Aluno: Raphael Henrique Braga Leivas

Código fonte LaTeX desse arquivo pode ser visto em meu GitHub pessoal:

https://github.com/RaphaelLeivas/latex/tree/main/ListaCEII

Aceito sugestões de melhoria do código :)

Problema P6.39

6.39 Não há nenhuma energia armazenada no circuito da Figura P6.39 no momento em que a chave é aberta.

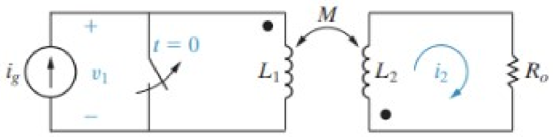
a) Deduza a equação diferencial que descreve o comportamento de i_2 se $L_1 = 5$ H, $L_2 = 0{,}2$ H, $M = 0{,}5$ H e $R_o = 10\ \Omega$.

b) Mostre que, quando $i_g = e^{-10t} - 10$ A, $t \geq 0$, a equação diferencial encontrada em (a) é satisfeita quando $i_2 = 625e^{-10t} - 250e^{-50t}$ mA, $t \geq 0$.

c) Determine a expressão para a tensão v_1 nos terminais da fonte de corrente.

d) Qual é o valor inicial de v_1? Isso faz sentido em termos do comportamento conhecido do circuito?

Figura P6.39



(a)

Aplicando análise de malhas no circuito, temos na malha 1:

$$-v_1(t) + L_1\frac{\mathrm{d}i_g}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{6.39.1}$$

Na malha 2,

$$+i_2R_o + L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_g}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{6.39.2}$$

Subsituindo os valores do enunciado na equação da malha 2,

$$10i_2 + 0.2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + 0.5\frac{\mathrm{d}i_g}{\mathrm{d}t} = 0$$

Isolando i_2 na EDO,

$$\boxed{0.2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + 10i_2 = -0.5\frac{\mathrm{d}i_g}{\mathrm{d}t} \quad , \quad t \geq 0}$$

(b)

Subsituindo o valor fornecido de $i_g(t) = e^{-10t} - 10$ A na EDO do item (a), temos

$$0.2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + 10i_2 = (-0.5)(-10e^{-10t})$$

$$\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + 50i_2 = 25e^{-10t}$$

A EDO possui fator integrante $M(t)$ dado por

$$M(t) = e^{\int 50\,dt} \quad \Rightarrow \quad M(t) = e^{50t}$$

Multiplicando a EDO por $M(t)$,

$$e^{50t}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + 50i_2e^{50t} = 25e^{-10t}e^{50t}$$

$$e^{50t}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + 50e^{50t}i_2 = 25e^{40t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\left[i_2 \cdot e^{50t}\right]}{\mathrm{d}t} = 25e^{40t}$$

Portanto,

$$i_2 \cdot e^{50t} = \int 25e^{40t}\,dt$$

$$i_2 \cdot e^{50t} = 25\frac{1}{40}(e^{40t} + C)$$

$$i_2 = 0.625\frac{e^{40t}}{e^{50t}} + \frac{C}{e^{50t}}$$

Finalmente, a solução geral da EDO é

$$\boxed{i_2(t) = 0.625e^{-10t} + Ce^{-50t}\ \mathrm{A} \quad , \quad t \geq 0}$$

Como $i_2(t) = 625e^{-10t} - 250e^{-50t}$ mA é da mesma forma que a solução geral da EDO, temos que ela satisfaz a EDO do item (a).

(c)

A partir de (6.39.1), temos

$$v_1(t) = L_1\frac{\mathrm{d}i_g}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

Usando $L_1 = 5$ H, $M = 0.5$ H, $i_g(t) = e^{-10t} - 10$ A e $i_2(t) = 625e^{-10t} - 250e^{-50t}$ mA, temos

$$v_1(t) = -50e^{-10t} - 3.125e^{-10t} + 6.25e^{-50t}$$

$$\boxed{v_1(t) = -53.125e^{-10t} + 6.25e^{-50t}\ \mathrm{V} \quad , \quad t \geq 0}$$

(d)

Usando a expressão de $v_1(t)$ calculada no item (c), temos

$$v_1(0) = -53.125e^{0} + 6.25e^{0}\ \mathrm{V}$$

$$\boxed{v_1(0) = -46.875\ \mathrm{V}}$$