Aluno: Raphael Henrique Braga Leivas
Matrícula: 2020028101

Código fonte LaTeX desse arquivo pode ser visto em meu GitHub pessoal:
https://github.com/RaphaelLeivas/eletro-comp-2023-1

---

Precisamos resolver o problema unidimensional para $f = \rho = 5$, $q = h = 1$.

$$\begin{cases} u_{xx} + f = 0 \\ u(1) = q \\ -u_x(0) = h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{xx} = -\rho \\ u(1) = q \\ -u_x(0) = h \end{cases} \tag{1}$$

Em (1), temos uma EDO de segunda ordem com duas condições de contorno.

# 1 Solução Analítica

Para $\rho$ constante, podemos resolver o problema por integração direta. Integrando ambos lados da EDO de (1), temos

$$u_x = \int -\rho \, dx \quad \Rightarrow \quad u_x = -\rho x + C$$

Usando a segunda condição de contorno,

$$-u_x(0) = h \quad \Rightarrow \quad -u_x(0) = +\rho(0) - C \quad \Rightarrow \quad h = +\rho(0) - C \quad \Rightarrow \quad C = -h$$

Assim, temos a expressão de $u_x$

$$u_x = -\rho x - h \tag{2}$$

Novamente integramos (2) em ambos lados com respeito a $x$

$$u = \int -\rho x - h \, dx \quad \Rightarrow \quad u = -\rho \frac{x^2}{2} - hx + C$$

Usando a primeira condição de contorno,

$$u(1) = q \quad \Rightarrow \quad u(1) = -\rho \frac{1^2}{2} - h(1) + C \quad \Rightarrow \quad q = -\frac{\rho}{2} - h + C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{\rho}{2} + h + C$$

Assim, temos a solução analítica de (1)

$$u = -\rho \frac{x^2}{2} - hx + \frac{\rho}{2} + h + C$$

$$u = \frac{\rho}{2} \left(1 - x^2\right) + h\left(1 - x\right) + q \tag{3}$$

Substituindo os dados do enunciado, temos

$$u = \frac{5}{2} - \frac{5x^2}{2} + 1 - x + 1$$

$$u(x) = -\frac{5}{2} x^2 - x + \frac{9}{2} \tag{4}$$

## 2 Introdução FEM

É possível também encontrar a solução de (1) pelo método de elementos finitos (FEM). Antes disso, vamos descrever um passo a passo reproduzível para aplicar o FEM para resolver EDOs com condições de contorno da forma de (1).

Pelo FEM, temos que a solução de (1) é dada por

$$u^h(x) = \sum_{A=1}^{n} d_A N_A + qN_{n+1} \tag{5}$$

onde

- $n$: graus de liberdade escolhido para a solução;
- $d_A$: A-ésimo coeficiente que se deseja encontrar;
- $N_A$: A-ésima função linear de forma;
- $qN_{n+1}$: Termo para garantir condições de contorno de $u^h(x)$.

Note que as funções $N_A(x)$ podem ser arbitrariamente escolhidas, desde que sejam lineares e satisfaçam a condição de $N_A(1) = 0$. Contudo, usamos um processo para determinar as funções $N_A(x)$ de modo a facilitar o método: