Aluno: Raphael Henrique Braga Leivas

Código fonte LaTeX desse arquivo pode ser visto em meu GitHub pessoal:

https://github.com/RaphaelLeivas/latex/tree/main/ListaCEII

Aceito sugestões de melhoria do código :)

Problema P6.41

6.41 a) Mostre que os dois enrolamentos acoplados magneticamente na Figura P6.41 podem ser substituídos por um único enrolamento com uma indutância de

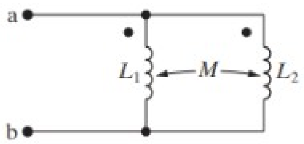
$$L_{ab} = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}.$$

(*Sugestão:* considere i_1 e i_2 correntes de malha no sentido horário nas 'janelas' da esquerda e da direita da Figura P6.41, respectivamente. Some as tensões ao longo das duas malhas. Na malha 1, considere v_{ab} a tensão aplicada não especificada. Resolva para di_1/dt em função de v_{ab}.)

b) Mostre que, se a polaridade magnética do enrolamento 2 for invertida, então

$$L_{ab} = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}.$$

Figura P6.41



(a)

Aplicando análise de malhas no circuito, temos na malha 1:

$$-v_{ab} + L_1 \frac{\mathrm{d}(i_1 - i_2)}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

$$v_{ab} = \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}(L_1) + \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}(M - L_1) \tag{6.41.1}$$

Na malha 2,

$$L_1 \frac{\mathrm{d}(i_2 - i_1)}{\mathrm{d}t} - M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}(i_1 - i_2)}{\mathrm{d}t} + L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}(-L_1 + M) + \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}(L_1 - 2M + L_2) = 0 \tag{6.41.2}$$

A partir de (6.41.1) e (6.41.2) temos o sistema linear

$$\begin{bmatrix} L_1 & M - L_1 \\ M - L_1 & L_1 - 2M + L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{ab} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vamos resolver o sistema aplicando o método de Cramer. Temos

$$\Delta = \begin{vmatrix} L_1 & M - L_1 \\ M - L_1 & L_1 - 2M + L_2 \end{vmatrix} = L_1^2 - 2ML_1 + L_1L_2 - (M^2 - 2ML_1 + L_1^2) = L_1L_2 - M^2$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} v_{ab} & M - L_1 \\ 0 & L_1 - 2M + L_2 \end{vmatrix} = (v_{ab})(L_1 - 2M + L_2) \quad , \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} L_1 & v_{ab} \\ M - L_1 & 0 \end{vmatrix} = (v_{ab})(L_1 - M)$$

Assim,

$$\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = v_{ab}\frac{L_1 - 2M + L_2}{L_1L_2 - M^2}$$

$$v_{ab} = \left(\frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 - 2M + L_2}\right)\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

Usando o fato de que, em um indutor, a tensão é dada por

$$v(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

Temos que a impedância equivalente ao circuito acima, do ponto de vista dos terminais a e b, é

$$\boxed{L_{eq} = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 - 2M + L_2}}$$

(b)

Invertendo a polaridade magnética de L_2, temos que (6.41.1) e (6.41.2) se tornam

$$v_{ab} = \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}(L_1) + \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}(-M - L_1)$$

$$\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}(-L_1 - M) + \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}(L_1 + 2M + L_2) = 0$$

Assim, o sistema linear fica como

$$\begin{bmatrix} L_1 & -M - L_1 \\ -M - L_1 & L_1 + 2M + L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{ab} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Novamente usando Cramer,

$$\Delta = \begin{vmatrix} L_1 & -M - L_1 \\ -M - L_1 & L_1 + 2M + L_2 \end{vmatrix} = L_1^2 + 2ML_1 + L_1L_2 - (M^2 + 2ML_1 + L_1^2) = L_1L_2 - M^2$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} v_{ab} & -M - L_1 \\ 0 & L_1 + 2M + L_2 \end{vmatrix} = (v_{ab})(L_1 + 2M + L_2) \quad , \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} L_1 & v_{ab} \\ -M - L_1 & 0 \end{vmatrix} = (v_{ab})(L_1 + M)$$

Assim,

$$\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = v_{ab}\frac{L_1 + 2M + L_2}{L_1L_2 - M^2}$$

Com o mesmo raciocínio usado no item (a),

$$v_{ab} = \left(\frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 + 2M + L_2}\right)\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{L_{eq} = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 + 2M + L_2}}$$