Aluno: Raphael Henrique Braga Leivas
Matrícula: 2020028101

Código fonte LaTeX desse arquivo pode ser visto em meu GitHub pessoal:
https://github.com/RaphaelLeivas/latex/tree/main/ListaCEII

Aceito sugestões de melhoria do código :)

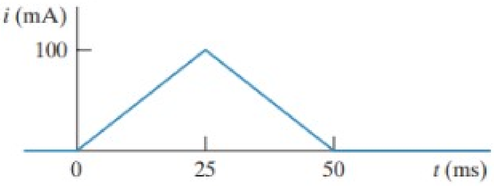
Problema P6.2

6.2 Pspice Multisim O pulso triangular de corrente mostrado na Figura P6.2 é aplicado a um indutor de 500 mH.

a) Escreva as expressões que descrevem $i(t)$ nos quatro intervalos $t < 0$, $0 \le t \le 25$ ms, 25 ms $\le t \le 50$ ms e $t > 50$ ms.

b) Deduza as expressões para a tensão, potência e energia do indutor. Use a convenção passiva.

Figura P6.2



(a)

Usando a figura, temos as expressões de $i(t)$ dadas por

$$i(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{100 \cdot 10^{-3} - 0}{25 \cdot 10^{-3} - 0}\, t, & 0 \le t < 25 \text{ ms} \\ \frac{0 - 100 \cdot 10^{-3}}{50 \cdot 10^{-3} - 25 \cdot 10^{-3}}\, t + (200 \cdot 10^{-3}), & 25 \le t < 50 \text{ ms} \\ 0, & t \ge 50 \text{ ms} \end{cases} = \begin{cases} 0 \text{ A}, & t < 0 \\ 4t \text{ A}, & 0 \le t < 25 \text{ ms} \\ 0.2 - 4t \text{ A}, & 25 \le t < 50 \text{ ms} \\ 0 \text{ A}, & t \ge 50 \text{ ms} \end{cases}$$

(b)

Sabemos que a tensão em um indutor é dada por

$$v(t) = L \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \tag{6.2.1}$$

Portanto, aplicando (6.2.1) sobre o resultado do item (a), temos

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ L \cdot 4, & 0 \le t < 25 \text{ ms} \\ L \cdot (-4), & 25 \le t < 50 \text{ ms} \\ 0, & t \ge 50 \text{ ms} \end{cases} = \begin{cases} 0 \text{ V}, & t < 0 \\ 2 \text{ V}, & 0 \le t < 25 \text{ ms} \\ -2 \text{ V}, & 25 \le t < 50 \text{ ms} \\ 0 \text{ V}, & t \ge 50 \text{ ms} \end{cases}$$

Além disso, temos que a potência no indutor é dada por

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) \tag{6.2.2}$$

Assim,

$$p(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 4t \cdot 2, & 0 \leq t < 25 \text{ ms} \\ (0.2 - 4t) \cdot (-2), & 25 \leq t < 50 \text{ ms} \\ 0, & t \geq 50 \text{ ms} \end{cases} = \begin{cases} 0 \text{ W}, & t < 0 \\ 8t \text{ W}, & 0 \leq t < 25 \text{ ms} \\ 8t - 0.4 \text{ W}, & 25 \leq t < 50 \text{ ms} \\ 0 \text{ W}, & t \geq 50 \text{ ms} \end{cases}$$

Finalmente, podemos determinar a energia $E(t)$ no indutor a partir de $p(t)$ substituindo (6.2.1) em (6.2.2).

$$p(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \cdot i(t) = L\ i(t)\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

Note que a potência é energia por unidade de tempo, logo $p(t) = \dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$. Substituindo,

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = L\ i(t)\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$dE = L\ i(t) di$$

Integrando ambos lados, temos

$$\int_{t_i}^{t_f} E(t)\, dt = \int_{i_i}^{i_f} Li(t)\, di$$

$$E(t_f) - E(t_i) = \frac{1}{2}L\left[i_f^2 - i_i^2\right]$$

Assumimos a corrente inicial $i_i = 0$ e energia inicial $E_i = 0$ também nula. Além disso, fazemos a energia final $E(t_f) = E(t)$ e a corrente do estado final como $i_f = i(t)$. Assim, isolando $E(t)$,

$$E(t) = \frac{1}{2}L\left[i(t)\right]^2 \tag{6.2.3}$$

Usando (6.2.3), temos

$$E(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2}L(4t)^2, & 0 \leq t < 25 \text{ ms} \\ \frac{1}{2}L(0.2 - 4t)^2, & 25 \leq t < 50 \text{ ms} \\ 0, & t \geq 50 \text{ ms} \end{cases} = \begin{cases} 0 \text{ J}, & t < 0 \\ 4t^2 \text{ J}, & 0 \leq t < 25 \text{ ms} \\ 0.01 - 0.4t + 4t^2 \text{ J}, & 25 \leq t < 50 \text{ ms} \\ 0 \text{ J}, & t \geq 50 \text{ ms} \end{cases}$$

Problema P6.21

6.21 Pspice Multisim O pulso de corrente de formato retangular mostrado na Figura P6.21 é aplicado a um capacitor de 0,1 μF. A tensão inicial no capacitor é uma queda de 15 V na direção de referência da corrente. Deduza a expressão da tensão no capacitor para os intervalos descritos nos itens (a)–(d).

a) $0 \leq t \leq 10\ \mu s$;

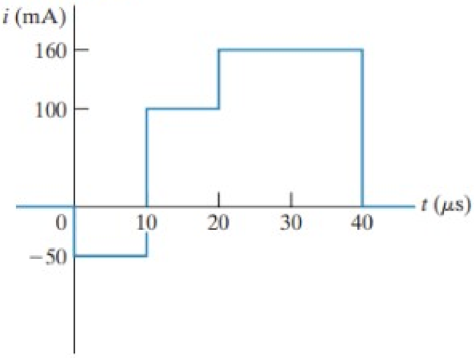
b) $10\ \mu s \leq t \leq 20\ \mu s$;

c) $20\ \mu s \leq t \leq 40\ \mu s$;

d) $40\ \mu s \leq t < \infty$;

e) Faça um gráfico de $v(t)$ no intervalo $-10\ \mu s \leq t \leq 50\ \mu s$.

Figura P6.21



(a), (b), (c), (d)

Sabemos que a tensão em um capacitor de capacitância C é dada por

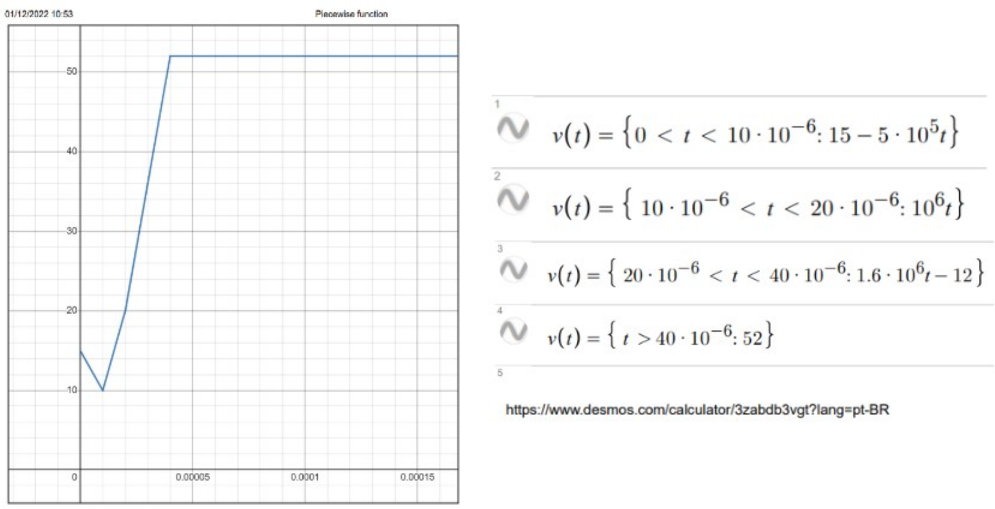
$$v(t) = V_0 + \frac{1}{C}\int_{t_i}^{t_f} i(t)\,dt \tag{6.21.1}$$

Usando a figura, e aplicando (6.21.1) nos intervalos correspondetes ao enunciado, temos

$$v(t) = \begin{cases} 15 + \frac{1}{C}\int_0^t (-50\ \text{mA})\,dt, & 0 \leq t \leq 10\ \mu s \\ 10 + \frac{1}{C}\int_{10\ \mu s}^t (100\ \text{mA})\,dt, & 10 \leq t \leq 20\ \mu s \\ 20 + \frac{1}{C}\int_{20\ \mu s}^t (160\ \text{mA})\,dt, & 20 \leq t \leq 40\ \mu s \\ 52 + \frac{1}{C}\int_{40\ \mu s}^t (0\ \text{mA})\,dt, & t > 40\ \mu s \end{cases} = \begin{cases} 15 - 5\cdot 10^5 t\ \text{V}, & 0 \leq t \leq 10\ \mu s \\ 10^6 t\ \text{V}, & 10 \leq t \leq 20\ \mu s \\ 1.6\cdot 10^6 t - 12\ \text{V}, & 20 \leq t \leq 40\ \mu s \\ 52\ \text{V}, & t > 40\ \mu s \end{cases}$$

(e)

Usando a ferramenta online Desmos, temos o gráfico de $v(t)$ em função do tempo t abaixo.



Problema P6.25

6.25 Pspice Multisim

Os três indutores no circuito da Figura P6.25 estão ligados aos terminais de uma caixa preta em $t = 0$. Sabe-se que a tensão resultante para $t > 0$ é

$$v_o = 2.000e^{-100t} \text{ V}.$$

Se $i_1(0) = -6$ A e $i_2(0) = 1$ A, determine:

a) $i_o(0)$;

b) $i_o(t), t \geq 0$;

c) $i_1(t), t \geq 0$;

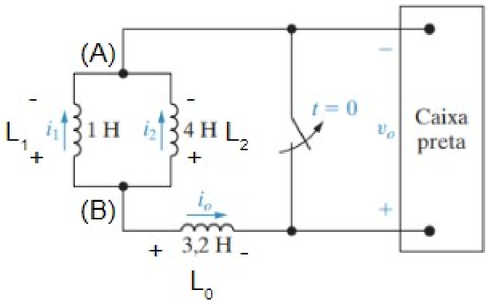
d) $i_2(t), t \geq 0$;

e) a energia inicial armazenada nos três indutores;

f) a energia total fornecida à caixa preta;

g) a energia final retida nos indutores ideais.

Figura P6.25



(a)

Aplicando análise nodal no nó essencial (B), temos

$$i_0(t) + i_1(t) + i_2(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad i_0(t) = -i_1(t) - i_2(t)$$

Substituindo no instante $t = 0$,

$$i_0(0) = -(-6) - 1$$

$$\boxed{i_0(0) = 5 \text{ A}}$$

(b)

Reduzindo os três indutores da figura via redução série-paralelo, temos um indutor equivalente L_{eq} dado por

$$L_{eq} = (1 \text{ H} \,//\, 4 \text{ H}) + 3.2 \text{ H}$$

$$L_{eq} = 4.0 \text{ H}$$

Assim, usando a expressão da corrente no indutor

$$i_0(t) = i_0(0) + \frac{1}{L} \int_{t_i}^{t_f} v_L(t)\, dt \tag{6.25.1}$$

Note que no sentido em que $i_o(t)$ está definida na figura, temos, via análise de malhas,

$$+v_o(t) + v_{L_{eq}}(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{L_{eq}}(t) = -v_o(t)$$

Assim, temos que (6.25.1) deve ter o sinal ajustado para atender a convenção passiva definida acima, ficando

$$i_0(t) = i_0(0) - \frac{1}{L} \int_{t_i}^{t_f} v_0(t)\, dt \tag{6.25.2}$$

Substituindo os valores do enunciado e resultado do item (a) em (6.25.2), temos

$$i_0(t) = 5 - \frac{1}{4}\int_0^t 2000e^{-100t}\, dt$$

$$i_0(t) = 5 - 2000\frac{1}{4}\frac{1}{-100}\left[e^{-100t} - e^0\right]$$

$$i_0(t) = 5 + 5\left[e^{-100t} - 1\right]$$

$$\boxed{i_0(t) = 5e^{-100t} \quad , \quad t \geq 0}$$

(c)

Retornando ao circuito original, temos que a queda de tensão no indutor $L_0 = 3.2\ \mathrm{H}$ é dada por

$$v_{L_0}(t) = L_0\frac{\mathrm{d}i_0}{\mathrm{d}t}$$

Substuindo o resultado encontrado no item (b), temos

$$v_{L_0}(t) = 3.2(-500e^{-100t})\ \mathrm{V} = -1600e^{-100t}\ \mathrm{V}$$

Assim, aplicamos análise de malhas para determinar a queda de tensão indutor $L_1 = 1\ \mathrm{H}$, assumindo $i_0(t)$ como a corrente de malha no sentido que ela foi definida na figura.

$$v_o(t) + v_{L_0}(t) - v_{L_1}(t) = 0$$

$$v_{L_1}(t) = v_o(t) + v_{L_0}(t) \tag{6.25.3}$$

Substituindo os resultados encontrados em (6.25.3), temos

$$v_{L_1}(t) = 2000e^{-100t} - 1600e^{-100t}$$

$$v_{L_1}(t) = 400e^{-100t}\ \mathrm{V}$$

Assim, novamente usando (6.25.1), temos a corrente $i_1(t)$ dada por

$$i_1(t) = -6 + \frac{1}{1}\int_0^t 400e^{-100t}\, dt$$

$$i_1(t) = -6 + \frac{1}{-100}400\left[e^{-100t} - e^0\right]$$

$$\boxed{i_1(t) = -2 - 4e^{-100t}\ \mathrm{A} \quad , \quad t \geq 0}$$

(d)

Usando a análise nodal do item (a), temos

$$i_2(t) = -i_0(t) - i_1(t)$$

Substituindo os valores encontrados nos itens anteriores,

$$i_2(t) = -(5e^{-100t}) - (-2 - 4e^{-100t})$$

$$\boxed{i_2(t) = 2 - e^{-100t}\ \mathrm{A} \quad , \quad t \geq 0}$$

(e)

Sabemos que a energia armazena em um indutor é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2} L \left[i(t)\right]^2 \tag{6.25.4}$$

Em $t = 0$ usamos os valores de $i(0)$ para cada um dos indutores, obtendo

$$E_0(0) = 40 \text{ J} \quad , \quad E_1(0) = 18 \text{ J} \quad , \quad E_2(0) = 2 \text{ J}$$

A energia total armazenada em $t = 0$ é, portanto,

$$E_T(0) = E_0(0) + E_1(0) + E_2(0)$$

$$\boxed{E_T(0) = 60 \text{ J}}$$

(f)

Usando o circuito equivalente com $L_{eq} = 4 \text{ H}$ e (6.25.4) em $t = 0$, temos

$$E_{ent}(0) = \frac{1}{2} L_{eq}[i_0(0)]^2$$

$$E_{ent}(0) = \frac{1}{2} 4[5]^2$$

$$\boxed{E_{ent}(0) = 50 \text{ J}}$$

(g)

A energia retida $E_R(t)$ em $t = 0$ é dada pela diferença entre a energia inicialmente armazenada e a entregue. Assim,

$$E_R(0) = E_T(0) - E_{ent}(0)$$

$$E_R(0) = 60 \text{ J} - 50 \text{ J}$$

$$\boxed{E_R(0) = 10 \text{ J}}$$

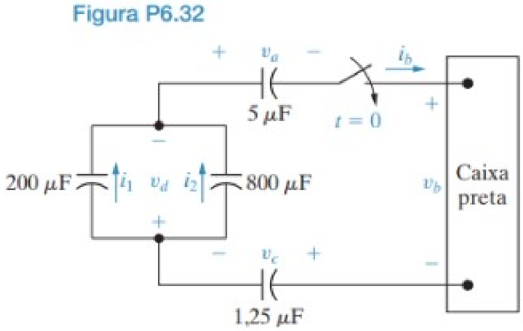
Problema P6.32

6.32 Os quatro capacitores no circuito da Figura P6.32 estão ligados aos terminais de uma caixa preta em $t = 0$. Sabe-se que a corrente resultante i_b para $t > 0$ é

$$i_b = -5e^{-50t} \text{ mA}.$$

Se $v_a(0) = -20$ V, $v_c(0) = -30$ V e $v_d(0) = 250$ V, determine o seguinte para $t \geq 0$: (a) $v_b(t)$, (b) $v_a(t)$, (c) $v_c(t)$, (d) $v_d(t)$, (e) $i_1(t)$ e (f) $i_2(t)$.

Figura P6.32



(a)

Começamos reduzindo os capacitores a uma capacitância equivalente C_{eq} via redução série-paralelo.

$$C_{eq} = (200\ \mu F\ //\ 800\ \mu F) + 5\ \mu F + 1.25\ \mu F$$

$$C_{eq} = 1\ \mu F$$

Sabemos que a tensão em um capacitor é dada por

$$v(t) = v(0) + \frac{1}{C}\int_{t_i}^{t_f} i(t)\, dt \tag{6.32.1}$$

Usando $i_b(t)$ e a capacitância equivalente,

$$v_b(t) = v_b(0) + \frac{1}{C_{eq}}\int_{0}^{t} i_b(t)\, dt$$

Usando análise de malhas em $t = 0$, com a corrente de malha $i_b(t)$, podemos identificar $v_b(0)$.

$$v_b(0) + v_a(0) + v_d(0) + v_c(0) = 0$$

$$v_b(0) = -(v_a(0) + v_d(0) + v_c(0))$$

$$v_b(0) = -(-20 + -30 + 250)$$

$$v_b(0) = -200\ \text{V}$$

Voltando à (6.32.1),

$$v_b(t) = -200 + \frac{1}{1\ \mu F}\int_{0}^{t} -0.005e^{-50t}\, dt$$

$$v_b(t) = -200 + 100\left[e^{-50t} - e^{0}\right]$$

$$\boxed{v_b(t) = -300 + 100e^{-50t}\ \text{V}}$$

(b)

Ainda usando (6.32.1), temos

$$v_a(t) = v_a(0) + \frac{1}{C_a}\int_{0}^{t} i_b(t)\, dt$$

$$v_a(t) = -20 + \frac{1}{5\ \mu F}\int_{0}^{t} -0.005e^{-50t}\, dt$$

$$v_a(t) = -20 + 20\left[e^{-50t} - e^{0}\right]$$

$$\boxed{v_a(t) = -40 + 20e^{-50t}\ \text{V}}$$

(c)

Ainda usando (6.32.1), temos

$$v_c(t) = v_c(0) + \frac{1}{C_c}\int_0^t i_b(t)\,dt$$

$$v_c(t) = -30 + \frac{1}{1.25\ \mu F}\int_0^t -0.005e^{-50t}\,dt$$

$$v_c(t) = -30 + 80\left[e^{-50t} - e^0\right]$$

$$\boxed{v_c(t) = 50 + 80e^{-50t}\ \mathrm{V}}$$

(d)

Ainda usando (6.32.1), temos

$$v_d(t) = v_d(0) + \frac{1}{C_d}\int_0^t i_b(t)\,dt$$

$$v_d(t) = 250 + \frac{1}{200\ \mu F + 800\ \mu F}\int_0^t -0.005e^{-50t}\,dt$$

$$v_d(t) = 250 + 0.1\left[e^{-50t} - e^0\right]$$

$$\boxed{v_d(t) = 249.9 + 0.1e^{-50t}\ \mathrm{V}}$$

(e)

A corrente em um capacitor é dada por

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{6.32.2}$$

Substituindo,

$$i_1(t) = (200\ \mu F)(-5e^{-50t})$$

$$\boxed{i_1(t) = -e^{-50t}\ \mathrm{mA}}$$

(f)

Novamente usando (6.32.2), temos

$$i_2(t) = (800\ \mu F)(-5e^{-50t})$$

$$\boxed{i_2(t) = -4e^{-50t}\ \mathrm{mA}}$$

Problema P6.39

6.39 Não há nenhuma energia armazenada no circuito da Figura P6.39 no momento em que a chave é aberta.

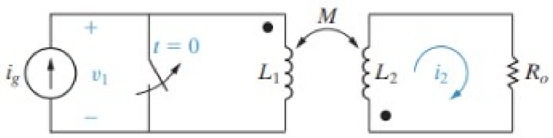
a) Deduza a equação diferencial que descreve o comportamento de i_2 se $L_1 = 5$ H, $L_2 = 0{,}2$ H, $M = 0{,}5$ H e $R_o = 10\ \Omega$.

b) Mostre que, quando $i_g = e^{-10t} - 10$ A, $t \geq 0$, a equação diferencial encontrada em (a) é satisfeita quando $i_2 = 625e^{-10t} - 250e^{-50t}$ mA, $t \geq 0$.

c) Determine a expressão para a tensão v_1 nos terminais da fonte de corrente.

d) Qual é o valor inicial de v_1? Isso faz sentido em termos do comportamento conhecido do circuito?

Figura P6.39



(a)

Aplicando análise de malhas no circuito, temos na malha 1:

$$-v_1(t) + L_1\frac{\mathrm{d}i_g}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{6.39.1}$$

Na malha 2,

$$+i_2R_o + L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_g}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{6.39.2}$$

Substituindo os valores do enunciado na equação da malha 2,

$$10i_2 + 0.2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + 0.5\frac{\mathrm{d}i_g}{\mathrm{d}t} = 0$$

Isolando i_2 na EDO,

$$\boxed{0.2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + 10i_2 = -0.5\frac{\mathrm{d}i_g}{\mathrm{d}t} \quad , \quad t \geq 0}$$

(b)

Substituindo o valor fornecido de $i_g(t) = e^{-10t} - 10$ A na EDO do item (a), temos

$$0.2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + 10i_2 = (-0.5)(-10e^{-10t})$$

$$\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + 50i_2 = 25e^{-10t}$$

A EDO possui fator integrante $M(t)$ dado por

$$M(t) = e^{\int 50\,dt} \quad \Rightarrow \quad M(t) = e^{50t}$$

Multiplicando a EDO por $M(t)$,

$$e^{50t}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + 50i_2e^{50t} = 25e^{-10t}e^{50t}$$

$$e^{50t}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + 50e^{50t}i_2 = 25e^{40t}$$

Aplicando o inverso da regra da derivada do produto,

$$\frac{\mathrm{d}\left[i_2 \cdot e^{50t}\right]}{\mathrm{d}t} = 25e^{40t}$$

Portanto,

$$i_2 \cdot e^{50t} = \int 25e^{40t}\,dt$$

$$i_2 \cdot e^{50t} = 25\frac{1}{40}(e^{40t} + C)$$

$$i_2 = 0.625\frac{e^{40t}}{e^{50t}} + \frac{C}{e^{50t}}$$

Finalmente, a solução geral da EDO é

$$\boxed{i_2(t) = 0.625e^{-10t} + Ce^{-50t}\ \mathrm{A} \quad , \quad t \geq 0}$$

Como $i_2(t) = 625e^{-10t} - 250e^{-50t}$ mA é da mesma forma que a solução geral da EDO, temos que ela satisfaz a EDO do item (a).

(c)

A partir de (6.39.1), temos

$$v_1(t) = L_1\frac{\mathrm{d}i_g}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

Usando $L_1 = 5$ H, $M = 0.5$ H, $i_g(t) = e^{-10t} - 10$ A e $i_2(t) = 625e^{-10t} - 250e^{-50t}$ mA, temos

$$v_1(t) = -50e^{-10t} - 3.125e^{-10t} + 6.25e^{-50t}$$

$$\boxed{v_1(t) = -53.125e^{-10t} + 6.25e^{-50t}\ \mathrm{V} \quad , \quad t \geq 0}$$

(d)

Usando a expressão de $v_1(t)$ calculada no item (c), temos

$$v_1(0) = -53.125e^{0} + 6.25e^{0}\ \mathrm{V}$$

$$\boxed{v_1(0) = -46.875\ \mathrm{V}}$$

Problema P6.41

6.41 a) Mostre que os dois enrolamentos acoplados magneticamente na Figura P6.41 podem ser substituídos por um único enrolamento com uma indutância de

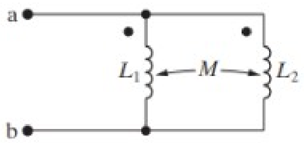
$$L_{ab} = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}.$$

(*Sugestão:* considere i_1 e i_2 correntes de malha no sentido horário nas 'janelas' da esquerda e da direita da Figura P6.41, respectivamente. Some as tensões ao longo das duas malhas. Na malha 1, considere v_{ab} a tensão aplicada não especificada. Resolva para di_1/dt em função de v_{ab}.)

b) Mostre que, se a polaridade magnética do enrolamento 2 for invertida, então

$$L_{ab} = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}.$$

Figura P6.41



(a)

Aplicando análise de malhas no circuito, temos na malha 1:

$$-v_{ab} + L_1\frac{\mathrm{d}(i_1 - i_2)}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

$$v_{ab} = \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}(L_1) + \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}(M - L_1) \tag{6.41.1}$$

Na malha 2,

$$L_1\frac{\mathrm{d}(i_2 - i_1)}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}(i_1 - i_2)}{\mathrm{d}t} + L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}(-L_1 + M) + \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}(L_1 - 2M + L_2) = 0 \tag{6.41.2}$$

A partir de (6.41.1) e (6.41.2) temos o sistema linear

$$\begin{bmatrix} L_1 & M - L_1 \\ M - L_1 & L_1 - 2M + L_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{ab} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vamos resolver o sistema aplicando o método de Cramer. Temos

$$\Delta = \begin{vmatrix} L_1 & M - L_1 \\ M - L_1 & L_1 - 2M + L_2 \end{vmatrix} = L_1^2 - 2ML_1 + L_1L_2 - (M^2 - 2ML_1 + L_1^2) = L_1L_2 - M^2$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} v_{ab} & M - L_1 \\ 0 & L_1 - 2M + L_2 \end{vmatrix} = (v_{ab})(L_1 - 2M + L_2) \quad , \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} L_1 & v_{ab} \\ M - L_1 & 0 \end{vmatrix} = (v_{ab})(L_1 - M)$$

Assim,

$$\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = v_{ab}\frac{L_1 - 2M + L_2}{L_1L_2 - M^2}$$

$$v_{ab} = \left(\frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 - 2M + L_2} \right) \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

Usando o fato de que, em um indutor, a tensão é dada por

$$v(t) = L \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

Temos que a impedância equivalente ao circuito acima, do ponto de vista dos terminais a e b, é

$$\boxed{L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 - 2M + L_2}}$$

(b)

Invertendo a polaridade magnética de L_2, temos que (6.41.1) e (6.41.2) se tornam

$$v_{ab} = \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} (L_1) + \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} (-M - L_1)$$

$$\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} (-L_1 - M) + \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} (L_1 + 2M + L_2) = 0$$

Assim, o sistema linear fica como

$$\begin{bmatrix} L_1 & -M - L_1 \\ -M - L_1 & L_1 + 2M + L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{ab} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Novamente usando Cramer,

$$\Delta = \begin{vmatrix} L_1 & -M - L_1 \\ -M - L_1 & L_1 + 2M + L_2 \end{vmatrix} = L_1^2 + 2ML_1 + L_1 L_2 - (M^2 + 2ML_1 + L_1^2) = L_1 L_2 - M^2$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} v_{ab} & -M - L_1 \\ 0 & L_1 + 2M + L_2 \end{vmatrix} = (v_{ab})(L_1 + 2M + L_2) \quad , \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} L_1 & v_{ab} \\ -M - L_1 & 0 \end{vmatrix} = (v_{ab})(L_1 + M)$$

Assim,

$$\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = v_{ab} \frac{L_1 + 2M + L_2}{L_1 L_2 - M^2}$$

Com o mesmo raciocínio usado no item (a),

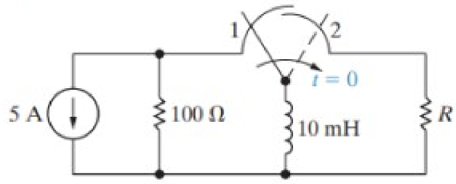
$$v_{ab} = \left(\frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + 2M + L_2} \right) \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + 2M + L_2}}$$

Problema P7.10

7.10 A chave no circuito da Figura P7.10 esteve na posição 1 por um longo tempo. Em $t = 0$, ela passa instantaneamente para a posição 2. Determine o valor de R de modo que 10% da energia inicial armazenada no indutor de 10 mH seja dissipada em R em 10 μs.

Figura P7.10



Vamos entender primeiramente como estava o estado inicial antes da chave comutar ($t < 0$).
Em regime permanente de corrente contínua, o indutor se comporta como um curto-circuito. Assim, toda a corrente $i = 5A$ da fonte passava sobre ele, e a queda de tensão no resistor era zero. Portanto,

$$i_L(0) = 5 \text{ A}$$

Quando a chave comuta, temos a seguinte equação de malha

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + iR = 0$$

Que é uma EDO cuja solução já é conhecida

$$i(t) = i(0)e^{-\frac{R}{L}t} \tag{7.10.1}$$

Com constante de tempo $\tau = \frac{R}{L}$.
A energia no indutor é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2}L[i(t)]^2 \tag{7.10.2}$$

Substituindo (7.10.1) em (7.10.2), temos

$$E(t) = \frac{1}{2}L[i(0)e^{-\frac{R}{L}t}]^2$$

Isolando R, temos

$$-\frac{2t}{L}R = \ln\left(\frac{2E(t)}{Li_0^2}\right)$$

$$R = -\frac{L}{2t}\ln\left(\frac{2E(t)}{Li_0^2}\right)$$

Para que o resistor R dissipe 10% da energia inicial no indutor, temos o indutor deve ter 90% da energia inicial no instante t, ou seja,

$$E(t) = \frac{9}{10}E_0$$

Substituindo na expressão de R,

$$R = -\frac{L}{2t}\ln\left(\frac{2\frac{9}{10}E_0}{Li_0^2}\right)$$

Note que $E_0 = \frac{1}{2}Li_0^2$. Logo,

$$R = -\frac{L}{2t}\ln\left(\frac{2\frac{9}{10}\frac{1}{2}Li_0^2}{Li_0^2}\right)$$

$$R = -\frac{L}{2t}\ln\left(\frac{9}{10}\right)$$

Assim, para que essa dissipação de energia ocorra no instante $t = 10\ \mu s$, temos

$$\boxed{R = 52.68\ \Omega}$$

Problema P7.12

7.12 No circuito da Figura P7.12, as expressões para tensão e corrente são

$$v = 160e^{-10t}\ \text{V}, t \geq 0^+;$$
$$i = 6{,}4e^{-10t}\ \text{A}, t \geq 0.$$

Determine

a) R.

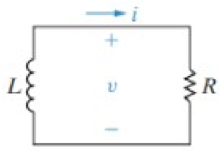
b) τ (em milissegundos).

c) L.

d) A energia inicial armazenada no indutor.

e) O tempo (em milissegundos) necessário para dissipar 60% da energia inicial armazenada.

Figura P7.12



(a)

Aplicando análise de malhas, temos

$$-v(t) + Ri = 0$$

Isolando R,

$$R = \frac{v(t)}{i(t)}$$

Substituindo os valores do enunciado,

$$R = \frac{160e^{-10t}}{6.4e^{-10t}}$$

$$\boxed{R = 25\ \Omega}$$

(b)

Em regime transitório CC, a função da corrente no indutor é

$$i(t) = i(0)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Onde τ é a constante de tempo. Comparando com o valor do enunciado,

$$\boxed{\tau = \frac{1}{10} = 100\ \text{ms}}$$

(c)

Usando

$$\tau = \frac{L}{R} \quad \Rightarrow \quad L = R\tau$$

Temos

$$\boxed{L = 25\ \Omega \cdot 100\ \text{ms} = 2.5\ \text{H}}$$

(d)

A energia em um indutor é

$$E(t) = \frac{1}{2}L[i(t)]^2 \tag{7.12.1}$$

Em $t = 0$, temos

$$\boxed{E(0) = \frac{1}{2} \cdot 2.5 \cdot (6.4)^2 = 51.2 \text{ J}}$$

(e)

Usando (7.12.1), vamos isolar t.

$$\frac{2E(t)}{L} = [i(t)]^2$$

$$\sqrt{\frac{2E(t)}{L}} = i_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\frac{1}{i_0}\sqrt{\frac{2E(t)}{L}} = e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$-\frac{t}{\tau} = \ln\left(\frac{1}{i_0}\sqrt{\frac{2E(t)}{L}}\right)$$

$$t = -\tau \ln\left(\frac{1}{i_0}\sqrt{\frac{2E(t)}{L}}\right)$$

Para que seja dissipado 60% da energia inicial do indutor, buscamos um instante t para o qual a energia $E(t)$ é 40% da inicial, ou seja,

$$E(t) = \frac{4}{10}E(0) = \frac{4}{10}\frac{1}{2}Li_0^2$$

Substituindo na expressão de t,

$$t = -\tau \ln\left(\frac{1}{i_0}\sqrt{\frac{2\frac{4}{10}\frac{1}{2}Li_0^2}{L}}\right)$$

$$t = -\tau \ln\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$$

$$\boxed{t = 41.81 \text{ ms}}$$

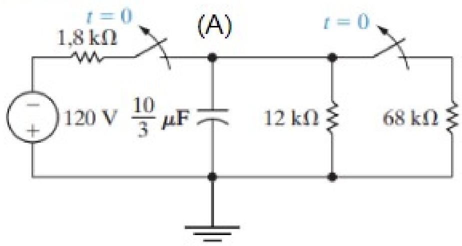
Problema P7.26

7.26 No circuito mostrado na Figura P7.26, ambas as chaves funcionam em conjunto; isto é, abrem-se ou fecham-se ao mesmo tempo. Elas estiveram fechadas por um longo tempo antes de se abrirem em $t = 0$.

a) Quantos microjoules de energia foram dissipados no resistor de 12 kΩ, 12 ms depois da abertura das chaves?

b) Quanto tempo leva para dissipar 75% da energia inicialmente armazenada?

Figura P7.26



(a)

O primeiro passo é entender o que está acontencendo antes das chaves se abrirem, ou seja, quando $t < 0$. Nesse caso, temos o capacitor atuando como um circuito aberto. Assim, usando análise nodal no nó essencial (A),

$$\frac{V_A - (-120)}{1.8\ \text{k}} + \frac{V_A}{12\ \text{k}} + \frac{V_A}{68\ \text{k}} = 0$$

$$V_A \left(\frac{1}{1.8\ \text{k}} + \frac{1}{12\ \text{k}} + \frac{1}{68\ \text{k}} \right) = -\frac{120}{1.8\ \text{k}}$$

$$V_A = -\frac{\frac{120}{1.8\ \text{k}}}{\frac{1}{1.8\ \text{k}} + \frac{1}{12\ \text{k}} + \frac{1}{68\ \text{k}}}$$

$$V_A = v_c(0) = -102\ \text{V}$$

Uma vez calculado a tensão inicial do capacitor, partimos para o $t > 0$. Quando as chaves abrem, o capacitor descarrega no resistor $R_2 = 12\ \text{k}\Omega$, resultando na função já conhecida de descarga do capacitor

$$v(t) = v(0)e^{-\frac{t}{RC}}\ \text{V} \tag{7.26.1}$$

Substituindo com os valores do exercício,

$$v(t) = -102e^{-25t}\ \text{V}$$

A potência dissipada no resistor R_2 é dada por

$$p(t) = \frac{[v(t)]^2}{R_2} = \frac{[-102e^{-25t}]^2}{12000} = 0.867e^{-50t}\ \text{W}$$

Integrando $p(t)$ no intervalo $0 \leq t \leq 12\ \text{ms}$, temos a energia dissipada pelo resistor nesse período de tempo.

$$E = \int_0^{12\ \text{ms}} p(t)\, dt$$

$$E = \int_0^{12\ \text{ms}} 0.867e^{-50}\, dt$$

$$E = 0.867\frac{1}{-50}\left[e^{-50(12\ \text{ms})} - e^0\right]$$

$$\boxed{E = 7823.6\ \mu\text{J}}$$

(b)

A energia em um capacitor é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2}C[v(t)]^2 \tag{7.26.2}$$

Isolando t,

$$v(t) = \sqrt{\frac{2E(t)}{C}}$$

Substituindo (7.26.1) na expressão acima, temos

$$e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{1}{v_0}\sqrt{\frac{2E(t)}{C}}$$

$$-\frac{t}{RC} = \ln\left(\frac{1}{v_0}\sqrt{\frac{2E(t)}{C}}\right)$$

$$t = -RC\ln\left(\frac{1}{v_0}\sqrt{\frac{2E(t)}{C}}\right)$$

Queremos que seja dissipado 75% da energia inicial armazenada. Isso significa que precisamos de um instante t tal que

$$E(t) = 25\%E(0) = \frac{1}{4}E(0) = \frac{1}{4}\frac{1}{2}Cv_o^2$$

Substituindo esse $E(t)$ na expressão de t acima,

$$t = -RC\ln\left(\frac{1}{v_0}\sqrt{\frac{2\frac{1}{4}\frac{1}{2}Cv_o^2}{C}}\right)$$

$$t = -RC\ln\left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right)$$

$$t = -RC\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

Substituindo tudo,

$$\boxed{t = 27.725 \text{ ms}}$$

Problema P7.29

7.29 No circuito da Figura P7.29 as expressões para a tensão e a corrente são

$$v = 72e^{-500t}\text{ V}, t \geq 0;$$
$$i = 9e^{-500t}\text{ mA}, t \geq 0^+.$$

Determine

a) R.

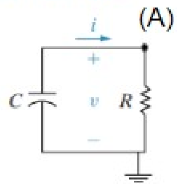
b) C.

c) τ (em milissegundos).

d) A energia inicial armazenada no capacitor.

e) Em quantos microssegundos 68% da energia inicial armazenada no capacitor são dissipados.

Figura P7.29



Antes de tudo, vamos extrair a função de $v(t)$ genérica para o circuito. Aplicamos análise nodal no nó (A) da figura, obtendo

$$-i + \frac{V_A}{R} = 0$$

Em um capacitor, sabemos que

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{7.29.1}$$

Note que i está entrando no terminal negativo de C. Assim, usamos sinal negativo em (7.29.1) para manter a convenção passiva. Substituindo (7.29.1) na equação nodal, e usando $v = V_A$, temos

$$-\left(-C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{v}{R} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{v}{RC} = 0$$

Usando o fator integrante $M(t) = e^{\frac{1}{RC}t}$, temos

$$e^{-\frac{1}{RC}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + e^{\frac{1}{RC}t}\frac{v}{RC} = 0$$

Aplicando o inverso da regra da derivada do produto,

$$\frac{\mathrm{d}[v(t)\cdot e^{\frac{1}{RC}t}]}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$v(t)\cdot e^{\frac{1}{RC}t} = K$$

$$v(t) = Ke^{-\frac{1}{RC}t}\ \mathrm{V}\,,\ t \geq 0 \tag{7.29.2}$$

(a)

Usando a Lei de Ohm,

$$\boxed{R = \frac{v(t)}{i(t)} = \frac{72e^{-500t}\ \mathrm{V}}{9e^{-500t}\ \mathrm{mA}} = 8\ \mathrm{k\Omega}}$$

(b)

Comparando (7.29.1) com a função de $v(t)$ dada no exercício, temos

$$-\frac{1}{RC} = -500$$

$$C = -\frac{1}{R(-500)}$$

$$\boxed{C = 250\ \mathrm{nF}}$$

(c)

A constante de tempo τ é definida como

$$\tau = RC \tag{7.29.3}$$

Assim,

$$\boxed{\tau = 2 \text{ ms}}$$

(d)

A energia no capacitor é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2}C[v(t)]^2 \tag{7.29.4}$$

Assim, em $t = 0$, temos a energia inicial

$$E(0) = \frac{1}{2}(250 \text{ nF})[72 \text{ V}]^2$$

$$\boxed{E(0) = 648\ \mu\text{J}}$$

(e)

Isolando t em (7.29.4),

$$v(t) = \sqrt{\frac{2E(t)}{C}}$$

Substituindo a função de $v(t)$ do enunciado na expressão acima, temos

$$e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{1}{v_0}\sqrt{\frac{2E(t)}{C}}$$

$$-\frac{t}{RC} = \ln\left(\frac{1}{v_0}\sqrt{\frac{2E(t)}{C}}\right)$$

$$t = -RC\ln\left(\frac{1}{v_0}\sqrt{\frac{2E(t)}{C}}\right)$$

Queremos que seja dissipado 68% da energia inicial armazenada. Isso significa que precisamos de um instante t tal que

$$E(t) = 32\% E(0) = \frac{32}{100}E(0) = \frac{32}{100}\frac{1}{2}Cv_o^2$$

Substituindo esse $E(t)$ na expressão de t acima,

$$t = -RC\ln\left(\frac{1}{v_0}\sqrt{\frac{2\frac{32}{100}\frac{1}{2}Cv_o^2}{C}}\right)$$

$$t = -RC\ln\left(\sqrt{\frac{32}{100}}\right)$$

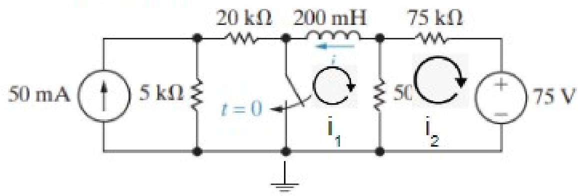
Substituindo tudo,

$$\boxed{t = 1139.43\ \mu\text{s}}$$

Problema P7.35

7.35 Depois de a chave no circuito da Figura P7.35 estar aberta por um longo tempo, ela é fechada em $t = 0$. Calcule (a) o valor inicial de i; (b) o valor final de i; (c) a constante de tempo para $t \geq 0$ e (d) a expressão numérica para $i(t)$ quando $t \geq 0$.

Figura P7.35



(a)

Para calcular o valor inicial $i(0)$ de i, analisamos o circuito em $t < 0$, quando o indutor se comporta como um curto-circuito. Assim, aplicando análise de malhas com as correntes i_1 e i_2. Na malha 1,

$$5\ \mathrm{k}(i_1 - 50\ \mathrm{m}) + 20\ \mathrm{k}(i_1) + 50\ \mathrm{k}(i_1 - i_2) = 0$$

$$i_1\,(5\ \mathrm{k} + 20\ \mathrm{k} + 50\ \mathrm{k}) + i_2\,(-50\ \mathrm{k}) = (5\ \mathrm{k})(50\ \mathrm{m})$$

$$i_1\,(75\ \mathrm{k}) + i_2\,(-50\ \mathrm{k}) = 250$$

Para a malha 2,

$$50\ \mathrm{k}(i_2 - i_1) + 75\ \mathrm{k}(i_2) + 75 = 0$$

$$i_1(-50\ \mathrm{k}) + i_2(125\ \mathrm{k}) = -75$$

Com as duas equações de malha, temos o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 75\ \mathrm{k} & -50\ \mathrm{k} \\ -50\ \mathrm{k} & 125\ \mathrm{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 250 \\ 75 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 75 & -50 \\ 0 & 275 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 250\ \mathrm{m} \\ 275\ \mathrm{m} \end{bmatrix}$$

$$i_1 = 4\ \mathrm{mA} \quad , \quad i_2 = 1\ \mathrm{mA}$$

Note que a corrente de malha i_1 está no sentido contrário ao definido para i no enunciado. Assim,

$$\boxed{i(0) = -4\ \mathrm{mA}}$$

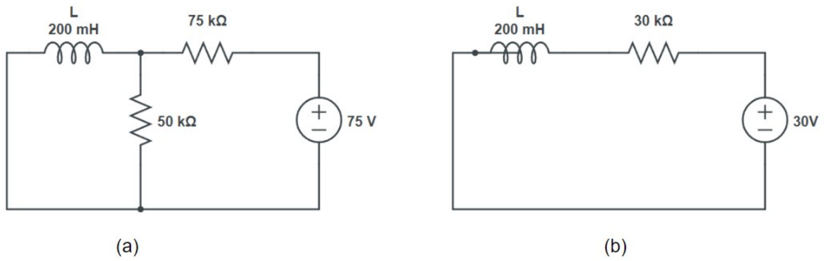
(b)

Vamos primeiro determinar a expressão de $i(t)$ no indutor para $t > 0$. Quando as chaves se fecham, temos o circuito de 7.35.1 (a). Reduzindo o circuito da Figura 7.35.1 (a) via transformações de fonte, temos o circuito da Figura 7.35.1 (b).
Na Figura 7.35.1 (b), aplicamos análise de malhas

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = 30$$

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}i = \frac{30}{L}$$

Figure 7.35.1: (a) Circuito do problema com a chave fechada. (b) Redução via transformações de fonte.



Usando o fator integrante $M(t) = e^{\frac{R}{L}t}$

$$e^{\frac{R}{L}t}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + e^{\frac{R}{L}t}\frac{R}{L}i = e^{\frac{R}{L}t}\frac{30}{L}$$

Aplicando o inverso da regra da derivada do produto,

$$\frac{\mathrm{d}[i \cdot e^{\frac{R}{L}t}]}{\mathrm{d}t} = e^{\frac{R}{L}t}\frac{30}{L}$$

$$i \cdot e^{\frac{R}{L}t} = \int e^{\frac{R}{L}t}\frac{30}{L}\,dt$$

$$i(t) = e^{-\frac{R}{L}t}\frac{30}{L}\frac{L}{R}\left[e^{\frac{R}{L}t} + K\right]$$

$$i(t) = 0.001 + Ke^{-150000t}$$

Usando o resultado encontrado no item (a) que $i(0) = -4$ mA, temos $K = -0.005$. Portanto,

$$\boxed{i(t) = 1 - 5e^{-150000t}\ \mathrm{mA}\,,\ t \geq 0}$$

O valor final $i(\infty)$ da corrente é

$$\lim_{t\to\infty} i(t) = 1 - 0 = 1\ \mathrm{mA}$$

(c)

A constante de tempo do circuito 7.35.1 (b) é

$$\boxed{\tau = \frac{L}{R} = 6.67\ \mu\mathrm{s}}$$

(d)

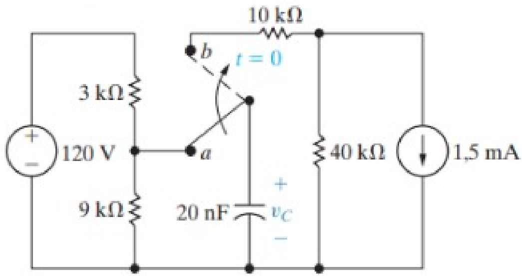
Como mostrado no item (b),

$$\boxed{i(t) = 1 - 5e^{-150000t}\ \mathrm{mA}\,,\ t \geq 0}$$

Problema P7.53

7.53 A chave no circuito da Figura P7.53 esteve na posição a por um longo tempo. Em $t = 0$, ela é colocada na posição b. Calcule (a) a tensão inicial no capacitor; (b) a tensão final no capacitor; (c) a constante de tempo (em microssegundos) para $t > 0$ e (d) o tempo (em microssegundos) necessário para a tensão no capacitor anular-se, depois de a chave ser colocada na posição b.

Figura P7.53



(a)

Em $t < 0$, como o capacitor está em paralelo com um divisor de tensão, a tensão inicial no capacitor é dada por

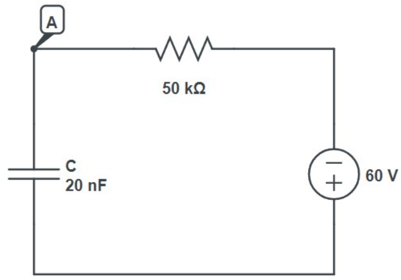
$$v(0) = 120\frac{9\ \text{k}}{3\ \text{k} + 9\ \text{k}}$$

$$\boxed{v(0) = 90\ \text{V}}$$

(b)

Vamos determinar a função da tensão no capacitor para $t > 0$. Usando transformações de fonte, podemos reduzir o circuito com a chave na posição b para o circuito da Figura 7.53.1.

Figure 7.53.1: Circuito com a chave em b reduzido.



Feito isso, aplicamos análise nodal no nó (A) mostrado em 7.53.1.

$$-i_c + \frac{V_A - (-60)}{50\ \text{k}} = 0$$

Usando $V_A = v$, $i_c = C\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ (com a convenção passiva), temos

$$-(-C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}) + \frac{v}{50\ \text{k}} = -12 \cdot 10^{-3}$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{v}{C50\ \text{k}} = -\frac{12 \cdot 10^{-3}}{C}$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{v}{0.001} = -60000$$

Usando o fator integrante $M(t) = e^{1000t}$,

$$e^{1000t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + e^{1000t}\frac{v}{0.001} = -60000e^{1000t}$$

Aplicando o inverso da regra da derivada do produto,

$$\frac{\mathrm{d}[v(t) \cdot e^{1000t}]}{\mathrm{d}t} = -60000e^{1000t}$$

$$v(t) \cdot e^{1000t} = \int -60000e^{1000t}\, dt$$

$$v(t) = e^{-1000t}(-60000)\frac{1}{1000}[e^{1000t} + K]$$

$$v(t) = -60 - 60Ke^{-1000t}$$

Sabemos que, do item (a), $v(0) = 90$ V, logo temos $K = -2.5$ e

$$v(t) = -60 + 150e^{-1000t} \text{ V}\,,\ t \geq 0 \tag{7.53.1}$$

Uma vez determinado a função de $v(t)$, temos que valor final $v(\infty)$ da tensão é

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = -60 + 0 = -60 \text{ V}$$

$$\boxed{v(\infty) = -60 \text{ V}}$$

(c)

Na expressão de $v(t)$ encontrada em (7.53.1), temos

$$\boxed{\tau = \frac{1}{1000} = 1 \text{ ms}}$$

(d)

Isolando t em (7.53.1), temos

$$e^{-1000t} = \frac{v(t) + 60}{150}$$

$$-1000t = \ln\left(\frac{v(t) + 60}{150}\right)$$

$$t = -\frac{1}{1000}\ln\left(\frac{v(t) + 60}{150}\right)$$

Queremos o instante t tal que $v(t) = 0$. Substituindo $v(t) = 0$ na expressão acima, temos

$$t = -\frac{1}{1000}\ln\left(\frac{60}{150}\right)$$

$$\boxed{t = 916.29\ \mu\text{s}}$$

Problema P8.4

8.4 A resistência, indutância e capacitância de um circuito RLC em paralelo são 2.000 Ω, 250 mH e 10 nF, respectivamente.

a) Calcule as raízes da equação característica que descreve a resposta de tensão do circuito.

b) A resposta será superamortecida, subamortecida ou criticamente amortecida?

c) Qual é o valor de R que resultará em uma frequência amortecida de 12 krads/s?

d) Quais são as raízes da equação característica para o valor de R determinado em (c)?

e) Qual é o valor de R que resultará em uma resposta criticamente amortecida?

(a)

Sabemos que a equação característica da EDO de um circuito RLC paralelo é dada por

$$s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC} = 0 \tag{8.4.1}$$

Substituindo os dados do problema em (8.4.1), temos

$$s^2 + 5 \cdot 10^4 s + 4 \cdot 10^9 = 0$$

Aplicando Bhaskara,

$$s = \frac{-(5 \cdot 10^4) \pm \sqrt{(5 \cdot 10^4)^2 - 4(1)(4 \cdot 10^8)}}{2(1)}$$

$$\boxed{s_1 = -10000 \text{ rad/s} \quad , \quad s_2 = -40000 \text{ rad/s}}$$

(b)

A resposta da tensão depende do valor de Δ da equação característica, usada no item (a). Assim,

$$\Delta = (5 \cdot 10^4)^2 - 4(1)(4 \cdot 10^8)$$

$$\Delta = 9 \cdot 10^8$$

Como $\Delta > 0$, temos que a resposta é superamortecida.

(c)

A frequência angular amortecida ω_d é definida como

$$\omega_d = \sqrt{\omega_o^2 - \alpha^2} \tag{8.4.2}$$

onde ω_o é a frequência angular de ressonância e α é o fator de armotecimento. Expandindo esses dois termos conforme suas definições, (8.4.2) se torna

$$\omega_d = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^2 - \left(\frac{1}{2RC}\right)^2}$$

$$\omega_d = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}}$$

Isolando R, temos

$$\omega_d^2 = \frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}$$

$$\frac{1}{R^2} = -4C^2\left(\omega_d^2 - \frac{1}{LC}\right)$$

$$R = \sqrt{\frac{1}{-4C^2\left(\omega_d^2 - \frac{1}{LC}\right)}}$$

Substituindo $\omega_d = 12\ \mathrm{krad/s}$ e os demais valores do enunciado, temos

$$\boxed{R = 3125\ \Omega}$$

(d)

Com $R = 3125\ \Omega$ em (8.4.1),

$$s = \frac{-(3.2\cdot 10^4) \pm \sqrt{(3.2\cdot 10^4)^2 - 4(1)(4\cdot 10^8)}}{2(1)}$$

$$s = \frac{-(3.2\cdot 10^4) \pm \sqrt{-5.76\cdot 10^8}}{2(1)}$$

Note que agora temos que usar raízes complexas pois $\Delta < 0$.

$$s = \frac{-(3.2\cdot 10^4) \pm j(2.4\cdot 10^4)}{2(1)}$$

$$\boxed{s_1 = -16000 + j12000\ \mathrm{rad/s} \quad , \quad s_2 = -16000 - j24000\ \mathrm{rad/s}}$$

(e)

Para que o circuito seja criticamente amortecido, precisamos de $\Delta = 0$. Assim, novamente usando (8.4.1),

$$\Delta = \left(\frac{1}{RC}\right)^2 - 4(1)\left(\frac{1}{LC}\right) = 0$$

Isolando R,

$$\frac{1}{R^2C^2} = 4\frac{1}{LC}$$

$$R = \sqrt{\frac{1}{4C^2\frac{1}{LC}}} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Substituindo os valores do enunciado,

$$\boxed{R = 2500\ \Omega}$$

Problema P8.10

8.10 Pspice Multisim A resistência do resistor no circuito do Exemplo 8.4 é alterada para 3.200 Ω.

a) Determine a expressão numérica para $v(t)$ quando $t \geq 0$.

b) Desenhe um gráfico de $v(t)$ para o intervalo de tempo $0 \leq t \leq 7$ ms. Compare essa resposta com a do Exemplo 8.4 ($R = 20$ kΩ) e a do Exemplo 8.5 ($R = 4$ kΩ). Em particular, compare os valores de pico de $v(t)$ e os tempos em que esses valores ocorrem.

(a)

O circuito do Exemplo 8.4 é um circuito RLC paralelo, com equação característica já conhecida:

$$s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC} = 0 \tag{8.10.1}$$

Substituindo com os valores do enunciado,

$$s = \frac{-(2500) \pm \sqrt{(2500)^2 - 4(1)(1 \cdot 10^6)}}{2(1)}$$

$$s_1 = -500 \text{ rad/s} \quad , \quad s_2 = -2000 \text{ rad/s}$$

Agora analisamos as condições iniciais do circuito. Temos

$$v(0) = 0 \text{ V} \tag{8.10.2}$$

Para a condição de inicial de $\dfrac{\mathrm{d}v(0)}{\mathrm{d}t}$, aplicamos análise nodal no nó superior do circuito em $t = 0$, obtendo

$$i_c(0) + i_L(0) + i_R = 0$$

$$i_c(0) + -12.25 \text{ mA} + \frac{v(0)}{20 \text{ k}\Omega} = 0$$

$$i_c(0) = 12.25 \text{ mA}$$

Note que

$$i_c = C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}v(0)}{\mathrm{d}t} = \frac{i_c(0)}{C}$$

Assim, subsituindo o valor de $i_c(0)$ encontrado, temos a segunda condição inicial da EDO dada por

$$\frac{\mathrm{d}v(0)}{\mathrm{d}t} = 98000 \text{ V/s} \tag{8.10.3}$$

Além disso, sabemos que a solução da EDO é da forma

$$v(t) = Ae^{st}$$

Com as duas raízes encontradas s_1 e s_2, temos que a solução geral é dada pela combinação linear

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) \tag{8.10.4}$$

Onde $v_1(t)$ e $v_2(t)$ são duas possíveis soluções para $v(t)$ dadas por

$$\begin{cases} v_1(t) = A_1 e^{s_1 t} \\ v_2(t) = A_2 e^{s_2 t} \end{cases}$$

Diferenciando (8.10.4) com respeito a t, temos duas equações

$$\begin{cases} v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \\ \dfrac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = A_1 s_1 e^{s_1 t} + A_2 s_2 e^{s_2 t} \end{cases}$$

Em $t = 0$, temos as condições iniciais já conhecidas em (8.10.2) em (8.10.3)

$$\begin{cases} v(0) = A_1 e^{s_1 0} + A_2 e^{s_2 0} \\ \dfrac{\mathrm{d}v(0)}{\mathrm{d}t} = A_1 s_1 e^{s_1 0} + A_2 s_2 e^{s_2 0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 + A_2 = 0 \text{ V} \\ A_1 s_1 + A_2 s_2 = 98000 \text{ V/s} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = 65.33 \\ A_2 = -65.33 \end{cases}$$

Conhecidos coeficientes A_1 e A_2, bem como as raízes s_1 e s_2, temos a solução geral $v(t)$ dada por (8.10.4)

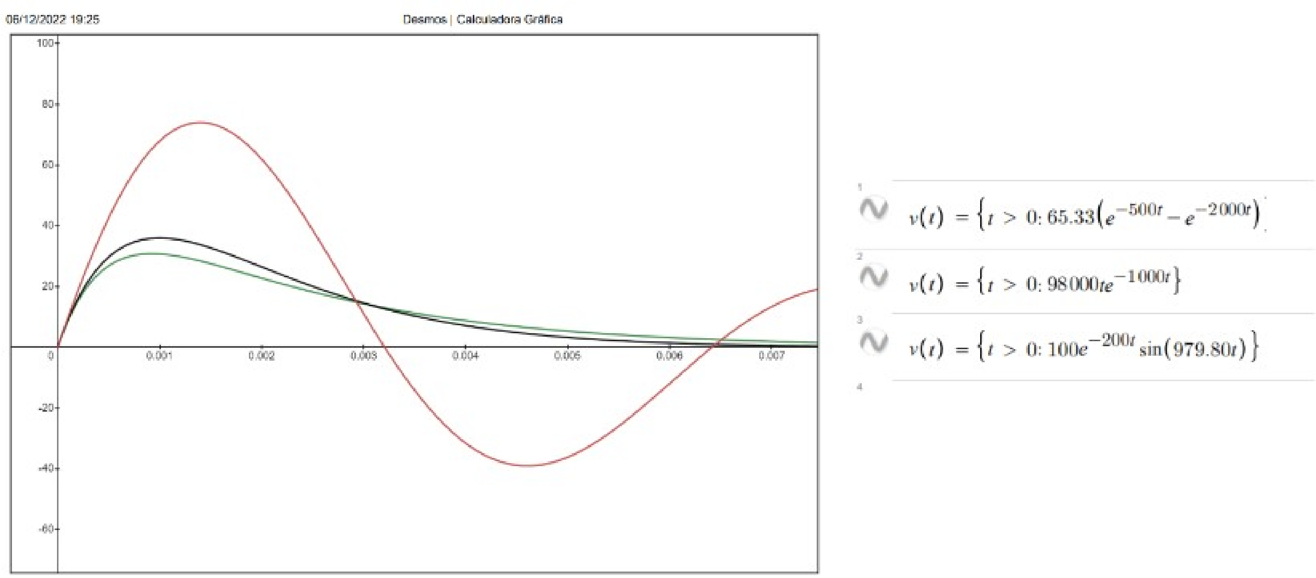
$$\boxed{v(t) = 65.33\left[e^{-500t} - e^{-2000t}\right] \text{ V}, \, t \geq 0}$$

(b)

Temos três funções para $v(t)$:

$$\begin{cases} v(t) = 65.33\left[e^{-500t} - e^{-2000t}\right] \text{ V}, \, t \geq 0 & \text{Resposta superamortecida} \\ v(t) = 98.000te^{-1.000t} \text{ V}, \, t \geq 0 & \text{Resposta criticamente amortecida} \\ v(t) = 100e^{-200t} sen(979.80t) \text{ V}, \, t \geq 0 & \text{Resposta subamortecida} \end{cases}$$

Usando a ferramenta online Desmos, temos os três gráficos das três funções abaixo. A curva vermelha é a subamortecida, a preta é a criticamente amortecida e a curva verde é a resposta superamortecida. A resposta subamortecida apresenta o maior valor de pico da tensão, mas é a que gasta mais tempo para ele ocorrer. Já a resposta superamortecida possui o menor valor de pico, mas é o que chega mais rápido nesse pico.



Problema P8.17

8.17 a) Projete um circuito RLC em paralelo (veja a Figura 8.1) usando valores de componentes do Apêndice H, com uma frequência angular de ressonância de 5.000 rad/s. Escolha um resistor ou crie uma rede de resistores de modo que a resposta seja criticamente amortecida. Desenhe seu circuito.

b) Calcule as raízes da equação característica para a resistência em (a).

(a)

Para o projeto do circuito, fixamos arbitrariamente o indutor selecionado o de $L = 1\ \mathrm{mH}$. Para cumprir o requisito da frequência angular de ressonância ser $\omega_o = 5000\ \mathrm{rad/s}$, calculamos C através de

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{\omega_o^2 L}$$

$$C = 40\ \mu\mathrm{F}$$

Podemos atingir uma capacitância equivalente de $C = 40\ \mu\mathrm{F}$ usando quatro capacitores de $C_i = 10\ \mu\mathrm{F}$ em paralelo. Para o requisito de ele ser criticamente amortecido, temos que

$$\omega_o^2 = \alpha^2 \tag{8.17.1}$$

Expandindo (8.17.1) conforme as definições,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^2 = \left(\frac{1}{2RC}\right)^2$$

Isolando R,

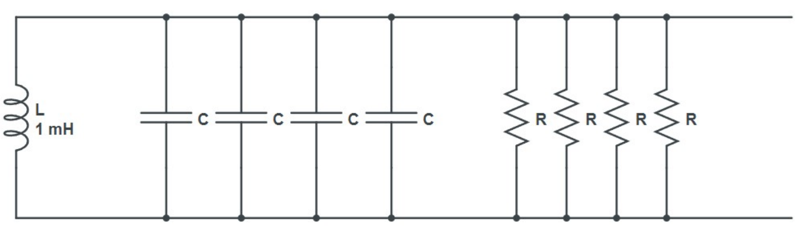
$$R = \frac{\sqrt{LC}}{2C}$$

$$R = 2.5\ \Omega$$

Podemos obter exatamente uma resistência equivalente de $R = 2.5\ \Omega$ com 4 resistores de $R_i = 10\ \Omega$ em paralelo.

Assim, temos o circuito projetado na imagem abaixo.

Figure 8.17.1: Circuito RLC projetado. Temos $R = 10\ \Omega$ e $C = 10\ \mu\mathrm{F}$.



(b)

A equação característica do circuito é

$$s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC} = 0 \tag{8.17.2}$$

Cuja solução é

$$s = \frac{-\frac{1}{RC} \pm \sqrt{\Delta}}{2(1)}$$

Note que o circuito já foi projetado para ser criticamente amortecido, e foi possível obter exatamente as resistências e capacitâncias equivalentes necessárias para obter essa reposta. Logo, temos $\Delta = 0$ e a solução se reduz a

$$s = \frac{-\frac{1}{RC}}{2} \quad \Rightarrow \quad s = -\frac{1}{2RC}$$

Assim, as raízes da equação característica são

$$\boxed{s_1 = s_2 = -5000 \text{ rad/s}}$$

Problema P8.19

8.19 Pspice Multisim No circuito da Figura 8.1, $R = 5\ \text{k}\Omega$, $L = 8$ H, $C = 125$ nF, $V_0 = 30$ V e $I_0 = 6$ mA.

a) Determine $v(t)$ para $t \geq 0$.

b) Determine os primeiros três valores de t para os quais dv/dt é igual a zero. Esses valores devem ser denotados como t_1, t_2 e t_3.

c) Mostre que $t_3 - t_1 = T_d$.

d) Mostre que $t_2 - t_1 = T_d/2$.

e) Calcule $v(t_1)$, $v(t_2)$ e $v(t_3)$.

f) Faça um gráfico de $v(t)$ para $0 \leq t \leq t_2$.

(a)

O primeiro passo é identificar as condições inicias de $v(t)$. Temos

$$v(0) = 30 \text{ V} \tag{8.19.1}$$

Além disso, para a condição de inicial de $\dfrac{\mathrm{d}v(0)}{\mathrm{d}t}$, aplicamos análise nodal no nó superior do circuito em $t = 0$, obtendo

$$i_c(0) + i_L(0) + i_R(0) = 0$$

$$i_c(0) + 6 \text{ mA} + \frac{v(0)}{5\ \text{k}\Omega} = 0$$

$$i_c(0) = -12 \text{ mA}$$

Note que

$$i_c = C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}v(0)}{\mathrm{d}t} = \frac{i_c(0)}{C}$$

Assim, subsituindo o valor de $i_c(0)$ encontrado, temos a segunda condição inicial da EDO dada por

$$\frac{\mathrm{d}v(0)}{\mathrm{d}t} = -96 \text{ kV/s} \tag{8.19.2}$$

Como o circuito da Figura 8.1 é um circuito RLC paralelo, temos que a equação característica é dada por

$$s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC} = 0 \tag{8.19.3}$$

Que possui solução

$$s = \frac{-(1600) \pm \sqrt{(1600)^2 - 4(1)(10^6)}}{2(1)}$$

Note que temos o discriminante $\Delta < 0$. Nesse caso, temos soluções complexas para a equação característica e a resposta da tensão é subamortecida.

$$s = \frac{-1600 \pm j1200}{2}$$

$$s_1 = -800 + j600 \text{ rad/s} \quad , \quad s_2 = -800 - j600 \text{ rad/s}$$

Sabemos que a solução da EDO é da forma

$$v(t) = Ae^{st}$$

Com as duas raízes encontradas s_1 e s_2, temos que a solução geral é dada pela combinação linear

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) \tag{8.19.4}$$

Onde $v_1(t)$ e $v_2(t)$ são duas possíveis soluções para $v(t)$ dadas por

$$\begin{cases} v_1(t) = A_1 e^{s_1 t} \\ v_2(t) = A_2 e^{s_2 t} \end{cases}$$

Diferenciando (8.19.4) com respeito a t, temos duas equações

$$\begin{cases} v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \\ \dfrac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = A_1 s_1 e^{s_1 t} + A_2 s_2 e^{s_2 t} \end{cases}$$

Em $t = 0$, temos as condições iniciais já conhecidas em (8.19.1) em (8.19.2)

$$\begin{cases} v(0) = A_1 e^{s_1 0} + A_2 e^{s_2 0} \\ \dfrac{\mathrm{d}v(0)}{\mathrm{d}t} = A_1 s_1 e^{s_1 0} + A_2 s_2 e^{s_2 0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 + A_2 = 30 \text{ V} \\ A_1 s_1 + A_2 s_2 = -96 \text{ kV/s} \end{cases}$$

De posse dessas equações, temos o sistema linear para identificar os coeficientes A_1 e A_2

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ s_1 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ -96000 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -s_1 & -s_1 \\ s_1 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30s_1 \\ -96000 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -s_1 & -s_1 \\ 0 & s_2 - s_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30s_1 \\ -96000 - 30s_1 \end{bmatrix}$$

Assim, temos

$$A_2 = \frac{-96000 - 30s_1}{s_2 - s_1} \Rightarrow A_2 = \frac{-96000 - 30(-800 + j600)}{-800 - j600 - (-800 + j600)}$$

$$A_2 = \frac{-72000 - j18000}{-j1200}$$

$$A_2 = 15 - j60 \quad , \quad A_1 = 15 + j60$$

Conhecidos coeficientes A_1 e A_2, bem como as raízes s_1 e s_2, temos a solução geral $v(t)$ na forma de (8.19.4)

$$v(t) = (15 + j60)e^{(-800+j600)t} + (15 - j60)e^{(-800-j600)t}\ \mathrm{V}\,,\ t \geq 0$$

Vamos remover os exponenciais complexos usando a identidade de Euler.

$$v(t) = (15 + j60)e^{-800t}e^{j600t} + (15 - j60)e^{-800t}e^{-j600t}$$

$$v(t) = (15 + j60)e^{-800t}(\cos(600t) + j\sin(600t)) + (15 - j60)e^{-800t}(\cos(600t) - j\sin(600t))$$

Evidenciando o termo e^{-800t} e expandindo os demais via propriedade distributiva, temos que todas parcelas complexas se cancelam e ficamos com

$$\boxed{v(t) = e^{-800t}\left[30\cos(600t) - 120\sin(600t)\right]\ \mathrm{V}\,,\ t \geq 0}$$

(b)

Diferenciando $v(t)$ encontrado no item (a) com respeito a t, temos

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = (30\cos(600t) - 120\sin(600t))(-800)e^{-800t} + e^{-800t}(-30\sin(600t)(600) - 120\cos(600t)(600))$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = e^{-800t}\left[-24000\cos(600t) + 96000\sin(600t) - 18000\sin(600t) - 72000\cos(600t)\right]$$

Para que $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$, temos

$$-24000\cos(600t) + 96000\sin(600t) - 18000\sin(600t) - 72000\cos(600t) = 0$$

$$\sin(600t)(96000 - 18000) - \cos(600t)(24000 + 72000) = 0$$

$$\frac{\sin(600t)}{\cos(600t)} = \frac{24000 + 72000}{96000 - 18000}$$

$$\tan(600t) = 1.23076 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\tan^{-1}(1.23076)}{600}$$

Usando a propriedade das tangentes de

$$\tan(\theta) = \tan(\theta + n\pi)\,,\ n = 0, 1, 2, 3...$$

Temos

$$t = \frac{0.8884 + n\pi}{600}\,,\ n = 0, 1, 2, 3...$$

Os três primeiros valores de t que satisfazem são

$$\boxed{t_1 = 1.481\ \mathrm{ms}\,,\ t_2 = 6.717\ \mathrm{ms}\,,\ t_3 = 11.95\ \mathrm{ms}}$$

(c)

Sabemos que frequência angular de amortecimento ω_d é dada por

$$\omega_d = \sqrt{\omega_o^2 - \alpha^2} \tag{8.19.5}$$

Expandindo os termos conforme as definições,

$$\omega_d = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}}$$

O período de ω_d é

$$T_d = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}}}$$

$$T_d = 10.47 \text{ ms}$$

A diferença $t_3 - t_1$ é

$$t_3 - t_1 = 11.95 \text{ ms} - 1.481 \text{ ms} = 10.469 \text{ ms}$$

Portanto,

$$\boxed{T_d = t_3 - t_1}$$

(d)

Temos

$$\frac{T_d}{2} = \frac{10.47 \text{ ms}}{2} = 5.235 \text{ ms}$$

Além disso,

$$t_2 - t_1 = 6.717 \text{ ms} - 1.481 \text{ ms} = 5.236 \text{ ms}$$

Portanto,

$$\boxed{\frac{T_d}{2} = t_2 - t_1}$$

(e)

Usando o resultado do item (a), temos

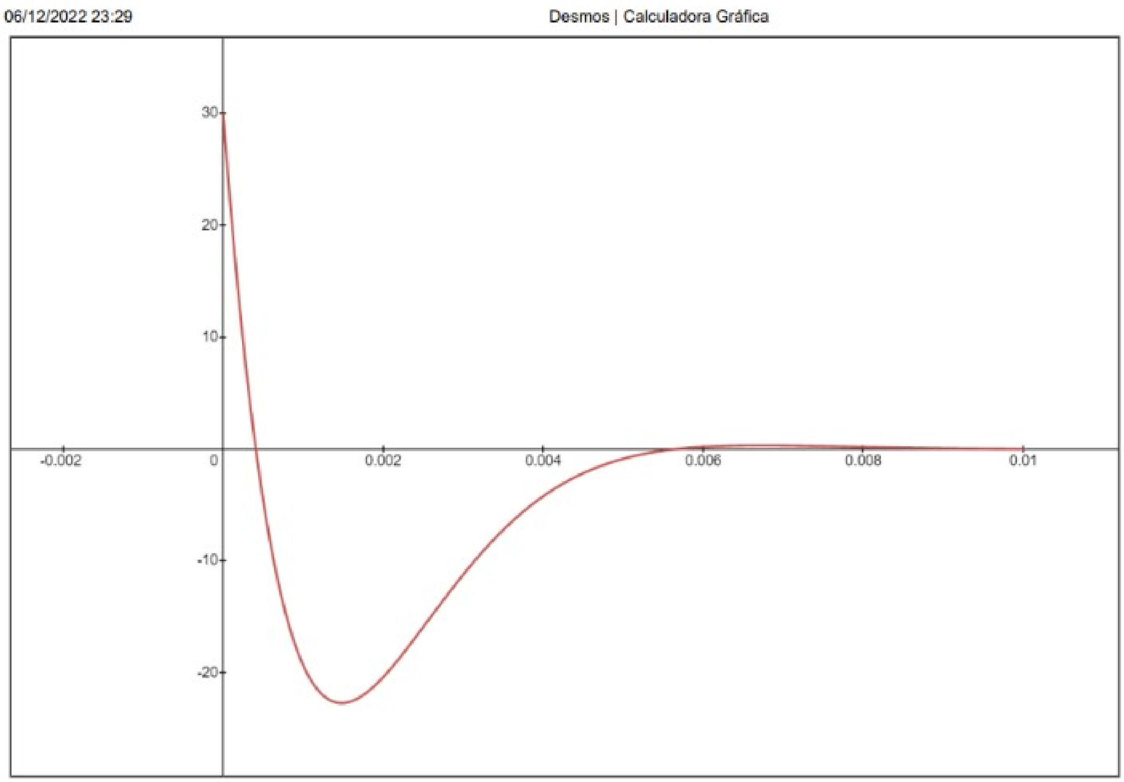
$$v(t_1) = v(1.481 \text{ ms}) = -22.69 \text{ V}$$

$$v(t_2) = v(6.717 \text{ ms}) = -0.344 \text{ V}$$

$$v(t_3) = v(11.95 \text{ ms}) = -5.22 \text{ mV}$$

(f)

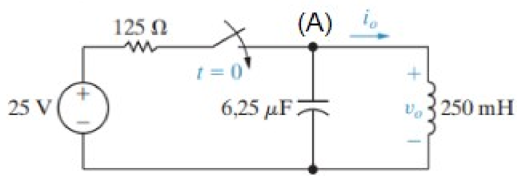
Usamos a ferramente online Desmos para plotar o gráfico de $v(t)$.



Problema P8.33

8.33 Pspice Multisim Não há nenhuma energia armazenada no circuito da Figura P8.33 quando a chave é fechada em $t = 0$. Determine $i_o(t)$ para $t \geq 0$.

Figura P8.33



Aplicamos análise nodal no nó essencial (A) em $t > 0$.

$$i_R + i_C + i_L = 0$$

$$\frac{v_o - 25}{R} + C\frac{\mathrm{d}v_o}{\mathrm{d}t} + i_o = 0$$

Note que

$$v_0 = L\frac{\mathrm{d}i_o}{\mathrm{d}t}$$

Assim, a equação nodal se torna

$$\frac{L\frac{\mathrm{d}i_o}{\mathrm{d}t} - 25}{R} + C\frac{\mathrm{d}L\frac{\mathrm{d}i_o}{\mathrm{d}t}}{\mathrm{d}t} + i_o = 0$$

$$\frac{L\frac{\mathrm{d}i_o}{\mathrm{d}t} - 25}{R} + C\frac{\mathrm{d}\left(L\frac{\mathrm{d}i_o}{\mathrm{d}t}\right)}{\mathrm{d}t} + i_o = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 i_o}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}i_o}{\mathrm{d}t} + \frac{i_o}{LC} + \frac{25}{RLC} = 0$$

Substituindo com os valores do enunciado, temos

$$\frac{\mathrm{d}^2 i_o}{\mathrm{d}t^2} + 1280\frac{\mathrm{d}i_o}{\mathrm{d}t} + 640000 i_o + 128000 = 0$$

Observação: tentei resolver a EDO acima com o método que usei nas questões anteriores: admitindo solução na forma $i_o(t) = Ae^{-st}$ e achando os coeficientes através das condições iniciais do circuito. Contudo, não consegui identificar as condições iniciais e não achei a resposta correta. Tentei resolver pelo método dado em sala da aula, mas não sei Transformada de Laplace muito bem e as fotos que tirei do quadro ficaram ruins. Assim, coloco diretamente a solução dada em sala de aula dessa questão via Laplace.

$$\boxed{i_o(t) = 0.2u(t) - 0.2e^{-640t}\cos(480t) - \frac{4}{15}e^{-640t}\sin(480t)\ \mathrm{A}\,,\ t \geq 0}$$

Onde $u(t)$ é a função degrau unitário.

Problema P8.35

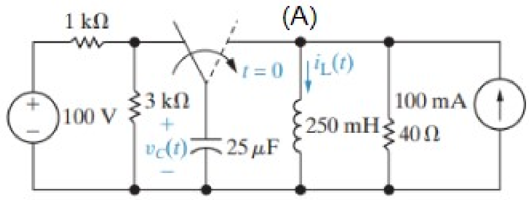
8.35 A chave no circuito da Figura P8.35 esteve na posição esquerda por um longo tempo antes de passar para a posição direita em $t = 0$. Determine

a) $i_L(t)$ para $t \geq 0$,

b) $v_C(t)$ para $t \geq 0$.

Pspice
Multisim

Figura P8.35



O primeiro passo é entender o estado inicial do circuito para $t < 0$.
Antes da chave comutar, o capacitor está em paralelo com um circuito divisor de tensão, e após um longo tempo possuirá tensão inicial de

$$v(0) = 100\frac{3000}{1000 + 3000}$$

$$v_C(0) = 75\ \mathrm{V} \tag{8.35.1}$$

Além disso, o indutor se comporta como um curto-circuito para a fonte de corrente de $I = 100\ \mathrm{mA}$. Logo,

$$i_L(0) = 100\ \mathrm{mA} \tag{8.35.2}$$

Exatamente no instante em que a chave comuta, em $t = 0$, temos que a corrente no capacitor é nula, pois toda a corrente da fonte passa no indutor. Assim, temos a segunda condição inicial do capacitor

$$\frac{\mathrm{d}v(0)}{\mathrm{d}t} = 0\ \mathrm{V/s} \tag{8.35.3}$$

De posse dessas condições iniciais, aplicamos análise nodal no nó essencial (A) para $t > 0$, obtendo

$$i_c + i_L + i_R = 100\ \mathrm{mA}$$

$$C\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} + i_L(0) + \int_0^t v_L(t)\,dt + \frac{v_R(t)}{R} = 100\ \mathrm{mA}$$

Usando $v_C = v_R = v_L = v(t)$,

$$C\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + i_L(0) + \frac{1}{L}\int_0^t v(t)\,dt + \frac{v(t)}{R} = 100\ \mathrm{mA}$$

Derivando ambos lados com respeito a t,

$$C\frac{\mathrm{d}^2v(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{L}v(t) + \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2v(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{v(t)}{LC} = 0$$

A EDO acima já possui equação característica conhecida, dada por

$$s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC} = 0 \tag{8.35.4}$$

Substituindo com os valores do enunciado,

$$s = \frac{-(1000) \pm \sqrt{(1000)^2 - 4(1)(160000)}}{2(1)}$$

$$s_1 = -200\ \mathrm{rad/s} \quad , \quad s_2 = -800\ \mathrm{rad/s}$$

Além disso, sabemos que a solução da EDO é da forma

$$v(t) = Ae^{st}$$

Com as duas raízes encontradas s_1 e s_2, temos que a solução geral é dada pela combinação linear

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) \tag{8.35.5}$$

Onde $v_1(t)$ e $v_2(t)$ são duas possíveis soluções para $v(t)$ dadas por

$$\begin{cases} v_1(t) = A_1e^{s_1t} \\ v_2(t) = A_2e^{s_2t} \end{cases}$$

Diferenciando (8.35.5) com respeito a t, temos duas equações

$$\begin{cases} v(t) = A_1e^{s_1t} + A_2e^{s_2t} \\ \dfrac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = A_1s_1e^{s_1t} + A_2s_2e^{s_2t} \end{cases}$$

Em $t = 0$, temos as condições iniciais já conhecidas em (8.35.1) em (8.35.1)

$$\begin{cases} v(0) = A_1e^{s_10} + A_2e^{s_20} \\ \dfrac{\mathrm{d}v(0)}{\mathrm{d}t} = A_1s_1e^{s_10} + A_2s_2e^{s_20} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 + A_2 = 75\ \mathrm{V} \\ A_1s_1 + A_2s_2 = 0\ \mathrm{V/s} \end{cases}$$

De posse dessas equações, temos o sistema linear para identificar os coeficientes A_1 e A_2

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ s_1 & s_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -s_1 & -s_1 \\ s_1 & s_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -75s_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -s_1 & -s_1 \\ 0 & s_2 - s_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -75s_1 \\ -75s_1 \end{bmatrix}$$

Assim, temos

$$A_2 = \frac{-75s_1}{s_2 - s_1} \quad \Rightarrow \quad A_2 = -25$$

$$A_1 = 100$$

Conhecidos coeficientes A_1 e A_2, bem como as raízes s_1 e s_2, temos a solução geral $v(t)$ na forma de (8.35.5)

$$\boxed{v_C(t) = 100e^{-200t} - 25e^{-800t}\ \mathrm{V}\,,\ t \geq 0}$$

Para encontrar $i_L(t)$, usamos a relação entre corrente e tensão no indutor

$$i_L(t) = i_L(0) + \frac{1}{L}\int_0^t v_C(t)\,dt$$

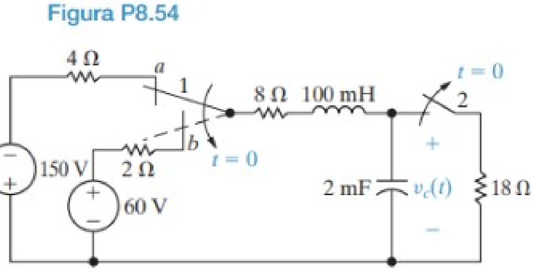
$$i_L(t) = 0.1 + \frac{1}{L}\int_0^t 100e^{-200t} - 25e^{-800t}\,dt$$

$$\boxed{i_L(t) = 0.1 - 2e^{-200t} + 0.125e^{-800t}\ \mathrm{A}\,,\ t \geq 0}$$

Problema P8.54

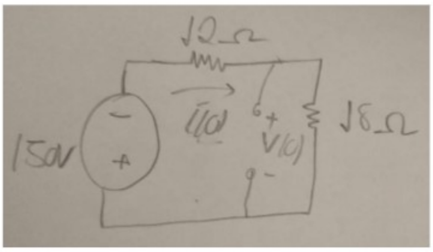
8.54 Pspice Multisim As duas chaves no circuito visto na Figura P8.54 funcionam de modo sincronizado. Quando a chave 1 está na posição a, a chave 2 está fechada. Quando a chave 1 está na posição b, a chave 2 está aberta. A chave 1 esteve na posição a por um longo tempo. Em $t = 0$, ela passa instantaneamente para a posição b. Determine $v_C(t)$ para $t \geq 0$.

Figura P8.54

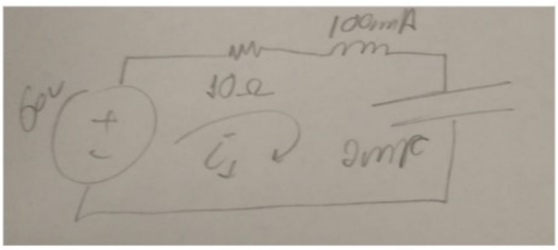


O primeiro passo é identificar as condições iniciais do circuito, ou seja, as condições em $t < 0$.

Figure 8.54.1: (a) Circuito para $t < 0$. (b) Circuito para $t \geq 0$.



(a)



(b)

Em $t < 0$, como mostra a Figura 8.54.1 (a), o circuito se reduz a um divisor de tensão resistivo. Assim, temos

$$v_C(0) = -150\frac{18}{12 + 18} = -90\ \mathrm{V} \tag{8.54.1}$$

$$i_L(0) = \frac{-150}{12+18} = -5 \text{ A} \tag{8.54.2}$$

Além disso, para identificar a condições de iniciais das derivadas de $i_L(t)$ e $v_C(t)$, usamos

$$\frac{\mathrm{d}v_C(0)}{\mathrm{d}t} = \frac{i_C(0)}{C} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}v_C(0)}{\mathrm{d}t} = -2500 \text{ V/s} \tag{8.54.3}$$

$$\frac{\mathrm{d}i_L(0)}{\mathrm{d}t} = \frac{v_L(0)}{L} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}i_L(0)}{\mathrm{d}t} = \frac{0}{0.1} = 0 \text{ A/s} \tag{8.54.4}$$

De posse das condições inciais, aplicamos análise de malhas no circuito da Figura 8.54.1 (b), obtendo

$$-60 + Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + v_C(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt = 0$$

Derivando com respeito a t,

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}i = 0$$

A EDO acima possui equação característica dada por

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0 \tag{8.54.5}$$

Substituindo com os valores do circuito da Figura 8.54.1 (b),

$$s = \frac{-(100) \pm \sqrt{(100)^2 - 4(1)(5\cdot 10^3)}}{2(1)}$$

$$s = \frac{-(100) \pm j100}{2(1)}$$

$$s_1 = -50 + j50 \text{ rad/s} \quad , \quad s_2 = -50 - j50 \text{ rad/s}$$

Com as duas raízes encontradas s_1 e s_2, temos que a solução geral é dada pela combinação linear

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) \tag{8.54.6}$$

Onde $i_1(t)$ e $i_2(t)$ são duas possíveis soluções para $i(t)$ dadas por

$$\begin{cases} i_1(t) = A_1 e^{s_1 t} \\ i_2(t) = A_2 e^{s_2 t} \end{cases}$$

Diferenciando (8.54.6) com respeito a t, temos duas equações

$$\begin{cases} i(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \\ \dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = A_1 s_1 e^{s_1 t} + A_2 s_2 e^{s_2 t} \end{cases}$$

Em $t = 0$, temos as condições iniciais já conhecidas em (8.54.2) em (8.54.4)

$$\begin{cases} i(0) = A_1 e^{s_1 0} + A_2 e^{s_2 0} \\ \dfrac{\mathrm{d}i(0)}{\mathrm{d}t} = A_1 s_1 e^{s_1 0} + A_2 s_2 e^{s_2 0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 + A_2 = -5 \text{ A} \\ A_1 s_1 + A_2 s_2 = 0 \text{ A/s} \end{cases}$$

De posse dessas equações, temos o sistema linear para identificar os coeficientes A_1 e A_2

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ s_1 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -s_1 & -s_1 \\ s_1 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5s_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -s_1 & -s_1 \\ 0 & s_2 - s_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5s_1 \\ 0 + 5s_1 \end{bmatrix}$$

Assim, temos

$$A_2 = \frac{5s_1}{s_2 - s_1} \quad \Rightarrow \quad A_2 = \frac{-250 + j250}{-j100}$$

$$A_2 = -2.5 - j2.5 \quad , \quad A_1 = -2.5 + j2.5$$

Conhecidos coeficientes A_1 e A_2, bem como as raízes s_1 e s_2, temos a solução geral $v(t)$ na forma de (8.54.6)

$$i(t) = (-2.5 + j2.5)e^{(-50+j50)t} + (-2.5 - j2.5)e^{(-50-j50)t} \text{ A} \, , \, t \geq 0$$

Vamos remover os exponenciais complexos usando a identidade de Euler.

$$i(t) = (-2.5 + j2.5)e^{-50t}e^{j50t} + (-2.5 - j2.5)e^{-50t}e^{-j50t}$$

$$i(t) = (-2.5 + j2.5)e^{-50t}(\cos(50t) + j\sin(50t)) + (-2.5 - j2.5)e^{-50t}(\cos(50t) - j\sin(50t))$$

Evidenciando o termo e^{-50t} e expandindo os demais via propriedade distributiva, temos que todas parcelas complexas se cancelam e ficamos com

$$\boxed{i(t) = e^{-50t}\left[-5\cos(50t) - 5\sin(50t)\right] \text{ A} \, , \, t \geq 0}$$

Por fim, usando a relação entre corrente e tensão no capacitor de

$$v_C(t) = v_C(0) + \frac{1}{C}\int i(t)\,dt$$

$$v_C(t) = -90 + \frac{1}{0.002}\int e^{-50t}\left[-5\cos(50t) - 5\sin(50t)\right]\,dt$$

$$v_C(t) = -90 + \frac{1}{0.002}\frac{1}{10}e^{-50t}\cos(50t)$$

$$\boxed{v_C(t) = -90 + 50e^{-50t}\cos(50t) \text{ V} \, , \, t \geq 0}$$

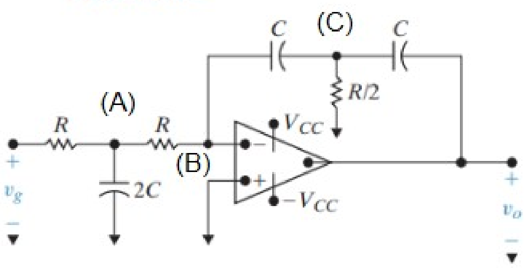
Problema P8.62

8.62 a) Deduza a equação diferencial que relaciona a tensão de saída com a tensão de entrada para o circuito mostrado na Figura P8.62.

b) Compare o resultado com a Equação 8.75 quando $R_1C_1 = R_2C_2 = RC$ na Figura 8.18.

c) Qual é a vantagem do circuito mostrado na Figura P8.62?

Figura P8.62



(a)

Usando o amplificador operacional como ideal, temos duas premissas que podemo tomar antes de começar a análise:

$$V_+ = V_- = 0 \tag{8.62.1}$$

$$i_+ = i_- = 0 \tag{8.62.2}$$

(8.62.1) se refere ao curto circuito virtual entre os terminais de entrada do AmpOp, e (8.62.2) se refere à impedância de entrada infinita; Assim, temos três nós essenciais no circuito, nomeados (A), (B) e (C). Vamos aplicar análise nodal em cada um deles.
Nó (A):

$$\frac{V_A - v_g}{R} + i_C + \frac{V_A - 0}{R} = 0$$

$$\frac{V_A - v_g}{R} + 2C\frac{\mathrm{d}V_A}{\mathrm{d}t} + \frac{V_A}{R} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}V_A}{\mathrm{d}t} + \frac{V_A}{2RC} - \frac{v_g}{2RC} + \frac{V_A}{2RC} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}V_A}{\mathrm{d}t} + \frac{V_A}{RC} - \frac{v_g}{2RC} = 0 \tag{8.62.3}$$

Nó (B):

$$\frac{V_B - V_A}{R} + 0 + i_C = 0$$

$$\frac{V_B - V_A}{R} + C\frac{\mathrm{d}(V_B - V_C)}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\frac{V_B}{R} - \frac{V_A}{R} + C\frac{\mathrm{d}V_B}{\mathrm{d}t} - C\frac{\mathrm{d}V_C}{\mathrm{d}t} = 0$$

Note que $V_B = 0$ devido à (8.62.1). Assim,

$$\frac{V_A}{R} + C\frac{\mathrm{d}V_C}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{8.62.4}$$

Nó (C):

$$i_C + i_C + \frac{V_C}{0.5R} = 0$$

$$C\frac{\mathrm{d}(V_C - V_B)}{\mathrm{d}t} + C\frac{\mathrm{d}V_C - v_o}{\mathrm{d}t} + \frac{V_C}{0.5R} = 0$$

$$C\frac{\mathrm{d}V_C}{\mathrm{d}t} + C\frac{\mathrm{d}V_C}{\mathrm{d}t} - C\frac{\mathrm{d}v_o}{\mathrm{d}t} + \frac{V_C}{0.5R} = 0$$

$$2C\frac{\mathrm{d}V_C}{\mathrm{d}t} - C\frac{\mathrm{d}v_o}{\mathrm{d}t} + \frac{V_C}{0.5R} = 0 \tag{8.62.5}$$

A partir de (8.62.4) é possível extrair duas informações:

$$V_A = -RC\frac{\mathrm{d}V_C}{\mathrm{d}t} \quad , \quad \frac{\mathrm{d}V_A}{\mathrm{d}t} = -RC\frac{\mathrm{d}^2V_C}{\mathrm{d}t^2}$$

Substituindo essas duas novas informações em (8.62.3), temos

$$-RC\frac{\mathrm{d}^2V_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{-RC\frac{\mathrm{d}V_C}{\mathrm{d}t}}{RC} - \frac{v_g}{2RC} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2V_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}V_C}{\mathrm{d}t} = -\frac{v_g}{2R^2C^2} \tag{8.62.6}$$

Note que, diferenciando (8.62.5), temos

$$2C\frac{\mathrm{d}^2V_C}{\mathrm{d}t^2} - C\frac{\mathrm{d}^2v_o}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{0.5R}\frac{\mathrm{d}V_C}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2V_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}V_C}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2v_o}{\mathrm{d}t^2} \tag{8.62.7}$$

Igualando os termos direitos das equações (8.62.6) e (8.62.7), obtemos finalmente uma expressão da saída v_o em função da entrada v_g.

$$-\frac{v_g}{2R^2C^2} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2v_o}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2v_o}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{v_g}{R^2C^2}}$$

(b)

Se $R_1C_1 = R_2C_2$, temos

$$R_1C_1 \cdot R_2C_2 = R^2C^2$$

E a equação 8.75 do livro se torna a mesma equação deduzida no item (a) do problema. A única diferença é que o circuito do problema inverte o sinal da entrada.

(c)

O circuito da Figura P8.62 é capaz ter a mesma função resposta do circuito da Figura 8.18 do livro usando apenas um amplificador operacional, ao passo que o do livro usa dois AmpOps. A única desvantagem é que ele também inverte o sinal, o que pode ser indesejado em algumas aplicações.

Problema P9.3

9.3 Considere a tensão senoidal

$v(t) = 25\cos(400\pi t + 60°)$ V.

a) Qual é a amplitude máxima da tensão?

b) Qual é a frequência em hertz?

c) Qual é a frequência em radianos por segundo?

d) Qual é o ângulo de fase em radianos?

e) Qual é o ângulo de fase em graus?

f) Qual é o período em milissegundos?

g) Qual é a primeira vez, após $t = 0$, que $v = 0$ V?

h) A função senoidal é deslocada 5/6 ms para a direita ao longo do eixo do tempo. Qual é a expressão para $v(t)$?

i) Qual é o valor mínimo de milissegundos de que a função deve ser deslocada para a esquerda, se a expressão para $v(t)$ tor 25 sen $400\pi t$ V?

(a)

Sabemos que uma tensão senoidal $v(t)$ é expressa na forma

$$v(t) = A\cos(\omega t + \phi) \tag{9.3.1}$$

onde

- A: amplitude máxima da tensão (V);
- ω: frequência angular da tensão (rad/s);
- ϕ: defasagem em relação à origem (rad ou °).

Portanto, conforme o enunciado, temos

$$\boxed{A = 25\ \mathrm{V}}$$

(b)

A frequência angular ω é dada por

$$\omega = 2\pi f \quad \Rightarrow \quad f = \frac{\omega}{2\pi}$$

Substituindo, temos

$$\boxed{f = 200\ \mathrm{Hz}}$$

(c)

Conforme o enunciado, temos

$$\boxed{\omega = 400\pi\ \mathrm{rad/s} = 1256.64\ \mathrm{rad/s}}$$

(d)

Conforme o enunciado, temos $\phi = 60°$. Convertendo para radianos, temos

$$\boxed{\phi = \frac{\pi}{3}\ \mathrm{rad} = 1.047\ \mathrm{rad}}$$

(e)

Conforme o enunciado,

$$\boxed{\phi = 60°}$$

(f)

A frequência angular ω é dada por

$$\omega = 2\pi f \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Substituindo,

$$\boxed{T = 5\ \mathrm{ms}}$$

(g)

Isolando t em (9.3.1), temos

$$\omega t + \phi = \cos^{-1}\left(\frac{v(t)}{A}\right)$$

$$t = \frac{1}{\omega}\left[\cos^{-1}\left(\frac{v(t)}{A}\right) - \phi\right] \tag{9.3.2}$$

Para identificar os instantes t para os quais $v(t) = 0$, substituímos $v(t) = 0$ em (9.3.2), obtendo

$$t = \frac{1}{\omega}\left[\cos^{-1}(0) - \phi\right]$$

O primeiro ângulo θ para o qual $cos(\theta) = 0$ é $\frac{\pi}{2}$, portanto

$$t = \frac{1}{\omega}\left[\frac{\pi}{2} - \phi\right]$$

Substituindo os valores do enunciado, temos

$$\boxed{t = 416.67\ \mu\text{s}}$$

(h)

Do item (f), sabemos que $T = 5ms$. Além disso, sabemos que $1T = 360°$ para a função cosseno. Portanto, usando proporcionalidade, temos

$$\frac{T}{\Delta t} = \frac{360°}{\Delta\phi}$$

Substituindo,

$$\frac{5\ \text{ms}}{\frac{5}{6}\ \text{ms}} = \frac{360°}{\Delta\phi}$$

$$\Delta\phi = 60°$$

Portanto, um deslocamento de $\frac{5}{6}$ ms equivale a um deslocamento angular de $\Delta\phi = 60°$. Note que deslocamentos à direita de uma função trigonométrica correspondem a deslocamentos com sinal negativo. Assim,

$$\Delta\phi = -60°$$

Aplicando isso à função original, temos a nova expressão de $v(t)$ dada por

$$v(t) = A\cos(\omega t + \phi + \Delta\phi)$$

$$v(t) = 25\cos(400\pi t + 60° - 60°)$$

$$\boxed{v(t) = 25\cos(400\pi t)\ \text{V}}$$

(i)

Sabemos que

$$\cos(\theta) = \sin(\theta + 90°)$$

Portanto, podemos reescrever a função de $v(t)$ como

$$v(t) = A \sin(\omega t + \phi + 90°)$$

Seja Δt o deslocamento ao longo do eixo x que provoca uma diferença de fase $\Delta\theta$, de tal modo que

$$A \sin(\omega t + \phi + \Delta\theta + 90°) = A \sin(\omega t)$$

Para isso, precisamos de

$$\phi + \Delta\theta + 90° = 0$$

Portanto,

$$\Delta\theta = -\phi - 90°$$

Uma vez conhecido $\Delta\theta$, identificamos o deslocamento temporal Δt através da proporcionalidade

$$\frac{T}{\Delta t} = \frac{360°}{-\phi - 90°}$$

Isolando Δt, temos

$$\Delta t = (-\phi - 90°)\frac{T}{360°}$$

Substituindo,

$$\boxed{\Delta t = -2.08 \text{ ms}}$$

Problema P9.14

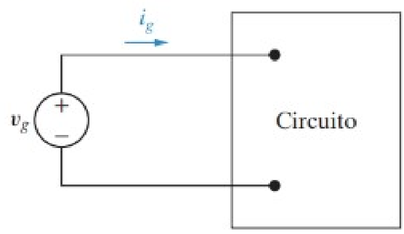
9.14 As expressões para a tensão e a corrente de regime permanente nos terminais do circuito da Figura P9.14 são

$$v_g = 300 \cos(5.000\pi t + 78°) \text{ V},$$
$$i_g = 6 \text{ sen}(5.000\pi t + 123°) \text{ A}.$$

a) Qual é a impedância vista pela fonte?

b) De quantos microssegundos é a defasagem entre a corrente e a tensão?

Figura P9.14



(a)

A impedância Z_{in} vista pela fonte é dada por

$$Z_{in} = \frac{V_g}{I_g} \tag{9.14.1}$$

Usando a relação trigonométrica

$$\sin\theta = \cos(\theta - 90^\circ)$$

Podemos reescrever a expressão de $i_g(t)$ como

$$i_g(t) = 6\cos(5000\pi + 123^\circ - 90^\circ)$$

$$i_g(t) = 6\cos(5000\pi + 33^\circ)$$

Assim, em notação fasorial, temos

$$Z_{in} = \frac{300\underline{/78^\circ}}{6\underline{/33^\circ}} \tag{9.14.2}$$

$$\boxed{Z_{in} = 50\underline{/45^\circ}\ \Omega}$$

(b)

Usando proporcionalidade (regra de três simples), sabemos que uma diferença de fase de $\Delta\phi$ corresponde a uma diferença temporal Δt dada por

$$\frac{T}{\Delta t} = \frac{360^\circ}{\Delta\phi}$$

onde $T = \frac{2\pi}{\omega}$ é o período do sinal. Isolando Δt, temos

$$\Delta t = T\frac{\Delta\phi}{360^\circ} \tag{9.14.3}$$

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega}\frac{\Delta\phi}{360^\circ}$$

Substituindo tudo, temos

$$\boxed{\Delta t = 50\ \mu s}$$

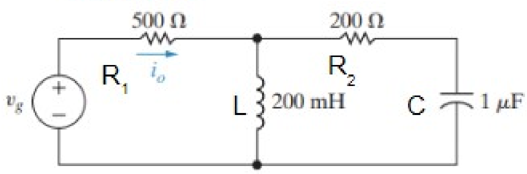
Problema P9.37

9.37 Pspice Multisim A frequência da fonte de tensão senoidal no circuito da Figura P9.37 é ajustada até que a corrente i_o fique em fase com v_g.

a) Determine a frequência em hertz.

b) Determine a expressão de regime permanente para i_o (na frequência encontrada em [a]), se $v_g = 90\cos\omega t$ V.

Figura P9.37



(a)

Vamos começar identificando a impedância equivalente Z_{in} vista pela fonte v_g.

$$Z_{in} = \left(\left(\frac{1}{j\omega C} + R_2\right)\ //\ j\omega L\right) + R_1$$

$$Z_{in} = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{\frac{1}{j\omega C} + R_2}}$$

Agora vamos isolar a parte real da parte complexa.

$$Z_{in} = R_1 + \frac{1}{-\frac{j}{\omega L} + \frac{1}{-\frac{j}{\omega C} + R_2}}$$

$$Z_{in} = R_1 + \frac{1}{-\frac{j}{\omega L} + \frac{\omega C}{-j + R_2\omega C}}$$

$$Z_{in} = R_1 + \frac{1}{-\frac{j}{\omega L} + \frac{(\omega C)(+j + R_2\omega C)}{1^2 + (R_2\omega C)^2}}$$

$$Z_{in} = R_1 + \frac{1}{-\frac{j}{\omega L} + \frac{j\omega C}{1 + (R_2\omega C)^2} + \frac{R_2\omega^2 C^2}{1 + (R_2\omega C)^2}}$$

$$Z_{in} = R_1 + \frac{1}{-\frac{R_2\omega^2 C^2}{1 + (R_2\omega C)^2} + j\left(-\frac{1}{\omega L} + \frac{\omega C}{1 + (R_2\omega C)^2}\right)}$$

Vamos adotar uma notação para simplificar a expressão. Sejam

$$A = \frac{R_2\omega^2 C^2}{1 + (R_2\omega C)^2} \quad , \quad B = -\frac{1}{\omega L} + \frac{\omega C}{1 + (R_2\omega C)^2}$$

Com isso, podemos reescrever a expressão de Z_{in} como

$$Z_{in} = R_1 + \frac{1}{A + jB}$$

Continuamos o processo de isolar a parte real da parte complexa.

$$Z_{in} = R_1 + \frac{1}{A + jB}$$

$$Z_{in} = R_1 + \frac{A - jB}{A^2 + B^2}$$

$$Z_{in} = \left(R_1 + \frac{A}{A^2 + B^2}\right) - j\frac{B}{A^2 + B^2}$$

Agora é possível expressar uma função para o ângulo de fase ϕ de Z_{in}, dada por

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{-\frac{B}{A^2+B^2}}{R_1 + \frac{A}{A^2+B^2}}\right)$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{-\frac{B}{A^2+B^2}}{\frac{R_1(A^2+B^2)+A}{A^2+B^2}}\right)$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(-\frac{B}{R_1(A^2 + B^2) + A}\right) \tag{9.37.1}$$

Uma vez calculado Z_{in}, podemos expressar a relação entre V_g e I_o através de

$$V_g = Z_{in} \cdot I_g \tag{9.37.2}$$

Para que (9.37.2) seja satisfeita com V_g e I_o em fase, temos que o ângulo de fase de Z_{in} deve ser nulo. Portanto, usando (9.37.1), temos

$$\phi = \tan^{-1}\left(-\frac{B}{R_1(A^2 + B^2) + A}\right) = 0$$

$$-\frac{B}{R_1(A^2+B^2)+A}=0$$

$$B=0$$

Expandindo B conforme o definimos, temos

$$-\frac{1}{\omega L}+\frac{\omega C}{1+(R_2\omega C)^2}=0$$

$$\frac{-1-R_2^2\omega^2C^2+(\omega L)(\omega C)}{(\omega L)(1+R_2^2\omega^2C^2)}=0$$

$$-1-R_2^2\omega^2C^2+\omega^2LC=0$$

Isolando ω, temos

$$\omega^2=\frac{1}{LC-R_2^2C^2}$$

$$\omega=\sqrt{\frac{1}{LC-R_2^2C^2}}$$

Usando $\omega=2\pi f$, a frequência f em Hertz da fonte de tensão deve ser

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC-R_2^2C^2}} \tag{9.37.3}$$

Substituindo,

$$\boxed{f=397.89\ \mathrm{Hz}}$$

(b)

Usando (9.37.2), temos

$$i_o(t)=\frac{v_g(t)}{Z_{in}} \tag{9.37.4}$$

Note que Z_{in} é puramente real, pois o ângulo de fase é nulo (fizemos $B=0$ no item anterior). Assim, a expressão de Z_{in} se reduz a

$$Z_{in}=R_1+\frac{A}{A^2+0}$$

$$Z_{in}=R_1+\frac{1}{A}$$

$$Z_{in}=R_1+\frac{1+(R_2\omega C)^2}{R_2\omega^2C^2}$$

$$Z_{in}=1500\ \Omega$$

Substituindo em (9.37.4),

$$i_o(t)=\frac{90\cos(\omega t)}{1500\ \Omega}$$

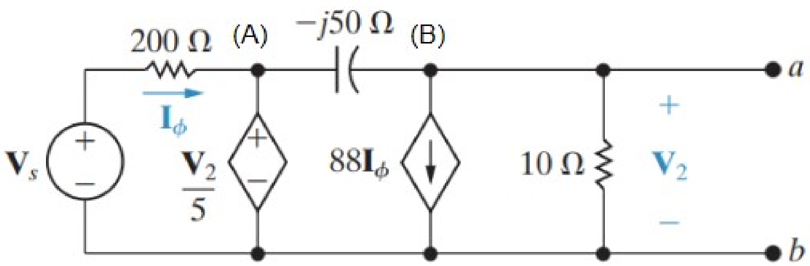
$$i_o(t) = 60\cos(\omega t)\ \text{mA}$$

$$\boxed{i_o(t) = 60\cos(2500t)\ \text{mA}}$$

Problema P9.50

9.50 Determine o circuito equivalente de Norton em relação aos terminais a,b para o circuito da Figura P9.50 quando $\mathbf{V}_s = 5\underline{/0^\circ}$ V.

Figura P9.50



Em um circuito equivalente norton, temos

$$I_N = I_{SC} \quad , \quad R_N = R_{th}$$

Vamos começar calculando a tensão de Thevenin V_{th} entre os terminais a e b, abrindo-os. Expressando as variáveis de controle em função dos elementos do circuito, obtemos

$$V_2 = V_B \tag{9.50.1}$$

$$I_\phi = \frac{5V - V_A}{200\ \Omega} \tag{9.50.2}$$

Feito isso, aplicamos análise nodal dos nós essenciais A e B. Começamos pelo nó A. Obtemos de imediato que

$$V_A = \frac{V_2}{5} = \frac{V_B}{5} \tag{9.50.3}$$

Agora vamos para o nó B.

$$\frac{V_B - V_A}{-j50\ \Omega} + 88I_\phi + \frac{V_B - 0}{10\ \Omega} = 0$$

Usando (9.50.2) e (9.50.3), temos

$$\frac{V_B - \frac{V_B}{5}}{-j50\ \Omega} + 88\frac{5V - \frac{V_B}{5}}{200\ \Omega} + \frac{V_B}{10\ \Omega} = 0$$

Isolando V_B, temos

$$\frac{V_B}{-j50} - \frac{V_B}{-j250} - \frac{88V_B}{1000} + \frac{V_B}{10} = -2.2$$

$$V_B = -\frac{2.2}{\frac{1}{-j50} - \frac{1}{-j250} - \frac{88}{1000} + \frac{1}{10}}$$

$$V_B = -66 + j88V = 110\underline{/126.86°}V \tag{9.50.4}$$

Usando (9.50.3), obtemos

$$V_A = 22\underline{/126.86°}V \tag{9.50.5}$$

Assim, obtemos que a tensão de Thevenin é dada por

$$V_{th} = V_{ab} = V_B = 110\underline{/126.86°}V \tag{9.50.6}$$

Agora calculamos a corrente de curto-circuito I_{sc}. Curto circuitamos os terminais a e b, e novamente expressamos as variáveis de controle em função dos elementos do circuito.

$$V_2 = 0V \tag{9.50.7}$$

$$I_\phi = \frac{5V - V_A}{200\ \Omega} \tag{9.50.8}$$

Agora aplicamos análise nodal nos nós essencias A e B. De imediato temos que

$$V_A = \frac{V_2}{5} = \frac{V_B}{5}$$

No entanto, devido ao curto-circuito, observe que

$$V_B = 0V$$

E portanto,

$$V_A = V_B = 0V$$

Escrevendo a equação de nó de B, temos

$$\frac{V_B - \frac{V_B}{5}}{-j50\ \Omega} + 88\frac{5V - \frac{V_B}{5}}{200\ \Omega} + I_{sc} = 0$$

Substituindo e isolando I_{sc},

$$0 + 88\frac{5V}{200\ \Omega} + I_{sc} = 0$$

$$I_{sc} = -2.2\ \mathrm{A} = 2.2\underline{/180°}\ \mathrm{A} \tag{9.50.9}$$

Usando (9.50.9) e (9.50.6), obtemos a resistência de Thevenin R_{th}.

$$R_{th} = \frac{V_{th}}{I_{sc}} = \frac{110\underline{/126.86°}}{2.2\underline{/180°}} = 50\underline{/-53.14°}\Omega \tag{9.50.10}$$

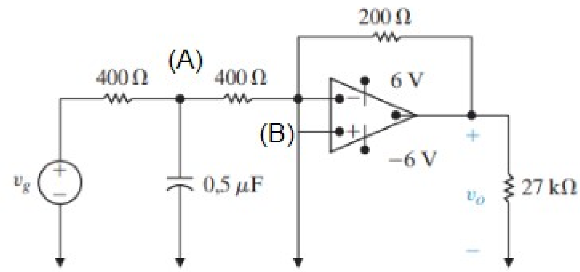
Finalmente,

$$\boxed{R_N = 50\underline{/-53.14°}\Omega = 30 - j40\Omega}$$

$$\boxed{I_N = -2.2\ \mathrm{A}}$$

Problema P9.69

9.69 Pspice Multisim A fonte de tensão senoidal no circuito mostrado na Figura P9.69 está gerando a tensão $v_g = 20 \cos 5.000t$ V. Se o amp op for ideal, qual será a expressão de regime permanente para $v_o(t)$?



O primeiro passo é expressar V_o em função das tensões de entrada no AmpOp. Aplicamos análise nodal no nó (B).

$$i_- + i_+ + \frac{V_B - V_o}{R_s} + \frac{V_B - V_A}{R_2} = 0$$

Como o Amplificador Operacional é ideal, temos

$$i_- = i_+ = 0 \text{ A} \tag{9.69.1}$$

Além disso, temos $V_B = 0$. Substituindo na expressão do nó, temos

$$\frac{V_o}{R_s} + \frac{V_A}{R_2} = 0$$

Isolando V_o, temos

$$V_o = -\frac{R_s}{R_2} V_A \tag{9.69.2}$$

Portanto, basta encontrar a expressão de V_A para achar a expressão de $v_o(t)$.
Aplicando análise nodal no nó essencial (A), temos

$$\frac{V_A - 20}{400} + \frac{V_A}{\frac{1}{j\omega 0.5\mu F}} + \frac{V_A - V_B}{400} = 0$$

$$\frac{V_A - 20}{400} + \frac{V_A}{\frac{1}{j0.0025}} + \frac{V_A}{400} = 0$$

$$V_A \left(\frac{1}{400} + j0.0025 + \frac{1}{400} \right) = \frac{20}{400}$$

$$V_A = \frac{0.05}{0.005 + j0.0025}$$

$$V_A = 8.9442\underline{/-26.57^\circ} \text{ V}$$

Assim, voltando para (9.69.2), temos

$$V_o = -\frac{200}{400} 8.9442\underline{/-26.57^\circ} \text{ V}$$

$$V_o = -4.47\underline{/-26.57^\circ} \text{ V}$$

Removendo o sinal negativo, temos

$$V_o = 4.47\underline{/-26.57 + 180^\circ} \text{ V}$$

$$V_o = 4.47\underline{/153.43^\circ} \text{ V}$$

Convertendo do fasor para obter a expressão em função do tempo (note que usamos o valor de pico da tensão como o módulo do fasor), temos

$$\boxed{v_o(t) = 4.47\cos(5000t + 153.43) \text{ V}}$$

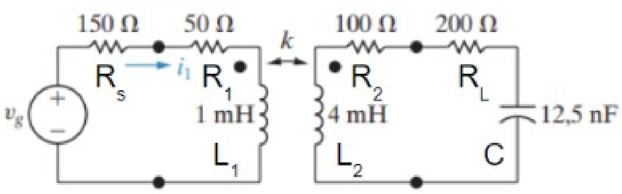
Problema P9.77

9.77 Pspice Multisim A fonte de tensão senoidal no circuito visto na Figura P9.77 está funcionando a uma frequência de 200 krad/s. O coeficiente de acoplamento é ajustado até que o valor de pico de i_1 seja máximo.

a) Qual é o valor de k?

b) Se $v_g = 560\cos(2\times10^5 t)$ V, qual é a amplitude máxima de i_1?

Figura P9.77



(a)

O valor de $i(t)$ depende da impedância Z_{in} vista pela fonte V_g. Sabemos que Z_{in} é expressa por

$$Z_{in} = Z_{11} + Z_r \tag{9.77.1}$$

Além disso, sabemos que a impedância refletida Z_r é dada por

$$Z_r = \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}} \tag{9.77.2}$$

Substituindo (9.77.2) em (9.77.1), temos

$$Z_{in} = Z_{11} + \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}} \tag{9.77.3}$$

Onde

- Z_{11}: Autoimpedância da malha do primeiro enrolamento;
- Z_{22}: Autoimpedância da malha do segundo enrolamento;
- M: Indutância mútua.

Expandindo os termos de (9.77.3), temos

$$Z_{in} = R_s + R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 (k\sqrt{L_1 L_2})^2}{j\omega L_2 + R_2 + R_L + \frac{1}{j\omega C}} \tag{9.77.4}$$

Vamos reescrever (9.77.4) de modo a isolar a parte real da parte complexa.

$$Z_{in} = R_s + R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 k^2 L_1 L_2}{j\omega L_2 + R_2 + R_L - \frac{j}{\omega C}}$$

$$Z_{in} = R_s + R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 k^2 L_1 L_2}{R_2 + R_L + j(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})}$$

$$Z_{in} = R_s + R_1 + j\omega L_1 + \frac{(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(R_2 + R_L - j(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C}))}{(R_2 + R_L + j(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C}))(R_2 + R_L - j(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C}))}$$

$$Z_{in} = R_s + R_1 + j\omega L_1 + \frac{(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(R_2 + R_L) - j(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2}$$

$$Z_{in} = R_s + R_1 + \frac{(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(R_2 + R_L)}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2} + j\left(\omega L_1 - \frac{(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2}\right) \quad (9.77.5)$$

A partir de (9.77.5) podemos determinar o módulo de Z_{in}.

$$|Z_{in}|(k) = \sqrt{\left(R_s + R_1 + \frac{(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(R_2 + R_L)}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2}\right)^2 + \left(\omega L_1 - \frac{(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2}\right)^2} \quad (9.77.6)$$

A expressão (9.77.6) expressa o módulo de Z_{in} como uma função do coeficiente k. O valor máximo de $i(t)$ ocorre quando $Z_{in}(k)$ aitinge seu valor mínimo, ou seja, quando

$$\frac{d}{dk}|Z_{in}|(k) = 0 \quad (9.77.7)$$

Vamos diferenciar (9.77.6) com respeito a k. Antes disso, vamos adotar uma notação para reduzir o tamanho da expressão. Sejam

$$A = \frac{(\omega^2 L_1 L_2)(R_2 + R_L)}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2} \quad , \quad B = \frac{(\omega^2 L_1 L_2)(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2}$$

Note que A e B não dependem de k. Assim, podemos reescrever (9.77.6) como

$$|Z_{in}|(k) = \sqrt{(R_s + R_1 + Ak^2)^2 + (\omega L_1 - Bk^2)^2} \quad (9.77.8)$$

Diferenciando (9.77.8) com respeito a k, temos

$$\frac{d}{dk}|Z_{in}|(k) = \frac{1}{2}\frac{2(R_s + R_1 + Ak^2)(2Ak) + 2(\omega L_1 - Bk^2)(2Bk)}{\sqrt{(R_s + R_1 + Ak^2)^2 + (\omega L_1 - Bk^2)^2}} \quad (9.77.9)$$

Para que (9.77.9) seja igual a zero, temos

$$2(R_s + R_1 + Ak^2)(2Ak) + 2(\omega L_1 - Bk^2)(-2Bk) = 0$$

$$(R_s + R_1 + Ak^2)(Ak) + (\omega L_1 - Bk^2)(-Bk) = 0$$

$$AkR_s + AkR_1 + A^2k^3 - \omega BkL_1 + B^2k^3 = 0$$

$$k^3(A^2 + B^2) + k(AR_s + AR_1 - \omega BL_1) = 0$$

$$k\left(k^2(A^2 + B^2) + (AR_s + AR_1 - \omega BL_1)\right) = 0$$

$$k^2(A^2 + B^2) + AR_s + AR_1 - \omega BL_1 = 0$$

$$k = \sqrt{\frac{\omega B L_1 - A R_s - A R_1}{(A^2 + B^2)}}$$

Substituindo os valores todos, temos

$$A = 192 \quad , \quad B = 256$$

$$\boxed{k = 0.3536}$$

(b)

Conhecido o valor de $k = 0.3536$, podemos calcular o valor da impedância vista pela fonte através de (9.77.4), obtendo

$$Z_{in} = 224 + j168\ \Omega$$

Portanto, usando o fato que a corrente forncecida pela fonte é

$$i(t) = \frac{v_g(t)}{Z_{in}}$$

Em notação fasorial, usando o módulo do fasor como o valor RMS, temos

$$I = \frac{V_g}{Z_{in}} = \frac{\frac{560}{\sqrt{2}}\underline{/0^\circ}}{224 + j168\ \Omega}$$

$$I = 1.4142\underline{/-36.57^\circ}\ A$$

Portanto, o valor de pico de $i(t)$ é

$$\boxed{i_m(t) = 1.4142\sqrt{2} = 2\ A}$$

Problema P10.22

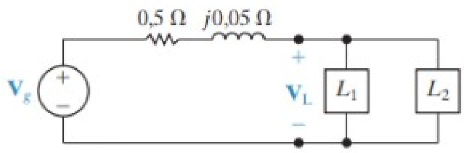
10.22 As duas cargas mostradas na Figura P10.22 podem ser descritas da seguinte forma: a carga 1 absorve uma potência média de 10 kW e uma potência reativa de 4 kVAR; a carga 2 tem uma impedância de $(60 + j80)\ \Omega$. A tensão nos terminais das cargas é $1000\sqrt{2} \cos 100\pi t$ V.

a) Determine o valor eficaz da tensão da fonte.

b) De quantos microssegundos é a diferença de fase entre a tensão da carga e a tensão da fonte?

c) A tensão da carga está adiantada ou atrasada em relação à tensão da fonte?

Figura P10.22



(a)

Temos as seguintes informações dadas:

$$S_1 = 10000 + j4000 \text{ VA} \quad , \quad Z_2 = 60 + j80 \ \Omega \quad , \quad V_1 = V_2 = 1000\underline{/0^\circ} \text{ V}$$

Em L_1, temos

$$S_1 = V_1 \cdot (I_1)^* \quad \Rightarrow \quad I_1 = \left(\frac{S_1}{V_1}\right)^* \quad \Rightarrow \quad I_1 = 10 - j4 \text{ A}$$

Uma vez calculado I_1, agora calculamos a impedância da carga L_1.

$$Z_1 = \frac{V_1}{I_1} = \frac{1000}{10 - j4} = 86.2 + j34.5 \ \Omega$$

Agora vamos calcular a corrente I_2 da carga L_2.

$$I_2 = \frac{V_2}{Z_2} = \frac{1000}{60 + j80} = 6 - j8 \text{ A}$$

Assim, a corrente fornecida pela fonte é

$$I_g = I_1 + I_2 = 10 - j4 + 6 - j8 \text{ A} = 16 - j12 \text{ A}$$

A impedância Z_{in} vista pela fonte é

$$Z_{in} = 0.5 + j0.05 + (Z_1 \ // \ Z_2)$$

$$Z_{in} = 0.5 + j0.05 + \frac{1}{\frac{1}{86.2 + j34.5} + \frac{1}{60 + j80}}$$

$$Z_{in} = 0.5 + j0.05 + 40 + j30 = 40.5 + j30.05 \ \Omega$$

Finalmente, a tensão da fonte é

$$V_g = Z_{in} \cdot I_g = (40.5 + j30.05)(16 - j12) = 1008.6 - j5.2 \text{ V}$$

$$\boxed{V_g = 1008.6\underline{/-0.295^\circ} \text{ V}}$$

(b)

Usando proporcionalidade (regra de três simples), temos

$$\frac{T}{\Delta t} = \frac{360^\circ}{\Delta \phi}$$

onde $\Delta \phi$ é a diferença de fase entre os sinais. Portanto, usando $T = \frac{2\pi}{\omega}$,

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega} \frac{\Delta \phi}{360^\circ}$$

Substituindo,

$$\Delta t = \frac{2\pi}{100\pi} \frac{0.295^\circ}{360^\circ}$$

$$\boxed{\Delta t = 16.39 \ \mu\text{s}}$$

(c)

V_L está $\Delta\phi = 0.295°$ adiantada em relação a V_g.

Problema P10.37

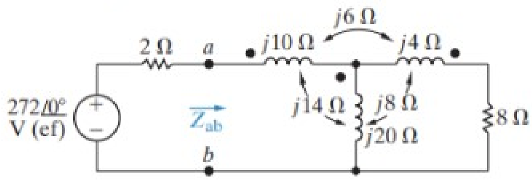
10.37 a) Determine a potência média fornecida ao resistor de 8 Ω no circuito da Figura P10.37.

b) Determine a potência média produzida pela fonte de tensão senoidal ideal.

c) Determine Z_{ab}.

d) Mostre que a potência média fornecida é igual à potência média dissipada.

Figura P10.37



(a)

Aplicamos análise de malhas nas duas malhas do circuto, considerando as indutâncias mútuas.
Malha 1:

$$-272\underline{/0°} + 2I_1 + j10I_1 + j14I_1 + j14(I_1 - I_2) + j6(-I_2) + j8(-I_2) + j20(I_1 - I_2) = 0$$

$$I_1(2 + j10 + j14 + j14 + j20) + I_2(-j14 - j6 - j8 - j20) = 272\underline{/0°}$$

$$I_1(2 + j58) + I_2(-j48) = 272\underline{/0°} \tag{10.37.1}$$

Malha 2:

$$j20(I_2 - I_1) + j4(I_2) + 8(I_2) + j8(I_2) + j8(I_2 - I_1) + j6(-I_1) + j14(-I_1) = 0$$

$$I_1(-j20 - j8 - j6 - j14) + I_2(j20 + j4 + 8 + j8 + j8) = 0$$

$$I_1(-j48) + I_2(8 + j40) = 0 \tag{10.37.2}$$

Com (10.37.1) e (10.37.2), temos o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 2+j58 & -j48 \\ -j48 & 8+j40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 272 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vamos resolver o sistema aplicando o método de Cramer. Temos

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2+j58 & -j48 \\ -j48 & 8+j40 \end{vmatrix} = j544$$

$$\Delta_{I_1} = \begin{vmatrix} 272 & -j48 \\ 0 & 8+j40 \end{vmatrix} = 2176 + j10880 \quad , \quad \Delta_{I_2} = \begin{vmatrix} 2+j58 & 272 \\ -j48 & 0 \end{vmatrix} = j13056$$

Assim,

$$I_1 = \frac{\Delta_{I_1}}{\Delta} = \frac{2176 + j10880}{j544} = 20 - j4 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{\Delta_{I_2}}{\Delta} = \frac{j13056}{j544} = 24 \text{ A}$$

Calculadas as correntes de malha, temos a potência no resistor de $8\ \Omega$ dada por

$$\boxed{P_{8\,\Omega} = R \cdot I_2^2 = (8)(24^2) = 4608 \text{ W}}$$

(b)

A potência forncecida pela fonte é dada por

$$S_{V_g} = V_g \cdot (I_1)^* = 272\underline{/0^\circ} \cdot 20.39\underline{/+11.31^\circ} = 5546.08\underline{/11.31^\circ} \text{ VA}$$

$$\boxed{S_{V_g} = 5438.37 \text{ W} + j1087.6 \text{ VA}_R}$$

(c)

Temos que Z_{ab} é a impedância vista pela fonte, removido o resistor de $2\ \Omega$. Logo,

$$Z_{ab} = \frac{V_g}{I_1} - 2 = \frac{272\underline{/0^\circ}}{20.39\underline{/-11.31^\circ}} - 2 = 13.34\underline{/11.31^\circ} - 2$$

$$\boxed{Z_{ab} = 11.08 + 2.62\ \Omega}$$

(d)

Vamos usar apenas a potência real (W). A potência real fornecida pela fonte é $P_{V_g} = 5438.37$ W. Os dois resistores do circuito absorvem uma potência total de

$$P_{abs} = (2)|20 - j4|^2 + (8)(24)^2 = (2)(20.34)^2 + (8)(24)^2 = 5435.43 \text{ W}$$

Portanto,

$$\boxed{P_{abs} = 5435.43 \text{ W} = P_{V_g}}$$

Problema P10.46

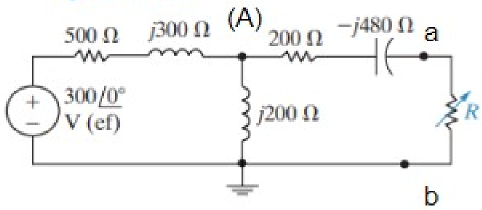
10.46 O resistor variável no circuito da Figura P10.46 é ajustado até que a potência média que ele absorve seja máxima.

a) Determine R.

b) Determine a máxima potência média.

c) Encontre um resistor no Apêndice H que teria a maior potência média fornecida a ele.

Figura P10.46



(a)

Aplicamos teorema de Thevenin nos terminais a e b mostrados na figura.
Começamos calculando a tensão de Thevenin V_{th}, abrindo os terminais a e b. Nesse caso, temos apenas a malha à esquerda do nó essencial (A). Assim, aplicando análise de malhas nessa malha, temos

$$-300 + 500I + j300I + j200I = 0$$

$$I(500 + j300 + j200) = 300$$

$$I = \frac{300}{500 + j500} = 0.3 + j0.3 \text{ A} = 424.25\underline{/45^\circ} \text{ mA}$$

Assim, a tensão $V_A = V_a$ é dada por

$$V_a = j200 \cdot I = 200\underline{/90^\circ}\ \Omega \cdot 424.25\underline{/45^\circ} \text{ mA}$$

$$V_a = V_{ab} = V_{th} = 84.85\underline{/135^\circ} \text{ V}$$

Agora curto-circuitamos os terminais a e b para achar a corrente I_{sc}. Nesse caso, aplicamos análise nodal no nó essencial (A), obtendo

$$\frac{V_A - 300}{500 + j300} + \frac{V_A}{j200} + \frac{V_A}{200 - j480} = 0$$

$$V_A \left(\frac{1}{500 + j300} + \frac{1}{j200} + \frac{1}{200 - j480} \right) = \frac{300}{500 + j300}$$

$$V_A = \frac{\frac{300}{500+j300}}{\frac{1}{500+j300} + \frac{1}{j200} + \frac{1}{200-j480}}$$

$$V_A = \frac{0.4412 - j0.2647}{0.00221 - j0.00410}$$

$$V_A = 110.46\underline{/30.71^\circ} \text{ V}$$

Assim, temos a corrente de curto-circuito dada por

$$I_{sc} = \frac{V_A}{200 - j480} = \frac{110.46\underline{/30.71^\circ}}{200 - j480} = 212.42\underline{/98.09^\circ} \text{ mA}$$

Conhecido V_{th} e I_{sc}, temos a impedância de Thevenin dada por

$$Z_{th} = \frac{V_{th}}{I_{sc}} = 399.5\underline{/36.91^\circ}\ \Omega$$

Para que tenhamos a máxima transferência de potência, precisamos que

$$R = (Z_{th})^*$$

Contudo, como a resistência R é puramente real, temos que a condição de máxima potência é

$$R = |(Z_{th})^*|$$

Portanto,

$$\boxed{R = 399.5\ \Omega}$$

(b)

Usando o circuito equivalente Thevenin, sabemos que a corrente que passa pelo resistor R é

$$I_R = \frac{V_{th}}{R + Z_{th}}$$

$$I_R = \frac{84.85\underline{/135^\circ}}{399.5 + 319.43 + j239.92} = \frac{84.85\underline{/135^\circ}}{718.93 + j239.92}$$

$$I_R = 111.95\underline{/116.54^\circ}\ \text{mA}$$

Assim, a potência P_R no resistor de carga é

$$P_R = R \cdot |I_R|^2$$

$$\boxed{P_R = 5\ \text{W}}$$

(c)

O resistor com valor comercial mais próximo do valor calculado de $R = 399.5\ \Omega$ é o resistor de

$$\boxed{R_c = 390\ \Omega}$$

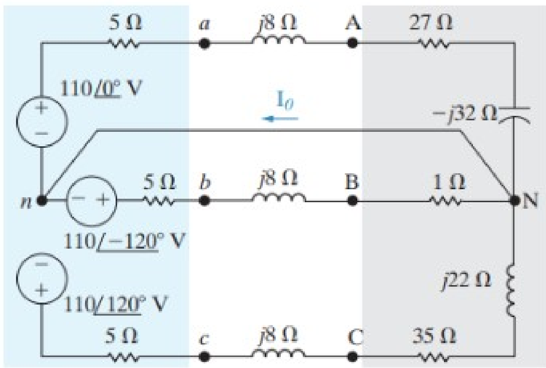
Problema P11.06

11.6 Pspice Multisim

a) O circuito na Figura P11.6 é ou não um sistema trifásico equilibrado? Explique.

b) Determine $\mathbf{I}_o$.

Figura P11.6



(a)

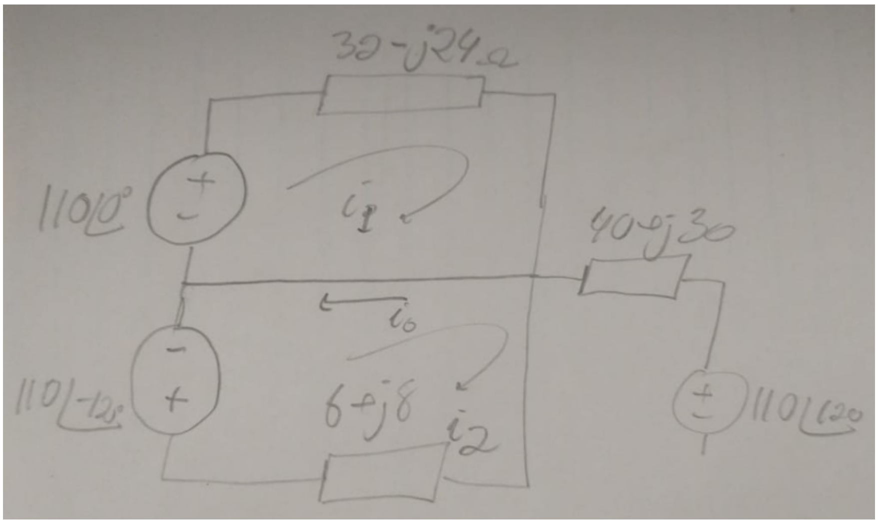
O circuito da Figura P11.6 não é equilibrado pois

- A impedância de cada fase da carga é diferente;
- A fonte da fase c não está conectada no neutro da fonte trifásica. Assim, a corrente das fases é diferente e o circuito não é equilibrado.

(b)

Combinando as impedâncias de fase e carga, e usando o fato que a fonte da fase c está desconectada do neutro da fonte trifásica, temos o circuito equivalente mostrado na Figura 11.06.1.

Figure 11.06.1: Circuito equivalente ao enunciado.



Nesse circuito equivalente, aplicamos análise de malhas com as correntes de malha i_1 e i_2, usando o fato de que

$$i_0 = i_1 - i_2 \tag{11.06.1}$$

Malha 1:

$$-110 + (32 - j24)i_1 = 0$$

$$i_1 = \frac{110}{32 - j24}$$

Malha 2:

$$110\underline{/-120^\circ} + (6 + j8)i_2 = 0$$

$$i_2 = -\frac{110\underline{/-120^\circ}}{6 + j8}$$

Substituindo i_1 e i_2 em (11.06.1), temos

$$i_0 = \frac{110}{32 - j24} - \left(-\frac{110\underline{/-120^\circ}}{6 + j8}\right)$$

$$i_0 = \frac{110}{32 - j24} - \frac{110\underline{/-120^\circ}}{6 + j8}$$

$$i_0 = 2.75\underline{/36.86^\circ} - 11\underline{/-173.13^\circ}$$

$$i_0 = 2.2 + j1.65 + 10.92 + j1.32$$

$$i_0 = 13,12 + j2.97$$

$$\boxed{i_0 = 13.45\underline{/12.75^\circ}\ \mathrm{A}}$$

Problema P11.10

11.10 Um circuito trifásico equilibrado tem as seguintes características:

- Está ligado em Y-Y;
- A tensão de linha na fonte, $\mathbf{V}_{ab}$, é $110\sqrt{3}\underline{/-60^\circ}$ V;
- A sequência de fases é positiva;
- A impedância de linha é $3 + j2\ \Omega/\phi$;
- A impedância de carga é $37 + j28\ \Omega/\phi$.

a) Desenhe o circuito monofásico equivalente para a fase a.

b) Calcule a corrente de linha na fase a.

c) Calcule a tensão de linha na carga na fase a.

(a)

A tensão de linha da fonte trifásica é dada por

$$V_{ab} = V_a - V_b \tag{11.10.1}$$

Como a sequências das fases é positiva, temos que a fase a está adiantada em relação a fase b de $120°$. Além disso, sabemos que a tensão de linha se relaciona com a tensão de fase através de

$$V_{ab} = |V_{an}|\sqrt{3}\underline{/\phi_{an} \pm 30^\circ} \tag{11.10.2}$$

Como a sequência de fases é positiva, usamos o sinal positivo para a fase em (11.10.2). Dessa forma, comparando com o valor de $V_{ab} = 110\sqrt{3}\underline{/-60^\circ}$ fornecido no enunciado, temos

$$\phi_{an} + 30^\circ = -60^\circ \quad \Rightarrow \quad \phi_{an} = -90^\circ$$

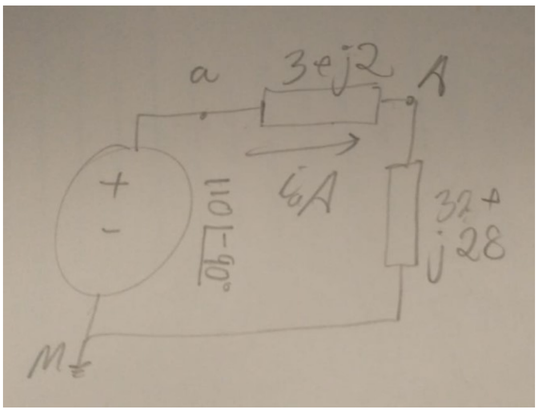
$$|V_{ab}| = |V_{an}|\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad |V_{an}| = 110 \text{ V}$$

Assim, a tensão de fase é dada por

$$V_{an} = 110\underline{/-90^\circ} \text{ V}$$

E o circuito monofásico equivalente da fase a está exibido na Figura 11.10.1.

Figure 11.10.1: Circuito equivalente ao enunciado.



(b)

A corrente da fase a é dada por

$$I_{aA} = \frac{V_{an}}{Z_{aA} + Z_L}$$

$$I_{aA} = \frac{110\angle{-90^\circ}}{3 + j2 + 37 + j28} = \frac{110\angle{-90^\circ}}{40 + j30}$$

$$\boxed{I_{aA} = 2.2\angle{-126.87^\circ}\ \text{A}}$$

(c)

A tensão na carga na fase a é dada por

$$V_{AN} = Z_a \cdot I_{aA} = (37 + j28)(2.2\angle{-126.87^\circ})$$

$$V_{AN} = 102.08\angle{-89.75^\circ}\ \text{V}$$

A tensão de linha na carga, usando (11.10.2),

$$V_{AB} = 102.08\sqrt{3}\angle{-89.75 + 30^\circ}\ \text{V}$$

$$\boxed{V_{AB} = 176.8\angle{59.75^\circ}\ \text{V}}$$

Problema P11.19

11.19 A impedância Z no circuito trifásico equilibrado da Figura P11.19 é $100 - j75\ \Omega$.

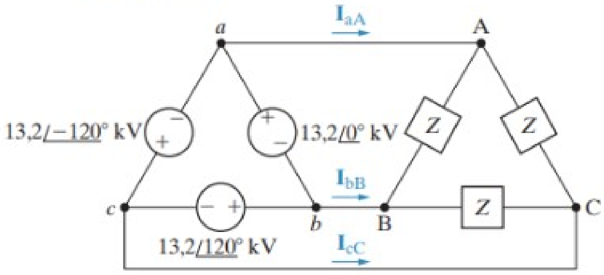
Determine

a) $\mathbf{I}_{AB}$, $\mathbf{I}_{BC}$ e $\mathbf{I}_{CA}$,

b) $\mathbf{I}_{aA}$, $\mathbf{I}_{bB}$ e $\mathbf{I}_{cC}$,

c) $\mathbf{I}_{ba}$, $\mathbf{I}_{cb}$ e $\mathbf{I}_{ac}$.

Figura P11.19



(a)

Observe que a carga Z_{AB} está em paralelo com a fonte de tensão V_{ab}. Portanto, a queda de tensão na carga Z_{AB} é V_{ab}. Note que o mesmo se aplica para todas as cargas com suas respectivas fontes de tensão.
Assim,

$$I_{AB} = \frac{V_{ab}}{Z_{AB}} = \frac{13200\angle{0^\circ}}{100 - j75} = 105.6\angle{36.86^\circ}\ \text{A}$$

$$I_{BC} = \frac{V_{bc}}{Z_{BC}} = \frac{13200\angle{120^\circ}}{100 - j75} = 105.6\angle{156.87^\circ}\ \text{A}$$

$$I_{CA} = \frac{V_{ca}}{Z_{CA}} = \frac{13200\angle{-120^\circ}}{100 - j75} = 105.6\angle{-83.13^\circ}\ \text{A}$$

(b)

Aplicando análise nodal no nó (A), temos

$$I_{aA} + I_{AB} + I_{CA} = 0$$

Note que, da maneira que foi definido no item (a), a corrente I_{CA} vai do nó C para o A, a corrente I_{AB} vai do nó A para o B. Logo, I_{CA} e I_{aA} entram nó (A), enquanto I_{AB} sai do nó. Corrigindo a equação nodal, temos

$$I_{aA} = I_{AB} - I_{CA}$$

$$I_{aA} = 105.6\underline{/36.86°} - 105.6\underline{/-83.13°}$$

$$I_{aA} = 84.49 + j63.345 - (12.63 - j104.84) = 71.65 + j168.485$$

$$I_{aA} = 183\underline{/66.96°}\ \text{A}$$

Aplicamos exatamente o mesmo raciocínio para as demais correntes de fase.
Nó (B):

$$I_{bB} = I_{BC} - I_{AB}$$

$$I_{bB} = 105.6\underline{/156.87°} - 105.6\underline{/36.86°}$$

Extrapolando o resultado de I_{aA},

$$I_{bB} = 105.6\sqrt{3}\underline{/156.87 + 30°}\ \text{A}$$

$$I_{bB} = 183\underline{/186.87°}\ \text{A}$$

Por último, vamos para o nó (C):

$$I_{cC} = I_{CA} - I_{BC}$$

$$I_{cC} = 105.6\underline{/-83.13°} - 105.6\underline{/156.87°}$$

$$I_{cC} = 105.6\sqrt{3}\underline{/-83.13 + 30°}\ \text{A}$$

$$I_{cC} = 183\underline{/-53.13°}\ \text{A}$$

(c)

Usamos a relação entre corrente de fase e corrente de linha.

$$I_{ba} = \frac{1}{\sqrt{3}} I_{aA}\underline{/66.96 - 30°} = 105.1\underline{/36.96°}\ \text{A}$$

$$I_{cb} = \frac{1}{\sqrt{3}} I_{bB}\underline{/186.87 - 30°} = 105.1\underline{/156.87°}\ \text{A}$$

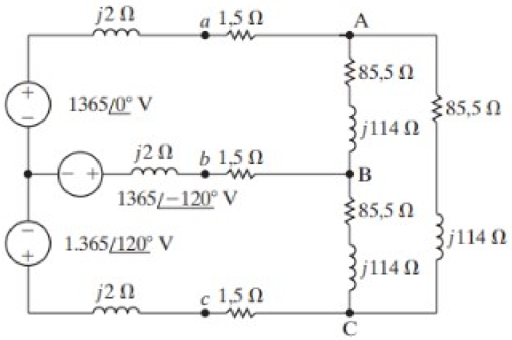
$$I_{ac} = \frac{1}{\sqrt{3}} I_{cC}\underline{/-53.13 - 30°} = 105.1\underline{/-83.13°}\ \text{A}$$

Problema P11.23

11.23 a) Determine o valor eficaz e o ângulo de fase de $\mathbf{I}_{CA}$ no circuito da Figura P11.23.

b) Qual percentagem da potência média fornecida pela fonte trifásica é dissipada na carga trifásica?

Figura P11.23



(a)

Como o circuito trifásico do enunciado é equilibrado, o primeiro passo é encontrar o circuito monofásico equivalente.

Para isso, aplicamos conversão delta - estrela na carga trifásica conectada à fonte. Quando todas impedâncias são iguais, temos que a conversão de uma impedância em Δ para Y é feita via

$$Z_Y = \frac{Z_\Delta}{3} \tag{11.23.1}$$

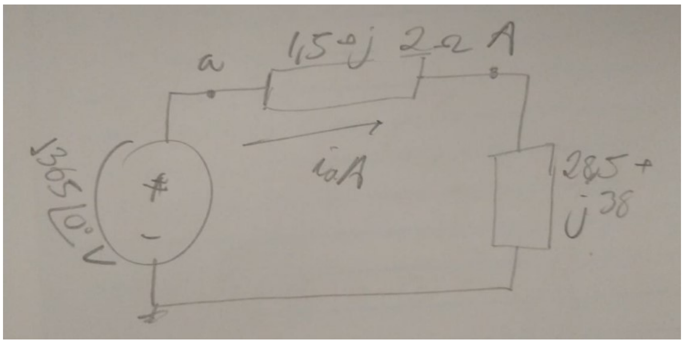
Assim, temos que configuração Y da carga do problema possui impedância de fase dada por

$$Z_Y = \frac{85.5 + j114}{3} = 28.5 + j38\ \Omega$$

Assim, o circuito monofásico equivalente da fase a está exibido na Figura 11.23.1

Combinando as impedâncias de fase e carga, e usando o fato que a fonte da fase c está desconectada do neutro da fonte trifásica, temos o circuito equivalente mostrado na Figura 11.23.1.

Figure 11.23.1: Circuito monofásico equivalente da fase a.



Nesse circuito equivalente, temos que a corrente de fase I_{aA} é

$$I_{aA} = \frac{1365}{30 + j40} = 27.31\underline{/-53.13^\circ}\ \text{A}$$

Assim, como as correntes de dase em um circuito equilibrado tem módulo igual mas defesagem de 120°, temos

$$I_{bB} = 27.31\underline{/-173.13^\circ}\ \text{A} \quad , \quad I_{cC} = 27.31\underline{/66.87^\circ}\ \text{A}$$

Note que as tensões de fase são positivas (ordem abc), logo as correntes também possuem essa ordem. Usando I_{cC}, temos que a queda de tensão V_{cn} em cada fase da carga na configuração Y é

$$V_{cn} = I_{cC} \cdot Z_Y$$

$$V_{cn} = 27.31\underline{/66.87^\circ} \cdot (28.5 + j38) = 1296.78\underline{/120^\circ}\ \text{V}$$

Uma vez conhecido a tensão de fase V_{cn} na carga, temos que a tensão de linha V_{CA} na carga é

$$V_{CA} = \sqrt{3}|V_{cn}|\underline{/\phi_{cn} + 30^\circ} \tag{11.23.2}$$

Substituindo, temos

$$V_{CA} = 2246\underline{/150^\circ}\ \text{V}$$

Finalmente, a corrente de linha I_{CA} na configuração Δ é

$$I_{CA} = \frac{V_{CA}}{Z_\Delta} = \frac{2246\underline{/150^\circ}}{85.5 + j114}$$

$$\boxed{I_{CA} = 15.46\underline{/96.86^\circ}\ \text{A}}$$

(b)

Usando o circuito monofásico equivalente da Figura 11.23.1, temos que a potência fornecida pela fonte por fase é

$$S_{V/\phi} = V_{An} \cdot (I_{aA})^* = 37278.15\underline{/53.13^\circ}\ \text{VA}$$

A potência que efetivamente chega na carga por fase é

$$S_{L/\phi} = V_{an} \cdot (I_{aA})^*$$

Podemos usar a fase c que já conhecemos o valor de V_{cn}, usando o fato do circuito equilibrado dissipar a mesma potência em todas as fases.

$$S_{L/\phi} = V_{cn} \cdot (I_{cC})^* = 31415.06\underline{/53.13^\circ}\ \text{VA}$$

A porcentagem $S_\%$ da potência fornecida pela fonte que chega na carga é

$$S_\% = \frac{S_{L/\phi}}{S_{V/\phi}} = \frac{31415.06\underline{/53.13^\circ}\ \text{VA}}{37278.15\underline{/53.13^\circ}\ \text{VA}} 100\%$$

$$\boxed{S_\% = 84.27\%}$$

Problema P11.36

11.36 Três cargas trifásicas equilibradas estão ligadas em paralelo. A carga 1 está ligada em Y e tem uma impedância de $400 + j300\ \Omega/\phi$; a carga 2 está ligada em Δ e tem uma impedância de $2.400 - j1.800\ \Omega/\phi$; e a carga 3 absorve $172{,}8 + j2.203{,}2$ kVA. As cargas são alimentadas por uma linha de distribuição com uma impedância de $2 + j16\ \Omega/\phi$. O módulo da tensão fase-neutro na carga é $24\sqrt{3}$ kV.

a) Calcule a potência complexa total no início da linha.

b) Qual percentagem da potência média, disponível no início da linha, é fornecida às cargas?

(a)

Começamos identificando a corrente que passa em cada carga, para assim conseguirmos calcular a corrente de fase. Uma vez calculado a corrente de fase, usamos o fato do circuito estar equilibrado para calcular a corrente total forncecida pela fonte.
Na carga 1, que possui impedância $Z_1 = 400 + j300\ \Omega$ e está ligada em Y, temos

$$I_1 = \frac{V_a}{Z_1} \quad \Rightarrow \quad I_1 = \frac{24000\sqrt{3}\underline{/0^\circ}}{400 + j300}$$

$$I_1 = 83.14\underline{/-36.87^\circ}\ \text{A} = 66.52 - j49.89\ \text{A}$$

Na carga 2, ligada em Δ, usamos o mesmo raciocínio da carga 1, mas usando a tensão de linha, uma vez que a ligação em Δ naõ admite conexão ao terminal neutro.

$$I_2 = \frac{V_{ab}}{Z_2} \quad \Rightarrow \quad I_2 = \frac{24000\sqrt{3}\sqrt{3}\underline{/0 + 30^\circ}}{2400 - j1800}$$

$$I_2 = 8\underline{/-6.87^\circ}\ \text{A} = 7.94 - j0.96\ \text{A}$$

Por fim, para a carga 3, usamos a potência aparente para calcular a corrente, através de

$$S_3 = V_a \cdot I_3 \quad \Rightarrow \quad I_3 = \left(\frac{S_3}{V_a}\right)^*$$

$$I_3 = \left(\frac{172800 + j2203200}{24000\sqrt{3}}\right)^*$$

$$I_3 = 4.15 - j53\ \text{A}$$

Com I_1, I_2 e I_3 calculados, temos a corrente total I_{T_a} da fase a dada por

$$I_{T_a} = I_1 + I_2 + I_3$$

$$I_{T_a} = 78.61 - j103.85\ \text{A}$$

Agora calculamos a tensão forncecida pela fonte na fase a, considerando a queda causada pela impedância de linha.
A queda causada pela linha é

$$V_l = Z_l \cdot I_{T_a} \quad \Rightarrow \quad V_l = (2 + j16) \cdot (78.61 - j103.85)$$

$$V_l = 1818.82 + j1050\ \text{V}$$

Assim, a tensão V_{T_a} forncecida pela fase é

$$V_{T_a} = V_a + V_l \quad \Rightarrow \quad V_{T_a} = 24000\sqrt{3}\underline{/0^\circ} + 1818.82 + j1050$$

$$V_{T_a} = 43.39 + j1.05\ \text{kV}$$

Assim, a potência total forncecida pela fase a é

$$S_a = V_{T_a} \cdot (I_{T_a})^*$$

$$S_a = [(43.39 + j1.05) \cdot 10^3] \cdot (78.61 - j103.85)^*$$

$$S_a = 3.3 + j4.59 \text{ MVA}$$

Como o circuito está equilibrado, a potência total forncecida pela fonte (3 fases) é

$$S_T = 3 \cdot S_a$$

$$\boxed{S_T = 9.9 + j13.77 \text{ MVA}}$$

(b)

Cada fase apresenta uma queda de tensão indesejada de $V_l = 1818.82 + j1050$ V causada pela impedância da linha. A potência que essa impedância de linha possui é

$$S_l = V_l \cdot (I_{T_a})^* \quad \Rightarrow \quad S_l = (1818.82 + j1050) \cdot (78.61 - j103.85)^*$$

$$S_l = 33.93 + j271.42 \text{ kVA}$$

Assim, nas 3 fases, a potência total perdida nas impedâncias de linha é

$$S_{l_T} = 3 \cdot S_l = 101.79 + j814.26 \text{ kVA}$$

Finalmente, o percentual de potência que efetivamente é forncecida às cargas é

$$S_{\%} = \left| \frac{S_T - S_{l_T}}{S_T} \right| 100\%$$

$$S_{\%} = \left| \frac{9.9 + j13.77 - 0.10179 - j0.8142}{9.9 + j13.77} \right| 100\%$$

$$S_{\%} = |0.9551 - j0.02315|\ 100\%$$

$$\boxed{S_{\%} = 95.53\%}$$

Problema P11.38

11.38 Uma fonte trifásica equilibrada está fornecendo 540 kVA, com um fp atrasado de 0,96, a duas cargas paralelas equilibradas ligadas em Δ. A impedância da linha de distribuição que liga a fonte à carga é desprezível. A potência associada à carga 1 é 38,4 − *j*208,8 kVA.

a) Determine os tipos de componente e suas impedâncias por fase da carga 2, se a tensão de linha for 1.600√3 V e os componentes da impedância estiverem em série.

b) Repita (a) com os componentes da impedância em paralelo.

(a)

A fonte trifásica fornece uma potência total $S = 540$ kVA, com um fator de potência atrasado de $FP = 0.96$. O fator de potência atrasado significa que a carga é indutiva, possuindo um ângulo de fase $\phi < 0$.
Sabemos que o fator de potência é definido como

$$FP = \frac{P}{|S|} \qquad (11.38.1)$$

Isolando P e substituindo, temos

$$P = (FP)|S| \quad \Rightarrow \quad P = 518400 \text{ W}$$

Além disso, temos que a potência aparente S se relaciona com as potências ativa P e reativa Q através de

$$S^2 = P^2 + Q^2 \tag{11.38.2}$$

Isolando Q e substituindo, temos

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} \quad \Rightarrow \quad Q = 151200 \text{ VA}_R$$

Portanto, a potência total fornecida pela fonte é

$$S_T = 518400 \text{ W} + 151200 \text{ VA}_R$$

Como a carga 1 dissipa $S_1 = 38.4 - j208.8 \text{ kVA}$, e sabemos que

$$S_2 = S_T - S_1$$

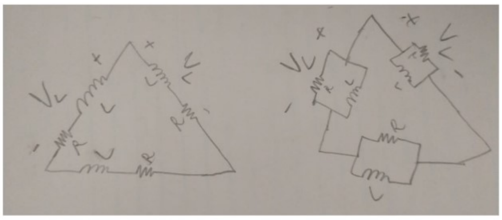
Temos

$$S_2 = 480 + j360 \text{ kVA}$$

Além disso, como as cargas são trifásicas e equilibradas, temos que cada fase recebe exatamente $\frac{1}{3}$ da potência da carga. Assim, cada fase de S_2 recebe

$$S_{2/\phi} = 160 + j120 \text{ kVA}$$

Figure 11.38.1: (a) Componentes da carga em série. (b) Componentes da carga em paralelo



(a) (b)

No caso dos componentes da carga estarem em série, como mostra a Figura 11.38.1 (a), temos

$$S_{2/\phi} = \frac{|V_L|^2}{Z^*} \tag{11.38.3}$$

Isolando Z em (11.38.3),

$$Z_s = \left(\frac{|V_L|^2}{S_{2/\phi}}\right)^* = \left(\frac{|1600\sqrt{3}|^2}{160000 + j120000}\right)^*$$

$$Z_s = \left(\frac{7680000}{160000 + j120000}\right)^* = (30.72 - j23.04)^* = 30.72 + j23.04 \ \Omega$$

Assim, usando $L = \frac{X_L}{j\omega}$ e assumindo a fonte trifásica operando em $f = 60 \text{ Hz}$, temos os componentes em série dados por

$$\boxed{R = 30.72 \ \Omega \quad , \quad L = 61.1 \text{ mH}}$$

(b)

Agora usamos os componentes em paralelo, como mostra a Figura 11.38.1 (b). Note que o resistor R irá dissipar totalmente a parte real da potência, enquanto o idutor L está associado totalmente à parte imaginária da potência. Assim, podemos fazer

$$R = \left(\frac{|V_L|^2}{Re\ \{S_{2/\phi}\}} \right)^*$$

$$R = \left(\frac{|1600\sqrt{3}|^2}{160000} \right)^* = 48\ \Omega$$

Agora para a parte imaginária associada ao indutor,

$$X_L = \left(\frac{|V_L|^2}{Im\ \{S_{2/\phi}\}} \right)^*$$

$$X_L = \left(\frac{|1600\sqrt{3}|^2}{j120000} \right)^* = (-j64)^* = j64\ \Omega$$

Novamente usando $L = \frac{X_L}{j\omega}$, identificamos a indutância de L, obtendo

$$\boxed{R = 48\ \Omega \quad , \quad L = 169.8\ \text{mH}}$$