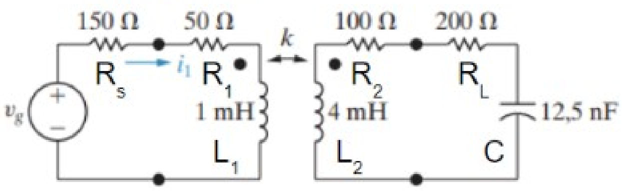
Problema P9.77

9.77 Pspice Multisim A fonte de tensão senoidal no circuito visto na Figura P9.77 está funcionando a uma frequência de 200 krad/s. O coeficiente de acoplamento é ajustado até que o valor de pico de i_1 seja máximo.

a) Qual é o valor de k?

b) Se $v_g = 560\cos(2\times10^5 t)$ V, qual é a amplitude máxima de i_1?

Figura P9.77



(a)

O valor de $i(t)$ depende da impedância Z_{in} vista pela fonte V_g. Sabemos que Z_{in} é expressa por

$$Z_{in} = Z_{11} + Z_r \tag{1}$$

Além disso, sabemos que a impedância refletida Z_r é dada por

$$Z_r = \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}} \tag{2}$$

Substituindo (2) em (1), temos

$$Z_{in} = Z_{11} + \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}} \tag{3}$$

Onde

- Z_{11}: Autoimpedância da malha do primeiro enrolamento;
- Z_{22}: Autoimpedância da malha do segundo enrolamento;
- M: Indutância mútua.

Expandindo os termos de (3), temos

$$Z_{in} = R_s + R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 (k\sqrt{L_1 L_2})^2}{j\omega L_2 + R_2 + R_L + \frac{1}{j\omega C}} \tag{4}$$

Vamos reescrever (4) de modo a isolar a parte real da parte complexa.

$$Z_{in} = R_s + R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 k^2 L_1 L_2}{j\omega L_2 + R_2 + R_L - \frac{j}{\omega C}}$$

$$Z_{in} = R_s + R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 k^2 L_1 L_2}{R_2 + R_L + j(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})}$$

$$Z_{in} = R_s + R_1 + j\omega L_1 + \frac{(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(R_2 + R_L - j(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C}))}{(R_2 + R_L + j(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C}))(R_2 + R_L - j(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C}))}$$

$$Z_{in} = R_s + R_1 + j\omega L_1 + \frac{(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(R_2+R_L) - j(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})}{(R_2+R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2}$$

$$Z_{in} = R_s + R_1 + \frac{(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(R_2+R_L)}{(R_2+R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2} + j\left(\omega L_1 - \frac{(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})}{(R_2+R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2}\right) \tag{5}$$

A partir de (5) podemos determinar o módulo de Z_{in}.

$$|Z_{in}|(k) = \sqrt{\left(R_s + R_1 + \frac{(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(R_2+R_L)}{(R_2+R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2}\right)^2 + \left(\omega L_1 - \frac{(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})}{(R_2+R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2}\right)^2} \tag{6}$$

A expressão (6) expressa o módulo de Z_{in} como uma função do coeficiente k. O valor máximo de $i(t)$ ocorre quando $Z_{in}(k)$ aitinge seu valor mínimo, ou seja, quando

$$\frac{d}{dk}|Z_{in}|(k) = 0 \tag{7}$$

Vamos diferenciar (6) com respeito a k. Antes disso, vamos adotar uma notação para reduzir o tamanho da expressão.
Sejam

$$A = \frac{(\omega^2 L_1 L_2)(R_2+R_L)}{(R_2+R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2}$$

e

$$B = \frac{(\omega^2 L_1 L_2)(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})}{(R_2+R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2}$$

Note que A e B não dependem de k. Assim, podemos reescrever (6) como

$$|Z_{in}|(k) = \sqrt{(R_s + R_1 + Ak^2)^2 + (\omega L_1 - Bk^2)^2} \tag{8}$$

Diferenciando (8) com respeito a k, temos

$$\frac{d}{dk}|Z_{in}|(k) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(R_s + R_1 + Ak^2)^2 + (\omega L_1 - Bk^2)^2}}\left(2(R_s+R_1+Ak^2)(2Ak) + 2(\omega L_1 - Bk^2)(2Bk)\right) \tag{9}$$

Para que (9) seja igual a zero, temos

$$2(R_s+R_1+Ak^2)(2Ak) + 2(\omega L_1 - Bk^2)(-2Bk) = 0$$

$$(R_s+R_1+Ak^2)(Ak) + (\omega L_1 - Bk^2)(-Bk) = 0$$

$$AkR_s + AkR_1 + A^2k^3 - \omega BkL_1 + B^2k^3 = 0$$

$$k^3(A^2+B^2)+k(AR_s+AR_1-\omega BL_1)=0$$

$$k\left(k^2(A^2+B^2)+(AR_s+AR_1-\omega BL_1)\right)=0$$

$$k^2(A^2+B^2)+AR_s+AR_1-\omega BL_1=0$$

$$k=\sqrt{\frac{\omega BL_1-AR_s-AR_1}{(A^2+B^2)}}$$

Substituindo os valores todos, temos

$$A=192$$

$$B=256$$

$$\boxed{k=0.3536}$$

(b)

Conhecido o valor de $k=0.3536$, podemos calcular o valor da impedância vista pela fonte através de (4), obtendo

$$Z_{in}=224+j168\ \Omega$$

Portanto, usando o fato que a corrente forncecida pela fonte é

$$i(t)=\frac{v_g(t)}{Z_{in}}$$

Em notação fasorial,

$$I=\frac{V_g}{Z_{in}}=\frac{\frac{560}{\sqrt{2}}\underline{/0^\circ}}{224+j168\ \Omega}$$

$$I=1.4142\underline{/-36.57^\circ}\ A$$

Portanto, o valor de pico de $i(t)$ é

$$\boxed{i_m(t)=1.4142\sqrt{2}=2\ A}$$