Problema P9.14

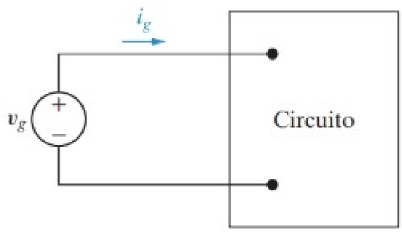
9.14 As expressões para a tensão e a corrente de regime permanente nos terminais do circuito da Figura P9.14 são

$$v_g = 300 \cos (5.000\pi t + 78^\circ) \text{ V},$$
$$i_g = 6 \text{ sen } (5.000\pi t + 123^\circ) \text{ A}.$$

a) Qual é a impedância vista pela fonte?

b) De quantos microssegundos é a defasagem entre a corrente e a tensão?

Figura P9.14



(a)

A impedância Z_{in} vista pela fonte é dada por

$$Z_{in} = \frac{V_g}{I_g} \tag{9.14.1}$$

Usando a relação trigonométrica

$$\sin\theta = \cos(\theta - 90^\circ)$$

Podemos reescrever a expressão de $i_g(t)$ como

$$i_g(t) = 6\cos(5000\pi + 123^\circ - 90^\circ)$$

$$i_g(t) = 6\cos(5000\pi + 33^\circ)$$

Assim, em notação fasorial, temos

$$Z_{in} = \frac{\frac{300}{\sqrt{2}}\angle 78^\circ}{\frac{6}{\sqrt{2}}\angle 33^\circ} \tag{9.14.2}$$

$$\boxed{Z_{in} = 50\angle 45^\circ \ \Omega}$$

(b)

Usando proporcionalidade (regra de três simples), sabemos que uma diferença de fase de $\Delta\phi$ corresponde a uma diferença temporal Δt dada por

$$\frac{T}{\Delta t} = \frac{360^\circ}{\Delta\phi}$$

onde $T = \frac{2\pi}{\omega}$ é o período do sinal. Isolando Δt, temos

$$\Delta t = T\frac{\Delta\phi}{360^\circ} \tag{9.14.3}$$

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega}\frac{\Delta\phi}{360^\circ}$$

Substituindo tudo, temos

$$\boxed{\Delta t = 50\ \mu s}$$

Problema P9.37

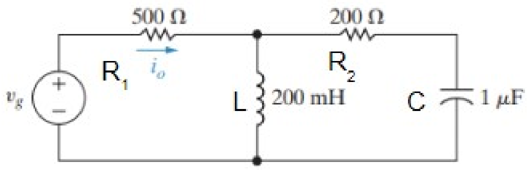
9.37 Pspice Multisim

A frequência da fonte de tensão senoidal no circuito da Figura P9.37 é ajustada até que a corrente i_o fique em fase com v_g.

a) Determine a frequência em hertz.

b) Determine a expressão de regime permanente para i_o (na frequência encontrada em [a]), se $v_g = 90 \cos \omega t$ V.

Figura P9.37



(a)

Vamos começar identificando a impedância equivalente Z_{in} vista pela fonte v_g.

$$Z_{in} = \left(\left(\frac{1}{j\omega C} + R_2 \right) \ // \ j\omega L \right) + R_1$$

$$Z_{in} = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{\frac{1}{j\omega C} + R_2}}$$

Agora vamos isolar a parte real da parte complexa.

$$Z_{in} = R_1 + \frac{1}{-\frac{j}{\omega L} + \frac{1}{-\frac{j}{\omega C} + R_2}}$$

$$Z_{in} = R_1 + \frac{1}{-\frac{j}{\omega L} + \frac{\omega C}{-j + R_2\omega C}}$$

$$Z_{in} = R_1 + \frac{1}{-\frac{j}{\omega L} + \frac{(\omega C)(+j + R_2\omega C)}{1^2 + (R_2\omega C)^2}}$$

$$Z_{in} = R_1 + \frac{1}{-\frac{j}{\omega L} + \frac{j\omega C}{1 + (R_2\omega C)^2} + \frac{R_2\omega^2 C^2}{1 + (R_2\omega C)^2}}$$

$$Z_{in} = R_1 + \frac{1}{-\frac{R_2\omega^2 C^2}{1 + (R_2\omega C)^2} + j\left(-\frac{1}{\omega L} + \frac{\omega C}{1 + (R_2\omega C)^2}\right)}$$

Vamos adotar uma notação para simplificar a expressão. Sejam

$$A = \frac{R_2\omega^2 C^2}{1 + (R_2\omega C)^2} \quad , \quad B = -\frac{1}{\omega L} + \frac{\omega C}{1 + (R_2\omega C)^2}$$

Com isso, podemos reescrever a expressão de Z_{in} como

$$Z_{in} = R_1 + \frac{1}{A + jB}$$

Continuamos o processo de isolar a parte real da parte complexa.

$$Z_{in} = R_1 + \frac{1}{A + jB}$$

$$Z_{in} = R_1 + \frac{A - jB}{A^2 + B^2}$$

$$Z_{in} = \left(R_1 + \frac{A}{A^2 + B^2}\right) - j\frac{B}{A^2 + B^2}$$

Agora é possível expressar uma função para o ângulo de fase ϕ de Z_{in}, dada por

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{-\frac{B}{A^2+B^2}}{R_1 + \frac{A}{A^2+B^2}}\right)$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{-\frac{B}{A^2+B^2}}{\frac{R_1(A^2+B^2)+A}{A^2+B^2}}\right)$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(-\frac{B}{R_1(A^2 + B^2) + A}\right) \tag{9.37.1}$$

Uma vez calculado Z_{in}, podemos expressar a relação entre V_g e I_o através de

$$V_g = Z_{in} \cdot I_g \tag{9.37.2}$$

Para que (9.37.2) seja satisfeita com V_g e I_o em fase, temos que o ângulo de fase de Z_{in} deve ser nulo. Portanto, usando (9.37.1), temos

$$\phi = \tan^{-1}\left(-\frac{B}{R_1(A^2 + B^2) + A}\right) = 0$$

$$-\frac{B}{R_1(A^2 + B^2) + A} = 0$$

$$B = 0$$

Expandindo B conforme o definimos, temos

$$-\frac{1}{\omega L} + \frac{\omega C}{1 + (R_2\omega C)^2} = 0$$

$$\frac{-1 - R_2^2\omega^2 C^2 + (\omega L)(\omega C)}{(\omega L)(1 + R_2^2\omega^2 C^2)} = 0$$

$$-1 - R_2^2\omega^2 C^2 + \omega^2 LC = 0$$

Isolando ω, temos

$$\omega^2 = \frac{1}{LC - R_2^2C^2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC - R_2^2C^2}}$$

Usando $\omega = 2\pi f$, a frequência f em Hertz da fonte de tensão deve ser

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC - R_2^2C^2}} \tag{9.37.3}$$

Substituindo,

$$\boxed{f = 397.89 \text{ Hz}}$$

(b

Usando (9.37.2), temos

$$i_o(t) = \frac{v_g(t)}{Z_{in}} \tag{9.37.4}$$

Note que Z_{in} é puramente real, pois o ângulo de fase é nulo (fizemos $B = 0$ no item anterior). Assim, a expressão de Z_{in} se reduz a

$$Z_{in} = R_1 + \frac{A}{A^2 + 0}$$

$$Z_{in} = R_1 + \frac{1}{A}$$

$$Z_{in} = R_1 + \frac{1 + (R_2\omega C)^2}{R_2\omega^2C^2}$$

$$Z_{in} = 1500 \ \Omega$$

Subsituindo em (9.37.4),

$$i_o(t) = \frac{90\cos(\omega t)}{1500 \ \Omega}$$

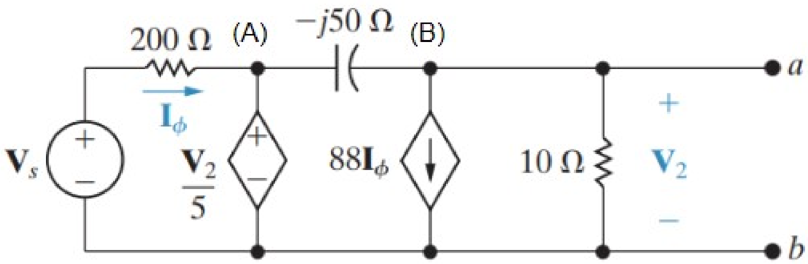
$$i_o(t) = 60\cos(\omega t) \text{ mA}$$

$$\boxed{i_o(t) = 60\cos(2500t) \text{ mA}}$$

Problema P9.50

9.50 Determine o circuito equivalente de Norton em relação aos terminais a,b para o circuito da Figura P9.50 quando $\mathbf{V}_s = 5\underline{/0^\circ}$ V.

Figura P9.50



Em um circuito equivalente norton, temos

$$I_N = I_{SC} \quad , \quad R_N = R_{th}$$

Vamos começar calculando a tensão de Thevenin V_{th} entre os terminais a e b, abrindo-os.

Expressando as variáveis de controle em função dos elementos do circuito, obtemos

$$V_2 = V_B \tag{9.50.1}$$

$$I_\phi = \frac{5V - V_A}{200\ \Omega} \tag{9.50.2}$$

Feito isso, aplicamos análise nodal dos nós essenciais A e B. Começamos pelo nó A. Obtemos de imediato que

$$V_A = \frac{V_2}{5} = \frac{V_B}{5} \tag{9.50.3}$$

Agora vamos para o nó B.

$$\frac{V_B - V_A}{-j50\ \Omega} + 88I_\phi + \frac{V_B - 0}{10\ \Omega} = 0$$

Usando (9.50.2) e (9.50.3), temos

$$\frac{V_B - \frac{V_B}{5}}{-j50\ \Omega} + 88\frac{5V - \frac{V_B}{5}}{200\ \Omega} + \frac{V_B}{10\ \Omega} = 0$$

Isolando V_B, temos

$$\frac{V_B}{-j50} - \frac{V_B}{-j250} - \frac{88V_B}{1000} + \frac{V_B}{10} = -2.2$$

$$V_B = -\frac{2.2}{\frac{1}{-j50} - \frac{1}{-j250} - \frac{88}{1000} + \frac{1}{10}}$$

$$V_B = -66 + j88V = 110\underline{/126.86^\circ}V \tag{9.50.4}$$

Usando (9.50.3), obtemos

$$V_A = 22\underline{/126.86°}V \tag{9.50.5}$$

Assim, obtemos que a tensão de Thevenin é dada por

$$V_{th} = V_{ab} = V_B = 110\underline{/126.86°}V \tag{9.50.6}$$

Agora calculamos a corrente de curo-circuito I_{sc}. Curto circuitamos os terminais a e b, e novamente expressamos as variáveis de controle em função dos elementos do circuito.

$$V_2 = 0V \tag{9.50.7}$$

$$I_\phi = \frac{5V - V_A}{200\ \Omega} \tag{9.50.8}$$

Agora aplicamos análise nodal nos nós essencias A e B. De imediato temos que

$$V_A = \frac{V_2}{5} = \frac{V_B}{5}$$

No entanto, devido ao curto-circuito, observe que

$$V_B = 0V$$

E portanto,

$$V_A = V_B = 0V$$

Escrevendo a equação de nó de B, temos

$$\frac{V_B - \frac{V_B}{5}}{-j50\ \Omega} + 88\frac{5V - \frac{V_B}{5}}{200\ \Omega} + I_{sc} = 0$$

Substituindo e isolando I_{sc},

$$0 + 88\frac{5V}{200\ \Omega} + I_{sc} = 0$$

$$I_{sc} = -2.2\ A = 2.2\underline{/180°}\ A \tag{9.50.9}$$

Usando (9.50.9) e (9.50.6), obtemos a resistência de Thevenin R_{th}.

$$R_{th} = \frac{V_{th}}{I_{sc}} = \frac{110\underline{/126.86°}}{2.2\underline{/180°}} = 50\underline{/-53.14°}\Omega \tag{9.50.10}$$

Finalmente,

$$\boxed{R_N = 50\underline{/-53.14°}\Omega = 30 - j40\Omega}$$

$$\boxed{I_N = -2.2A}$$

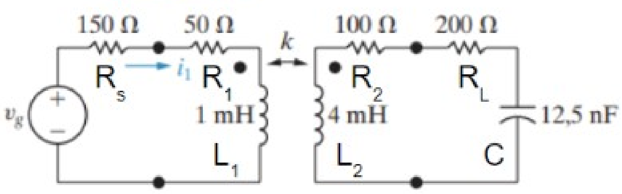
Problema P9.77

9.77 Pspice Multisim A fonte de tensão senoidal no circuito visto na Figura P9.77 está funcionando a uma frequência de 200 krad/s. O coeficiente de acoplamento é ajustado até que o valor de pico de i_1 seja máximo.

a) Qual é o valor de k?

b) Se $v_g = 560\cos(2\times10^5 t)$ V, qual é a amplitude máxima de i_1?

Figura P9.77



(a)

O valor de $i(t)$ depende da impedância Z_{in} vista pela fonte V_g. Sabemos que Z_{in} é expressa por

$$Z_{in} = Z_{11} + Z_r \tag{9.77.1}$$

Além disso, sabemos que a impedância refletida Z_r é dada por

$$Z_r = \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}} \tag{9.77.2}$$

Substituindo (9.77.2) em (9.77.1), temos

$$Z_{in} = Z_{11} + \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}} \tag{9.77.3}$$

Onde

- Z_{11}: Autoimpedância da malha do primeiro enrolamento;
- Z_{22}: Autoimpedância da malha do segundo enrolamento;
- M: Indutância mútua.

Expandindo os termos de (9.77.3), temos

$$Z_{in} = R_s + R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2(k\sqrt{L_1L_2})^2}{j\omega L_2 + R_2 + R_L + \frac{1}{j\omega C}} \tag{9.77.4}$$

Vamos reescrever (9.77.4) de modo a isolar a parte real da parte complexa.

$$Z_{in} = R_s + R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2k^2L_1L_2}{j\omega L_2 + R_2 + R_L - \frac{j}{\omega C}}$$

$$Z_{in} = R_s + R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2k^2L_1L_2}{R_2 + R_L + j(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})}$$

$$Z_{in} = R_s + R_1 + j\omega L_1 + \frac{(\omega^2k^2L_1L_2)(R_2 + R_L - j(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C}))}{(R_2 + R_L + j(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C}))(R_2 + R_L - j(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C}))}$$

$$Z_{in} = R_s + R_1 + j\omega L_1 + \frac{(\omega^2k^2L_1L_2)(R_2 + R_L) - j(\omega^2k^2L_1L_2)(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2}$$

$$Z_{in} = R_s + R_1 + \frac{(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(R_2 + R_L)}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2} + j\left(\omega L_1 - \frac{(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2}\right) \tag{9.77.5}$$

A partir de (9.77.5) podemos determinar o módulo de Z_{in}.

$$|Z_{in}|(k) = \sqrt{\left(R_s + R_1 + \frac{(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(R_2 + R_L)}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2}\right)^2 + \left(\omega L_1 - \frac{(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2}\right)^2} \tag{9.77.6}$$

A expressão (9.77.6) expressa o módulo de Z_{in} como uma função do coeficiente k. O valor máximo de $i(t)$ ocorre quando $Z_{in}(k)$ aitinge seu valor mínimo, ou seja, quando

$$\frac{d}{dk}|Z_{in}|(k) = 0 \tag{9.77.7}$$

Vamos diferenciar (9.77.6) com respeito a k. Antes disso, vamos adotar uma notação para reduzir o tamanho da expressão. Sejam

$$A = \frac{(\omega^2 L_1 L_2)(R_2 + R_L)}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2} \quad , \quad B = \frac{(\omega^2 L_1 L_2)(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2}$$

Note que A e B não dependem de k. Assim, podemos reescrever (9.77.6) como

$$|Z_{in}|(k) = \sqrt{(R_s + R_1 + Ak^2)^2 + (\omega L_1 - Bk^2)^2} \tag{9.77.8}$$

Diferenciando (9.77.8) com respeito a k, temos

$$\frac{d}{dk}|Z_{in}|(k) = \frac{1}{2}\frac{2(R_s + R_1 + Ak^2)(2Ak) + 2(\omega L_1 - Bk^2)(2Bk)}{\sqrt{(R_s + R_1 + Ak^2)^2 + (\omega L_1 - Bk^2)^2}} \tag{9.77.9}$$

Para que (9.77.9) seja igual a zero, temos

$$2(R_s + R_1 + Ak^2)(2Ak) + 2(\omega L_1 - Bk^2)(-2Bk) = 0$$

$$(R_s + R_1 + Ak^2)(Ak) + (\omega L_1 - Bk^2)(-Bk) = 0$$

$$AkR_s + AkR_1 + A^2k^3 - \omega BkL_1 + B^2k^3 = 0$$

$$k^3(A^2 + B^2) + k(AR_s + AR_1 - \omega BL_1) = 0$$

$$k\left(k^2(A^2 + B^2) + (AR_s + AR_1 - \omega BL_1)\right) = 0$$

$$k^2(A^2 + B^2) + AR_s + AR_1 - \omega BL_1 = 0$$

$$k = \sqrt{\frac{\omega BL_1 - AR_s - AR_1}{(A^2 + B^2)}}$$

Substituindo os valores todos, temos

$$A = 192 \quad , \quad B = 256$$

$$\boxed{k = 0.3536}$$

(b)

Conhecido o valor de $k = 0.3536$, podemos calcular o valor da impedância vista pela fonte através de (9.77.4), obtendo

$$Z_{in} = 224 + j168 \ \Omega$$

Portanto, usando o fato que a corrente forncecida pela fonte é

$$i(t) = \frac{v_g(t)}{Z_{in}}$$

Em notação fasorial,

$$I = \frac{V_g}{Z_{in}} = \frac{\frac{560}{\sqrt{2}}\angle 0^\circ}{224 + j168 \ \Omega}$$

$$I = 1.4142\angle -36.57^\circ \ A$$

Portanto, o valor de pico de $i(t)$ é

$$\boxed{i_m(t) = 1.4142\sqrt{2} = 2 \ A}$$