x_{k-1}, x_{k+1}, ..., x_n$ vérifiant pour tout $i < j$ $i \neq k, j \neq k$, $d_i x_j = d_{j-1} x_i$, alors il existe un simplexe x de dimension n tel que $d_i x = x_i$ pour tout $i \neq k$.

Montrons que l'on a bien équivalence entre les deux définitions. Supposons que l'on ait la première, et donnons-nous une collection de $n-1$ *simplexes vérifiant la condition* (2)*. Cette condition est exactement la condition requise pour que l'on puisse définir un morphisme de complexe simplicial* $\Lambda^n_k \to X$ *en assignant à* $d_i[0,1....n]$*, pour* $i \neq k$*, le simplexe* x_i*. On peut alors étendre ce morphisme en un morphisme dont l'ensemble de départ est* Δ_n*. L'image du simplexe* $[0,1....n]$ *donne exactement le* x *recherché.*

Réciproquement, si l'on a la deuxième condition, un morphisme $f : \Lambda^n_k \to X$ *donne exactement, par l'image des* $d_i[0,1....n]$ *pour* $i \neq k$*, une collection de vecteurs* x_i*,* $i \neq k$*, vérifiant la condition* (2)*. On peut alors prolonger ce morphisme* f *en un morphisme défini sur* Δ_n *en posant* $f([0,1....n]) = x$*.*

Cette condition, un petit peu particulière, dit que l'on peut en quelques sortes "remplir" tout cornet par un simplexe de dimension supérieure. Il faut qu'il y ait "assez" de simplexes pour le faire. On vérifiera sans difficulté que les complexes de Kan forment une sous-catégorie de la catégorie des ensembles simpliciaux.

5.3 Exemples et Contre-Exemples

5.3.1 Contre-Exemples

Cette définition peut sembler déconcertante à première vue, par le fait suivant :

[**Complexes Simpliciaux et Complexes de Kan**] Un ensemble simplicial dérivé d'un complexe simplicial (géométrique) dont la dimension minimale est supérieure ou égale à deux n'est jamais un complexe de Kan.

Un tel complexe simplicial contient nécessairement un simplexe de dimension 2*, que l'on peut noter* $[a,b,c]$ *(de façon ordonnée). Prendre* $x_1 = [b,b]$ *et* $x_0 = [a,b]$ *donne deux simplexes vérifiant la condition de recollement de Kan pour* $k = 2$ *(la deuxième dans la définition de la condition de Kan), car* $d_0(x_1) = d_0(x_0) = b$*. Un simplexe qui vérifierait* $d_i x = x_i$ *aurait alors nécessairement la forme* $[b,a,b]$*, ce qui contredirait l'ordre des sommets.*

La condition précédente n'est pas optimale, la démonstration montre que l'on a pas un complexe de Kan dès que l'on a deux segments de la forme $[a,b]$, $[b,c]$. En particulier, le simplexe fondamental de dimension supérieure ou égale à 2 n'est pas un complexe de Kan.

On pourrait penser qu'au niveau des catégories, cela se passe mieux, étant donné que dès que l'on a deux morphismes, on a également leur composée (qui pourrait jouer le rôle de "remplissage"). Mais il n'en est rien :

[**Catégories et Complexes de Kan**] L'ensemble simplicial associé à la catégorie suivante :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop left, "1_A"] \arrow[r, "f"] & B \arrow[loop right, "1_B"] \end{tikzcd}$$

n'est pas un complexe de Kan.

On reprend l'idée de la preuve précédente, en prenant $x_0 = f, x_1 = 1_A$. Ces deux simplexes ayant même ensemble de départ, ils vérifient bien la condition de recollement. Mais s'il existait un 2-simplexe f_1, f_2 ayant pour première face f et pour deuxième face 1_A, cela signifierait que l'on aurait $f_1 = f$ et $f_1 \circ f_2 = 1_A$. Or c'est impossible car f n'est pas inversible.

Cette preuve montre déjà que si l'ensemble simplicial associé à une catégorie est un complexe de Kan, alors la catégorie est nécessairement un groupoïde (tous les morphismes sont inversibles). Nous verrons dans la section suivante que c'est en fait une condition suffisante. Cela impliquera notamment que les seuls monoïdes unitaires simpliciaux qui sont des complexes de Kan sont les groupes simpliciaux.

5.3.2 Exemples

Passons maintenant à des exemples rassurants (et particulièrement éclairants !) d'ensembles simpliciaux classiques qui sont des complexes de Kan. On propose au lecteur de vérifier lui-même que le complexe simplicial comportant un seul point en dimension 0 et ne comportant que ses dégénérescences dans les dimensions supérieures est un complexe de Kan - le morphisme constant est le seul remplissage valide et convient parfaitement. L'exemple le plus capital pour la suite que nous traiterons est le suivant :

> [**Homologie Singulière et Complexes de Kan**] Soit X un espace topologique. Alors $\mathscr{S}(X)$, l'ensemble des chaînes singulières associé à X, est un complexe de Kan.

En effet, supposons que l'on dispose d'un morphisme f de Λ_0^n vers $\mathscr{S}(X)$. Nous allons définir algébriquement la complétion de ce morphisme en un morphisme $\tilde{f}$ de Δ_n vers $\mathscr{S}(X)$, puis nous en donnerons une interprétation géométrique.

Nous allons d'abord définir $\tilde{f}$ sur la face 0 du simplexe Δ_n : cela consiste en la définition d'un simplexe singulier $\sigma_0 : |\Delta_{n-1}| \to X$, qui coïncide sur les bords avec les $d_i f$ pour $i > 0$. Pour cela, on considère tout point $(x_0, ..., x_{n-1})$ comme un point $(0, x_1, ..., x_n)$ de $|\Delta_n|$. On prend alors le plus petit $t \geq 0$ tel que l'une des coordonnées du point $(t, x_1 - \frac{t}{n}, ..., x_n - \frac{t}{n})$ soit nulle. Cela donne un point y d'une autre face j, de $|\Delta_n|$, (qui correspond à l'intersection de la droite orthogonale à la face 0 de $|\Delta_n|$ passant par le point $(0, x_1, ..., x_n)$ avec le reste du simplexe). On pose alors $\sigma_0(x) = d_j f(y)$. Par construction, ce σ_0 coïncide avec les valeurs de f sur ses bords, ce qui permet donc d'étendre f en une application définie sur $\partial|\Delta_n|$. Pour l'intérieur du simplexe, on définit $\tilde{f}$ comme constante sur les droites $(t, x_1 - \frac{t}{n}, ..., x_n - \frac{t}{n})$ pour tout $a = (0, x_1, ..., x_n)$ appartenant à la face 0 de Δ_n, égale à $\sigma_0(a)$.

Géométriquement, cela correspond à former le cornet correspondant aux faces déjà définies de notre simplexe, puis d'étendre f à la dernière face en projetant les valeurs de f prises sur le cornet perpendiculairement à la dernière face en question.

Il y a une observation à faire ici, essentielle à l'interprétation des définitions utilisées pour les groupes d'homotopie d'un ensemble simplicial : considérons, comme dans le schéma précédent, σ_1 et σ_2 comme des applications continues de $|\Delta_1|$ dans X, c'est à dire des chemins, tels que le point d'arrivée de σ_1 coïncide avec le point de départ de σ_2. L'opération consistant à remplir le cornet formé par σ_1 et σ_2, puis à en isoler le

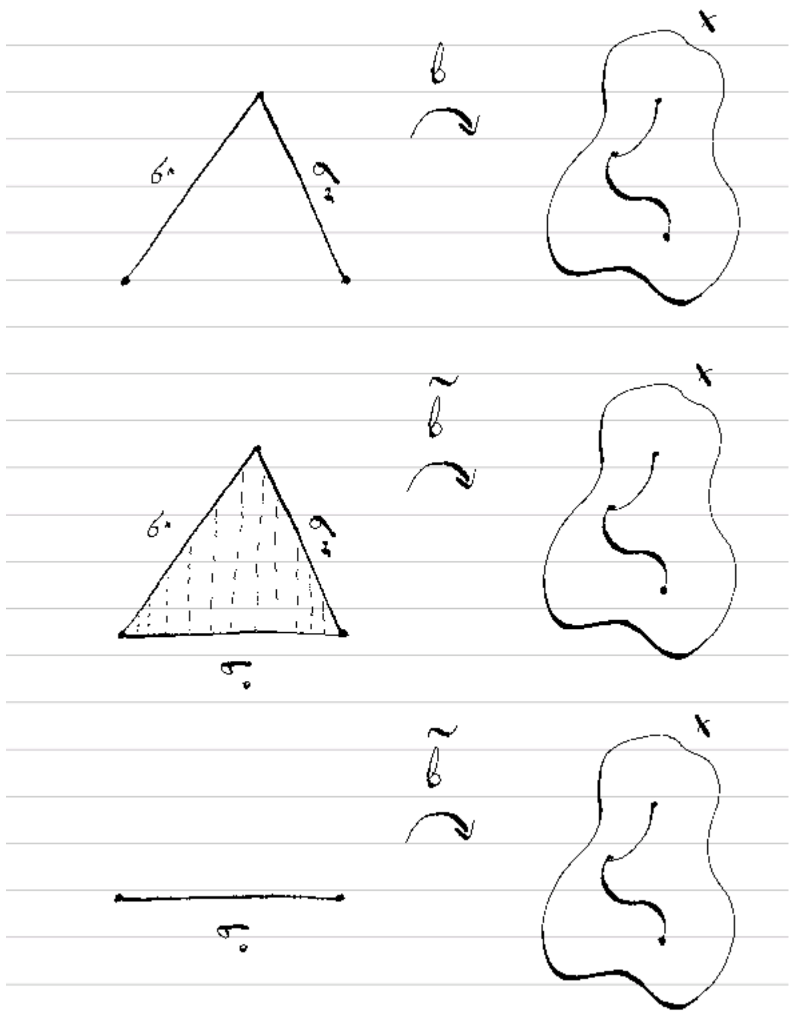

FIGURE 10 – La construction de la complétion d'une application de Λ_0^2 vers un espace topologique X. Remarquer que le nouveau côté σ_0 obtenu correspond à la concaténation de σ_1 et σ_2.

chemin nouvellement formé σ_0, correspond exactement à la concaténation des chemins σ_1 et σ_2 !

Dans un complexe de Kan, cette observation nous donne donc une piste pour considérer les éléments du complexe comme des chemins (généralisés à des dimensions supérieures), et pour les concaténer. C'est une opération que nous préciserons dans la section 6.

Avant cela, nous allons donner deux derniers exemples de sources de complexes de Kan. Prouvons déjà un théorème, annoncé dans la section précédente.

[**Catégories et Complexes de Kan - Suite**] L'ensemble simplicial associé au nerf d'une catégorie est un complexe de Kan si et seulement si tous les morphismes de cette catégorie sont inversibles (ie. la catégorie est un groupoïde).

La nécessité a déjà été prouvée précédemment. Prouvons le côté suffisant : soit $\mathcal{G}$ un *groupoïde, et $N(\mathcal{G})$ son ensemble simplicial associé. La preuve va s'effectuer en plusieurs temps. Nous allons d'abord explicitement construire des relèvements d'applications de $\Lambda^n_k \to N(\mathcal{G})$ pour $n = \{1, 2, 3\}$, et expliquer ensuite pourquoi nous n'avons pas besoin d'aller plus loin.*

Pour $n = 1$, on cherche un relèvement de $\Lambda^1_k = [*] \to \mathcal{G}$ en une application de $\Delta^1 \to \mathcal{G}$. En notant $x \in obj_{\mathcal{G}}$ l'image de $*$, envoyer $[0, 1]$ sur Id_x convient très bien.

Pour $n = 2$, on cherche un relèvement de $\Lambda^2_k \to \mathcal{G}$ en une application de $\Delta^2 \to \mathcal{G}$. Si $k = 1$, on a donc deux morphismes f_0 et f_2 tels que $d_0(f_2) = d_1(f_0)$, c'est à dire un diagramme du type : $A \xrightarrow{f_0} B \xrightarrow{f_2} C$. Il suffit donc bien évidemment de choisir comme image pour $[0, 1, 2]$ le 2-simplexe (f_0, f_2). Pour $k = 0$, on dispose cette fois de morphisme f_1, f_2 avec $d_1(f_2) = d_1(f_1)$. On choisit donc le 2-simplexe $(f_2, f_1 f_2^{-1})$. Pour $k = 2$, c'est très similaire.

Pour $n = 3$, on n'étudiera que le cas $k = 0$, les autres étant similaires. Dans ce cas, des images sont déjà fixées pour les 2-simplexes $[0, 1, 2]$, $[0, 1, 3]$, $[0, 2, 3]$. Ces images déterminent des objets 0, 1, 2, 3 et des morphismes α_{ij} pour $i < j$ et $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$, qui font commuter les trois diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "\alpha_{01}"] \arrow[dr, "\alpha_{02}"] & 1 \arrow[d, "\alpha_{12}"] \\ & 2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "\alpha_{01}"] \arrow[dr, "\alpha_{03}"] & 1 \arrow[d, "\alpha_{13}"] \\ & 3 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "\alpha_{02}"] \arrow[dr, "\alpha_{03}"] & 2 \arrow[d, "\alpha_{23}"] \\ & 3 \end{tikzcd}$$

Si l'on veut espérer étendre notre morphisme à Δ_3 tout entier, il faut une image pour le simplexe $[0, 1, 2, 3]$, qui compte tenu de notre dernière remarque ne peut être autre que le triplet de morphismes $(\alpha_{01}, \alpha_{12}, \alpha_{23})$ (on les identifie en appliquant d_0 et la prise de la dernière face le bon nombre de fois). Mais cette extension est valide si et seulement si le diagramme suivant commute également :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\alpha_{12}"] \arrow[dr, "\alpha_{13}"] & 2 \arrow[d, "\alpha_{23}"] \\ & 3 \end{tikzcd}$$

Or, les trois diagrammes précédents impliquent que $\alpha_{23}\alpha_{02} = \alpha_{03} = \alpha_{13}\alpha_{01} \implies \alpha_{23}\alpha_{02}\alpha_{01}^{-1} = \alpha_{13}$. Mais $\alpha_{02}\alpha_{01}^{-1} = \alpha_{12}$, ce qui suffit à conclure.

Pour terminer cette démonstration, nous allons montrer qu'il n'est pas nécessaire d'aller plus loin. Pour cela, il faut remarquer qu'un morphisme d'ensembles simpliciaux de $X \to N(\mathcal{G})$ est bien défini sur X tout entier si et seulement si sa restriction aux 2-simplexes de X est bien définie : les 0-simplexes définissent les domaines et codomaines, les 1-simplexes définissent les morphismes et les 2-simplexes donnent les règles de composition des morphismes. Plus explicitement, si $x \in X$ est un n-simplexe et que f envoie x sur $f(x) = (f_1, f_2 ... f_k, f_{k+1}, ... f_n)$, alors l'effet de d_k sur $f(x)$ est en fait déterminé par le 2-simplexe f_k, f_{k+1}, qui est l'image d'un Dx où D est une succession de d_i. Et comme la bonne définition d'un morphisme d'ensembles simpliciaux dépend uniquement de sa cohérence avec les d_i, on a notre résultat. Puis on conclut à la non-nécéssité d'aller plus loin par le fait que strictement au dessus de la dimension 3, Λ^n_k et Δ_n ont exactement les mêmes 2-simplexes.

Enfin, on mentionne le résultat suivant :

[**Groupes Simpliciaux et Complexes de Kan**] Un groupe simplicial (vu en tant qu'ensemble simplicial) est un complexe de Kan.

Les preuves trouvées sont relativement combinatoires et finalement assez peu éclairantes. Voir [5], page 22.

5.4 Composantes Connexes par Arcs, Homotopie Entre Applications

Dans cette section, nous arrivons à une première approche de la théorie de l'homotopie des ensembles simpliciaux. Comme nous l'avions proposé en partie 4, on définit l'homotopie entre deux morphismes d'ensembles simpliciaux $f, g : K \rightrightarrows L$ de la manière suivante :

[**Homotopie entre Morphismes D'Ensembles Simpliciaux**] Soient K et L deux ensembles simpliciaux. On dit que deux morphismes f et $g : K \rightrightarrows L$ sont homotopes si et seulement s'il existe une application $F : \Delta_1 \times K \to L$ telle que la restriction de F au sous-complexe engendré par les dégénerescences successives de $[0] \times K$ vaut f et sa restriction à celui engendré par $[1] \times K$ vaut g.

Le problème est que cette définition ne s'accorde pas avec notre intuition géométrique de la manière qu'on voudrait qu'elle le fasse. Notamment, définie comme telle, l'homotopie entre applications n'est pas une relation d'équivalence. La solution à ce problème sont les complexes de Kan. Nous allons voir en quoi les complexes de Kan résolvent ce problème.

[**Condition pour que l'Homotopie soit une Relation D'équivalence**] Si Y est un complexe de Kan, et X un ensemble simplicial quelconque, alors la relation d'homotopie entre applications est une relation d'équivalence.

Nous ne prouvons ce théorème que pour $X = [*]$, l'ensemble simplicial libre engendré par un point. La preuve plus générale consiste à montrer cela pour les simplexes fondamentaux, et à étendre le théorème aux ensembles simpliciaux plus généraux. Cependant, c'est un résultat très difficile à établir dans notre cadre d'étude, qui est rendu plus simple à étudier avec une approche plus catégoriques comme dans [5]. Pour une approche "élémentaire", mais qui demeure difficile à mettre en place, voir [7].

Donnons-nous à présent f, g, h trois applications de l'ensemble simplicial $[*]$ vers Y, un complexe de Kan. Rappelons que ces applications sont entirèrement déterminées par l'image du point $*$ en dimension 0.

Réflexivité : f est homotope à f via l'application de $\Delta_1 \times [*] \to Y$ qui ignore Δ_1 et ne fait qu'appliquer f convient.

Symétrie : supposons que f est homotope à g. Cela revient à ce qu'il existe une applications $F : \Delta_1 \times [*] \cong \Delta_1 \to Y$, telle que $d_0(F([0,1]) = g(*)$ et $d_1(F([0,1])) = f(*)$. Notons $y = g(*), x = f(*)$ et $z = F([0,1])$. Considérons les éléments z et $s_0(x)$. Ils vérifient la condition de recollement de Kan suivante : $d_1(z) = x = d_1(s_0(x)) = y$.

En posant donc $a_2 = z, a_1 = s_0(x)$, la condition d'extension de Kan nous fournit donc un élément a tel que $d_2(a) = z, d_1(a) = s_0(x)$. Mais alors $d_0(a)$ vérifie $d_1(d_0(a)) = d_0(d_2(a)) = y$, et $d_0(d_0(a)) = d_0(d_1((a)) = x$. On peut alors le choisir comme image de $[0, 1]$ par une application $F^* : \Delta^1 \times [*] \to Y$, et on vérifie sans difficulté qu'il s'agit bien d'une homotopie de g vers f.

Transitivité : supposons que f soit homotope à g et que g soit homotope à h. En notant $x_f = f(*), x_g = g(*), x_h = h(*)$, par le même raisonnement que dans ce qui précède, l'existence de ces homotopies revient à l'existence de $u, v \in Y$ tels que $d_1(u) = x_f$, $d_0(u) = d_1(v) = x_g$ et $d_0(v) = x_h$. La deuxième relation est une relation de recollement de Kan, qui nous incite à poser $w_2 = u, w_0 = v$. La condition d'extension de Kan nous fournit un élément w tel que $d_0(w) = w_0, d_2(w) = w_2$. Et alors $d_1(w)$ vérifie $d_0(d_1(w)) = d_0(d_0(w)) = d_0(v) = x_h$ et $d_1(d_1(w)) = d_1(d_2(w)) = d_1(u) = x_f$.

Deux remarques par rapport à la preuve précédente :

1. En lisant entre les lignes, on peut voir que l'on a en fait montré que la relation sur les éléments de Y_0, $x \sim y \iff z \in Y_1, d_0(z) = y, d_1(z) = x$ est une relation d'équivalence. C'est un équivalent de la **connexité par arcs**, qui fonctionne pour les complexes de Kan. Elle est très décevante dans le cas contraire : notamment, l'ensemble simplicial engendré par le seul segment $[a, b]$ n'est... pas connexe par arcs ! Il y a un simplexe qui relie a à b, mais il n'y en a pas qui relie b à a.

2. La preuve qui précède peut paraître un petit peu suspicieuse dans les méthodes qu'elle emploie. L'utilisation de la condition de Kan semble sortir de nulle part ! Mais il n'en est rien. Nous invitons le lecteur à se reporter à la preuve du fait que l'ensemble des chaînes singulières est un complexe de Kan pour mieux interpréter les preuves précédentes en termes de chemin.

6 Groupes d'Homotopie

6.1 Cadre de Travail

Nous allons à présent nous atteler à la définition et à la construction des groupes d'homotopie d'un ensemble simplicial donné. Reprenons d'abord la définition classique de ces groupes pour un espace topologique pointé $(X, *)$.

[**Groupes d'Homotopie d'un Espace Toplogique**] Le n-ième groupe d'homotopie d'un espace topologique X, noté $\pi_n(X, *)$ est l'ensemble des classes d'homotopies des applications de $\mathbb{S}^n$ dans X dont l'image contient $*$, muni d'une certaine loi de composition (décrite plus bas) qui en fait un groupe.

La loi de groupe sur ces ensembles est la suivante : soient δ_1 et δ_2 deux applications de $\mathbb{S}^n$ dans X. A homotopie près (comme toutes les rotations sont homotopes à l'identité), on peut supposer que l'on dispose d'un point choisi sur la sphère $\mathbb{S}^n$, noté 0, tel que $\delta_1(0) = \delta_2(0) = *$. Comme $\mathbb{S}^n \simeq D^n/\mathbb{S}^{n-1}$, on se donne un relèvement de δ_i défini sur D^n et constant, égal à $*$ sur sa frontière. Ensuite, on recolle les deux hémisphères le long de $\mathbb{S}^{n-1}$, en une sphère $\mathbb{S}^n$ constituée de deux hémisphères. Par le lemme du recollement, on obtient une application $\delta_1 * \delta_2$, définie comme valant δ_1 sur un hémisphère et δ_2 sur l'autre. On peut montrer que cela munit $\pi_n(X, *)$ d'une loi de groupe. La construction de celle-ci est illustrée par les schémas suivants :

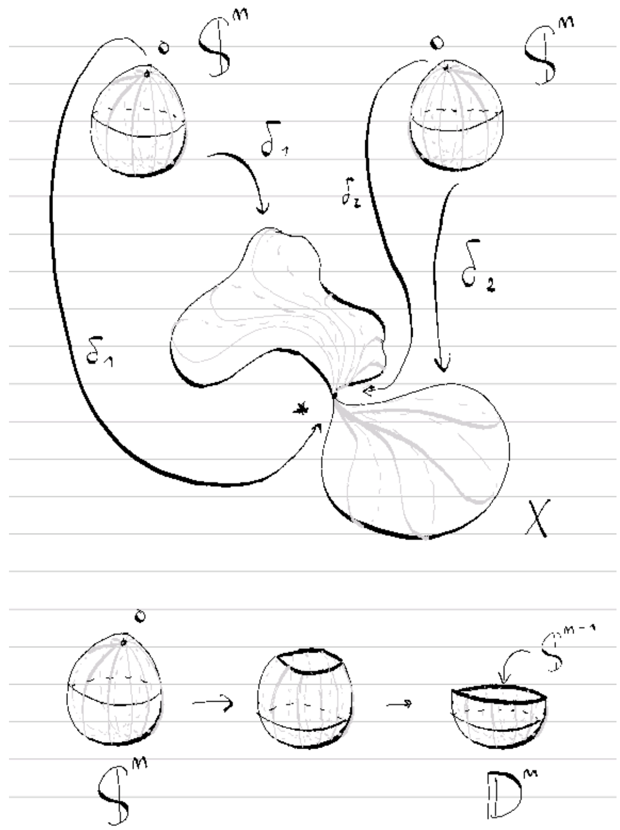

FIGURE 11 – Construction des Lois de Groupes sur $\pi_n(X, *)$, construction d'un relèvement de δ_1 et δ_2 à D^n

Nous allons établir une définition d'un équivalent des groupes d'homotopie dans les complexes de Kan. Un point de départ pour la construction peut-être le suivant : quand on regarde la preuve qui précède (celle montrant dans un cas particulier que l'homotopie entre morphismes simpliciaux vers un complexe de Kan est une relation d'équivalence), on remarque que l'existence d'une application de $F : [*] \times [0, 1] \to Y$ qui coïncide avec f sur un sous-ensemble et g sur un autre tient en fait surtout à l'existence d'un 1-simplexe s tel que $d_0(s) = g(*)$ et $d_1(s) = f(*)$, que l'on choisit alors comme image du 1-simplexe $[0, 1]$. Cela nous pousse à davantage considérer les **éléments** de l'ensemble simplicial comme des homotopies, plutôt que de nous encombrer d'applications.

Avant de procéder, nous allons poser quelques jalons théoriques.

[**Ensemble Simplicial Pointé et Homotopie entre Eléments**] Soit X un ensemble simplicial. Soit $* \in X_0$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

— On appelle **ensemble simplicial pointé** la paire $(X, *)$.
— On appelle **chemin de dimension** $n > 0$ **basé en** $*$ un élément $x \in X_n$ tel que pour tout $0 \leq i \leq n$, on ait $d_i(x) = *$, où l'on note abusivement $*$ comme la $n-1$-ème dégénérescence itérée du point $*$. On note $\tilde{\pi}_n(X, *)$ l'ensemble de ces chemins.
— On dit que deux éléments $x, y \in X_n$ sont **homotopes** si pour tout $0 \leq i \leq n$,

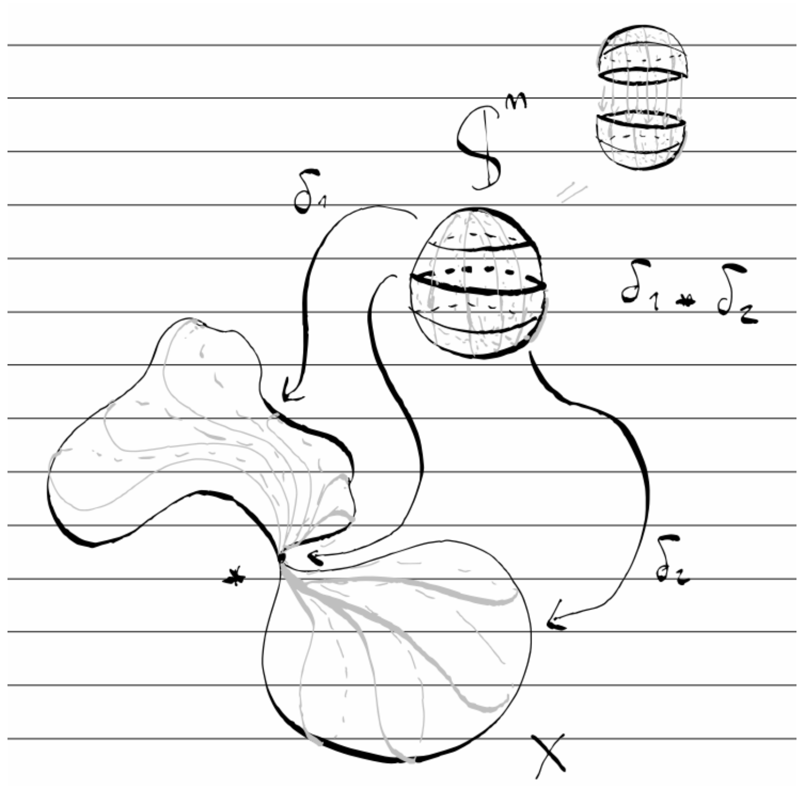

FIGURE 12 – Construction des Lois de Groupes sur $\pi_n(X, *)$, recollement des deux hémisphères

$d_i x = d_i y$, et s'il existe $z \in X_{n+1}$ tel que $d_n z = x$, $d_{n+1} z = y$, et pour tout $0 \leq i \leq n-1$, $d_i z = s_{n-1} d_i x = s_{n-1} d_i y$.

La définition proposée pour un chemin se justifie bien : si l'on repasse du point de vue originel des simplexes singuliers, un tel simplexe de $|\Delta_n| \to X$ qui prend la même valeur sur toutes ses faces équivaut à la donnée d'une application continue de $\mathbb{S}^n \to X$. La définition donnée pour l'homotopie se justifie également dans le cadre des applications basées en un point, par le dessin suivant, représentant le cas $n = 1$:

Donnons également une proposition, qui est assez rassurante relativement à ce que l'on essaie de définir.

[**La Relation d'Homotopie est une Relation d'Equivalence**] Si X est un complexe de Kan, la relation d'équivalence comme définie ci-dessus entre éléments d'un complexe simplicial est une relation d'équivalence.

La réflexivité est facile, et consiste simplement à prendre $s_n x$ comme homotopie de x vers lui-même (cela s'interprète bien géométriquement : c'est géométriquement un simplexe aplati selon x). La preuve du reste des propriétés est lourde, et finalement peu éclairante : nous nous permettons donc de l'omettre. Elle se trouve en page 6 de [7].

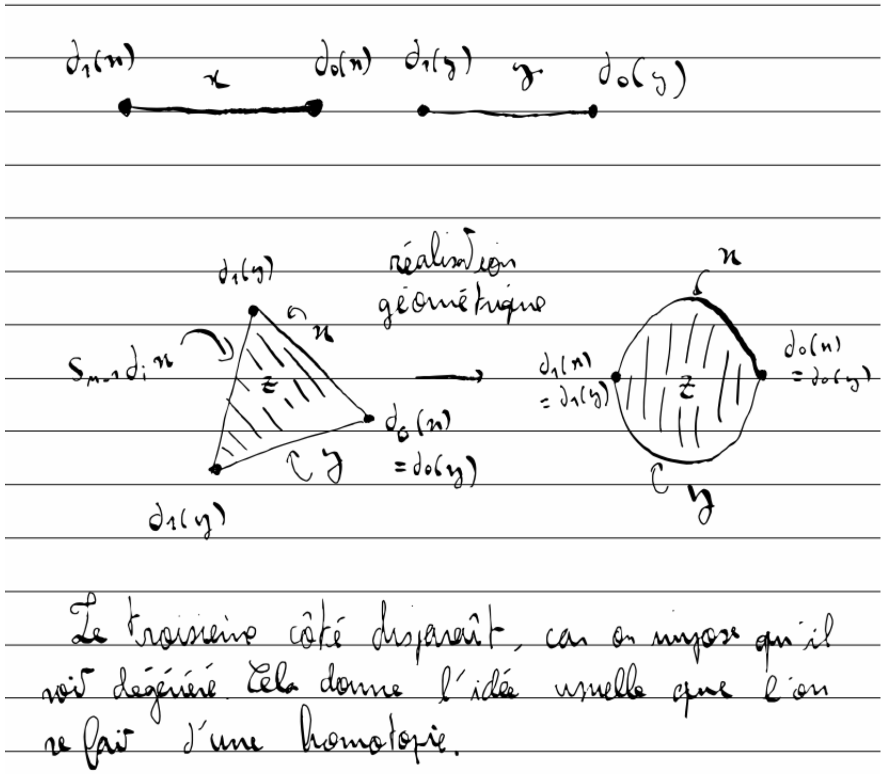

FIGURE 13 – Justification de la Définition d'Eléments Homotopes

6.2 Définition et Construction des Groupes d'Homotopie

Comme on peut s'y attendre, on définit l'ensemble $\pi_n(X,*)$ comme l'ensemble $\tilde{\pi}_n(X,*)$ quotienté par la relation d'équivalence d'homotopie sur les éléments définie précédemment. Le reste de cette partie va consister en un travail vers la construction de la loi de groupe de cet ensemble. Nous ne donnerons que les preuves qui nous ont paru les plus importantes conceptuellement.

1. Définition de la Loi de Composition

Pour définir la loi de groupe de $\pi_n(X,*)$, on procède ainsi.

— On se donne $[\alpha], [\beta]$ deux classes d'équivalence dans $\pi_n(X,*)$, et on choisit des représentants x et y de ces deux classes.
— On pose $a_0 = a_1 = ... = a_{n-2} = *$, $a_{n-1} = x$ et $a_{n+1} = y$, dont on vérifie sans difficulté que c'est un n-uplets d'éléments vérifiant la condition de recollement de Kan pour $k = n$ (étant donné que les frontières de tout le monde sont égales à $*$).
— On applique la condition de Kan, qui nous fournit un élément a tel que $d_i a = a_i$ pour tout $i \neq k$.
— On pose alors $[\alpha] \cdot [\beta] = [d_n a]$.

On ne sera pas étonné de cette définition, par rapport à la remarque faite sur l'interprétation de $\mathscr{S}(X)$ en tant que complexe de Kan ; dans le cas $n = 1$, on retrouve exactement la concaténation de lacets.

[**Définition de la Loi de Composition Interne**] La loi proposée est bien définie : elle ne dépend pas des représentants de $[\alpha]$ et $[\beta]$ choisis, ni du représentant de la classe d'équivalence de l'élément a.

Nous montrerons seulement l'indépendance en le choix de a : les autres preuves suivent le même chemin, à quelques détails techniques près. Supposons donc que l'on dispose de a et a' vérifiant tous deux $d_{n-1}(a) = d_{n-1}(a') = x$, $d_{n+1}(a) = d_{n+1}(a') = y$ et $d_i(a) = d_i(a') = *$ pour tout $0 \leq i \leq n-2$. On va montrer que $d_n(a)$ et $d_n(a')$ sont homotopes. Pour cela, on vérifie que la famille $s_0 = s_1 ... = s_{n-1} = *, s_{n+1} = a, s_{n+2} = a'$ vérifie la condition de recollement de Kan pour $k = n$. On obtient alors un élément ω qui vérifie $d_i(\omega) = s_i$ pour tout $0 \leq i \leq n+2$, $i \neq n$.

On va maintenant vérifier que $d_n(\omega)$ est bien une homotopie entre $d_n(a)$ et $d_n(a')$. Pour cela, on observe déjà que pour tout $i \leq n, d_i(d_n(\omega)) = d_{n-1}(d_i(\omega)) = d_{n-1}(*) = * = s_{n-1}d_i(d_n(a)) = s_{n-1}d_i(d_n(a'))$. On a également $d_{n+1}(d_n(\omega)) = d_n(d_{n+2}(\omega)) = d_n(a')$, et $d_n(d_n(\omega)) = d_n(d_{n+1}(\omega)) = d_n(a)$, ce que l'on voulait démontrer.

2. C'est une Loi de Groupe

Après avoir montré que la loi de composition interne ci-dessus était bien définie, nous allons montrer que c'est une loi de groupe.

[**La Loi de Composition sur $\pi_n(X, *)$ est une Loi de Groupe**] La loi de composition sur $\pi_n(X, *)$ est une loi de groupe, qui a pour élément neutre la classe d'équivalence de $*$. De plus, cette loi fait $\pi_n(X, *)$ un groupe abélien dès que $n \geq 2$.

Montrer que l'élément neutre est $*$ n'est pas difficile : soit $x \in \tilde{\pi}_n(X, *)$. Pour obtenir $* \cdot x$, on utilise le procédé précédent qui nous donne alors un élément ω tel que $* \cdot x = d_n(\omega)$, $d_i(\omega) = *$ pour tout $0 \leq i \leq n-1$, et $d_{n+1}(\omega) = x$. On constate alors que l'élément ω est lui-même une homotopie entre x et $d_n(\omega)$.

Nous allons à présent inverser $x \in \tilde{\pi}_n(X, *)$. Pour cela, on utilise la condition d'extension de Kan sur la famille $s_0 = s_1 = ... = s_{n-2} = *$, $s_n = *$ et $s_{n+1} = x$. On obtient alors un élément $d_{n-1}(k)$, avec k vérifiant $d_i(k) = s_i$ pour $i \neq n-1$. On va montrer que $d_{n-1}(k)$ est bien un inverse à gauche de x : pour cela on calcule $d_{n-1}k \cdot x$, qui nous fournit un élément $d_n(\omega)$ avec $d_{n-1}(\omega) = d_{n-1}k$ et $d_{n+1}(\omega) = x$. Cet élément est alors homotope à $*$: pour construire l'homotopie, on considère un élément u obtenu par extension de Kan, tel que $d_{n+1}(u) = k$, $d_{n+2}(u) = \omega$. On montre alors que $d_n(u)$ convient : en effet, $d_{n+1}d_n(u) = d_nd_{n+2}(u) = d_n(\omega)$, et $d_nd_n(u) = d_nd_{n+1}(u) = d_n(k) = *$.

Nous ne démontrons pas l'associativité ou le fait que le groupe est abélien au delà de $n \geq 2$; elles sont du même acabit - ce sont des preuves très techniques, du même acabit que les précédentes, faisant un usage constant de la condition d'extension de Kan. Nous renvoyons le lecteur à [7], page 9.

Nous avons ici défini les groupes d'homotopie pour des ensembles simpliciaux. Maintenant, une question demeure : quelles sont les liens de cette théorie avec la topologie ?

Ces groupes sont une belle construction, mais revêtent finalement assez peu d'information s'ils sont déliés de toute topologie "concrète". C'est ce que nous allons voir dans la section suivante, qui fera office de conclusion.

6.3 Intérêt Topologique

Le but de cette dernière partie est de citer quelques résultats qui font tout l'intérêt de la théorie des ensembles simpliciaux.

6.3.1 Lien avec L'Homotopie des Espaces Topologiques

[**Groupes d'Homotopie des Ensembles Simpliciaux et de leur Réalisation Géométrique**] Soit X un complexe de Kan connexe par arcs, et $|X|$ sa réalisation géométrique (également connexe par arcs). Alors pour tout n, et pour tout point base $* \in X$, $*' \in |X|$, les groupes $\pi_n(X, *)$, $\pi_n(|X|, *')$ sont isomorphes.

La démonstration de ce résultat est en dehors de notre portée.

Alors que les groupes d'homotopie sont classiquement des objets difficiles à appréhender, ce théorème nous donne un point d'approche vers ceux-ci. Notamment, on en tire facilement :

[**L'espace classifiant**] Soit G un groupe. Il existe un espace topologique dont le groupe fondamental est G, donné explicitement par la réalisation géométrique du complexe de Kan associé nerf de la catégorie BG.

D'après le théorème précédent, il suffit de vérifier que le groupe $\pi_1(N(BG), *)$ (au sens des complexes de Kan - notons que $N(BG)$ en est bien un, étant donné que BG est en particulier un groupoïde) est bien isomorphe à G.

Mais cela n'est pas difficile à montrer : les objets de $\tilde{\pi}_1(N(BG), e)$ sont exactement les éléments de G, et il ne pose aucune difficulté de vérifier que deux éléments dans $N(BG)$ sont homotopes si et seulement s'ils sont égaux. On vérifie ensuite que la loi de composition sur $\pi_1(N(BG), e)$ correspond en fait exactement à la composition des éléments, ce qui montre le résultat voulu.

En fait, on peut sans difficulté montrer encore plus : l'espace classifiant est un espace d'Eilenberg-MacLane $K(G, 1)$, c'est à dire que son groupe d'homotopie en degré 1 vaut G et que tous les autres sont triviaux. En effet, la condition $d_i x = e$ pour tout i implique que tous les ensembles $\tilde{\pi}_n(N(BG), e)$ sont réduits à e dès que $n > 1$.

6.3.2 Equivalence entre la Catégorie des Complexes de Kan, des CW-complexes et des Espaces Topologiques à Homotopie faible près

Revenons sur le concept d'équivalences d'homotopies faibles : une **équivalence d'homotopie faible** entre espaces topologiques est une application continue entre deux espaces topologiques X et Y qui induit un isomorphisme entre tous les groupes d'homotopie de X et de Y par post-composition.

Le problème est que pour des espaces topologiques généraux, les notions d'homotopies faibles et d'homotopie ne coïncident pas ! Il existe des équivalences d'homotopie faibles qui ne sont pas des équivalences d'homotopie.

[**Exemple : Une Homotopie Faible qui n'est pas une Homotopie Forte**] Voilà un exemple de la manière dont ce phénomène peut se produire : considérons l'ensemble $\mathbb{N}$ et l'ensemble $\{0\} \cup \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$ munis de leur topologie induite par celle de $\mathbb{R}$. On considère l'application $f : \mathbb{N} \to \{0\} \cup \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$ qui à $0 \mapsto 0$ et qui à $n \mapsto \frac{1}{n}$. Il est immédiat de voir que les groupes d'homotopie en tout ordre basés en tout point de ces deux ensembles sont triviaux, et donc que f est bien une équivalence faible d'homotopie entre les deux. Cependant, ce n'est pas une équivalence d'homotopie. En effet, une application continue de $\{0\} \cup \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$ dans $\mathbb{N}$ est nécessairement à support fini : et donc si g est une telle application telle que $gf \simeq 1_{\mathbb{N}}$, nous sommes en train de dire qu'une contraction de $\mathbb{N}$ sur un nombre fini de ses points est homotope à l'identité, ce qui est évidemment absurde étant donné qu'une telle application ne respecte pas les composantes connexes des points.

Mais comme le dit Yonatan Harpaz dans [5], la plupart de nos espaces usuels, c'est à dire les CW-complexes, sont "gentils" : une équivalence d'homotopie faible est automatiquement une équivalence d'homotopie. C'est le théorème de Whitehead, démontré en 1949 :

[**Théorème de Whitehead**] Une application continue entre deux CW-complexes est une équivalence d'homotopie si et seulement si elle induit un isomorphisme entre les groupes d'homotopie.

Attention : cela ne signifie pas que deux CW-complexes ayant mêmes groupes d'homotopie sont homotopes (autrement dit, les notions de type d'homotopie et de classe d'homotopie restent distinctes pour les CW-complexes). Cela signifie simplement que si l'on arrive à trouver une équivalence d'homotopie faible entre deux CW-complexes, on a en fait trouvé une équivalence d'homotopie tout court.

Ce théorème s'illustre de façon catégorique. Introduisons la catégorie des espaces topologiques "à homotopie près", à savoir la catégorie dont les objets sont les espaces topologiques et les morphismes sont non pas les applications continues mais les classes d'homotopie d'applications continues. On peut passer de cette catégorie à la catégorie des espaces topologiques à homotopie faible près, où l'on a ajouté des inverses à toutes les équivalences d'homotopie faible. (L'idée de l'homotopie faible consiste à ne faire attention qu'à ce qu'il se passe au niveau des groupes d'homotopie). Freyd montre dans [2] que la catégorie des espaces topologiques à homotopie faible près n'est **pas concrète**, c'est à dire qu'on ne peut pas faire correspondre fonctoriellement tous les points à des ensembles et toutes les flèches à des applications entre ces ensembles. Par contre, cette catégorie est équivalente à la catégorie des CW-complexes, ce qui la rend plus facile à manipuler.

[**Equivalence de la catégorie des CW-complexes à Homotopie près et des Espaces Topologiques à Homotopie Faible Près**] La catégorie des espaces topologiques à homotopie faible près est équivalente à la catégorie des CW-complexes à homotopie près.

Esquisse de preuve et références : la preuve de ce théorème s'appuie sur deux théorèmes. Le premier est un théorème de topologie, donné dans l'encyclopédie de Hatcher [6] en page 353 : tout espace topologique X peut être approximé par un CW-complexe, c'est à dire qu'il existe un CW-complexe Z et une équivalence d'homotopie faible $Z \to X$. Le deuxième théorème relativement élémentaire de théorie des catégorie, que l'on trouvera dans le livre de Riehl [8] en page 31 : un foncteur est une équivalence de catégories si et seulement s'il est plein, fidèle et essentiellement surjectif.

Une fois ces deux théorèmes énoncés, il est formel de voir que l'inclusion de la sous-catégorie des CW-complexes à homotopie près (qui coïncide avec celle des CW-complexes à homotopie faible près d'après le théorème de Whitehead) remplit toutes ces conditions. Elle est par définition fidèle et pleine, et le théorème de topologie cité dans le livre de Hatcher fournit son essentielle surjectivité.

Revenons à nos complexes de Kan. Il se trouve que les complexes de Kan vérifient une propriété étrangement similaire :

[**Théorème de Whitehead pour les Complexes de Kan**] En étendant les définitions relatives à l'homotopie telles qu'elles au complexes de Kan, on a le théorème suivant : une équivalence d'homotopie faible entre deux complexes de Kan est automatiquement une équivalence d'homotopie.

En fait, on a le théorème suivant, encore plus specatculaire (qui permet de comprendre pourquoi il y a tant de similarités entre la théorie des CW-complexes et celle des complexes de Kan) :

[**Equivalence des Catégories des CW-complexes à Homotopie Près et des Complexes de Kan à Homotopie près**] La catégorie des CW-complexes à homotopie près est équivalente à la catégorie des complexes de Kan à Homotopie près.

La preuve est en dehors de la portée de cet article, mais on peut néanmoins en citer les ingrédients principaux : le lecteur attentif l'aura deviné, mais les foncteurs qui réalisent l'équivalence sont les foncteurs adjoints de réalisation géométrique et de celui de prise de l'ensemble des chaînes singulières, présentés dans la partie 3 sur la réalisation géométrique. Le lecteur qui s'y intéresse davantage pourra consulter la fin du chapitre 1 de [1], où la preuve reporte le lecteur au chapitre... 12.

Références

[1] Edward B Curtis. "Simplicial homotopy theory". In : *Advances in Mathematics* 6.2 (1971), p. 107-209.

[2] Peter Freyd. "Homotopy is not concrete". In : *The Steenrod Algebra and Its Applications : A Conference to Celebrate NE Steenrod's Sixtieth Birthday*. Springer. 1970, p. 25-34.

[3] Greg Friedman. "An elementary illustrated introduction to simplicial sets". In : *arXiv preprint arXiv :0809.4221* (2008).

[4] Paul G Goerss et John F Jardine. *Simplicial homotopy theory*. Springer Science & Business Media, 2009.

[5] Yonatan Harpaz et Matan Prasma. "Simplicial Methods". In : (2014).

[6] Allen Hatcher. *Algebraic topology.*, 2005.

[7] J Peter May. *Simplicial objects in algebraic topology*. T. 11. University of Chicago Press, 1992.

[8] Emily Riehl. *Category theory in context*. Courier Dover Publications, 2017.