Aluno: Raphael Henrique Braga Leivas
Matrícula: 2020028101

Código fonte LaTeX desse arquivo pode ser visto em meu GitHub pessoal:
https://github.com/RaphaelLeivas/eletro-comp-2023-1

Precisamos resolver o problema unidimensional para $f = \rho = 5$, $q = h = 1$.

$$\begin{cases} u_{xx} + f = 0 \\ u(1) = q \\ -u_x(0) = h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{xx} = -\rho \\ u(1) = q \\ -u_x(0) = h \end{cases} \tag{1}$$

Em (1), temos uma EDO de segunda ordem com duas condições de contorno.

1 Solução Analítica

Para ρ constante, podemos resolver o problema por integração direta. Integrando ambos lados da EDO de (1), temos

$$u_x = \int -\rho \, dx \quad \Rightarrow \quad u_x = -\rho x + C$$

Usando a segunda condição de contorno,

$$-u_x(0) = h \quad \Rightarrow \quad -u_x(0) = +\rho(0) - C \quad \Rightarrow \quad h = +\rho(0) - C \quad \Rightarrow \quad C = -h$$

Assim, temos a expressão de u_x

$$u_x = -\rho x - h \tag{2}$$

Novamente integramos (2) em ambos lados com respeito a x

$$u = \int -\rho x - h \, dx \quad \Rightarrow \quad u = -\rho \frac{x^2}{2} - hx + C$$

Usando a primeira condição de contorno,

$$u(1) = q \quad \Rightarrow \quad u(1) = -\rho \frac{1^2}{2} - h(1) + C \quad \Rightarrow \quad q = -\frac{\rho}{2} - h + C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{\rho}{2} + h + C$$

Assim, temos a solução analítica de (1)

$$u = -\rho \frac{x^2}{2} - hx + \frac{\rho}{2} + h + C$$

$$u = \frac{\rho}{2}\left(1 - x^2\right) + h\left(1 - x\right) + q \tag{3}$$

Substituindo os dados do enunciado, temos

$$u = \frac{5}{2} - \frac{5x^2}{2} + 1 - x + 1$$

$$\boxed{u(x) = -\frac{5}{2}x^2 - x + \frac{9}{2}} \tag{4}$$

2 Passo a Passo FEM

É possível também encontrar a solução de (1) pelo método de elementos finitos (FEM). Antes disso, vamos descrever um passo a passo reproduzível para aplicar o FEM para resolver EDOs com condições de contorno da forma de (1).

Pelo FEM, temos que a solução de (1) é dada por

$$u^h(x) = \sum_{A=1}^{n} d_A N_A + qN_{n+1} \tag{5}$$

onde

- n: graus de liberdade escolhido para a solução;
- d_A: A-ésimo coeficiente que se deseja encontrar;
- N_A: A-ésima função linear de base;
- qN_{n+1}: Termo para garantir condições de contorno de $u^h(x)$.

Usamos um critério para determinar as funções lineares de base $N_A(x)$, desde que satisfaçam á condição de $N_A(1) = 0, \forall A$, exibido nas equações abaixo.

$$N_A(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{A-1}}{h_{A-1}}, & x_{A-1} \leq x \leq x_A \\ \frac{x_{A+1}-x}{h_A}, & x_A \leq x \leq x_{A-1} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad , \quad N_A(x) = \begin{cases} \frac{x_2-x}{h_1}, & A=1 \quad \text{e} \quad x_1 \leq x \leq x_2 \\ \frac{x-x_n}{h_n}, & A=n+1 \quad \text{e} \quad x_n \leq x \leq x_{n+1} \end{cases} \tag{6}$$

Além disso, as funções de base valem 1 no nó de referência, e caem para zero nos nós vizinhos.

$$N_A(x) = \begin{cases} 1, & x = x_A \\ 0, & x \neq x_A \end{cases} \tag{7}$$

Uma vez escolhidas as funções de base $N_A(x)$ através de (6) ou (7), temos o sistema linear na forma matricial

$$Kd = F \tag{8}$$

onde

- K: matriz de rigidez;
- d: vetor de coeficientes das funções $N_A(x)$ que queremos descobrir;
- F: vetor de forças;

Cada elemento da matriz K, que possui dimensão $n \times n$, é dado por

$$\{K_{ij}\} = a\left(N_i, N_j\right) = \int_{\Omega} N_{i_x} N_{j_x} \, dx$$

O vetor força, com dimensão $n \times 1$, é dado por

$$\{F_i\} = (N_i, f) + N_i(0)h - a\left(N_i, qN_{n+1}\right)$$

Em que o operador (f, g) é dado por

$$(f, g) = \int_\Omega f \cdot g \, dx$$

Por fim, o vetor d é o que queremos descobrir. Isolando-o em (8),

$$d = K^{-1} F \tag{9}$$

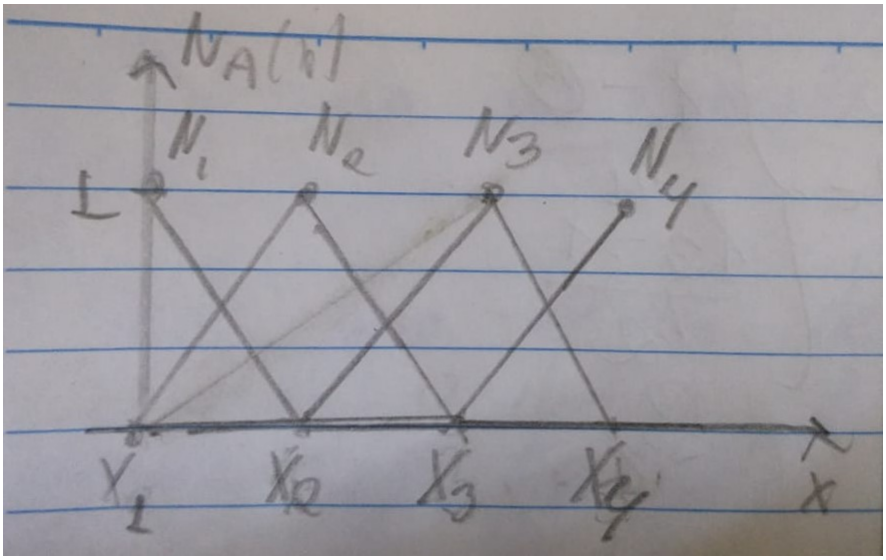
Uma vez descoberto o vetor d, basta substituí-lo na expressão (5) que obtemos a resposta do problema dado pelo FEM.

3 Solução do problema com três graus de liberdade

Vamos aplicar o passo a passo anterior para resolver o problema (1) pelo FEM com $n = 3$ graus de liberdade. A solução com $n = 3$ é

$$u^h(x) = \sum_{A=1}^{3} d_A N_A + q N_{n+1} \quad \Rightarrow \quad u^h(x) = d_1 N_1 + d_2 N_2 + d_3 N_3 + q N_{n+1}$$

Agora vamos escolher as 4 funções de base $N_A(x)$ conforme o critério de (6). Em vez tentar achar as expressões das funções $N_A(x)$ através das equações de (6), é mais interessante usar a propriedade (7) e fazer o desenho na mão, e depois extrair as expressões através do desenho.



Discretizamos o domínio $\Omega = [0, 1]$ em 4 nós com espaçamento uniforme:

$$x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = \frac{1}{3} \quad , \quad x_3 = \frac{2}{3} \quad , \quad x_4 = 1$$

Com esses nós e o desenho das funções de base, temos as expressões das funções de base como

$$N_1(x) = \begin{cases} 1 - 3x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad , \quad N_2(x) = \begin{cases} 3x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ 2 - 3x, & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$N_3(x) = \begin{cases} 3x - 1, & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ 3 - 3x, & \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad , \quad N_4(x) = \begin{cases} 3x - 2, & \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Conhecidas as funções de base, agora precisamos encontrar as matrizes K, d e F do sistema matricial de (8). Sabemos que a matriz K é 3×3 da forma

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}$$

Podemos usar duas propriedades da matriz de rigidez para reduzir a quantidade de contas que teremos que fazer.

- A matriz é simétrica em relação à diagonal principal;
- A matriz é esparsa: elementos não vizinhos aos elementos da diagonal principal são nulos;

Assim, temos

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 \\ K_{12} & K_{22} & K_{23} \\ 0 & K_{23} & K_{33} \end{bmatrix}$$

Calculando os elementos um de cada vez, temos

$$K_{11} = a\left(N_1, N_1\right) = \int_0^1 N_{1_x} N_{1_x}\, dx = \int_0^{\frac{1}{3}} (-3)(-3)\, dx = 3$$

$$K_{12} = a\left(N_1, N_2\right) = \int_0^1 N_{1_x} N_{2_x}\, dx = \int_0^{\frac{1}{3}} (-3)(3)\, dx = -3$$

$$K_{22} = a\left(N_2, N_2\right) = \int_0^1 N_{2_x} N_{2_x}\, dx = \int_0^{\frac{1}{3}} (3)(3)\, dx + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} (-3)(-3)\, dx = 6$$

$$K_{23} = a\left(N_2, N_3\right) = \int_0^1 N_{2_x} N_{3_x}\, dx = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} (-3)(3)\, dx = -3$$

$$K_{33} = a\left(N_3, N_3\right) = \int_0^1 N_{3_x} N_{3_x}\, dx = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} (3)(3)\, dx + \int_{\frac{2}{3}}^{1} (-3)(-3)\, dx = 6$$

Assim, a matriz K e sua inversa K^{-1} são dadas por

$$K = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 6 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad K^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

O próximo passo é calcular o vetor de forças F. Calculando um elemento de cada vez, temos

$$F_1 = \left(N_1, f\right) + N_1(0)h - a\left(N_1, qN_4\right) = \int_0^1 \rho N_1(x)\, dx + (1)h - \int_0^1 N_{1_x} q N_{4_x}$$

$$= \rho \int_0^{\frac{1}{3}} 1 - 3x \, dx + h - 0 = \rho \left[x - 3\frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{3}} + h = \rho \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2}\frac{1}{9} \right) + h = h + \frac{1}{6}\rho$$

$$F_2 = (N_2, f) + N_2(0)h - a\,(N_2, qN_4) = \int_0^1 \rho N_2(x) \, dx$$

$$= \rho \left[\int_0^{\frac{1}{3}} 3x \, dx + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} 2 - 3x \, dx \right] = \rho \left[\frac{3}{2}\frac{1}{9} + \left(2x - \frac{3}{2}x^2 \right)_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \right] = \rho \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{3}\rho$$

$$F_3 = (N_3, f) + N_3(0)h - a\,(N_3, qN_4) = \int_0^1 \rho N_3(x) \, dx - \int_{\frac{2}{3}}^1 N_{3_x} q N_{4_x} \, dx$$

$$= \rho \left[\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} 3x - 1 \, dx + \int_{\frac{2}{3}}^1 3 - 3x \, dx \right] - q \int_{\frac{2}{3}}^1 (-3)(3) \, dx = \rho \frac{1}{3} + 3q$$

Assim, temos o vetor de forças

$$F = \begin{bmatrix} h + \frac{1}{6}\rho \\ \frac{1}{3}\rho \\ \rho\frac{1}{3} + 3q \end{bmatrix}$$

Finalmente, usando (9), o sistema matricial que nos dá a solução do vetor de coeficientes d é

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h + \frac{1}{6}\rho \\ \frac{1}{3}\rho \\ \rho\frac{1}{3} + 3q \end{bmatrix}$$

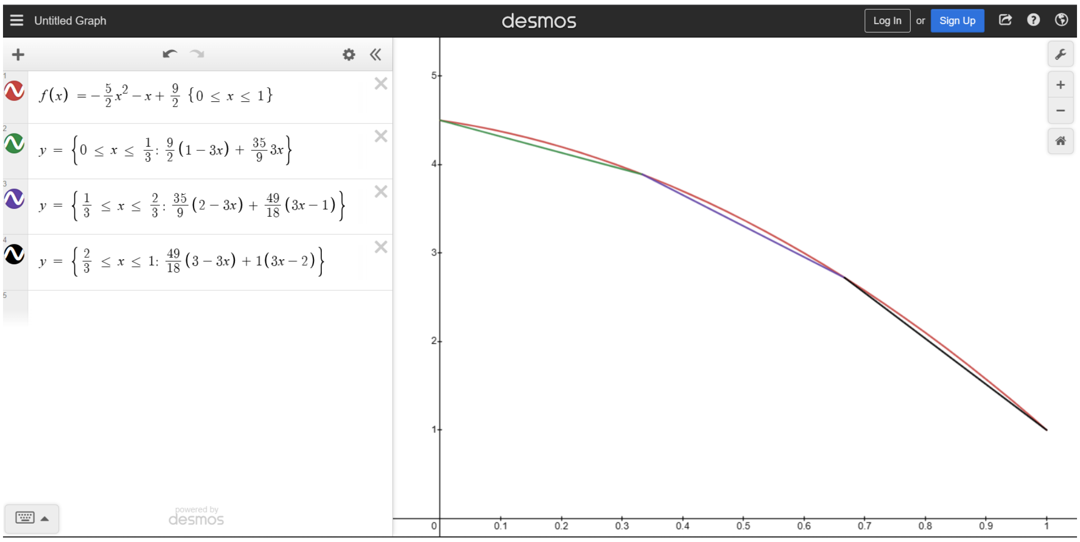
Substituindo os valores do enunciado do problema,

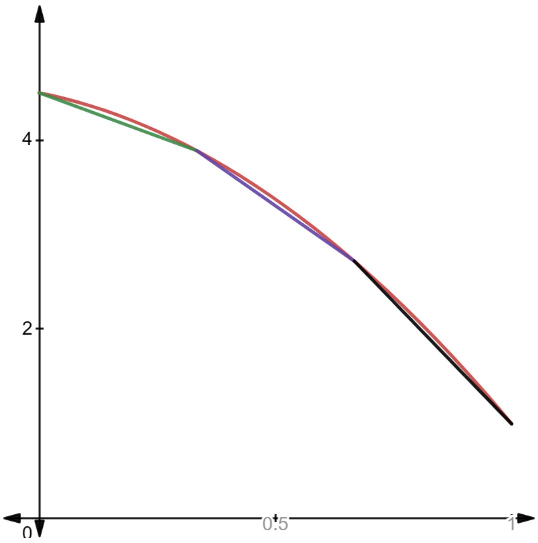
$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{11}{6} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{14}{3} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} \\ \frac{35}{9} \\ \frac{49}{18} \end{bmatrix}$$

Assim, a solução do problema encontrada pelo FEM é

$$\boxed{u^h(x) = \frac{9}{2}N_1(x) + \frac{35}{9}N_2(x) + \frac{49}{18}N_3(x) + N_4(x)} \tag{10}$$

Plotando a solução obtida pelo FEM (10) e a solução analítica (4) com o software online Desmos, temos





A curva vermelha se refere à solução $u(x)$ analítica, e as demais retas são as soluções encontradas pelo FEM com três graus de liberdade. É possível ver que, com apenas três graus de liberdade, o FEM se aproxima da solução analítica com bastante precisão e baixo erro. Além disso, nos 4 nós selecionados, temos que a solução do FEM é igual à solução analítica.
Podemos fazer a mesma análise gráfica com as derivadas das soluções. A derivada u_x da solução analítica é

$$u_x(x) = -5x - 1 \tag{11}$$

A derivada da solução do FEM é

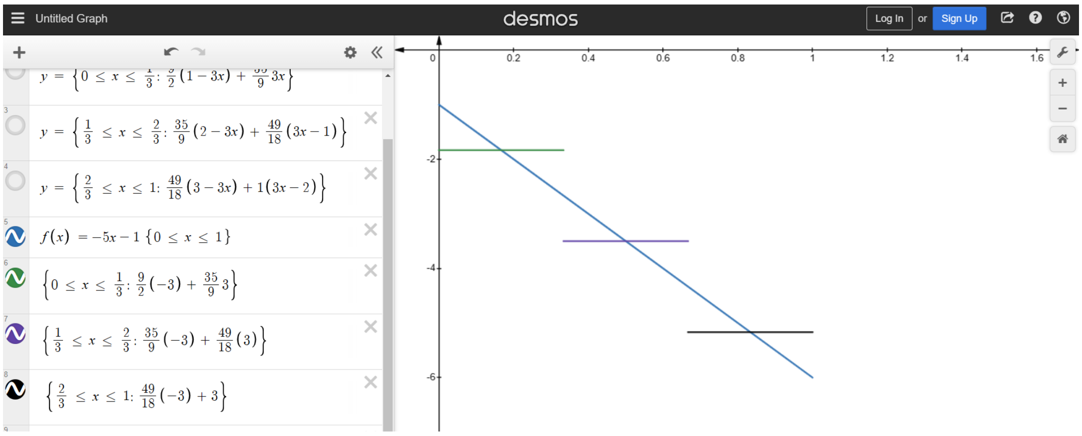
$$u_x^h(x) = \frac{9}{2}N_{1_x}(x) + \frac{35}{9}N_{2_x}(x) + \frac{49}{18}N_{3_x}(x) + N_{4_x}(x) \tag{12}$$

onde

$$N_{1_x}(x) = \begin{cases} -3, & 0 \le x \le \frac{1}{3} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad , \quad N_{2_x}(x) = \begin{cases} 3, & 0 \le x \le \frac{1}{3} \\ -3, & \frac{1}{3} \le x \le \frac{2}{3} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$N_{3_x}(x) = \begin{cases} 3, & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ -3, & \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad , \quad N_{4_x}(x) = \begin{cases} 3, & \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Assim, plotando (11) e (12) no Desmos, temos



Vemos que a derivada da solução analítica (curva azul) é igual à derivada da solução do FEM (demais curvas da imagem) em apenas em três pontos, que corresponde aos três graus de liberdades adotado na aplicação do método.