

Aluno: Raphael Henrique Braga Leivas
Matrícula: 2020028101

Código fonte LaTeX desse arquivo pode ser visto em meu GitHub pessoal:
<https://github.com/RaphaelLeivas/latex/tree/main/ListaCEII>

Aceito sugestões de melhoria do código :)

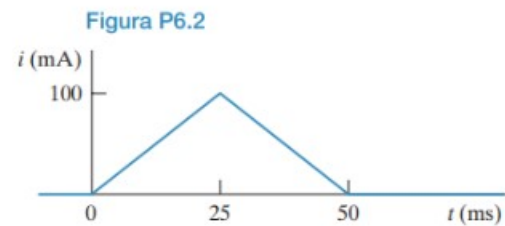
Problema P6.2

6.2

Pspice
Multisim

O pulso triangular de corrente mostrado na Figura P6.2 é aplicado a um indutor de 500 mH.

- Escreva as expressões que descrevem $i(t)$ nos quatro intervalos $t < 0$, $0 \leq t \leq 25$ ms, $25 \text{ ms} \leq t \leq 50$ ms e $t > 50$ ms.
- Deduz as expressões para a tensão, potência e energia do indutor. Use a convenção passiva.



(a)

Usando a figura, temos as expressões de $i(t)$ dadas por

$$i(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{100 \cdot 10^{-3} - 0}{25 \cdot 10^{-3} - 0} t, & 0 \leq t < 25 \text{ ms} \\ \frac{0 - 100 \cdot 10^{-3}}{50 \cdot 10^{-3} - 25 \cdot 10^{-3}} t + (200 \cdot 10^{-3}), & 25 \leq t < 50 \text{ ms} \\ 0, & t \geq 50 \text{ ms} \end{cases} = \begin{cases} 0 \text{ A}, & t < 0 \\ 4t \text{ A}, & 0 \leq t < 25 \text{ ms} \\ 0.2 - 4t \text{ A}, & 25 \leq t < 50 \text{ ms} \\ 0 \text{ A}, & t \geq 50 \text{ ms} \end{cases}$$

(b)

Sabemos que a tensão em um indutor é dada por

$$v(t) = L \frac{di}{dt} \quad (6.2.1)$$

Portanto, aplicando (6.2.1) sobre o resultado do item (a), temos

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ L \cdot 4, & 0 \leq t < 25 \text{ ms} \\ L \cdot (-4), & 25 \leq t < 50 \text{ ms} \\ 0, & t \geq 50 \text{ ms} \end{cases} = \begin{cases} 0 \text{ V}, & t < 0 \\ 2 \text{ V}, & 0 \leq t < 25 \text{ ms} \\ -2 \text{ V}, & 25 \leq t < 50 \text{ ms} \\ 0 \text{ V}, & t \geq 50 \text{ ms} \end{cases}$$

Além disso, temos que a potência no indutor é dada por

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) \quad (6.2.2)$$

Assim,

$$p(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 4t \cdot 2, & 0 \leq t < 25 \text{ ms} \\ (0.2 - 4t) \cdot (-2), & 25 \leq t < 50 \text{ ms} \\ 0, & t \geq 50 \text{ ms} \end{cases} = \begin{cases} 0 \text{ W}, & t < 0 \\ 8t \text{ W}, & 0 \leq t < 25 \text{ ms} \\ 8t - 0.4 \text{ W}, & 25 \leq t < 50 \text{ ms} \\ 0 \text{ W}, & t \geq 50 \text{ ms} \end{cases}$$

Finalmente, podemos determinar a energia $E(t)$ no indutor a partir de $p(t)$ substituindo (6.2.1) em (6.2.2).

$$p(t) = L \frac{di}{dt} \cdot i(t) = L i(t) \frac{di}{dt}$$

Note que a potência é energia por unidade de tempo, logo $p(t) = \frac{dE}{dt}$. Substituindo,

$$\frac{dE}{dt} = L i(t) \frac{di}{dt}$$

$$dE = L i(t) di$$

Integrando ambos lados, temos

$$\int_{t_i}^{t_f} E(t) dt = \int_{i_i}^{i_f} L i(t) di$$

$$E(t_f) - E(t_i) = \frac{1}{2} L [i_f^2 - i_i^2]$$

Assumimos a corrente inicial $i_i = 0$ e energia inicial $E_i = 0$ também nula. Além disso, fazemos a energia final $E(t_f) = E(t)$ e a corrente do estado final como $i_f = i(t)$. Assim, isolando $E(t)$,

$$E(t) = \frac{1}{2} L [i(t)]^2 \quad (6.2.3)$$

Usando (6.2.3), temos

$$E(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2} L (4t)^2, & 0 \leq t < 25 \text{ ms} \\ \frac{1}{2} L (0.2 - 4t)^2, & 25 \leq t < 50 \text{ ms} \\ 0, & t \geq 50 \text{ ms} \end{cases} = \begin{cases} 0 \text{ J}, & t < 0 \\ 4t^2 \text{ J}, & 0 \leq t < 25 \text{ ms} \\ 0.01 - 0.4t + 4t^2 \text{ J}, & 25 \leq t < 50 \text{ ms} \\ 0 \text{ J}, & t \geq 50 \text{ ms} \end{cases}$$

Problema P6.21

6.21 O pulso de corrente de formato retangular mostrado na Figura P6.21 é aplicado a um capacitor de $0,1 \mu\text{F}$. A tensão inicial no capacitor é uma queda de 15 V na direção de referência da corrente. Deduza a expressão da tensão no capacitor para os intervalos descritos nos itens (a)–(d).

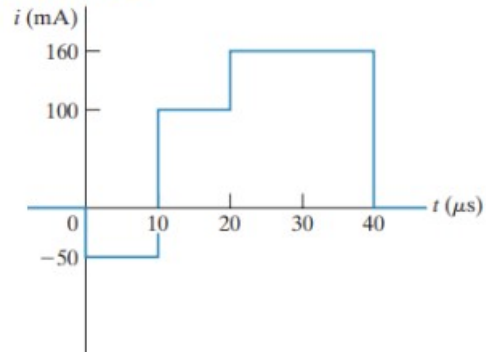
Pspice
Multisim

- a) $0 \leq t \leq 10 \mu\text{s}$;
- b) $10 \mu\text{s} \leq t \leq 20 \mu\text{s}$;
- c) $20 \mu\text{s} \leq t \leq 40 \mu\text{s}$;

d) $40 \mu\text{s} \leq t < \infty$;

e) Faça um gráfico de $v(t)$ no intervalo $-10 \mu\text{s} \leq t \leq 50 \mu\text{s}$.

Figura P6.21



(a), (b), (c), (d)

Sabemos que a tensão em um capacitor de capacitância C é dada por

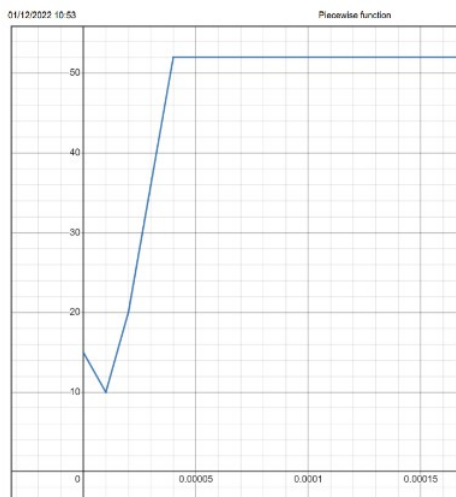
$$v(t) = V_0 + \frac{1}{C} \int_{t_i}^{t_f} i(t) dt \quad (6.21.1)$$

Usando a figura, e aplicando (6.21.1) nos intervalos correspondentes ao enunciado, temos

$$v(t) = \begin{cases} 15 + \frac{1}{C} \int_0^t (-50 \text{ mA}) dt, & 0 \leq t \leq 10 \mu\text{s} \\ 10 + \frac{1}{C} \int_{10 \mu\text{s}}^t (100 \text{ mA}) dt, & 10 \leq t \leq 20 \mu\text{s} \\ 20 + \frac{1}{C} \int_{20 \mu\text{s}}^t (160 \text{ mA}) dt, & 20 \leq t \leq 40 \mu\text{s} \\ 52 + \frac{1}{C} \int_{40 \mu\text{s}}^t (0 \text{ mA}) dt, & t > 40 \mu\text{s} \end{cases} = \begin{cases} 15 - 5 \cdot 10^5 t \text{ V}, & 0 \leq t \leq 10 \mu\text{s} \\ 10^6 t \text{ V}, & 10 \leq t \leq 20 \mu\text{s} \\ 1.6 \cdot 10^6 t - 12 \text{ V}, & 20 \leq t \leq 40 \mu\text{s} \\ 52 \text{ V}, & t > 40 \mu\text{s} \end{cases}$$

(e)

Usando a ferramenta online Desmos, temos o gráfico de $v(t)$ em função do tempo t abaixo.



- 1 $v(t) = \{ 0 < t < 10 \cdot 10^{-6}; 15 - 5 \cdot 10^5 t \}$
- 2 $v(t) = \{ 10 \cdot 10^{-6} < t < 20 \cdot 10^{-6}; 10^6 t \}$
- 3 $v(t) = \{ 20 \cdot 10^{-6} < t < 40 \cdot 10^{-6}; 1.6 \cdot 10^6 t - 12 \}$
- 4 $v(t) = \{ t > 40 \cdot 10^{-6}; 52 \}$
- 5

<https://www.desmos.com/calculator/3zabdb3vgf?lang=pt-BR>

Problema P6.25

6.25 Os três indutores no circuito da Figura P6.25 estão ligados aos terminais de uma caixa preta em $t = 0$. Sabe-se que a tensão resultante para $t > 0$ é

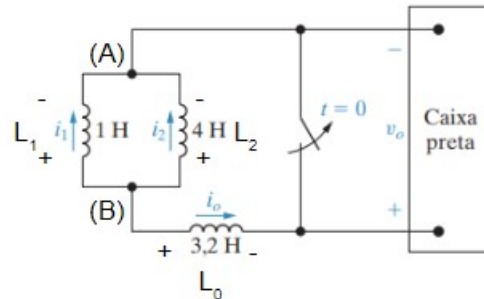
$$v_o = 2.000e^{-100t} \text{ V.}$$

Se $i_1(0) = -6 \text{ A}$ e $i_2(0) = 1 \text{ A}$, determine:

- $i_o(0)$;
- $i_o(t), t \geq 0$;
- $i_1(t), t \geq 0$;
- $i_2(t), t \geq 0$;

- a energia inicial armazenada nos três indutores;
- a energia total fornecida à caixa preta;
- a energia final retida nos indutores ideais.

Figura P6.25



(a)

Aplicando análise nodal no nó essencial (B), temos

$$i_o(t) + i_1(t) + i_2(t) = 0 \Rightarrow i_o(t) = -i_1(t) - i_2(t)$$

Substituindo no instante $t = 0$,

$$i_o(0) = -(-6) - 1$$

$$i_o(0) = 5 \text{ A}$$

(b)

Reduzindo os três indutores da figura via redução série-paralelo, temos um indutor equivalente L_{eq} dado por

$$L_{eq} = (1 \text{ H} // 4 \text{ H}) + 3.2 \text{ H}$$

$$L_{eq} = 4.0 \text{ H}$$

Assim, usando a expressão da corrente no indutor

$$i_o(t) = i_o(0) + \frac{1}{L} \int_{t_i}^{t_f} v_L(t) dt \quad (6.25.1)$$

Note que no sentido em que $i_o(t)$ está definida na figura, temos, via análise de malhas,

$$+v_o(t) + v_{L_{eq}}(t) = 0 \Rightarrow v_{L_{eq}}(t) = -v_o(t)$$

Assim, temos que (6.25.1) deve ter o sinal ajustado para atender a convenção passiva definida acima, ficando

$$i_o(t) = i_o(0) - \frac{1}{L} \int_{t_i}^{t_f} v_o(t) dt \quad (6.25.2)$$

Substituindo os valores do enunciado e resultado do item (a) em (6.25.2), temos

$$i_0(t) = 5 - \frac{1}{4} \int_0^t 2000e^{-100t} dt$$

$$i_0(t) = 5 - 2000 \frac{1}{4} \frac{1}{-100} [e^{-100t} - e^0]$$

$$i_0(t) = 5 + 5 [e^{-100t} - 1]$$

$$\boxed{i_0(t) = 5e^{-100t} \quad , \quad t \geq 0}$$

(c)

Retornando ao circuito original, temos que a queda de tensão no indutor $L_0 = 3.2$ H é dada por

$$v_{L_0}(t) = L_0 \frac{di_0}{dt}$$

Substituindo o resultado encontrado no item (b), temos

$$v_{L_0}(t) = 3.2(-500e^{-100t}) \text{ V} = -1600e^{-100t} \text{ V}$$

Assim, aplicamos análise de malhas para determinar a queda de tensão indutor $L_1 = 1$ H, assumindo $i_0(t)$ como a corrente de malha no sentido que ela foi definida na figura.

$$v_o(t) + v_{L_0}(t) - v_{L_1}(t) = 0$$

$$v_{L_1}(t) = v_o(t) + v_{L_0}(t) \quad (6.25.3)$$

Substituindo os resultados encontrados em (6.25.3), temos

$$v_{L_1}(t) = 2000e^{-100t} - 1600e^{-100t}$$

$$v_{L_1}(t) = 400e^{-100t} \text{ V}$$

Assim, novamente usando (6.25.1), temos a corrente $i_1(t)$ dada por

$$i_1(t) = -6 + \frac{1}{1} \int_0^t 400e^{-100t} dt$$

$$i_1(t) = -6 + \frac{1}{-100} 400 [e^{-100t} - e^0]$$

$$\boxed{i_1(t) = -2 - 4e^{-100t} \text{ A} \quad , \quad t \geq 0}$$

(d)

Usando a análise nodal do item (a), temos

$$i_2(t) = -i_0(t) - i_1(t)$$

Substituindo os valores encontrados nos itens anteriores,

$$i_2(t) = -(5e^{-100t}) - (-2 - 4e^{-100t})$$

$$\boxed{i_2(t) = 2 - e^{-100t} \text{ A} \quad , \quad t \geq 0}$$

(e)

Sabemos que a energia armazenada em um indutor é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2} L [i(t)]^2 \quad (6.25.4)$$

Em $t = 0$ usamos os valores de $i(0)$ para cada um dos indutores, obtendo

$$E_0(0) = 40 \text{ J} \quad , \quad E_1(0) = 18 \text{ J} \quad , \quad E_2(0) = 2 \text{ J}$$

A energia total armazenada em $t = 0$ é, portanto,

$$E_T(0) = E_0(0) + E_1(0) + E_2(0)$$

$$E_T(0) = 60 \text{ J}$$

(f)

Usando o circuito equivalente com $L_{eq} = 4 \text{ H}$ e (6.25.4) em $t = 0$, temos

$$E_{ent}(0) = \frac{1}{2} L_{eq} [i_0(0)]^2$$

$$E_{ent}(0) = \frac{1}{2} 4 [5]^2$$

$$E_{ent}(0) = 50 \text{ J}$$

(g)

A energia retida $E_R(t)$ em $t = 0$ é dada pela diferença entre a energia inicialmente armazenada e a entregue. Assim,

$$E_R(0) = E_T(0) - E_{ent}(0)$$

$$E_R(0) = 60 \text{ J} - 50 \text{ J}$$

$$E_R(0) = 10 \text{ J}$$

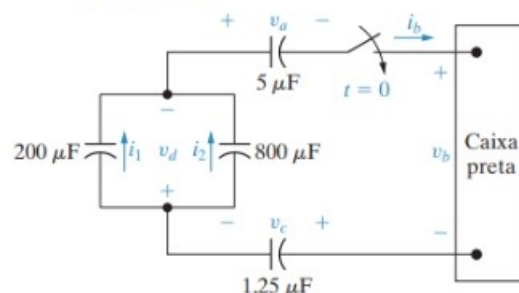
Problema P6.32

6.32 Os quatro capacitores no circuito da Figura P6.32 estão ligados aos terminais de uma caixa preta em $t = 0$. Sabe-se que a corrente resultante i_b para $t > 0$ é

$$i_b = -5e^{-50t} \text{ mA}.$$

Se $v_a(0) = -20 \text{ V}$, $v_c(0) = -30 \text{ V}$ e $v_d(0) = 250 \text{ V}$, determine o seguinte para $t \geq 0$: (a) $v_b(t)$, (b) $v_a(t)$, (c) $v_c(t)$, (d) $v_d(t)$, (e) $i_1(t)$ e (f) $i_2(t)$.

Figura P6.32



(a)

Começamos reduzindo os capacitores a uma capacitância equivalente C_{eq} via redução série-paralelo.

$$C_{eq} = (200 \mu F // 800 \mu F) + 5 \mu F + 1.25 \mu F$$

$$C_{eq} = 1 \mu F$$

Sabemos que a tensão em um capacitor é dada por

$$v(t) = v(0) + \frac{1}{C} \int_{t_i}^{t_f} i(t) dt \quad (6.32.1)$$

Usando $i_b(t)$ e a capacitância equivalente,

$$v_b(t) = v_b(0) + \frac{1}{C_{eq}} \int_0^t i_b(t) dt$$

Usando análise de malhas em $t = 0$, com a corrente de malha $i_b(t)$, podemos identificar $v_b(0)$.

$$v_b(0) + v_a(0) + v_d(0) + v_c(0) = 0$$

$$v_b(0) = -(v_a(0) + v_d(0) + v_c(0))$$

$$v_b(0) = -(-20 + -30 + 250)$$

$$v_b(0) = -200 \text{ V}$$

Voltando à (6.32.1),

$$v_b(t) = -200 + \frac{1}{1 \mu F} \int_0^t -0.005e^{-50t} dt$$

$$v_b(t) = -200 + 100 [e^{-50t} - e^0]$$

$$\boxed{v_b(t) = -300 + 100e^{-50t} \text{ V}}$$

(b)

Ainda usando (6.32.1), temos

$$v_a(t) = v_a(0) + \frac{1}{C_a} \int_0^t i_b(t) dt$$

$$v_a(t) = -20 + \frac{1}{5 \mu F} \int_0^t -0.005e^{-50t} dt$$

$$v_a(t) = -20 + 20 [e^{-50t} - e^0]$$

$$\boxed{v_a(t) = -40 + 20e^{-50t} \text{ V}}$$

(c)

Ainda usando (6.32.1), temos

$$v_c(t) = v_c(0) + \frac{1}{C_c} \int_0^t i_b(t) dt$$

$$v_c(t) = -30 + \frac{1}{1.25 \mu F} \int_0^t -0.005e^{-50t} dt$$

$$v_c(t) = -30 + 80 [e^{-50t} - e^0]$$

$$\boxed{v_c(t) = 50 + 80e^{-50t} \text{ V}}$$

(d)

Ainda usando (6.32.1), temos

$$v_d(t) = v_d(0) + \frac{1}{C_d} \int_0^t i_b(t) dt$$

$$v_d(t) = 250 + \frac{1}{200 \mu F + 800 \mu F} \int_0^t -0.005e^{-50t} dt$$

$$v_d(t) = 250 + 0.1 [e^{-50t} - e^0]$$

$$\boxed{v_d(t) = 249.9 + 0.1e^{-50t} \text{ V}}$$

(e)

A corrente em um capacitor é dada por

$$i(t) = C \frac{dv}{dt} \quad (6.32.2)$$

Substituindo,

$$i_1(t) = (200 \mu F)(-5e^{-50t})$$

$$\boxed{i_1(t) = -e^{-50t} \text{ mA}}$$

(f)

Novamente usando (6.32.2), temos

$$i_2(t) = (800 \mu F)(-5e^{-50t})$$

$$\boxed{i_2(t) = -4e^{-50t} \text{ mA}}$$

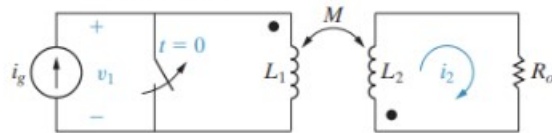
Problema P6.39

6.39 Não há nenhuma energia armazenada no circuito da Figura P6.39 no momento em que a chave é aberta.

- a) Deduza a equação diferencial que descreve o comportamento de i_2 se $L_1 = 5 \text{ H}$, $L_2 = 0,2 \text{ H}$, $M = 0,5 \text{ H}$ e $R_o = 10 \Omega$.
- b) Mostre que, quando $i_g = e^{-10t} - 10 \text{ A}$, $t \geq 0$, a equação diferencial encontrada em (a) é satisfeita quando $i_2 = 625e^{-10t} - 250e^{-50t} \text{ mA}$, $t \geq 0$.

- c) Determine a expressão para a tensão v_1 nos terminais da fonte de corrente.
- d) Qual é o valor inicial de v_1 ? Isso faz sentido em termos do comportamento conhecido do circuito?

Figura P6.39



(a)

Aplicando análise de malhas no circuito, temos na malha 1:

$$-v_1(t) + L_1 \frac{di_g}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = 0 \quad (6.39.1)$$

Na malha 2,

$$+i_2 R_o + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_g}{dt} = 0 \quad (6.39.2)$$

Substituindo os valores do enunciado na equação da malha 2,

$$10i_2 + 0.2 \frac{di_2}{dt} + 0.5 \frac{di_g}{dt} = 0$$

Isolando i_2 na EDO,

$$0.2 \frac{di_2}{dt} + 10i_2 = -0.5 \frac{di_g}{dt}, \quad t \geq 0$$

(b)

Substituindo o valor fornecido de $i_g(t) = e^{-10t} - 10 \text{ A}$ na EDO do item (a), temos

$$0.2 \frac{di_2}{dt} + 10i_2 = (-0.5)(-10e^{-10t})$$

$$\frac{di_2}{dt} + 50i_2 = 25e^{-10t}$$

A EDO possui fator integrante $M(t)$ dado por

$$M(t) = e^{\int 50 dt} \Rightarrow M(t) = e^{50t}$$

Multiplicando a EDO por $M(t)$,

$$e^{50t} \frac{di_2}{dt} + 50i_2 e^{50t} = 25e^{-10t} e^{50t}$$

$$e^{50t} \frac{di_2}{dt} + 50e^{50t} i_2 = 25e^{40t}$$

Aplicando o inverso da regra da derivada do produto,

$$\frac{d[i_2 \cdot e^{50t}]}{dt} = 25e^{40t}$$

Portanto,

$$i_2 \cdot e^{50t} = \int 25e^{40t} dt$$

$$i_2 \cdot e^{50t} = 25 \frac{1}{40} (e^{40t} + C)$$

$$i_2 = 0.625 \frac{e^{40t}}{e^{50t}} + \frac{C}{e^{50t}}$$

Finalmente, a solução geral da EDO é

$$i_2(t) = 0.625e^{-10t} + Ce^{-50t} \text{ A}, \quad t \geq 0$$

Como $i_2(t) = 625e^{-10t} - 250e^{-50t}$ mA é da mesma forma que a solução geral da EDO, temos que ela satisfaz a EDO do item (a).

(c)

A partir de (6.39.1), temos

$$v_1(t) = L_1 \frac{di_g}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

Usando $L_1 = 5$ H, $M = 0.5$ H, $i_g(t) = e^{-10t} - 10$ A e $i_2(t) = 625e^{-10t} - 250e^{-50t}$ mA, temos

$$v_1(t) = -50e^{-10t} - 3.125e^{-10t} + 6.25e^{-50t}$$

$$v_1(t) = -53.125e^{-10t} + 6.25e^{-50t} \text{ V}, \quad t \geq 0$$

(d)

Usando a expressão de $v_1(t)$ calculada no item (c), temos

$$v_1(0) = -53.125e^0 + 6.25e^0 \text{ V}$$

$$v_1(0) = -46.875 \text{ V}$$

Problema P6.41

- 6.41 a) Mostre que os dois enrolamentos acoplados magneticamente na Figura P6.41 podem ser substituídos por um único enrolamento com uma indutância de

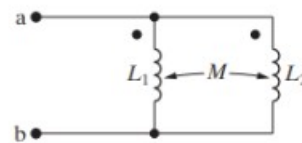
$$L_{ab} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}.$$

(Sugestão: considere i_1 e i_2 correntes de malha no sentido horário nas 'janelas' da esquerda e da direita da Figura P6.41, respectivamente. Some as tensões ao longo das duas malhas. Na malha 1, considere v_{ab} a tensão aplicada não especificada. Resolva para di_1/dt em função de v_{ab} .)

- b) Mostre que, se a polaridade magnética do enrolamento 2 for invertida, então

$$L_{ab} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}.$$

Figura P6.41



(a)

Aplicando análise de malhas no circuito, temos na malha 1:

$$\begin{aligned} -v_{ab} + L_1 \frac{d(i_1 - i_2)}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ v_{ab} = \frac{di_1}{dt} (L_1) + \frac{di_2}{dt} (M - L_1) \end{aligned} \quad (6.41.1)$$

Na malha 2,

$$\begin{aligned} L_1 \frac{d(i_2 - i_1)}{dt} - M \frac{di_2}{dt} + M \frac{d(i_1 - i_2)}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} = 0 \\ \frac{di_1}{dt} (-L_1 + M) + \frac{di_2}{dt} (L_1 - 2M + L_2) = 0 \end{aligned} \quad (6.41.2)$$

A partir de (6.41.1) e (6.41.2) temos o sistema linear

$$\begin{bmatrix} L_1 & M - L_1 \\ M - L_1 & L_1 - 2M + L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{di_1}{dt} \\ \frac{di_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{ab} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vamos resolver o sistema aplicando o método de Cramer. Temos

$$\Delta = \begin{vmatrix} L_1 & M - L_1 \\ M - L_1 & L_1 - 2M + L_2 \end{vmatrix} = L_1^2 - 2ML_1 + L_1L_2 - (M^2 - 2ML_1 + L_1^2) = L_1L_2 - M^2$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} v_{ab} & M - L_1 \\ 0 & L_1 - 2M + L_2 \end{vmatrix} = (v_{ab})(L_1 - 2M + L_2) \quad , \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} L_1 & v_{ab} \\ M - L_1 & 0 \end{vmatrix} = (v_{ab})(L_1 - M)$$

Assim,

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = v_{ab} \frac{L_1 - 2M + L_2}{L_1L_2 - M^2}$$

$$v_{ab} = \left(\frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 - 2M + L_2} \right) \frac{di_1}{dt}$$

Usando o fato de que, em um indutor, a tensão é dada por

$$v(t) = L \frac{di}{dt}$$

Temos que a impedância equivalente ao circuito acima, do ponto de vista dos terminais a e b , é

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 - 2M + L_2}$$

(b)

Invertendo a polaridade magnética de L_2 , temos que (6.41.1) e (6.41.2) se tornam

$$v_{ab} = \frac{di_1}{dt} (L_1) + \frac{di_2}{dt} (-M - L_1)$$

$$\frac{di_1}{dt} (-L_1 - M) + \frac{di_2}{dt} (L_1 + 2M + L_2) = 0$$

Assim, o sistema linear fica como

$$\begin{bmatrix} L_1 & -M - L_1 \\ -M - L_1 & L_1 + 2M + L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{di_1}{dt} \\ \frac{di_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{ab} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Novamente usando Cramer,

$$\Delta = \begin{vmatrix} L_1 & -M - L_1 \\ -M - L_1 & L_1 + 2M + L_2 \end{vmatrix} = L_1^2 + 2ML_1 + L_1 L_2 - (M^2 + 2ML_1 + L_1^2) = L_1 L_2 - M^2$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} v_{ab} & -M - L_1 \\ 0 & L_1 + 2M + L_2 \end{vmatrix} = (v_{ab})(L_1 + 2M + L_2) \quad , \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} L_1 & v_{ab} \\ -M - L_1 & 0 \end{vmatrix} = (v_{ab})(L_1 + M)$$

Assim,

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = v_{ab} \frac{L_1 + 2M + L_2}{L_1 L_2 - M^2}$$

Com o mesmo raciocínio usado no item (a),

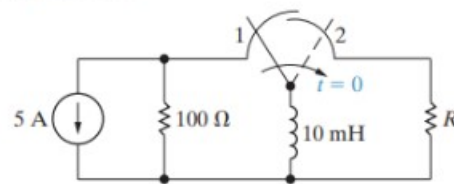
$$v_{ab} = \left(\frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + 2M + L_2} \right) \frac{di_1}{dt}$$

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + 2M + L_2}$$

Problema P7.10

7.10 A chave no circuito da Figura P7.10 esteve na posição 1 por um longo tempo. Em $t = 0$, ela passa instantaneamente para a posição 2. Determine o valor de R de modo que 10% da energia inicial armazenada no indutor de 10 mH seja dissipada em R em 10 μs .

Figura P7.10



Vamos entender primeiramente como estava o estado inicial antes da chave comutar ($t < 0$). Em regime permanente de corrente contínua, o indutor se comporta como um curto-circuito. Assim, toda a corrente $i = 5\text{ A}$ da fonte passava sobre ele, e a queda de tensão no resistor era zero. Portanto,

$$i_L(0) = 5\text{ A}$$

Quando a chave comuta, temos a seguinte equação de malha

$$L \frac{di}{dt} + iR = 0$$

Que é uma EDO cuja solução já é conhecida

$$i(t) = i(0)e^{-\frac{R}{L}t} \quad (7.10.1)$$

Com constante de tempo $\tau = \frac{L}{R}$.
A energia no indutor é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2}L[i(t)]^2 \quad (7.10.2)$$

Substituindo (7.10.1) em (7.10.2), temos

$$E(t) = \frac{1}{2}L[i(0)e^{-\frac{R}{L}t}]^2$$

Isolando R , temos

$$-\frac{2t}{L}R = \ln\left(\frac{2E(t)}{Li_0^2}\right)$$

$$R = -\frac{L}{2t} \ln\left(\frac{2E(t)}{Li_0^2}\right)$$

Para que o resistor R dissipe 10% da energia inicial no indutor, temos o indutor deve ter 90% da energia inicial no instante t , ou seja,

$$E(t) = \frac{9}{10}E_0$$

Substituindo na expressão de R ,

$$R = -\frac{L}{2t} \ln\left(\frac{2\frac{9}{10}E_0}{Li_0^2}\right)$$

Note que $E_0 = \frac{1}{2}Li_0^2$. Logo,

$$R = -\frac{L}{2t} \ln\left(\frac{2\frac{9}{10}\frac{1}{2}Li_0^2}{Li_0^2}\right)$$

$$R = -\frac{L}{2t} \ln\left(\frac{9}{10}\right)$$

Assim, para que essa dissipação de energia ocorra no instante $t = 10 \mu s$, temos

$$R = 52.68 \Omega$$

Problema P7.12

7.12 No circuito da Figura P7.12, as expressões para tensão e corrente são

$$v = 160e^{-10t} \text{ V}, t \geq 0^+;$$

$$i = 6.4e^{-10t} \text{ A}, t \geq 0.$$

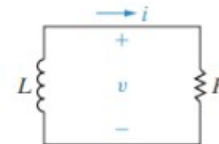
Determine

- R .
- τ (em milissegundos).
- L .

d) A energia inicial armazenada no indutor.

e) O tempo (em milissegundos) necessário para dissipar 60% da energia inicial armazenada.

Figura P7.12



(a)

Aplicando análise de malhas, temos

$$-v(t) + Ri = 0$$

Isolando R ,

$$R = \frac{v(t)}{i(t)}$$

Substituindo os valores do enunciado,

$$R = \frac{160e^{-10t}}{6.4e^{-10t}}$$

$$R = 25 \Omega$$

(b)

Em regime transitório CC, a função da corrente no indutor é

$$i(t) = i(0)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Onde τ é a constante de tempo. Comparando com o valor do enunciado,

$$\tau = \frac{1}{10} = 100 \text{ ms}$$

(c)

Usando

$$\tau = \frac{L}{R} \Rightarrow L = R\tau$$

Temos

$$L = 25 \Omega \cdot 100 \text{ ms} = 2.5 \text{ H}$$

(d)

A energia em um indutor é

$$E(t) = \frac{1}{2} L [i(t)]^2 \quad (7.12.1)$$

Em $t = 0$, temos

$$E(0) = \frac{1}{2} \cdot 2.5 \cdot (6.4)^2 = 51.2 \text{ J}$$

(e)Usando (7.12.1), vamos isolar t .

$$\begin{aligned} \frac{2E(t)}{L} &= [i(t)]^2 \\ \sqrt{\frac{2E(t)}{L}} &= i_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \\ \frac{1}{i_0} \sqrt{\frac{2E(t)}{L}} &= e^{-\frac{t}{\tau}} \\ -\frac{t}{\tau} &= \ln \left(\frac{1}{i_0} \sqrt{\frac{2E(t)}{L}} \right) \\ t &= -\tau \ln \left(\frac{1}{i_0} \sqrt{\frac{2E(t)}{L}} \right) \end{aligned}$$

Para que seja dissipado 60% da energia inicial do indutor, buscamos um instante t para o qual a energia $E(t)$ é 40% da inicial, ou seja,

$$E(t) = \frac{4}{10} E(0) = \frac{4}{10} \frac{1}{2} L i_0^2$$

Substituindo na expressão de t ,

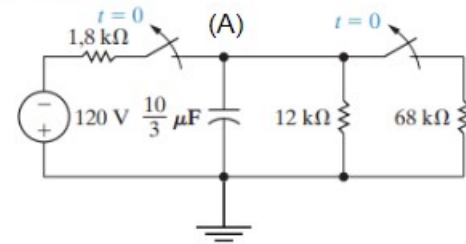
$$\begin{aligned} t &= -\tau \ln \left(\frac{1}{i_0} \sqrt{\frac{2 \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{2} L i_0^2}{L}} \right) \\ t &= -\tau \ln \left(\sqrt{\frac{2}{5}} \right) \\ t &= 41.81 \text{ ms} \end{aligned}$$

Problema P7.26

7.26 No circuito mostrado na Figura P7.26, ambas as chaves funcionam em conjunto; isto é, abrem-se ou fecham-se ao mesmo tempo. Elas estiveram fechadas por um longo tempo antes de se abrirem em $t = 0$.

- Quantos microjoules de energia foram dissipados no resistor de $12\text{ k}\Omega$, 12 ms depois da abertura das chaves?
- Quanto tempo leva para dissipar 75% da energia inicialmente armazenada?

Figura P7.26



(a)

O primeiro passo é entender o que está acontecendo antes das chaves se abrirem, ou seja, quando $t < 0$. Nesse caso, temos o capacitor atuando como um circuito aberto. Assim, usando análise nodal no nó essencial (A),

$$\begin{aligned}\frac{V_A - (-120)}{1.8\text{ k}} + \frac{V_A}{12\text{ k}} + \frac{V_A}{68\text{ k}} &= 0 \\ V_A \left(\frac{1}{1.8\text{ k}} + \frac{1}{12\text{ k}} + \frac{1}{68\text{ k}} \right) &= -\frac{120}{1.8\text{ k}} \\ V_A &= -\frac{\frac{120}{1.8\text{ k}}}{\frac{1}{1.8\text{ k}} + \frac{1}{12\text{ k}} + \frac{1}{68\text{ k}}} \\ V_A = v_c(0) &= -102\text{ V}\end{aligned}$$

Uma vez calculado a tensão inicial do capacitor, partimos para o $t > 0$. Quando as chaves abrem, o capacitor descarrega no resistor $R_2 = 12\text{ k}\Omega$, resultando na função já conhecida de descarga do capacitor

$$v(t) = v(0)e^{-\frac{t}{RC}}\text{ V} \quad (7.26.1)$$

Substituindo com os valores do exercício,

$$v(t) = -102e^{-25t}\text{ V}$$

A potência dissipada no resistor R_2 é dada por

$$p(t) = \frac{[v(t)]^2}{R_2} = \frac{[-102e^{-25t}]^2}{12000} = 0.867e^{-50t}\text{ W}$$

Integrando $p(t)$ no intervalo $0 \leq t \leq 12\text{ ms}$, temos a energia dissipada pelo resistor nesse período de tempo.

$$\begin{aligned}E &= \int_0^{12\text{ ms}} p(t) dt \\ E &= \int_0^{12\text{ ms}} 0.867e^{-50t} dt \\ E &= 0.867 \frac{1}{-50} [e^{-50(12\text{ ms})} - e^0]\end{aligned}$$

$$\boxed{E = 7823.6\text{ }\mu\text{J}}$$

(b)

A energia em um capacitor é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2}C[v(t)]^2 \quad (7.26.2)$$

Isolando t ,

$$v(t) = \sqrt{\frac{2E(t)}{C}}$$

Substituindo (7.26.1) na expressão acima, temos

$$\begin{aligned} e^{-\frac{t}{RC}} &= \frac{1}{v_0} \sqrt{\frac{2E(t)}{C}} \\ -\frac{t}{RC} &= \ln \left(\frac{1}{v_0} \sqrt{\frac{2E(t)}{C}} \right) \\ t &= -RC \ln \left(\frac{1}{v_0} \sqrt{\frac{2E(t)}{C}} \right) \end{aligned}$$

Queremos que seja dissipado 75% da energia inicial armazenada. Isso significa que precisamos de um instante t tal que

$$E(t) = 25\%E(0) = \frac{1}{4}E(0) = \frac{1}{4} \frac{1}{2} C v_0^2$$

Substituindo esse $E(t)$ na expressão de t acima,

$$\begin{aligned} t &= -RC \ln \left(\frac{1}{v_0} \sqrt{\frac{2 \frac{1}{4} \frac{1}{2} C v_0^2}{C}} \right) \\ t &= -RC \ln \left(\sqrt{\frac{1}{4}} \right) \\ t &= -RC \ln \left(\frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

Substituindo tudo,

$$t = 27.725 \text{ ms}$$

Problema P7.29

7.29 No circuito da Figura P7.29 as expressões para a tensão e a corrente são

$$v = 72e^{-500t} \text{ V}, t \geq 0;$$

$$i = 9e^{-500t} \text{ mA}, t \geq 0^+.$$

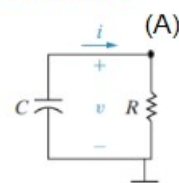
Determine

- R .
- C .
- τ (em milissegundos).

d) A energia inicial armazenada no capacitor.

e) Em quantos microssegundos 68% da energia inicial armazenada no capacitor são dissipados.

Figura P7.29



Antes de tudo, vamos extrair a função de $v(t)$ genérica para o circuito. Aplicamos análise nodal no nó (A) da figura, obtendo

$$-i + \frac{V_A}{R} = 0$$

Em um capacitor, sabemos que

$$i(t) = C \frac{dv}{dt} \quad (7.29.1)$$

Note que i está entrando no terminal negativo de C . Assim, usamos sinal negativo em (7.29.1) para manter a convenção passiva. Substituindo (7.29.1) na equação nodal, e usando $v = V_A$, temos

$$- \left(-C \frac{dv}{dt} \right) + \frac{v}{R} = 0$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = 0$$

Usando o fator integrante $M(t) = e^{\frac{1}{RC}t}$, temos

$$e^{-\frac{1}{RC}t} \frac{dv}{dt} + e^{\frac{1}{RC}t} \frac{v}{RC} = 0$$

Aplicando o inverso da regra da derivada do produto,

$$\frac{d[v(t) \cdot e^{\frac{1}{RC}t}]}{dt} = 0$$

$$v(t) \cdot e^{\frac{1}{RC}t} = K$$

$$v(t) = K e^{-\frac{1}{RC}t} \text{ V}, t \geq 0 \quad (7.29.2)$$

(a)

Usando a Lei de Ohm,

$$R = \frac{v(t)}{i(t)} = \frac{72e^{-500t} \text{ V}}{9e^{-500t} \text{ mA}} = 8 \text{ k}\Omega$$

(b)

Comparando (7.29.1) com a função de $v(t)$ dada no exercício, temos

$$-\frac{1}{RC} = -500$$

$$C = -\frac{1}{R(-500)}$$

$$C = 250 \text{ nF}$$

(c)

A constante de tempo τ é definida como

$$\tau = RC \quad (7.29.3)$$

Assim,

$$\tau = 2 \text{ ms}$$

(d)

A energia no capacitor é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2} C [v(t)]^2 \quad (7.29.4)$$

Assim, em $t = 0$, temos a energia inicial

$$E(0) = \frac{1}{2} (250 \text{ nF}) [72 \text{ V}]^2$$

$$E(0) = 648 \text{ } \mu\text{J}$$

(e)

Isolando t em (7.29.4),

$$v(t) = \sqrt{\frac{2E(t)}{C}}$$

Substituindo a função de $v(t)$ do enunciado na expressão acima, temos

$$\begin{aligned} e^{-\frac{t}{RC}} &= \frac{1}{v_0} \sqrt{\frac{2E(t)}{C}} \\ -\frac{t}{RC} &= \ln \left(\frac{1}{v_0} \sqrt{\frac{2E(t)}{C}} \right) \\ t &= -RC \ln \left(\frac{1}{v_0} \sqrt{\frac{2E(t)}{C}} \right) \end{aligned}$$

Queremos que seja dissipado 68% da energia inicial armazenada. Isso significa que precisamos de um instante t tal que

$$E(t) = 32\% E(0) = \frac{32}{100} E(0) = \frac{32}{100} \frac{1}{2} C v_o^2$$

Substituindo esse $E(t)$ na expressão de t acima,

$$\begin{aligned} t &= -RC \ln \left(\frac{1}{v_0} \sqrt{\frac{2 \frac{32}{100} \frac{1}{2} C v_o^2}{C}} \right) \\ t &= -RC \ln \left(\sqrt{\frac{32}{100}} \right) \end{aligned}$$

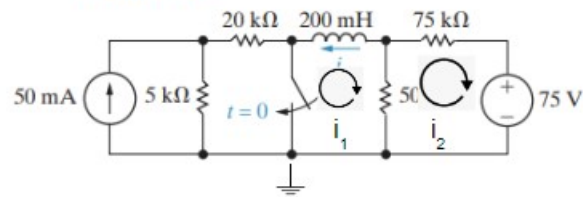
Substituindo tudo,

$$t = 1139.43 \text{ } \mu\text{s}$$

Problema P7.35

7.35 Depois de a chave no circuito da Figura P7.35 estar aberta por um longo tempo, ela é fechada em $t = 0$. Calcule (a) o valor inicial de i ; (b) o valor final de i ; (c) a constante de tempo para $t \geq 0$ e (d) a expressão numérica para $i(t)$ quando $t \geq 0$.

Figura P7.35



(a)

Para calcular o valor inicial $i(0)$ de i , analisamos o circuito em $t < 0$, quando o indutor se comporta como um curto-circuito. Assim, aplicando análise de malhas com as correntes i_1 e i_2 . Na malha 1,

$$5 \text{ k}(i_1 - 50 \text{ m}) + 20 \text{ k}(i_1) + 50 \text{ k}(i_1 - i_2) = 0$$

$$i_1 (5 \text{ k} + 20 \text{ k} + 50 \text{ k}) + i_2 (-50 \text{ k}) = (5 \text{ k})(50 \text{ m})$$

$$i_1 (75 \text{ k}) + i_2 (-50 \text{ k}) = 250$$

Para a malha 2,

$$50 \text{ k}(i_2 - i_1) + 75 \text{ k}(i_2) + 75 = 0$$

$$i_1 (-50 \text{ k}) + i_2 (125 \text{ k}) = -75$$

Com as duas equações de malha, temos o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 75 \text{ k} & -50 \text{ k} \\ -50 \text{ k} & 125 \text{ k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 250 \\ 75 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 75 & -50 \\ 0 & 275 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 250 \text{ m} \\ 275 \text{ m} \end{bmatrix}$$

$$i_1 = 4 \text{ mA} \quad , \quad i_2 = 1 \text{ mA}$$

Note que a corrente de malha i_1 está no sentido contrário ao definido para i no enunciado. Assim,

$$i(0) = -4 \text{ mA}$$

(b)

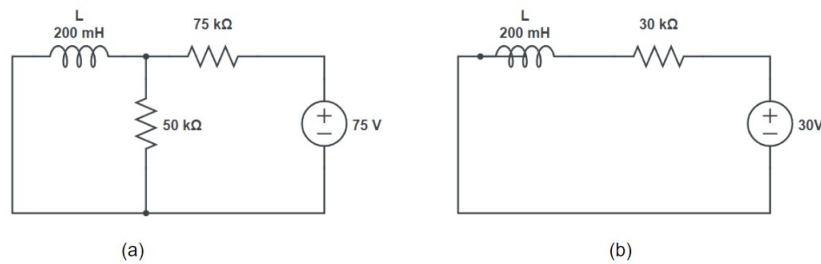
Vamos primeiro determinar a expressão de $i(t)$ no indutor para $t > 0$. Quando as chaves se fecham, temos o circuito de 7.35.1 (a). Reduzindo o circuito da Figura 7.35.1 (a) via transformações de fonte, temos o circuito da Figura 7.35.1 (b).

Na Figura 7.35.1 (b), aplicamos análise de malhas

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 30$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{30}{L}$$

Figure 7.35.1: (a) Circuito do problema com a chave fechada. (b) Redução via transformações de fonte.



Usando o fator integrante $M(t) = e^{\frac{R}{L}t}$

$$e^{\frac{R}{L}t} \frac{di}{dt} + e^{\frac{R}{L}t} \frac{R}{L} i = e^{\frac{R}{L}t} \frac{30}{L}$$

Aplicando o inverso da regra da derivada do produto,

$$\frac{d[i \cdot e^{\frac{R}{L}t}]}{dt} = e^{\frac{R}{L}t} \frac{30}{L}$$

$$i \cdot e^{\frac{R}{L}t} = \int e^{\frac{R}{L}t} \frac{30}{L} dt$$

$$i(t) = e^{-\frac{R}{L}t} \frac{30}{L} \frac{L}{R} \left[e^{\frac{R}{L}t} + K \right]$$

$$i(t) = 0.001 + K e^{-150000t}$$

Usando o resultado encontrado no item (a) que $i(0) = -4$ mA, temos $K = -0.005$. Portanto,

$$i(t) = 1 - 5e^{-150000t} \text{ mA}, t \geq 0$$

O valor final $i(\infty)$ da corrente é

$$\lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = 1 - 0 = 1 \text{ mA}$$

(c)

A constante de tempo do circuito 7.35.1 (b) é

$$\tau = \frac{L}{R} = 6.67 \mu\text{s}$$

(d)

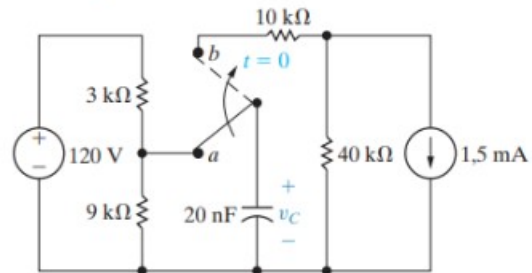
Como mostrado no item (b),

$$i(t) = 1 - 5e^{-150000t} \text{ mA}, t \geq 0$$

Problema P7.53

7.53 A chave no circuito da Figura P7.53 esteve na posição *a* por um longo tempo. Em $t = 0$, ela é colocada na posição *b*. Calcule (a) a tensão inicial no capacitor; (b) a tensão final no capacitor; (c) a constante de tempo (em microssegundos) para $t > 0$ e (d) o tempo (em microssegundos) necessário para a tensão no capacitor anular-se, depois de a chave ser colocada na posição *b*.

Figura P7.53



(a)

Em $t < 0$, como o capacitor está em paralelo com um divisor de tensão, a tensão inicial no capacitor é dada por

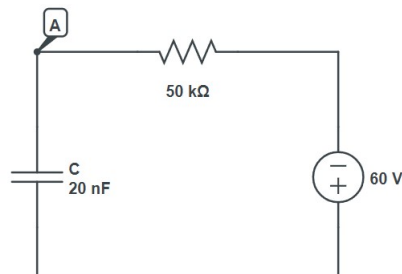
$$v(0) = 120 \frac{9 \text{ k}}{3 \text{ k} + 9 \text{ k}}$$

$$v(0) = 90 \text{ V}$$

(b)

Vamos determinar a função da tensão no capacitor para $t > 0$. Usando transformações de fonte, podemos reduzir o circuito com a chave na posição *b* para o circuito da Figura 7.53.1.

Figure 7.53.1: Circuito com a chave em *b* reduzido.



Feito isso, aplicamos análise nodal no nó (A) mostrado em 7.53.1.

$$-i_c + \frac{V_A - (-60)}{50 \text{ k}} = 0$$

Usando $V_A = v$, $i_c = C \frac{dv}{dt}$ (com a convenção passiva), temos

$$-(-C \frac{dv}{dt}) + \frac{v}{50 \text{ k}} = -12 \cdot 10^{-3}$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{C 50 \text{ k}} = -\frac{12 \cdot 10^{-3}}{C}$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{0.001} = -60000$$

Usando o fator integrante $M(t) = e^{1000t}$,

$$e^{1000t} \frac{dv}{dt} + e^{1000t} \frac{v}{0.001} = -60000e^{1000t}$$

Aplicando o inverso da regra da derivada do produto,

$$\frac{d[v(t) \cdot e^{1000t}]}{dt} = -60000e^{1000t}$$

$$v(t) \cdot e^{1000t} = \int -60000e^{1000t} dt$$

$$v(t) = e^{-1000t}(-60000) \frac{1}{1000} [e^{1000t} + K]$$

$$v(t) = -60 - 60Ke^{-1000t}$$

Sabemos que, do item (a), $v(0) = 90 \text{ V}$, logo temos $K = -2.5$ e

$$v(t) = -60 + 150e^{-1000t} \text{ V}, t \geq 0 \quad (7.53.1)$$

Uma vez determinado a função de $v(t)$, temos que valor final $v(\infty)$ da tensão é

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = -60 + 0 = -60 \text{ V}$$

$$\boxed{v(\infty) = -60 \text{ V}}$$

(c)

Na expressão de $v(t)$ encontrada em (7.53.1), temos

$$\boxed{\tau = \frac{1}{1000} = 1 \text{ ms}}$$

(d)

Isolando t em (7.53.1), temos

$$e^{-1000t} = \frac{v(t) + 60}{150}$$

$$-1000t = \ln \left(\frac{v(t) + 60}{150} \right)$$

$$t = -\frac{1}{1000} \ln \left(\frac{v(t) + 60}{150} \right)$$

Queremos o instante t tal que $v(t) = 0$. Substituindo $v(t) = 0$ na expressão acima, temos

$$t = -\frac{1}{1000} \ln \left(\frac{60}{150} \right)$$

$$\boxed{t = 916.29 \mu\text{s}}$$

Problema P8.4

- 8.4 A resistência, indutância e capacitância de um circuito RLC em paralelo são $2.000\ \Omega$, 250 mH e 10 nF , respectivamente.
- Calcule as raízes da equação característica que descreve a resposta de tensão do circuito.
 - A resposta será superamortecida, subamortecida ou criticamente amortecida?
 - Qual é o valor de R que resultará em uma frequência amortecida de 12 krads/s ?
 - Quais são as raízes da equação característica para o valor de R determinado em (c)?
 - Qual é o valor de R que resultará em uma resposta criticamente amortecida?

(a)

Sabemos que a equação característica da EDO de um circuito RLC paralelo é dada por

$$s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC} = 0 \quad (8.4.1)$$

Substituindo os dados do problema em (8.4.1), temos

$$s^2 + 5 \cdot 10^4 s + 4 \cdot 10^9 = 0$$

Aplicando Bhaskara,

$$s = \frac{-(5 \cdot 10^4) \pm \sqrt{(5 \cdot 10^4)^2 - 4(1)(4 \cdot 10^9)}}{2(1)}$$

$$s_1 = -10000\text{ rad/s} \quad , \quad s_2 = -40000\text{ rad/s}$$

(b)

A resposta da tensão depende do valor de Δ da equação característica, usada no item (a). Assim,

$$\Delta = (5 \cdot 10^4)^2 - 4(1)(4 \cdot 10^9)$$

$$\Delta = 9 \cdot 10^8$$

Como $\Delta > 0$, temos que a resposta é superamortecida.

(c)

A frequência angular amortecida ω_d é definida como

$$\omega_d = \sqrt{\omega_o^2 - \alpha^2} \quad (8.4.2)$$

onde ω_o é a frequência angular de ressonância e α é o fator de amortecimento. Expandindo esses dois termos conforme suas definições, (8.4.2) se torna

$$\omega_d = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^2 - \left(\frac{1}{2RC}\right)^2}$$

$$\omega_d = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}}$$

Isolando R , temos

$$\omega_d^2 = \frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}$$

$$\frac{1}{R^2} = -4C^2 \left(\omega_d^2 - \frac{1}{LC} \right)$$

$$R = \sqrt{\frac{1}{-4C^2 \left(\omega_d^2 - \frac{1}{LC} \right)}}$$

Substituindo $\omega_d = 12 \text{ krad/s}$ e os demais valores do enunciado, temos

$$R = 3125 \, \Omega$$

(d)

Com $R = 3125 \, \Omega$ em (8.4.1),

$$s = \frac{-(3.2 \cdot 10^4) \pm \sqrt{(3.2 \cdot 10^4)^2 - 4(1)(4 \cdot 10^8)}}{2(1)}$$

$$s = \frac{-(3.2 \cdot 10^4) \pm \sqrt{-5.76 \cdot 10^8}}{2(1)}$$

Note que agora temos que usar raízes complexas pois $\Delta < 0$.

$$s = \frac{-(3.2 \cdot 10^4) \pm j(2.4 \cdot 10^4)}{2(1)}$$

$$s_1 = -16000 + j12000 \text{ rad/s} \quad , \quad s_2 = -16000 - j24000 \text{ rad/s}$$

(e)

Para que o circuito seja criticamente amortecido, precisamos de $\Delta = 0$. Assim, novamente usando (8.4.1),

$$\Delta = \left(\frac{1}{RC} \right)^2 - 4(1) \left(\frac{1}{LC} \right) = 0$$

Isolando R ,

$$\frac{1}{R^2C^2} = 4 \frac{1}{LC}$$

$$R = \sqrt{\frac{1}{4C^2 \frac{1}{LC}}} \Rightarrow R = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Substituindo os valores do enunciado,

$$R = 2500 \, \Omega$$

Problema P8.10

8.10 A resistência do resistor no circuito do Exemplo 8.4 é alterada para 3.200Ω .

Pspice
Multisim

a) Determine a expressão numérica para $v(t)$ quando $t \geq 0$.

b) Desenhe um gráfico de $v(t)$ para o intervalo de tempo $0 \leq t \leq 7 \text{ ms}$. Compare essa resposta com a do Exemplo 8.4 ($R = 20 \text{ k}\Omega$) e a do Exemplo 8.5 ($R = 4 \text{ k}\Omega$). Em particular, compare os valores de pico de $v(t)$ e os tempos em que esses valores ocorrem.

(a)

O circuito do Exemplo 8.4 é um circuito RLC paralelo, com equação característica já conhecida:

$$s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC} = 0 \quad (8.10.1)$$

Substituindo com os valores do enunciado,

$$s = \frac{-(2500) \pm \sqrt{(2500)^2 - 4(1)(1 \cdot 10^6)}}{2(1)}$$

$$s_1 = -500 \text{ rad/s}, \quad s_2 = -2000 \text{ rad/s}$$

Agora analisamos as condições iniciais do circuito. Temos

$$v(0) = 0 \text{ V} \quad (8.10.2)$$

Para a condição de inicial de $\frac{dv(0)}{dt}$, aplicamos análise nodal no nó superior do circuito em $t = 0$, obtendo

$$i_c(0) + i_L(0) + i_R = 0$$

$$i_c(0) + -12.25 \text{ mA} + \frac{v(0)}{20 \text{ k}\Omega} = 0$$

$$i_c(0) = 12.25 \text{ mA}$$

Note que

$$i_c = C \frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv(0)}{dt} = \frac{i_c(0)}{C}$$

Assim, substituindo o valor de $i_c(0)$ encontrado, temos a segunda condição inicial da EDO dada por

$$\frac{dv(0)}{dt} = 98000 \text{ V/s} \quad (8.10.3)$$

Além disso, sabemos que a solução da EDO é da forma

$$v(t) = Ae^{st}$$

Com as duas raízes encontradas s_1 e s_2 , temos que a solução geral é dada pela combinação linear

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) \quad (8.10.4)$$

Onde $v_1(t)$ e $v_2(t)$ são duas possíveis soluções para $v(t)$ dadas por

$$\begin{cases} v_1(t) = A_1 e^{s_1 t} \\ v_2(t) = A_2 e^{s_2 t} \end{cases}$$

Diferenciando (8.10.4) com respeito a t , temos duas equações

$$\begin{cases} v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \\ \frac{dv(t)}{dt} = A_1 s_1 e^{s_1 t} + A_2 s_2 e^{s_2 t} \end{cases}$$

Em $t = 0$, temos as condições iniciais já conhecidas em (8.10.2) em (8.10.3)

$$\begin{cases} v(0) = A_1 e^{s_1 0} + A_2 e^{s_2 0} \\ \frac{dv(0)}{dt} = A_1 s_1 e^{s_1 0} + A_2 s_2 e^{s_2 0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 + A_2 = 0 \text{ V} \\ A_1 s_1 + A_2 s_2 = 98000 \text{ V/s} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = 65.33 \\ A_2 = -65.33 \end{cases}$$

Conhecidos coeficientes A_1 e A_2 , bem como as raízes s_1 e s_2 , temos a solução geral $v(t)$ dada por (8.10.4)

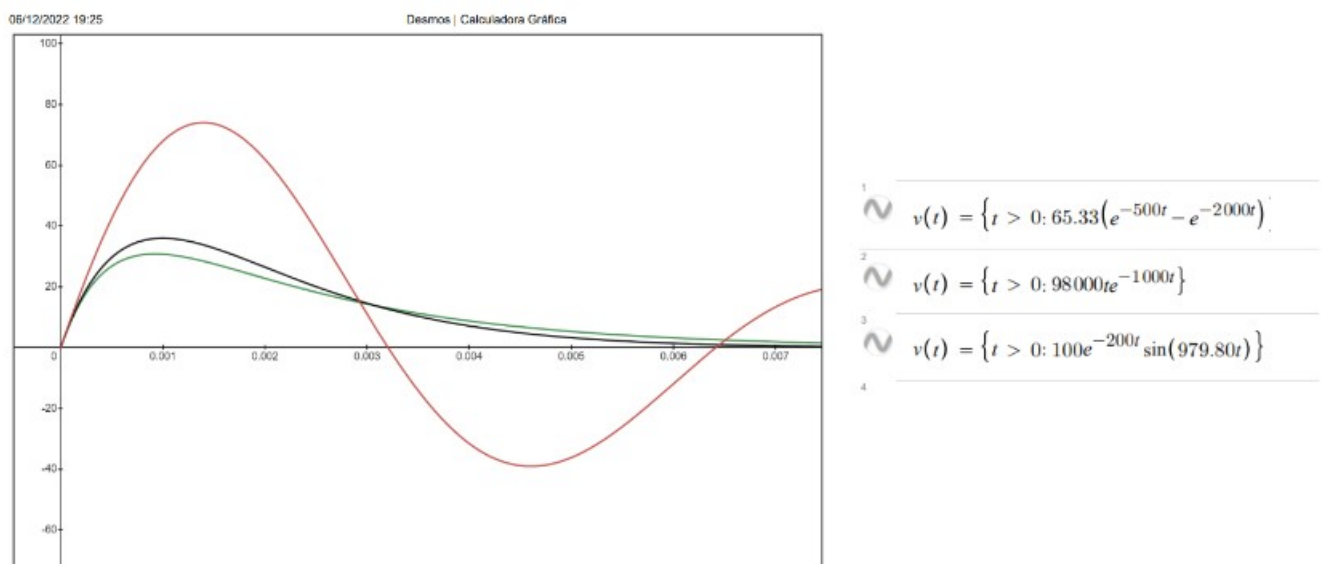
$$v(t) = 65.33 [e^{-500t} - e^{-2000t}] \text{ V}, t \geq 0$$

(b)

Temos três funções para $v(t)$:

$$\begin{cases} v(t) = 65.33 [e^{-500t} - e^{-2000t}] \text{ V}, t \geq 0 & \text{Resposta superamortecida} \\ v(t) = 98.000te^{-1.000t} \text{ V}, t \geq 0 & \text{Resposta criticamente amortecida} \\ v(t) = 100e^{-200t} \text{sen}(979.80t) \text{ V}, t \geq 0 & \text{Resposta subamortecida} \end{cases}$$

Usando a ferramenta online Desmos, temos os três gráficos das três funções abaixo. A curva vermelha é a subamortecida, a preta é a criticamente amortecida e a curva verde é a resposta superamortecida. A resposta subamortecida apresenta o maior valor de pico da tensão, mas é a que gasta mais tempo para ele ocorrer. Já a resposta superamortecida possui o menor valor de pico, mas é o que chega mais rápido nesse pico.



Problema P8.17

- 8.17** a) Projete um circuito RLC em paralelo (veja a Figura 8.1) usando valores de componentes do Apêndice H, com uma frequência angular de ressonância de 5.000 rad/s . Escolha um resistor ou crie uma rede de resistores de modo que a resposta seja criticamente amortecida. Desenhe seu circuito.
- b) Calcule as raízes da equação característica para a resistência em (a).

(a)

Para o projeto do circuito, fixamos arbitrariamente o indutor selecionado o de $L = 1 \text{ mH}$. Para cumprir o requisito da frequência angular de ressonância ser $\omega_o = 5000 \text{ rad/s}$, calculamos C através de

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow C = \frac{1}{\omega_o^2 L}$$

$$C = 40 \mu\text{F}$$

Podemos atingir uma capacitância equivalente de $C = 40 \mu\text{F}$ usando quatro capacitores de $C_i = 10 \mu\text{F}$ em paralelo. Para o requisito de ele ser criticamente amortecido, temos que

$$\omega_o^2 = \alpha^2 \quad (8.17.1)$$

Expandindo (8.17.1) conforme as definições,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} \right)^2 = \left(\frac{1}{2RC} \right)^2$$

Isolando R ,

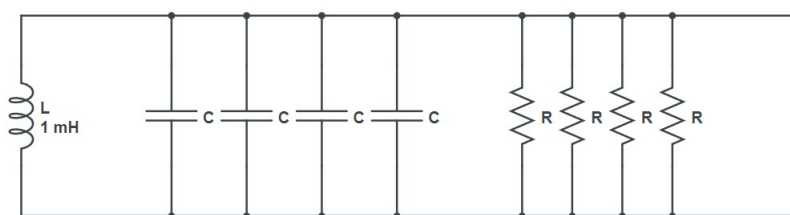
$$R = \frac{\sqrt{LC}}{2C}$$

$$R = 2.5 \Omega$$

Podemos obter exatamente uma resistência equivalente de $R = 2.5 \Omega$ com 4 resistores de $R_i = 10 \Omega$ em paralelo.

Assim, temos o circuito projetado na imagem abaixo.

Figure 8.17.1: Circuito RLC projetado. Temos $R = 10 \Omega$ e $C = 10 \mu\text{F}$.



(b)

A equação característica do circuito é

$$s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC} = 0 \quad (8.17.2)$$

Cuja solução é

$$s = \frac{-\frac{1}{RC} \pm \sqrt{\Delta}}{2(1)}$$

Note que o circuito já foi projetado para ser criticamente amortecido, e foi possível obter exatamente as resistências e capacitâncias equivalentes necessárias para obter essa resposta. Logo, temos $\Delta = 0$ e a solução se reduz a

$$s = -\frac{\frac{1}{RC}}{2} \Rightarrow s = -\frac{1}{2RC}$$

Assim, as raízes da equação característica são

$$s_1 = s_2 = -5000 \text{ rad/s}$$

Problema P8.19

8.19 No circuito da Figura 8.1, $R = 5 \text{ k}\Omega$, $L = 8 \text{ H}$, $C = 125 \text{ nF}$, $V_0 = 30 \text{ V}$ e $I_0 = 6 \text{ mA}$.

Pspice
Multisim

a) Determine $v(t)$ para $t \geq 0$.

b) Determine os primeiros três valores de t para os quais dv/dt é igual a zero. Esses valores devem ser denotados como t_1 , t_2 e t_3 .

c) Mostre que $t_3 - t_1 = T_d$.

d) Mostre que $t_2 - t_1 = T_d/2$.

e) Calcule $v(t_1)$, $v(t_2)$ e $v(t_3)$.

f) Faça um gráfico de $v(t)$ para $0 \leq t \leq t_2$.

(a)

O primeiro passo é identificar as condições iniciais de $v(t)$. Temos

$$v(0) = 30 \text{ V} \quad (8.19.1)$$

Além disso, para a condição de inicial de $\frac{dv(0)}{dt}$, aplicamos análise nodal no nó superior do circuito em $t = 0$, obtendo

$$i_c(0) + i_L(0) + i_R(0) = 0$$

$$i_c(0) + 6 \text{ mA} + \frac{v(0)}{5 \text{ k}\Omega} = 0$$

$$i_c(0) = -12 \text{ mA}$$

Note que

$$i_c = C \frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv(0)}{dt} = \frac{i_c(0)}{C}$$

Assim, substituindo o valor de $i_c(0)$ encontrado, temos a segunda condição inicial da EDO dada por

$$\frac{dv(0)}{dt} = -96 \text{ kV/s} \quad (8.19.2)$$

Como o circuito da Figura 8.1 é um circuito RLC paralelo, temos que a equação característica é dada por

$$s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC} = 0 \quad (8.19.3)$$

Que possui solução

$$s = \frac{-(1600) \pm \sqrt{(1600)^2 - 4(1)(10^6)}}{2(1)}$$

Note que temos o discriminante $\Delta < 0$. Nesse caso, temos soluções complexas para a equação característica e a resposta da tensão é subamortecida.

$$s = \frac{-1600 \pm j1200}{2}$$

$$s_1 = -800 + j600 \text{ rad/s} \quad , \quad s_2 = -800 - j600 \text{ rad/s}$$

Sabemos que a solução da EDO é da forma

$$v(t) = Ae^{st}$$

Com as duas raízes encontradas s_1 e s_2 , temos que a solução geral é dada pela combinação linear

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) \quad (8.19.4)$$

Onde $v_1(t)$ e $v_2(t)$ são duas possíveis soluções para $v(t)$ dadas por

$$\begin{cases} v_1(t) = A_1 e^{s_1 t} \\ v_2(t) = A_2 e^{s_2 t} \end{cases}$$

Diferenciando (8.19.4) com respeito a t , temos duas equações

$$\begin{cases} v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \\ \frac{dv(t)}{dt} = A_1 s_1 e^{s_1 t} + A_2 s_2 e^{s_2 t} \end{cases}$$

Em $t = 0$, temos as condições iniciais já conhecidas em (8.19.1) em (8.19.2)

$$\begin{cases} v(0) = A_1 e^{s_1 0} + A_2 e^{s_2 0} \\ \frac{dv(0)}{dt} = A_1 s_1 e^{s_1 0} + A_2 s_2 e^{s_2 0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 + A_2 = 30 \text{ V} \\ A_1 s_1 + A_2 s_2 = -96 \text{ kV/s} \end{cases}$$

De posse dessas equações, temos o sistema linear para identificar os coeficientes A_1 e A_2

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ s_1 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ -96000 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -s_1 & -s_1 \\ s_1 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30s_1 \\ -96000 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -s_1 & -s_1 \\ 0 & s_2 - s_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30s_1 \\ -96000 - 30s_1 \end{bmatrix}$$

Assim, temos

$$A_2 = \frac{-96000 - 30s_1}{s_2 - s_1} \Rightarrow A_2 = \frac{-96000 - 30(-800 + j600)}{-800 - j600 - (-800 + j600)}$$

$$A_2 = \frac{-72000 - j18000}{-j1200}$$

$$A_2 = 15 - j60, \quad A_1 = 15 + j60$$

Conhecidos coeficientes A_1 e A_2 , bem como as raízes s_1 e s_2 , temos a solução geral $v(t)$ na forma de (8.19.4)

$$v(t) = (15 + j60)e^{(-800+j600)t} + (15 - j60)e^{(-800-j600)t} \text{ V}, t \geq 0$$

Vamos remover os exponenciais complexos usando a identidade de Euler.

$$v(t) = (15 + j60)e^{-800t}e^{j600t} + (15 - j60)e^{-800t}e^{-j600t}$$

$$v(t) = (15 + j60)e^{-800t}(\cos(600t) + j\sin(600t)) + (15 - j60)e^{-800t}(\cos(600t) - j\sin(600t))$$

Evidenciando o termo e^{-800t} e expandindo os demais via propriedade distributiva, temos que todas parcelas complexas se cancelam e ficamos com

$$v(t) = e^{-800t} [30 \cos(600t) - 120 \sin(600t)] \text{ V}, t \geq 0$$

(b)

Diferenciando $v(t)$ encontrado no item (a) com respeito a t , temos

$$\frac{dv}{dt} = (30 \cos(600t) - 120 \sin(600t))(-800)e^{-800t} + e^{-800t}(-30 \sin(600t)(600) - 120 \cos(600t)(600))$$

$$\frac{dv}{dt} = e^{-800t} [-24000 \cos(600t) + 96000 \sin(600t) - 18000 \sin(600t) - 72000 \cos(600t)]$$

Para que $\frac{dv}{dt} = 0$, temos

$$-24000 \cos(600t) + 96000 \sin(600t) - 18000 \sin(600t) - 72000 \cos(600t) = 0$$

$$\sin(600t)(96000 - 18000) - \cos(600t)(24000 + 72000) = 0$$

$$\frac{\sin(600t)}{\cos(600t)} = \frac{24000 + 72000}{96000 - 18000}$$

$$\tan(600t) = 1.23076 \Rightarrow t = \frac{\tan^{-1}(1.23076)}{600}$$

Usando a propriedade das tangentes de

$$\tan(\theta) = \tan(\theta + n\pi), n = 0, 1, 2, 3...$$

Temos

$$t = \frac{0.8884 + n\pi}{600}, n = 0, 1, 2, 3...$$

Os três primeiros valores de t que satisfazem são

$$t_1 = 1.481 \text{ ms}, t_2 = 6.717 \text{ ms}, t_3 = 11.95 \text{ ms}$$

(c)

Sabemos que frequência angular de amortecimento ω_d é dada por

$$\omega_d = \sqrt{\omega_o^2 - \alpha^2} \quad (8.19.5)$$

Expandindo os termos conforme as definições,

$$\omega_d = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}}$$

O período de ω_d é

$$T_d = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}}}$$

$$T_d = 10.47 \text{ ms}$$

A diferença $t_3 - t_1$ é

$$t_3 - t_1 = 11.95 \text{ ms} - 1.481 \text{ ms} = 10.469 \text{ ms}$$

Portanto,

$$T_d = t_3 - t_1$$

(d)

Temos

$$\frac{T_d}{2} = \frac{10.47 \text{ ms}}{2} = 5.235 \text{ ms}$$

Além disso,

$$t_2 - t_1 = 6.717 \text{ ms} - 1.481 \text{ ms} = 5.236 \text{ ms}$$

Portanto,

$$\frac{T_d}{2} = t_2 - t_1$$

(e)

Usando o resultado do item (a), temos

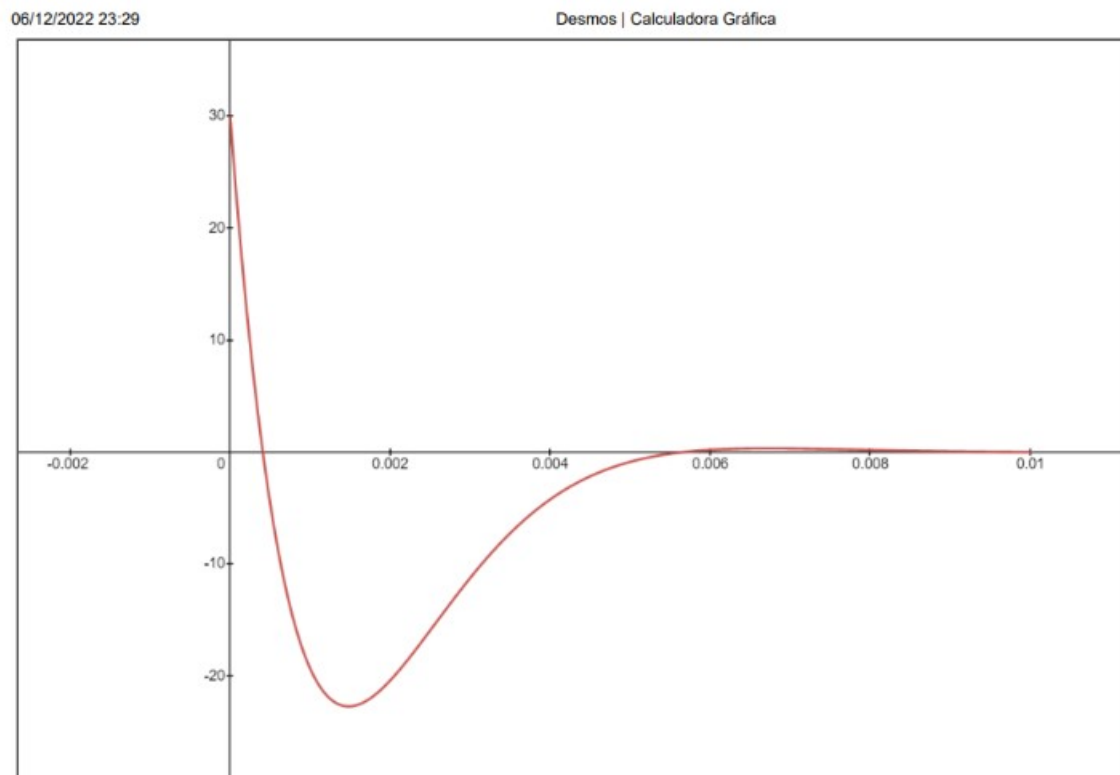
$$v(t_1) = v(1.481 \text{ ms}) = -22.69 \text{ V}$$

$$v(t_2) = v(6.717 \text{ ms}) = -0.344 \text{ V}$$

$$v(t_3) = v(11.95 \text{ ms}) = -5.22 \text{ mV}$$

(f)

Usamos a ferramenta online Desmos para plotar o gráfico de $v(t)$.

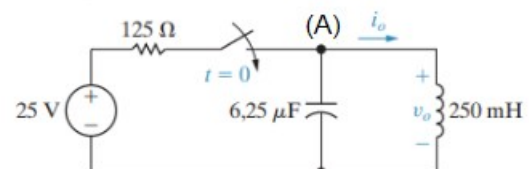


Problema P8.33

8.33 Não há nenhuma energia armazenada no circuito da Figura P8.33 quando a chave é fechada em $t = 0$. Determine $i_o(t)$ para $t \geq 0$.

Pspice
Multisim

Figura P8.33



Aplicamos análise nodal no nó essencial (A) em $t > 0$.

$$i_R + i_C + i_L = 0$$

$$\frac{v_o - 25}{R} + C \frac{dv_o}{dt} + i_o = 0$$

Note que

$$v_o = L \frac{di_o}{dt}$$

Assim, a equação nodal se torna

$$\frac{L \frac{di_o}{dt} - 25}{R} + C \frac{d}{dt} \left(L \frac{di_o}{dt} \right) + i_o = 0$$

$$\frac{L \frac{di_o}{dt} - 25}{R} + C \frac{d}{dt} \left(L \frac{di_o}{dt} \right) + i_o = 0$$

$$\frac{d^2 i_o}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{di_o}{dt} + \frac{i_o}{LC} + \frac{25}{RLC} = 0$$

Substituindo com os valores do enunciado, temos

$$\frac{d^2 i_o}{dt^2} + 1280 \frac{di_o}{dt} + 640000 i_o + 128000 = 0$$

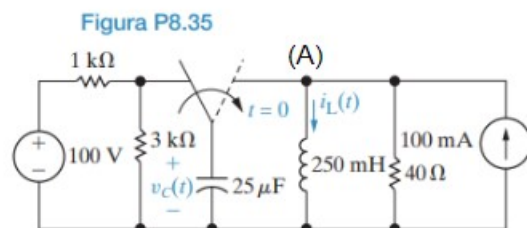
Observação: tentei resolver a EDO acima com o método que usei nas questões anteriores: admitindo solução na forma $i_o(t) = Ae^{-st}$ e achando os coeficientes através das condições iniciais do circuito. Contudo, não consegui identificar as condições iniciais e não achei a resposta correta. Tentei resolver pelo método dado em sala da aula, mas não sei Transformada de Laplace muito bem e as fotos que tirei do quadro ficaram ruins. Assim, coloco diretamente a solução dada em sala de aula dessa questão via Laplace.

$$i_o(t) = 0.2u(t) - 0.2e^{-640t} \cos(480t) - \frac{4}{15}e^{-640t} \sin(480t) \text{ A}, t \geq 0$$

Onde $u(t)$ é a função degrau unitário.

Problema P8.35

- 8.35** A chave no circuito da Figura P8.35 esteve na posição esquerda por um longo tempo antes de passar para a posição direita em $t = 0$. Determine
- a) $i_L(t)$ para $t \geq 0$,
 b) $v_C(t)$ para $t \geq 0$.



O primeiro passo é entender o estado inicial do circuito para $t < 0$.

Antes da chave comutar, o capacitor está em paralelo com um circuito divisor de tensão, e após um longo tempo possuirá tensão inicial de

$$v(0) = 100 \frac{3000}{1000 + 3000}$$

$$v_C(0) = 75 \text{ V} \quad (8.35.1)$$

Além disso, o indutor se comporta como um curto-circuito para a fonte de corrente de $I = 100 \text{ mA}$. Logo,

$$i_L(0) = 100 \text{ mA} \quad (8.35.2)$$

Exatamente no instante em que a chave comuta, em $t = 0$, temos que a corrente no capacitor é nula, pois toda a corrente da fonte passa no indutor. Assim, temos a segunda condição inicial do capacitor

$$\frac{dv(0)}{dt} = 0 \text{ V/s} \quad (8.35.3)$$

De posse dessas condições iniciais, aplicamos análise nodal no nó essencial (A) para $t > 0$, obtendo

$$i_c + i_L + i_R = 100 \text{ mA}$$

$$C \frac{dv_C}{dt} + i_L(0) + \int_0^t v_L(t) dt + \frac{v_R(t)}{R} = 100 \text{ mA}$$

Usando $v_C = v_R = v_L = v(t)$,

$$C \frac{dv(t)}{dt} + i_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t v(t) dt + \frac{v(t)}{R} = 100 \text{ mA}$$

Derivando ambos lados com respeito a t ,

$$C \frac{d^2v(t)}{dt^2} + \frac{1}{L}v(t) + \frac{1}{R} \frac{dv}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dv}{dt} + \frac{v(t)}{LC} = 0$$

A EDO acima já possui equação característica conhecida, dada por

$$s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC} = 0 \quad (8.35.4)$$

Substituindo com os valores do enunciado,

$$s = \frac{-(1000) \pm \sqrt{(1000)^2 - 4(1)(160000)}}{2(1)}$$

$$s_1 = -200 \text{ rad/s} \quad , \quad s_2 = -800 \text{ rad/s}$$

Além disso, sabemos que a solução da EDO é da forma

$$v(t) = Ae^{st}$$

Com as duas raízes encontradas s_1 e s_2 , temos que a solução geral é dada pela combinação linear

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) \quad (8.35.5)$$

Onde $v_1(t)$ e $v_2(t)$ são duas possíveis soluções para $v(t)$ dadas por

$$\begin{cases} v_1(t) = A_1 e^{s_1 t} \\ v_2(t) = A_2 e^{s_2 t} \end{cases}$$

Diferenciando (8.35.5) com respeito a t , temos duas equações

$$\begin{cases} v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \\ \frac{dv(t)}{dt} = A_1 s_1 e^{s_1 t} + A_2 s_2 e^{s_2 t} \end{cases}$$

Em $t = 0$, temos as condições iniciais já conhecidas em (8.35.1) em (8.35.1)

$$\begin{cases} v(0) = A_1 e^{s_1 0} + A_2 e^{s_2 0} \\ \frac{dv(0)}{dt} = A_1 s_1 e^{s_1 0} + A_2 s_2 e^{s_2 0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 + A_2 = 75 \text{ V} \\ A_1 s_1 + A_2 s_2 = 0 \text{ V/s} \end{cases}$$

De posse dessas equações, temos o sistema linear para identificar os coeficientes A_1 e A_2

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ s_1 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -s_1 & -s_1 \\ s_1 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -75s_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -s_1 & -s_1 \\ 0 & s_2 - s_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -75s_1 \\ -75s_1 \end{bmatrix}$$

Assim, temos

$$A_2 = \frac{-75s_1}{s_2 - s_1} \Rightarrow A_2 = -25$$

$$A_1 = 100$$

Conhecidos coeficientes A_1 e A_2 , bem como as raízes s_1 e s_2 , temos a solução geral $v(t)$ na forma de (8.35.5)

$$v_C(t) = 100e^{-200t} - 25e^{-800t} \text{ V}, t \geq 0$$

Para encontrar $i_L(t)$, usamos a relação entre corrente e tensão no indutor

$$i_L(t) = i_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t v_C(t) dt$$

$$i_L(t) = 0.1 + \frac{1}{L} \int_0^t 100e^{-200t} - 25e^{-800t} dt$$

$$i_L(t) = 0.1 - 2e^{-200t} + 0.125e^{-800t} \text{ A}, t \geq 0$$

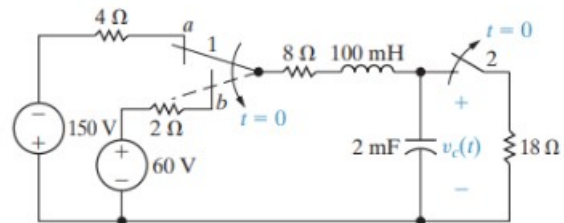
Problema P8.54

8.54

Pspice
Multisim

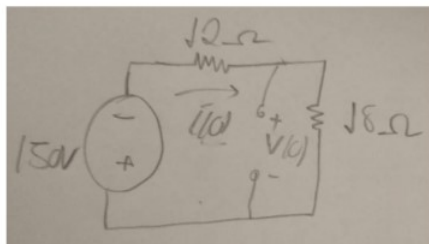
As duas chaves no circuito visto na Figura P8.54 funcionam de modo sincronizado. Quando a chave 1 está na posição *a*, a chave 2 está fechada. Quando a chave 1 está na posição *b*, a chave 2 está aberta. A chave 1 esteve na posição *a* por um longo tempo. Em $t = 0$, ela passa instantaneamente para a posição *b*. Determine $v_C(t)$ para $t \geq 0$.

Figura P8.54

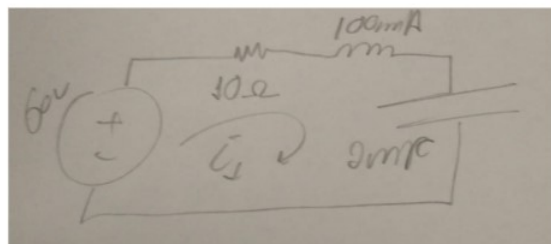


O primeiro passo é identificar as condições iniciais do circuito, ou seja, as condições em $t < 0$.

Figure 8.54.1: (a) Circuito para $t < 0$. (b) Circuito para $t \geq 0$.



(a)



(b)

Em $t < 0$, como mostra a Figura 8.54.1 (a), o circuito se reduz a um divisor de tensão resistivo. Assim, temos

$$v_C(0) = -150 \frac{18}{12 + 18} = -90 \text{ V} \quad (8.54.1)$$

$$i_L(0) = \frac{-150}{12 + 18} = -5 \text{ A} \quad (8.54.2)$$

Além disso, para identificar as condições de iniciais das derivadas de $i_L(t)$ e $v_C(t)$, usamos

$$\frac{dv_C(0)}{dt} = \frac{i_C(0)}{C} \Rightarrow \frac{dv_C(0)}{dt} = -2500 \text{ V/s} \quad (8.54.3)$$

$$\frac{di_L(0)}{dt} = \frac{v_L(0)}{L} \Rightarrow \frac{di_L(0)}{dt} = \frac{0}{0.1} = 0 \text{ A/s} \quad (8.54.4)$$

De posse das condições iniciais, aplicamos análise de malhas no circuito da Figura 8.54.1 (b), obtendo

$$-60 + Ri + L \frac{di}{dt} + v_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt = 0$$

Derivando com respeito a t ,

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0$$

A EDO acima possui equação característica dada por

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0 \quad (8.54.5)$$

Substituindo com os valores do circuito da Figura 8.54.1 (b),

$$s = \frac{-(100) \pm \sqrt{(100)^2 - 4(1)(5 \cdot 10^3)}}{2(1)}$$

$$s = \frac{-(100) \pm j100}{2(1)}$$

$$s_1 = -50 + j50 \text{ rad/s} \quad , \quad s_2 = -50 - j50 \text{ rad/s}$$

Com as duas raízes encontradas s_1 e s_2 , temos que a solução geral é dada pela combinação linear

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) \quad (8.54.6)$$

Onde $i_1(t)$ e $i_2(t)$ são duas possíveis soluções para $i(t)$ dadas por

$$\begin{cases} i_1(t) = A_1 e^{s_1 t} \\ i_2(t) = A_2 e^{s_2 t} \end{cases}$$

Diferenciando (8.54.6) com respeito a t , temos duas equações

$$\begin{cases} i(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \\ \frac{di(t)}{dt} = A_1 s_1 e^{s_1 t} + A_2 s_2 e^{s_2 t} \end{cases}$$

Em $t = 0$, temos as condições iniciais já conhecidas em (8.54.2) em (8.54.4)

$$\begin{cases} i(0) = A_1 e^{s_1 0} + A_2 e^{s_2 0} \\ \frac{di(0)}{dt} = A_1 s_1 e^{s_1 0} + A_2 s_2 e^{s_2 0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 + A_2 = -5 \text{ A} \\ A_1 s_1 + A_2 s_2 = 0 \text{ A/s} \end{cases}$$

De posse dessas equações, temos o sistema linear para identificar os coeficientes A_1 e A_2

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ s_1 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -s_1 & -s_1 \\ s_1 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5s_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -s_1 & -s_1 \\ 0 & s_2 - s_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5s_1 \\ 0 + 5s_1 \end{bmatrix}$$

Assim, temos

$$A_2 = \frac{5s_1}{s_2 - s_1} \Rightarrow A_2 = \frac{-250 + j250}{-j100}$$

$$A_2 = -2.5 - j2.5, \quad A_1 = -2.5 + j2.5$$

Conhecidos coeficientes A_1 e A_2 , bem como as raízes s_1 e s_2 , temos a solução geral $v(t)$ na forma de (8.54.6)

$$i(t) = (-2.5 + j2.5)e^{(-50+j50)t} + (-2.5 - j2.5)e^{(-50-j50)t} \text{ A}, t \geq 0$$

Vamos remover os exponenciais complexos usando a identidade de Euler.

$$i(t) = (-2.5 + j2.5)e^{-50t}e^{j50t} + (-2.5 - j2.5)e^{-50t}e^{-j50t}$$

$$i(t) = (-2.5 + j2.5)e^{-50t}(\cos(50t) + j\sin(50t)) + (-2.5 - j2.5)e^{-50t}(\cos(50t) - j\sin(50t))$$

Evidenciando o termo e^{-50t} e expandindo os demais via propriedade distributiva, temos que todas parcelas complexas se cancelam e ficamos com

$$i(t) = e^{-50t} [-5 \cos(50t) - 5 \sin(50t)] \text{ A}, t \geq 0$$

Por fim, usando a relação entre corrente e tensão no capacitor de

$$v_C(t) = v_C(0) + \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

$$v_C(t) = -90 + \frac{1}{0.002} \int e^{-50t} [-5 \cos(50t) - 5 \sin(50t)] dt$$

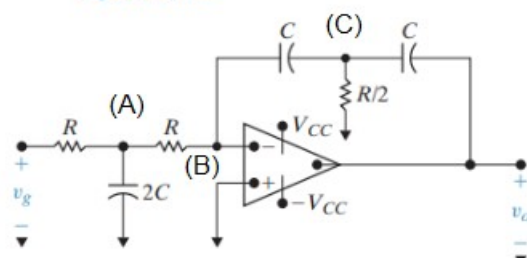
$$v_C(t) = -90 + \frac{1}{0.002} \frac{1}{10} e^{-50t} \cos(50t)$$

$$v_C(t) = -90 + 50e^{-50t} \cos(50t) \text{ V}, t \geq 0$$

Problema P8.62

- 8.62** a) Deduza a equação diferencial que relaciona a tensão de saída com a tensão de entrada para o circuito mostrado na Figura P8.62.
- b) Compare o resultado com a Equação 8.75 quando $R_1 C_1 = R_2 C_2 = RC$ na Figura 8.18.
- c) Qual é a vantagem do circuito mostrado na Figura P8.62?

Figura P8.62



(a)

Usando o amplificador operacional como ideal, temos duas premissas que podemos tomar antes de começar a análise:

$$V_+ = V_- = 0 \quad (8.62.1)$$

$$i_+ = i_- = 0 \quad (8.62.2)$$

(8.62.1) se refere ao curto circuito virtual entre os terminais de entrada do AmpOp, e (8.62.2) se refere à impedância de entrada infinita; Assim, temos três nós essenciais no circuito, nomeados (A), (B) e (C). Vamos aplicar análise nodal em cada um deles.

Nó (A):

$$\begin{aligned} \frac{V_A - v_g}{R} + i_C + \frac{V_A - 0}{R} &= 0 \\ \frac{V_A - v_g}{R} + 2C \frac{dV_A}{dt} + \frac{V_A}{R} &= 0 \\ \frac{dV_A}{dt} + \frac{V_A}{2RC} - \frac{v_g}{2RC} + \frac{V_A}{2RC} &= 0 \\ \frac{dV_A}{dt} + \frac{V_A}{RC} - \frac{v_g}{2RC} &= 0 \end{aligned} \quad (8.62.3)$$

Nó (B):

$$\begin{aligned} \frac{V_B - V_A}{R} + 0 + i_C &= 0 \\ \frac{V_B - V_A}{R} + C \frac{d(V_B - V_C)}{dt} &= 0 \\ \frac{V_B}{R} - \frac{V_A}{R} + C \frac{dV_B}{dt} - C \frac{dV_C}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

Note que $V_B = 0$ devido à (8.62.1). Assim,

$$\frac{V_A}{R} + C \frac{dV_C}{dt} = 0 \quad (8.62.4)$$

Nó (C):

$$\begin{aligned} i_C + i_C + \frac{V_C}{0.5R} &= 0 \\ C \frac{d(V_C - V_B)}{dt} + C \frac{dV_C - v_o}{dt} + \frac{V_C}{0.5R} &= 0 \\ C \frac{dV_C}{dt} + C \frac{dV_C}{dt} - C \frac{dv_o}{dt} + \frac{V_C}{0.5R} &= 0 \\ 2C \frac{dV_C}{dt} - C \frac{dv_o}{dt} + \frac{V_C}{0.5R} &= 0 \end{aligned} \quad (8.62.5)$$

A partir de (8.62.4) é possível extrair duas informações:

$$V_A = -RC \frac{dV_C}{dt}, \quad \frac{dV_A}{dt} = -RC \frac{d^2V_C}{dt^2}$$

Substituindo essas duas novas informações em (8.62.3), temos

$$-RC \frac{d^2 V_C}{dt^2} + \frac{-RC \frac{dV_C}{dt}}{RC} - \frac{v_g}{2RC} = 0$$

$$\frac{d^2 V_C}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dV_C}{dt} = -\frac{v_g}{2R^2 C^2} \quad (8.62.6)$$

Note que, diferenciando (8.62.5), temos

$$2C \frac{d^2 V_C}{dt^2} - C \frac{d^2 v_o}{dt^2} + \frac{1}{0.5R} \frac{dV_C}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2 V_C}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dV_C}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d^2 v_o}{dt^2} \quad (8.62.7)$$

Igualando os termos direitos das equações (8.62.6) e (8.62.7), obtemos finalmente uma expressão da saída v_o em função da entrada v_g .

$$-\frac{v_g}{2R^2 C^2} = \frac{1}{2} \frac{d^2 v_o}{dt^2}$$

$$\boxed{\frac{d^2 v_o}{dt^2} = -\frac{v_g}{R^2 C^2}}$$

(b)

Se $R_1 C_1 = R_2 C_2$, temos

$$R_1 C_1 \cdot R_2 C_2 = R^2 C^2$$

E a equação 8.75 do livro se torna a mesma equação deduzida no item (a) do problema. A única diferença é que o circuito do problema inverte o sinal da entrada.

(c)

O circuito da Figura P8.62 é capaz ter a mesma função resposta do circuito da Figura 8.18 do livro usando apenas um amplificador operacional, ao passo que o do livro usa dois AmpOps. A única desvantagem é que ele também inverte o sinal, o que pode ser indesejado em algumas aplicações.

Problema P9.3

9.3 Considere a tensão senoidal

$$v(t) = 25 \cos(400\pi t + 60^\circ) \text{ V.}$$

- Qual é a amplitude máxima da tensão?
- Qual é a frequência em hertz?
- Qual é a frequência em radianos por segundo?
- Qual é o ângulo de fase em radianos?
- Qual é o ângulo de fase em graus?
- Qual é o período em milissegundos?
- Qual é a primeira vez, após $t = 0$, que $v = 0 \text{ V}$?
- A função senoidal é deslocada 5/6 ms para a direita ao longo do eixo do tempo. Qual é a expressão para $v(t)$?
- Qual é o valor mínimo de milissegundos de que a função deve ser deslocada para a esquerda, se a expressão para $v(t)$ for $25 \sin 400\pi t \text{ V}$?

(a)

Sabemos que uma tensão senoidal $v(t)$ é expressa na forma

$$v(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (9.3.1)$$

onde

- A : amplitude máxima da tensão (V);
- ω : frequência angular da tensão (rad/s);
- ϕ : defasagem em relação à origem (rad ou °).

Portanto, conforme o enunciado, temos

$$A = 25 \text{ V}$$

(b)

A frequência angular ω é dada por

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi}$$

Substituindo, temos

$$f = 200 \text{ Hz}$$

(c)

Conforme o enunciado, temos

$$\omega = 400\pi \text{ rad/s} = 1256.64 \text{ rad/s}$$

(d)

Conforme o enunciado, temos $\phi = 60^\circ$. Convertendo para radianos, temos

$$\phi = \frac{\pi}{3} \text{ rad} = 1.047 \text{ rad}$$

(e)

Conforme o enunciado,

$$\phi = 60^\circ$$

(f)

A frequência angular ω é dada por

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Substituindo,

$$T = 5 \text{ ms}$$

(g)

Isolando t em (9.3.1), temos

$$\begin{aligned}\omega t + \phi &= \cos^{-1} \left(\frac{v(t)}{A} \right) \\ t &= \frac{1}{\omega} \left[\cos^{-1} \left(\frac{v(t)}{A} \right) - \phi \right]\end{aligned}\quad (9.3.2)$$

Para identificar os instantes t para os quais $v(t) = 0$, substituímos $v(t) = 0$ em (9.3.2), obtendo

$$t = \frac{1}{\omega} [\cos^{-1}(0) - \phi]$$

O primeiro ângulo θ para o qual $\cos(\theta) = 0$ é $\frac{\pi}{2}$, portanto

$$t = \frac{1}{\omega} \left[\frac{\pi}{2} - \phi \right]$$

Substituindo os valores do enunciado, temos

$$t = 416.67 \mu\text{s}$$

(h)

Do item (f), sabemos que $T = 5\text{ms}$. Além disso, sabemos que $1T = 360^\circ$ para a função cosseno. Portanto, usando proporcionalidade, temos

$$\frac{T}{\Delta t} = \frac{360^\circ}{\Delta \phi}$$

Substituindo,

$$\begin{aligned}\frac{5 \text{ ms}}{\frac{5}{6} \text{ ms}} &= \frac{360^\circ}{\Delta \phi} \\ \Delta \phi &= 60^\circ\end{aligned}$$

Portanto, um deslocamento de $\frac{5}{6} \text{ ms}$ equivale a um deslocamento angular de $\Delta \phi = 60^\circ$. Note que deslocamentos à direita de uma função trigonométrica correspondem a deslocamentos com sinal negativo. Assim,

$$\Delta \phi = -60^\circ$$

Aplicando isso à função original, temos a nova expressão de $v(t)$ dada por

$$v(t) = A \cos(\omega t + \phi + \Delta \phi)$$

$$v(t) = 25 \cos(400\pi t + 60^\circ - 60^\circ)$$

$$v(t) = 25 \cos(400\pi t) \text{ V}$$

(i)

Sabemos que

$$\cos(\theta) = \sin(\theta + 90^\circ)$$

Portanto, podemos reescrever a função de $v(t)$ como

$$v(t) = A \sin(\omega t + \phi + 90^\circ)$$

Seja Δt o deslocamento ao longo do eixo x que provoca uma diferença de fase $\Delta\theta$, de tal modo que

$$A \sin(\omega t + \phi + \Delta\theta + 90^\circ) = A \sin(\omega t)$$

Para isso, precisamos de

$$\phi + \Delta\theta + 90^\circ = 0$$

Portanto,

$$\Delta\theta = -\phi - 90^\circ$$

Uma vez conhecido $\Delta\theta$, identificamos o deslocamento temporal Δt através da proporcionalidade

$$\frac{T}{\Delta t} = \frac{360^\circ}{-\phi - 90^\circ}$$

Isolando Δt , temos

$$\Delta t = (-\phi - 90^\circ) \frac{T}{360^\circ}$$

Substituindo,

$$\Delta t = -2.08 \text{ ms}$$

Problema P9.14

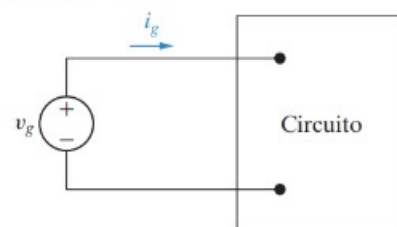
9.14 As expressões para a tensão e a corrente de regime permanente nos terminais do circuito da Figura P9.14 são

$$v_g = 300 \cos(5.000\pi t + 78^\circ) \text{ V},$$

$$i_g = 6 \sin(5.000\pi t + 123^\circ) \text{ A}.$$

- Qual é a impedância vista pela fonte?
- De quantos microssegundos é a defasagem entre a corrente e a tensão?

Figura P9.14

**(a)**A impedância Z_{in} vista pela fonte é dada por

$$Z_{in} = \frac{V_g}{I_g} \quad (9.14.1)$$

Usando a relação trigonométrica

$$\sin \theta = \cos(\theta - 90^\circ)$$

Podemos reescrever a expressão de $i_g(t)$ como

$$i_g(t) = 6 \cos(5000\pi + 123^\circ - 90^\circ)$$

$$i_g(t) = 6 \cos(5000\pi + 33^\circ)$$

Assim, em notação fasorial, temos

$$Z_{in} = \frac{300/78^\circ}{6/33^\circ} \quad (9.14.2)$$

$$\boxed{Z_{in} = 50/45^\circ \Omega}$$

(b)

Usando proporcionalidade (regra de três simples), sabemos que uma diferença de fase de $\Delta\phi$ corresponde a uma diferença temporal Δt dada por

$$\frac{T}{\Delta t} = \frac{360^\circ}{\Delta\phi}$$

onde $T = \frac{2\pi}{\omega}$ é o período do sinal. Isolando Δt , temos

$$\Delta t = T \frac{\Delta\phi}{360^\circ} \quad (9.14.3)$$

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega} \frac{\Delta\phi}{360^\circ}$$

Substituindo tudo, temos

$$\boxed{\Delta t = 50 \mu s}$$

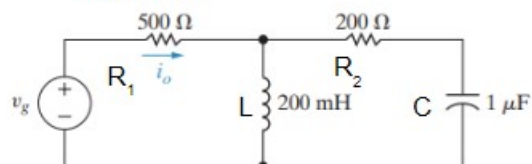
Problema P9.37

9.37 A frequência da fonte de tensão senoidal no circuito da Figura P9.37 é ajustada até que a corrente i_o fique em fase com v_g .

Pspice
Multisim

- Determine a frequência em hertz.
- Determine a expressão de regime permanente para i_o (na frequência encontrada em [a]), se $v_g = 90 \cos \omega t$ V.

Figura P9.37



(a)

Vamos começar identificando a impedância equivalente Z_{in} vista pela fonte v_g .

$$Z_{in} = \left(\left(\frac{1}{j\omega C} + R_2 \right) // j\omega L \right) + R_1$$

$$Z_{in} = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{\frac{1}{j\omega C} + R_2}}$$

Agora vamos isolar a parte real da parte complexa.

$$\begin{aligned}
 Z_{in} &= R_1 + \frac{1}{-\frac{j}{\omega L} + \frac{1}{-\frac{j}{\omega C} + R_2}} \\
 Z_{in} &= R_1 + \frac{1}{-\frac{j}{\omega L} + \frac{\omega C}{-j + R_2 \omega C}} \\
 Z_{in} &= R_1 + \frac{1}{-\frac{j}{\omega L} + \frac{(\omega C)(+j + R_2 \omega C)}{1^2 + (R_2 \omega C)^2}} \\
 Z_{in} &= R_1 + \frac{1}{-\frac{j}{\omega L} + \frac{j \omega C}{1 + (R_2 \omega C)^2} + \frac{R_2 \omega^2 C^2}{1 + (R_2 \omega C)^2}} \\
 Z_{in} &= R_1 + \frac{1}{-\frac{R_2 \omega^2 C^2}{1 + (R_2 \omega C)^2} + j \left(-\frac{1}{\omega L} + \frac{\omega C}{1 + (R_2 \omega C)^2} \right)}
 \end{aligned}$$

Vamos adotar uma notação para simplificar a expressão. Sejam

$$A = \frac{R_2 \omega^2 C^2}{1 + (R_2 \omega C)^2} \quad , \quad B = -\frac{1}{\omega L} + \frac{\omega C}{1 + (R_2 \omega C)^2}$$

Com isso, podemos reescrever a expressão de Z_{in} como

$$Z_{in} = R_1 + \frac{1}{A + jB}$$

Continuamos o processo de isolar a parte real da parte complexa.

$$\begin{aligned}
 Z_{in} &= R_1 + \frac{1}{A + jB} \\
 Z_{in} &= R_1 + \frac{A - jB}{A^2 + B^2} \\
 Z_{in} &= \left(R_1 + \frac{A}{A^2 + B^2} \right) - j \frac{B}{A^2 + B^2}
 \end{aligned}$$

Agora é possível expressar uma função para o ângulo de fase ϕ de Z_{in} , dada por

$$\begin{aligned}
 \phi &= \tan^{-1} \left(\frac{-\frac{B}{A^2 + B^2}}{R_1 + \frac{A}{A^2 + B^2}} \right) \\
 \phi &= \tan^{-1} \left(\frac{-\frac{B}{A^2 + B^2}}{\frac{R_1(A^2 + B^2) + A}{A^2 + B^2}} \right) \\
 \phi &= \tan^{-1} \left(-\frac{B}{R_1(A^2 + B^2) + A} \right) \tag{9.37.1}
 \end{aligned}$$

Uma vez calculado Z_{in} , podemos expressar a relação entre V_g e I_o através de

$$V_g = Z_{in} \cdot I_g \tag{9.37.2}$$

Para que (9.37.2) seja satisfeita com V_g e I_o em fase, temos que o ângulo de fase de Z_{in} deve ser nulo. Portanto, usando (9.37.1), temos

$$\phi = \tan^{-1} \left(-\frac{B}{R_1(A^2 + B^2) + A} \right) = 0$$

$$-\frac{B}{R_1(A^2 + B^2) + A} = 0$$

$$B = 0$$

Expandindo B conforme o definimos, temos

$$-\frac{1}{\omega L} + \frac{\omega C}{1 + (R_2 \omega C)^2} = 0$$

$$\frac{-1 - R_2^2 \omega^2 C^2 + (\omega L)(\omega C)}{(\omega L)(1 + R_2^2 \omega^2 C^2)} = 0$$

$$-1 - R_2^2 \omega^2 C^2 + \omega^2 LC = 0$$

Isolando ω , temos

$$\omega^2 = \frac{1}{LC - R_2^2 C^2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC - R_2^2 C^2}}$$

Usando $\omega = 2\pi f$, a frequência f em Hertz da fonte de tensão deve ser

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC - R_2^2 C^2}} \quad (9.37.3)$$

Substituindo,

$$f = 397.89 \text{ Hz}$$

(b)

Usando (9.37.2), temos

$$i_o(t) = \frac{v_g(t)}{Z_{in}} \quad (9.37.4)$$

Note que Z_{in} é puramente real, pois o ângulo de fase é nulo (fizemos $B = 0$ no item anterior). Assim, a expressão de Z_{in} se reduz a

$$Z_{in} = R_1 + \frac{A}{A^2 + 0}$$

$$Z_{in} = R_1 + \frac{1}{A}$$

$$Z_{in} = R_1 + \frac{1 + (R_2 \omega C)^2}{R_2 \omega^2 C^2}$$

$$Z_{in} = 1500 \, \Omega$$

Substituindo em (9.37.4),

$$i_o(t) = \frac{90 \cos(\omega t)}{1500 \, \Omega}$$

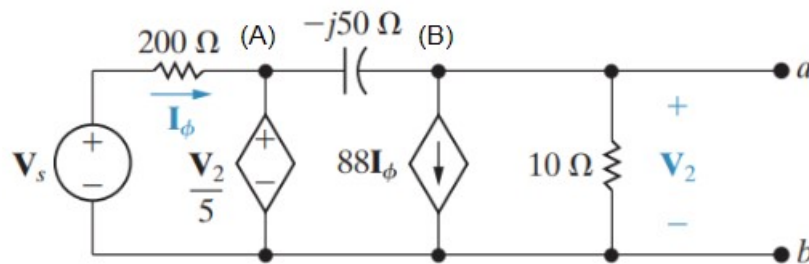
$$i_o(t) = 60 \cos(\omega t) \text{ mA}$$

$$i_o(t) = 60 \cos(2500t) \text{ mA}$$

Problema P9.50

9.50 Determine o circuito equivalente de Norton em relação aos terminais a, b para o circuito da Figura P9.50 quando $\mathbf{V}_s = 5\angle 0^\circ \text{ V}$.

Figura P9.50



Em um circuito equivalente norton, temos

$$I_N = I_{SC} \quad , \quad R_N = R_{th}$$

Vamos começar calculando a tensão de Thevenin V_{th} entre os terminais a e b , abrindo-os. Expressando as variáveis de controle em função dos elementos do circuito, obtemos

$$V_2 = V_B \quad (9.50.1)$$

$$I_\phi = \frac{5V - V_A}{200 \, \Omega} \quad (9.50.2)$$

Feito isso, aplicamos análise nodal dos nós essenciais A e B . Começamos pelo nó A . Obtemos de imediato que

$$V_A = \frac{V_2}{5} = \frac{V_B}{5} \quad (9.50.3)$$

Agora vamos para o nó B .

$$\frac{V_B - V_A}{-j50 \, \Omega} + 88I_\phi + \frac{V_B - 0}{10 \, \Omega} = 0$$

Usando (9.50.2) e (9.50.3), temos

$$\frac{V_B - \frac{V_B}{5}}{-j50 \, \Omega} + 88 \frac{5V - \frac{V_B}{5}}{200 \, \Omega} + \frac{V_B}{10 \, \Omega} = 0$$

Isolando V_B , temos

$$\frac{V_B}{-j50} - \frac{V_B}{-j250} - \frac{88V_B}{1000} + \frac{V_B}{10} = -2.2$$

$$V_B = -\frac{2.2}{\frac{1}{-j50} - \frac{1}{-j250} - \frac{88}{1000} + \frac{1}{10}}$$

$$V_B = -66 + j88V = 110/\underline{126.86^\circ}V \quad (9.50.4)$$

Usando (9.50.3), obtemos

$$V_A = 22/\underline{126.86^\circ}V \quad (9.50.5)$$

Assim, obtemos que a tensão de Thevenin é dada por

$$V_{th} = V_{ab} = V_B = 110/\underline{126.86^\circ}V \quad (9.50.6)$$

Agora calculamos a corrente de curto-circuito I_{sc} . Curto circuitamos os terminais a e b , e novamente expressamos as variáveis de controle em função dos elementos do circuito.

$$V_2 = 0V \quad (9.50.7)$$

$$I_\phi = \frac{5V - V_A}{200 \, \Omega} \quad (9.50.8)$$

Agora aplicamos análise nodal nos nós essenciais A e B . De imediato temos que

$$V_A = \frac{V_2}{5} = \frac{V_B}{5}$$

No entanto, devido ao curto-circuito, observe que

$$V_B = 0V$$

E portanto,

$$V_A = V_B = 0V$$

Escrevendo a equação de nó de B , temos

$$\frac{V_B - \frac{V_B}{5}}{-j50 \, \Omega} + 88 \frac{5V - \frac{V_B}{5}}{200 \, \Omega} + I_{sc} = 0$$

Substituindo e isolando I_{sc} ,

$$0 + 88 \frac{5V}{200 \, \Omega} + I_{sc} = 0$$

$$I_{sc} = -2.2 \, A = 2.2/\underline{180^\circ} \, A \quad (9.50.9)$$

Usando (9.50.9) e (9.50.6), obtemos a resistência de Thevenin R_{th} .

$$R_{th} = \frac{V_{th}}{I_{sc}} = \frac{110/\underline{126.86^\circ}}{2.2/\underline{180^\circ}} = 50/\underline{-53.14^\circ} \, \Omega \quad (9.50.10)$$

Finalmente,

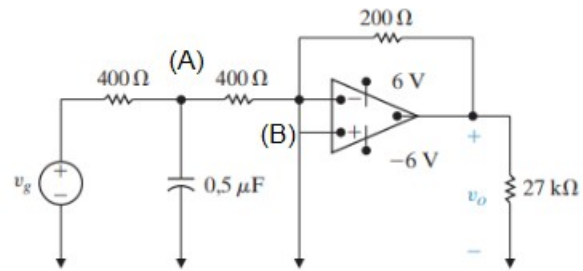
$$\boxed{R_N = 50/\underline{-53.14^\circ} \, \Omega = 30 - j40 \, \Omega}$$

$$\boxed{I_N = -2.2 \, A}$$

Problema P9.69

9.69 A fonte de tensão senoidal no circuito mostrado na Figura P9.69 está gerando a tensão $v_g = 20 \cos 5.000t$ V. Se o amp op for ideal, qual será a expressão de regime permanente para $v_o(t)$?

Pspice
Multisim



O primeiro passo é expressar V_o em função das tensões de entrada no AmpOp. Aplicamos análise nodal no nó (B).

$$i_- + i_+ + \frac{V_B - V_o}{R_s} + \frac{V_B - V_A}{R_2} = 0$$

Como o Amplificador Operacional é ideal, temos

$$i_- = i_+ = 0 \text{ A} \quad (9.69.1)$$

Além disso, temos $V_B = 0$. Substituindo na expressão do nó, temos

$$\frac{V_o}{R_s} + \frac{V_A}{R_2} = 0$$

Isolando V_o , temos

$$V_o = -\frac{R_s}{R_2} V_A \quad (9.69.2)$$

Portanto, basta encontrar a expressão de V_A para achar a expressão de $v_o(t)$. Aplicando análise nodal no nó essencial (A), temos

$$\frac{V_A - 20}{400} + \frac{V_A}{\frac{1}{j\omega 0.5 \mu F}} + \frac{V_A - V_B}{400} = 0$$

$$\frac{V_A - 20}{400} + \frac{V_A}{\frac{1}{j0.0025}} + \frac{V_A}{400} = 0$$

$$V_A \left(\frac{1}{400} + j0.0025 + \frac{1}{400} \right) = \frac{20}{400}$$

$$V_A = \frac{0.05}{0.005 + j0.0025}$$

$$V_A = 8.9442 \angle -26.57^\circ \text{ V}$$

Assim, voltando para (9.69.2), temos

$$V_o = -\frac{200}{400} 8.9442 \angle -26.57^\circ \text{ V}$$

$$V_o = -4.47 \angle -26.57^\circ \text{ V}$$

Removendo o sinal negativo, temos

$$V_o = 4.47 \angle -26.57 + 180^\circ \text{ V}$$

$$V_o = 4.47/153.43^\circ \text{ V}$$

Convertendo do fasor para obter a expressão em função do tempo (note que usamos o valor de pico da tensão como o módulo do fasor), temos

$$v_o(t) = 4.47 \cos(5000t + 153.43) \text{ V}$$

Problema P9.77

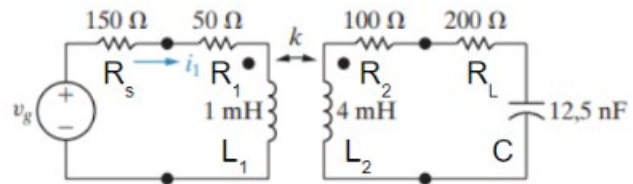
9.77 A fonte de tensão senoidal no circuito visto na Figura P9.77 está funcionando a uma

Pspice
Multisim

frequência de 200 krad/s. O coeficiente de acoplamento é ajustado até que o valor de pico de i_1 seja máximo.

- Qual é o valor de k ?
- Se $v_g = 560 \cos(2 \times 10^5 t) \text{ V}$, qual é a amplitude máxima de i_1 ?

Figura P9.77



(a)

O valor de $i(t)$ depende da impedância Z_{in} vista pela fonte V_g . Sabemos que Z_{in} é expressa por

$$Z_{in} = Z_{11} + Z_r \quad (9.77.1)$$

Além disso, sabemos que a impedância refletida Z_r é dada por

$$Z_r = \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}} \quad (9.77.2)$$

Substituindo (9.77.2) em (9.77.1), temos

$$Z_{in} = Z_{11} + \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}} \quad (9.77.3)$$

Onde

- Z_{11} : Autoimpedância da malha do primeiro enrolamento;
- Z_{22} : Autoimpedância da malha do segundo enrolamento;
- M : Indutância mútua.

Expandindo os termos de (9.77.3), temos

$$Z_{in} = R_s + R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 (k\sqrt{L_1 L_2})^2}{j\omega L_2 + R_2 + R_L + \frac{1}{j\omega C}} \quad (9.77.4)$$

Vamos reescrever (9.77.4) de modo a isolar a parte real da parte complexa.

$$Z_{in} = R_s + R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 k^2 L_1 L_2}{j\omega L_2 + R_2 + R_L - \frac{j}{\omega C}}$$

$$Z_{in} = R_s + R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 k^2 L_1 L_2}{R_2 + R_L + j(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})}$$

$$Z_{in} = R_s + R_1 + j\omega L_1 + \frac{(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(R_2 + R_L - j(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C}))}{(R_2 + R_L + j(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C}))(R_2 + R_L - j(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C}))}$$

$$Z_{in} = R_s + R_1 + j\omega L_1 + \frac{(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(R_2 + R_L) - j(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2}$$

$$Z_{in} = R_s + R_1 + \frac{(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(R_2 + R_L)}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2} + j \left(\omega L_1 - \frac{(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2} \right) \quad (9.77.5)$$

A partir de (9.77.5) podemos determinar o módulo de Z_{in} .

$$|Z_{in}|(k) = \sqrt{\left(R_s + R_1 + \frac{(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(R_2 + R_L)}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2} \right)^2 + \left(\omega L_1 - \frac{(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2} \right)^2} \quad (9.77.6)$$

A expressão (9.77.6) expressa o módulo de Z_{in} como uma função do coeficiente k . O valor máximo de $i(t)$ ocorre quando $Z_{in}(k)$ atinge seu valor mínimo, ou seja, quando

$$\frac{d}{dk} |Z_{in}|(k) = 0 \quad (9.77.7)$$

Vamos diferenciar (9.77.6) com respeito a k . Antes disso, vamos adotar uma notação para reduzir o tamanho da expressão. Sejam

$$A = \frac{(\omega^2 L_1 L_2)(R_2 + R_L)}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2}, \quad B = \frac{(\omega^2 L_1 L_2)(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2}$$

Note que A e B não dependem de k . Assim, podemos reescrever (9.77.6) como

$$|Z_{in}|(k) = \sqrt{(R_s + R_1 + Ak^2)^2 + (\omega L_1 - Bk^2)^2} \quad (9.77.8)$$

Diferenciando (9.77.8) com respeito a k , temos

$$\frac{d}{dk} |Z_{in}|(k) = \frac{1}{2} \frac{2(R_s + R_1 + Ak^2)(2Ak) + 2(\omega L_1 - Bk^2)(-2Bk)}{\sqrt{(R_s + R_1 + Ak^2)^2 + (\omega L_1 - Bk^2)^2}} \quad (9.77.9)$$

Para que (9.77.9) seja igual a zero, temos

$$2(R_s + R_1 + Ak^2)(2Ak) + 2(\omega L_1 - Bk^2)(-2Bk) = 0$$

$$(R_s + R_1 + Ak^2)(Ak) + (\omega L_1 - Bk^2)(-Bk) = 0$$

$$AkR_s + AkR_1 + A^2k^3 - \omega BkL_1 + B^2k^3 = 0$$

$$k^3(A^2 + B^2) + k(AR_s + AR_1 - \omega BL_1) = 0$$

$$k(k^2(A^2 + B^2) + (AR_s + AR_1 - \omega BL_1)) = 0$$

$$k^2(A^2 + B^2) + AR_s + AR_1 - \omega BL_1 = 0$$

$$k = \sqrt{\frac{\omega B L_1 - A R_s - A R_1}{(A^2 + B^2)}}$$

Substituindo os valores todos, temos

$$A = 192 \quad , \quad B = 256$$

$$k = 0.3536$$

(b)

Conhecido o valor de $k = 0.3536$, podemos calcular o valor da impedância vista pela fonte através de (9.77.4), obtendo

$$Z_{in} = 224 + j168 \, \Omega$$

Portanto, usando o fato que a corrente fornecida pela fonte é

$$i(t) = \frac{v_g(t)}{Z_{in}}$$

Em notação fasorial, usando o módulo do fasor como o valor RMS, temos

$$I = \frac{V_g}{Z_{in}} = \frac{\frac{560}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ}{224 + j168 \, \Omega}$$

$$I = 1.4142 \angle -36.57^\circ \, A$$

Portanto, o valor de pico de $i(t)$ é

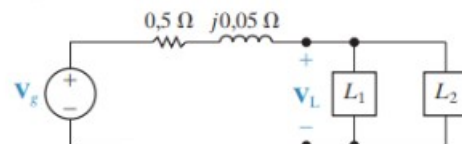
$$i_m(t) = 1.4142\sqrt{2} = 2 \, A$$

Problema P10.22

10.22 As duas cargas mostradas na Figura P10.22 podem ser descritas da seguinte forma: a carga 1 absorve uma potência média de 10 kW e uma potência reativa de 4 kVAR; a carga 2 tem uma impedância de $(60 + j80) \, \Omega$. A tensão nos terminais das cargas é $1000\sqrt{2} \cos 100\pi t \, V$.

- Determine o valor eficaz da tensão da fonte.
- De quantos microssegundos é a diferença de fase entre a tensão da carga e a tensão da fonte?
- A tensão da carga está adiantada ou atrasada em relação à tensão da fonte?

Figura P10.22



(a)

Temos as seguintes informações dadas:

$$S_1 = 10000 + j4000 \text{ VA} \quad , \quad Z_2 = 60 + j80 \, \Omega \quad , \quad V_1 = V_2 = 1000 \angle 0^\circ \text{ V}$$

Em L_1 , temos

$$S_1 = V_1 \cdot (I_1)^* \Rightarrow I_1 = \left(\frac{S_1}{V_1} \right)^* \Rightarrow I_1 = 10 - j4 \text{ A}$$

Uma vez calculado I_1 , agora calculamos a impedância da carga L_1 .

$$Z_1 = \frac{V_1}{I_1} = \frac{1000}{10 - j4} = 86.2 + j34.5 \, \Omega$$

Agora vamos calcular a corrente I_2 da carga L_2 .

$$I_2 = \frac{V_2}{Z_2} = \frac{1000}{60 + j80} = 6 - j8 \text{ A}$$

Assim, a corrente fornecida pela fonte é

$$I_g = I_1 + I_2 = 10 - j4 + 6 - j8 \text{ A} = 16 - j12 \text{ A}$$

A impedância Z_{in} vista pela fonte é

$$Z_{in} = 0.5 + j0.05 + (Z_1 // Z_2)$$

$$Z_{in} = 0.5 + j0.05 + \frac{1}{\frac{1}{86.2 + j34.5} + \frac{1}{60 + j80}}$$

$$Z_{in} = 0.5 + j0.05 + 40 + j30 = 40.5 + j30.05 \, \Omega$$

Finalmente, a tensão da fonte é

$$V_g = Z_{in} \cdot I_g = (40.5 + j30.05)(16 - j12) = 1008.6 - j5.2 \text{ V}$$

$$\boxed{V_g = 1008.6 \angle -0.295^\circ \text{ V}}$$

(b)

Usando proporcionalidade (regra de três simples), temos

$$\frac{T}{\Delta t} = \frac{360^\circ}{\Delta \phi}$$

onde $\Delta \phi$ é a diferença de fase entre os sinais. Portanto, usando $T = \frac{2\pi}{\omega}$,

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega} \frac{\Delta \phi}{360^\circ}$$

Substituindo,

$$\Delta t = \frac{2\pi}{100\pi} \frac{0.295^\circ}{360^\circ}$$

$$\boxed{\Delta t = 16.39 \, \mu\text{s}}$$

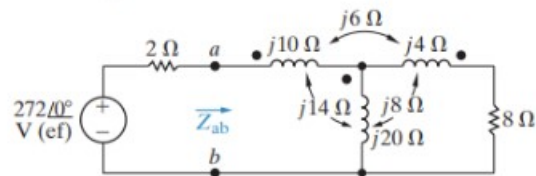
(c)

V_L está $\Delta\phi = 0.295^\circ$ adiantada em relação a V_g .

Problema P10.37

- 10.37** a) Determine a potência média fornecida ao resistor de $8\ \Omega$ no circuito da Figura P10.37.
 b) Determine a potência média produzida pela fonte de tensão senoidal ideal.
 c) Determine Z_{ab} .
 d) Mostre que a potência média fornecida é igual à potência média dissipada.

Figura P10.37



(a)

Aplicamos análise de malhas nas duas malhas do circuito, considerando as indutâncias mútuas.

Malha 1:

$$-272\angle 0^\circ + 2I_1 + j10I_1 + j14I_1 + j14(I_1 - I_2) + j6(-I_2) + j8(-I_2) + j20(I_1 - I_2) = 0$$

$$I_1(2 + j10 + j14 + j14 + j20) + I_2(-j14 - j6 - j8 - j20) = 272\angle 0^\circ$$

$$I_1(2 + j58) + I_2(-j48) = 272\angle 0^\circ \quad (10.37.1)$$

Malha 2:

$$j20(I_2 - I_1) + j4(I_2) + 8(I_2) + j8(I_2) + j8(I_2 - I_1) + j6(-I_1) + j14(-I_1) = 0$$

$$I_1(-j20 - j8 - j6 - j14) + I_2(j20 + j4 + 8 + j8 + j8) = 0$$

$$I_1(-j48) + I_2(8 + j40) = 0 \quad (10.37.2)$$

Com (10.37.1) e (10.37.2), temos o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 2 + j58 & -j48 \\ -j48 & 8 + j40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 272 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vamos resolver o sistema aplicando o método de Cramer. Temos

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 + j58 & -j48 \\ -j48 & 8 + j40 \end{vmatrix} = j544$$

$$\Delta_{I_1} = \begin{vmatrix} 272 & -j48 \\ 0 & 8 + j40 \end{vmatrix} = 2176 + j10880, \quad \Delta_{I_2} = \begin{vmatrix} 2 + j58 & 272 \\ -j48 & 0 \end{vmatrix} = j13056$$

Assim,

$$I_1 = \frac{\Delta_{I_1}}{\Delta} = \frac{2176 + j10880}{j544} = 20 - j4 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{\Delta_{I_2}}{\Delta} = \frac{j13056}{j544} = 24 \text{ A}$$

Calculadas as correntes de malha, temos a potência no resistor de 8Ω dada por

$$P_{8\Omega} = R \cdot I_2^2 = (8)(24^2) = 4608 \text{ W}$$

(b)

A potência fornecida pela fonte é dada por

$$S_{V_g} = V_g \cdot (I_1)^* = 272/0^\circ \cdot 20.39/+11.31^\circ = 5546.08/+11.31^\circ \text{ VA}$$

$$S_{V_g} = 5438.37 \text{ W} + j1087.6 \text{ VAR}$$

(c)

Temos que Z_{ab} é a impedância vista pela fonte, removido o resistor de 2Ω . Logo,

$$Z_{ab} = \frac{V_g}{I_1} - 2 = \frac{272/0^\circ}{20.39/-11.31^\circ} - 2 = 13.34/+11.31^\circ - 2$$

$$Z_{ab} = 11.08 + j2.62 \Omega$$

(d)

Vamos usar apenas a potência real (W). A potência real fornecida pela fonte é $P_{V_g} = 5438.37 \text{ W}$. Os dois resistores do circuito absorvem uma potência total de

$$P_{abs} = (2)|20 - j4|^2 + (8)(24)^2 = (2)(20.34)^2 + (8)(24)^2 = 5435.43 \text{ W}$$

Portanto,

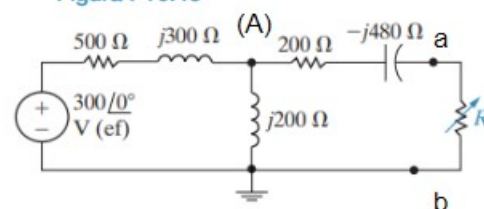
$$P_{abs} = 5435.43 \text{ W} = P_{V_g}$$

Problema P10.46

10.46 O resistor variável no circuito da Figura P10.46 é ajustado até que a potência média que ele absorve seja máxima.

- Determine R .
- Determine a máxima potência média.
- Encontre um resistor no Apêndice H que teria a maior potência média fornecida a ele.

Figura P10.46



(a)

Aplicamos teorema de Thevenin nos terminais a e b mostrados na figura.

Começamos calculando a tensão de Thevenin V_{th} , abrindo os terminais a e b . Nesse caso, temos apenas a malha à esquerda do nó essencial (A). Assim, aplicando análise de malhas nessa malha, temos

$$-300 + 500I + j300I + j200I = 0$$

$$I(500 + j300 + j200) = 300$$

$$I = \frac{300}{500 + j500} = 0.3 + j0.3 \text{ A} = 424.25/45^\circ \text{ mA}$$

Assim, a tensão $V_A = V_a$ é dada por

$$V_a = j200 \cdot I = 200/90^\circ \Omega \cdot 424.25/45^\circ \text{ mA}$$

$$V_a = V_{ab} = V_{th} = 84.85/135^\circ \text{ V}$$

Agora curto-circuitamos os terminais a e b para achar a corrente I_{sc} . Nesse caso, aplicamos análise nodal no nó essencial (A), obtendo

$$\frac{V_A - 300}{500 + j300} + \frac{V_A}{j200} + \frac{V_A}{200 - j480} = 0$$

$$V_A \left(\frac{1}{500 + j300} + \frac{1}{j200} + \frac{1}{200 - j480} \right) = \frac{300}{500 + j300}$$

$$V_A = \frac{\frac{300}{500 + j300}}{\frac{1}{500 + j300} + \frac{1}{j200} + \frac{1}{200 - j480}}$$

$$V_A = \frac{0.4412 - j0.2647}{0.00221 - j0.00410}$$

$$V_A = 110.46/30.71^\circ \text{ V}$$

Assim, temos a corrente de curto-circuito dada por

$$I_{sc} = \frac{V_A}{200 - j480} = \frac{110.46/30.71^\circ}{200 - j480} = 212.42/98.09^\circ \text{ mA}$$

Conhecido V_{th} e I_{sc} , temos a impedância de Thevenin dada por

$$Z_{th} = \frac{V_{th}}{I_{sc}} = 399.5/36.91^\circ \Omega$$

Para que tenhamos a máxima transferência de potência, precisamos que

$$R = (Z_{th})^*$$

Contudo, como a resistência R é puramente real, temos que a condição de máxima potência é

$$R = |(Z_{th})^*|$$

Portanto,

$$\boxed{R = 399.5 \Omega}$$

(b)

Usando o circuito equivalente Thevenin, sabemos que a corrente que passa pelo resistor R é

$$I_R = \frac{V_{th}}{R + Z_{th}}$$

$$I_R = \frac{84.85 \angle 135^\circ}{399.5 + 319.43 + j239.92} = \frac{84.85 \angle 135^\circ}{718.93 + j239.92}$$

$$I_R = 111.95 \angle 116.54^\circ \text{ mA}$$

Assim, a potência P_R no resistor de carga é

$$P_R = R \cdot |I_R|^2$$

$$P_R = 5 \text{ W}$$

(c)

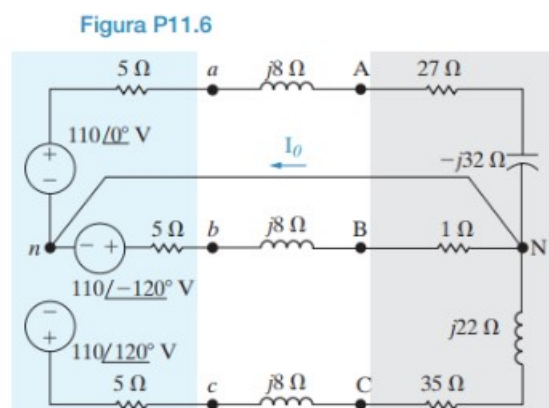
O resistor com valor comercial mais próximo do valor calculado de $R = 399.5 \Omega$ é o resistor de

$$R_c = 390 \Omega$$

Problema P11.06

- 11.6** a) O circuito na Figura P11.6 é ou não um sistema trifásico equilibrado? Explique.
 b) Determine I_o .

Pspice
Multisim

**(a)**

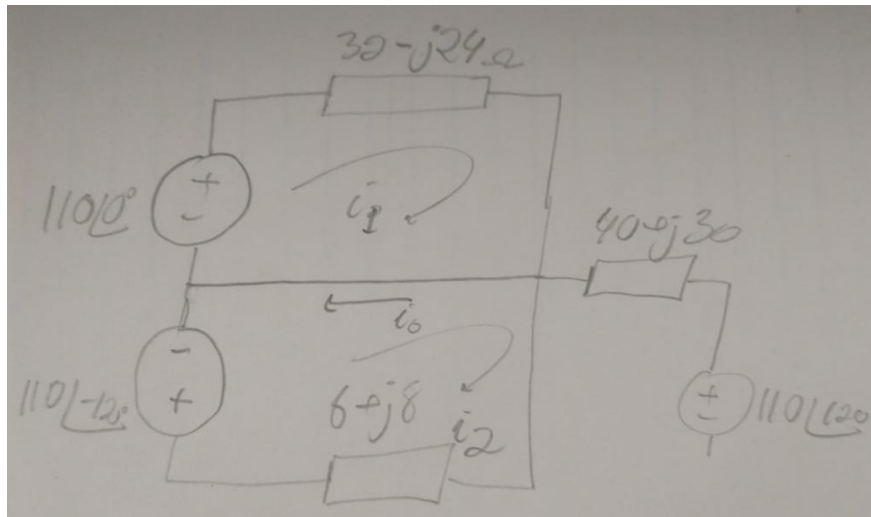
O circuito da Figura P11.6 não é equilibrado pois

- A impedância de cada fase da carga é diferente;
- A fonte da fase c não está conectada no neutro da fonte trifásica. Assim, a corrente das fases é diferente e o circuito não é equilibrado.

(b)

Combinando as impedâncias de fase e carga, e usando o fato que a fonte da fase c está desconectada do neutro da fonte trifásica, temos o circuito equivalente mostrado na Figura 11.06.1.

Figure 11.06.1: Circuito equivalente ao enunciado.



Nesse circuito equivalente, aplicamos análise de malhas com as correntes de malha i_1 e i_2 , usando o fato de que

$$i_0 = i_1 - i_2 \quad (11.06.1)$$

Malha 1:

$$-110 + (32 - j24)i_1 = 0$$

$$i_1 = \frac{110}{32 - j24}$$

Malha 2:

$$110\angle-120^\circ + (6 + j8)i_2 = 0$$

$$i_2 = -\frac{110\angle-120^\circ}{6 + j8}$$

Substituindo i_1 e i_2 em (11.06.1), temos

$$i_0 = \frac{110}{32 - j24} - \left(-\frac{110\angle-120^\circ}{6 + j8} \right)$$

$$i_0 = \frac{110}{32 - j24} - \frac{110\angle-120^\circ}{6 + j8}$$

$$i_0 = 2.75\angle36.86^\circ - 11\angle-173.13^\circ$$

$$i_0 = 2.2 + j1.65 + 10.92 + j1.32$$

$$i_0 = 13.12 + j2.97$$

$$i_0 = 13.45\angle12.75^\circ \text{ A}$$

Problema P11.10

11.10 Um circuito trifásico equilibrado tem as seguintes características:

- Está ligado em Y-Y;
 - A tensão de linha na fonte, V_{ab} , é $110\sqrt{3} \angle -60^\circ$ V;
 - A sequência de fases é positiva;
 - A impedância de linha é $3 + j2 \Omega/\phi$;
 - A impedância de carga é $37 + j28 \Omega/\phi$.
- a) Desenhe o circuito monofásico equivalente para a fase a .
 b) Calcule a corrente de linha na fase a .
 c) Calcule a tensão de linha na carga na fase a .

(a)

A tensão de linha da fonte trifásica é dada por

$$V_{ab} = V_a - V_b \quad (11.10.1)$$

Como a sequência das fases é positiva, temos que a fase a está adiantada em relação a fase b de 120° . Além disso, sabemos que a tensão de linha se relaciona com a tensão de fase através de

$$V_{ab} = |V_{an}| \sqrt{3} \angle \phi_{an} \pm 30^\circ \quad (11.10.2)$$

Como a sequência de fases é positiva, usamos o sinal positivo para a fase em (11.10.2). Dessa forma, comparando com o valor de $V_{ab} = 110\sqrt{3} \angle -60^\circ$ fornecido no enunciado, temos

$$\phi_{an} + 30^\circ = -60^\circ \Rightarrow \phi_{an} = -90^\circ$$

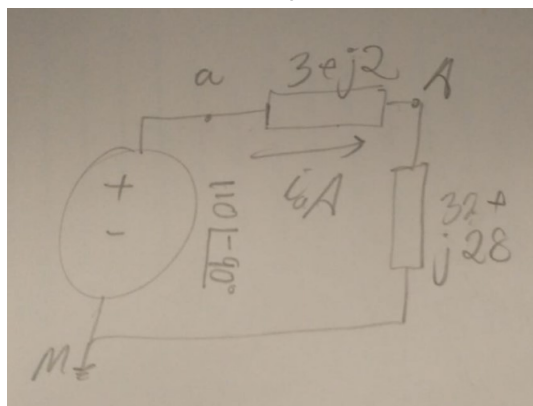
$$|V_{ab}| = |V_{an}| \sqrt{3} \Rightarrow |V_{an}| = 110 \text{ V}$$

Assim, a tensão de fase é dada por

$$V_{an} = 110 \angle -90^\circ \text{ V}$$

E o circuito monofásico equivalente da fase a está exibido na Figura 11.10.1.

Figure 11.10.1: Circuito equivalente ao enunciado.



(b)A corrente da fase a é dada por

$$I_{aA} = \frac{V_{an}}{Z_{aA} + Z_L}$$

$$I_{aA} = \frac{110\angle -90^\circ}{3 + j2 + 37 + j28} = \frac{110\angle -90^\circ}{40 + j30}$$

$$\boxed{I_{aA} = 2.2\angle -126.87^\circ \text{ A}}$$

(c)A tensão na carga na fase a é dada por

$$V_{AN} = Z_a \cdot I_{aA} = (37 + j28)(2.2\angle -126.87^\circ)$$

$$V_{AN} = 102.08\angle -89.75^\circ \text{ V}$$

A tensão de linha na carga, usando (11.10.2),

$$V_{AB} = 102.08\sqrt{3}\angle -89.75^\circ + 30^\circ \text{ V}$$

$$\boxed{V_{AB} = 176.8\angle 59.75^\circ \text{ V}}$$

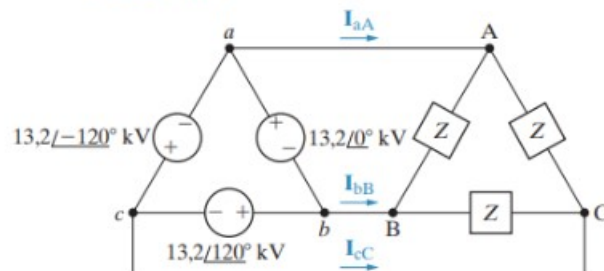
Problema P11.19

11.19 A impedância Z no circuito trifásico equilibrado da Figura P11.19 é $100 - j75 \Omega$.

Determine

- a) I_{AB} , I_{BC} e I_{CA} ,
- b) I_{aA} , I_{bB} e I_{cC} ,
- c) I_{ba} , I_{cb} e I_{ac} .

Figura P11.19

**(a)**

Observe que a carga Z_{AB} está em paralelo com a fonte de tensão V_{ab} . Portanto, a queda de tensão na carga Z_{AB} é V_{ab} . Note que o mesmo se aplica para todas as cargas com suas respectivas fontes de tensão.

Assim,

$$I_{AB} = \frac{V_{ab}}{Z_{AB}} = \frac{13200\angle 0^\circ}{100 - j75} = 105.6\angle 36.86^\circ \text{ A}$$

$$I_{BC} = \frac{V_{bc}}{Z_{BC}} = \frac{13200\angle -120^\circ}{100 - j75} = 105.6\angle -156.87^\circ \text{ A}$$

$$I_{CA} = \frac{V_{ca}}{Z_{CA}} = \frac{13200\angle -120^\circ}{100 - j75} = 105.6\angle -83.13^\circ \text{ A}$$

(b)

Aplicando análise nodal no nó (A), temos

$$I_{aA} + I_{AB} + I_{CA} = 0$$

Note que, da maneira que foi definido no item (a), a corrente I_{CA} vai do nó C para o A , a corrente I_{AB} vai do nó A para o B . Logo, I_{CA} e I_{aA} entram no nó (A), enquanto I_{AB} sai do nó. Corrigindo a equação nodal, temos

$$I_{aA} = I_{AB} - I_{CA}$$

$$I_{aA} = 105.6/\underline{36.86^\circ} - 105.6/\underline{-83.13^\circ}$$

$$I_{aA} = 84.49 + j63.345 - (12.63 - j104.84) = 71.65 + j168.485$$

$$I_{aA} = 183/\underline{66.96^\circ} \text{ A}$$

Aplicamos exatamente o mesmo raciocínio para as demais correntes de fase.

Nó (B):

$$I_{bB} = I_{BC} - I_{AB}$$

$$I_{bB} = 105.6/\underline{156.87^\circ} - 105.6/\underline{36.86^\circ}$$

Extrapolando o resultado de I_{aA} ,

$$I_{bB} = 105.6\sqrt{3}/\underline{156.87 + 30^\circ} \text{ A}$$

$$I_{bB} = 183/\underline{186.87^\circ} \text{ A}$$

Por último, vamos para o nó (C):

$$I_{cC} = I_{CA} - I_{BC}$$

$$I_{cC} = 105.6/\underline{-83.13^\circ} - 105.6/\underline{156.87^\circ}$$

$$I_{cC} = 105.6\sqrt{3}/\underline{-83.13 + 30^\circ} \text{ A}$$

$$I_{cC} = 183/\underline{-53.13^\circ} \text{ A}$$

(c)

Usamos a relação entre corrente de fase e corrente de linha.

$$I_{ba} = \frac{1}{\sqrt{3}} I_{aA} / \underline{66.96 - 30^\circ} = 105.1/\underline{36.96^\circ} \text{ A}$$

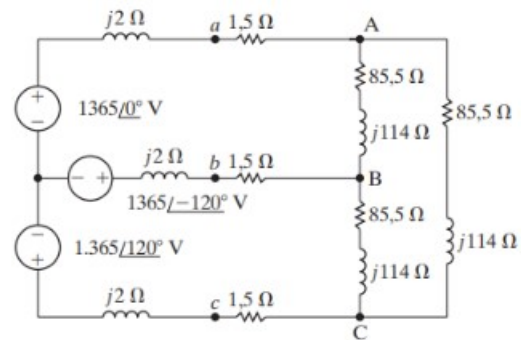
$$I_{cb} = \frac{1}{\sqrt{3}} I_{bB} / \underline{186.87 - 30^\circ} = 105.1/\underline{156.87^\circ} \text{ A}$$

$$I_{ac} = \frac{1}{\sqrt{3}} I_{cC} / \underline{-53.13 - 30^\circ} = 105.1/\underline{-83.13^\circ} \text{ A}$$

Problema P11.23

- 11.23 a) Determine o valor eficaz e o ângulo de fase de I_{CA} no circuito da Figura P11.23.
 b) Qual percentagem da potência média fornecida pela fonte trifásica é dissipada na carga trifásica?

Figura P11.23



(a)

Como o circuito trifásico do enunciado é equilibrado, o primeiro passo é encontrar o circuito monofásico equivalente.

Para isso, aplicamos conversão delta - estrela na carga trifásica conectada à fonte. Quando todas impedâncias são iguais, temos que a conversão de uma impedância em Δ para Y é feita via

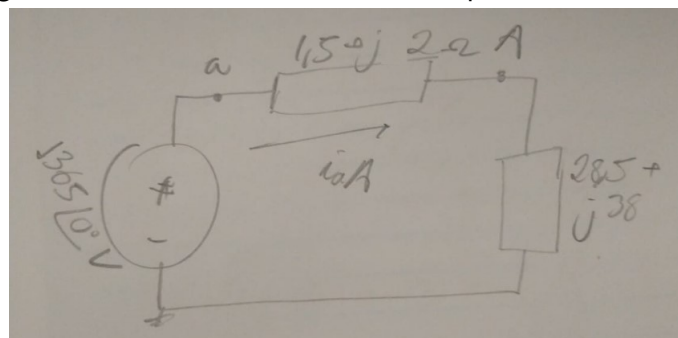
$$Z_Y = \frac{Z_\Delta}{3} \quad (11.23.1)$$

Assim, temos que configuração Y da carga do problema possui impedância de fase dada por

$$Z_Y = \frac{85.5 + j114}{3} = 28.5 + j38 \Omega$$

Assim, o circuito monofásico equivalente da fase a está exibido na Figura 11.23.1

Combinando as impedâncias de fase e carga, e usando o fato que a fonte da fase c está desconectada do neutro da fonte trifásica, temos o circuito equivalente mostrado na Figura 11.23.1.

Figure 11.23.1: Circuito monofásico equivalente da fase a .

Nesse circuito equivalente, temos que a corrente de fase I_{aA} é

$$I_{aA} = \frac{1365}{30 + j40} = 27.31 \angle -53.13^\circ \text{ A}$$

Assim, como as correntes de fase em um circuito equilibrado tem módulo igual mas defasagem de 120° , temos

$$I_{bB} = 27.31 \angle -173.13^\circ \text{ A} \quad , \quad I_{cC} = 27.31 \angle 66.87^\circ \text{ A}$$

Note que as tensões de fase são positivas (ordem abc), logo as correntes também possuem essa ordem. Usando I_{cC} , temos que a queda de tensão V_{cn} em cada fase da carga na configuração Y é

$$V_{cn} = I_{cC} \cdot Z_Y$$

$$V_{cn} = 27.31/66.87^\circ \cdot (28.5 + j38) = 1296.78/120^\circ \text{ V}$$

Uma vez conhecido a tensão de fase V_{cn} na carga, temos que a tensão de linha V_{CA} na carga é

$$V_{CA} = \sqrt{3}|V_{cn}|/\phi_{cn} + 30^\circ \quad (11.23.2)$$

Substituindo, temos

$$V_{CA} = 2246/150^\circ \text{ V}$$

Finalmente, a corrente de linha I_{CA} na configuração Δ é

$$I_{CA} = \frac{V_{CA}}{Z_\Delta} = \frac{2246/150^\circ}{85.5 + j114}$$

$$I_{CA} = 15.46/96.86^\circ \text{ A}$$

(b)

Usando o circuito monofásico equivalente da Figura 11.23.1, temos que a potência fornecida pela fonte por fase é

$$S_{V/\phi} = V_{An} \cdot (I_{aA})^* = 37278.15/53.13^\circ \text{ VA}$$

A potência que efetivamente chega na carga por fase é

$$S_{L/\phi} = V_{an} \cdot (I_{aA})^*$$

Podemos usar a fase c que já conhecemos o valor de V_{cn} , usando o fato do circuito equilibrado dissipar a mesma potência em todas as fases.

$$S_{L/\phi} = V_{cn} \cdot (I_{cC})^* = 31415.06/53.13^\circ \text{ VA}$$

A porcentagem $S_\%$ da potência fornecida pela fonte que chega na carga é

$$S_\% = \frac{S_{L/\phi}}{S_{V/\phi}} = \frac{31415.06/53.13^\circ \text{ VA}}{37278.15/53.13^\circ \text{ VA}} 100\%$$

$$S_\% = 84.27\%$$

Problema P11.36

11.36 Três cargas trifásicas equilibradas estão ligadas em paralelo. A carga 1 está ligada em Y e tem uma impedância de $400 + j300 \Omega/\phi$; a carga 2 está ligada em Δ e tem uma impedância de $2.400 - j1.800 \Omega/\phi$; e a carga 3 absorve $172,8 + j2.203,2 \text{ kVA}$. As cargas são alimentadas por uma linha de distribuição com uma impedância de $2 + j16 \Omega/\phi$. O módulo da tensão fase-neutro na carga é $24\sqrt{3} \text{ kV}$.

- Calcule a potência complexa total no início da linha.
- Qual porcentagem da potência média, disponível no início da linha, é fornecida às cargas?

(a)

Começamos identificando a corrente que passa em cada carga, para assim conseguirmos calcular a corrente de fase. Uma vez calculado a corrente de fase, usamos o fato do circuito estar equilibrado para calcular a corrente total fornecida pela fonte.

Na carga 1, que possui impedância $Z_1 = 400 + j300 \, \Omega$ e está ligada em Y , temos

$$I_1 = \frac{V_a}{Z_1} \Rightarrow I_1 = \frac{24000\sqrt{3}/0^\circ}{400 + j300}$$

$$I_1 = 83.14/-36.87^\circ \text{ A} = 66.52 - j49.89 \text{ A}$$

Na carga 2, ligada em Δ , usamos o mesmo raciocínio da carga 1, mas usando a tensão de linha, uma vez que a ligação em Δ não admite conexão ao terminal neutro.

$$I_2 = \frac{V_{ab}}{Z_2} \Rightarrow I_2 = \frac{24000\sqrt{3}\sqrt{3}/0 + 30^\circ}{2400 - j1800}$$

$$I_2 = 8/-6.87^\circ \text{ A} = 7.94 - j0.96 \text{ A}$$

Por fim, para a carga 3, usamos a potência aparente para calcular a corrente, através de

$$S_3 = V_a \cdot I_3 \Rightarrow I_3 = \left(\frac{S_3}{V_a} \right)^*$$

$$I_3 = \left(\frac{172800 + j2203200}{24000\sqrt{3}} \right)^*$$

$$I_3 = 4.15 - j53 \text{ A}$$

Com I_1 , I_2 e I_3 calculados, temos a corrente total I_{T_a} da fase a dada por

$$I_{T_a} = I_1 + I_2 + I_3$$

$$I_{T_a} = 78.61 - j103.85 \text{ A}$$

Agora calculamos a tensão fornecida pela fonte na fase a , considerando a queda causada pela impedância de linha.

A queda causada pela linha é

$$V_l = Z_l \cdot I_{T_a} \Rightarrow V_l = (2 + j16) \cdot (78.61 - j103.85)$$

$$V_l = 1818.82 + j1050 \text{ V}$$

Assim, a tensão V_{T_a} fornecida pela fase é

$$V_{T_a} = V_a + V_l \Rightarrow V_{T_a} = 24000\sqrt{3}/0^\circ + 1818.82 + j1050$$

$$V_{T_a} = 43.39 + j1.05 \text{ kV}$$

Assim, a potência total fornecida pela fase a é

$$S_a = V_{T_a} \cdot (I_{T_a})^*$$

$$S_a = [(43.39 + j1.05) \cdot 10^3] \cdot (78.61 - j103.85)^*$$

$$S_a = 3.3 + j4.59 \text{ MVA}$$

Como o circuito está equilibrado, a potência total fornecida pela fonte (3 fases) é

$$S_T = 3 \cdot S_a$$

$$S_T = 9.9 + j13.77 \text{ MVA}$$

(b)

Cada fase apresenta uma queda de tensão indesejada de $V_l = 1818.82 + j1050 \text{ V}$ causada pela impedância da linha. A potência que essa impedância de linha possui é

$$S_l = V_l \cdot (I_{T_a})^* \Rightarrow S_l = (1818.82 + j1050) \cdot (78.61 - j103.85)^*$$

$$S_l = 33.93 + j271.42 \text{ kVA}$$

Assim, nas 3 fases, a potência total perdida nas impedâncias de linha é

$$S_{l_T} = 3 \cdot S_l = 101.79 + j814.26 \text{ kVA}$$

Finalmente, o percentual de potência que efetivamente é fornecida às cargas é

$$S_{\%} = \left| \frac{S_T - S_{l_T}}{S_T} \right| 100\%$$

$$S_{\%} = \left| \frac{9.9 + j13.77 - 0.10179 - j0.8142}{9.9 + j13.77} \right| 100\%$$

$$S_{\%} = |0.9551 - j0.02315| 100\%$$

$$S_{\%} = 95.53\%$$

Problema P11.38

11.38 Uma fonte trifásica equilibrada está fornecendo 540 kVA, com um fp atrasado de 0,96, a duas cargas paralelas equilibradas ligadas em Δ . A impedância da linha de distribuição que liga a fonte à carga é desprezível. A potência associada à carga 1 é 38,4 – j208,8 kVA.

- Determine os tipos de componente e suas impedâncias por fase da carga 2, se a tensão de linha for $1.600\sqrt{3} \text{ V}$ e os componentes da impedância estiverem em série.
- Repita (a) com os componentes da impedância em paralelo.

(a)

A fonte trifásica fornece uma potência total $S = 540 \text{ kVA}$, com um fator de potência atrasado de $FP = 0.96$. O fator de potência atrasado significa que a carga é indutiva, possuindo um ângulo de fase $\phi < 0$.

Sabemos que o fator de potência é definido como

$$FP = \frac{P}{|S|} \quad (11.38.1)$$

Isolando P e substituindo, temos

$$P = (FP)|S| \Rightarrow P = 518400 \text{ W}$$

Além disso, temos que a potência aparente S se relaciona com as potências ativa P e reativa Q através de

$$S^2 = P^2 + Q^2 \quad (11.38.2)$$

Isolando Q e substituindo, temos

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} \Rightarrow Q = 151200 \text{ VA}_R$$

Portanto, a potência total fornecida pela fonte é

$$S_T = 518400 \text{ W} + 151200 \text{ VA}_R$$

Como a carga 1 dissipa $S_1 = 38.4 - j208.8 \text{ kVA}$, e sabemos que

$$S_2 = S_T - S_1$$

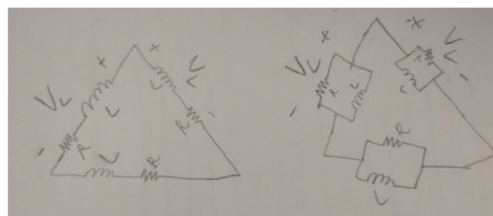
Temos

$$S_2 = 480 + j360 \text{ kVA}$$

Além disso, como as cargas são trifásicas e equilibradas, temos que cada fase recebe exatamente $\frac{1}{3}$ da potência da carga. Assim, cada fase de S_2 recebe

$$S_{2/\phi} = 160 + j120 \text{ kVA}$$

Figure 11.38.1: (a) Componentes da carga em série. (b) Componentes da carga em paralelo



(a)

(b)

No caso dos componentes da carga estarem em série, como mostra a Figura 11.38.1 (a), temos

$$S_{2/\phi} = \frac{|V_L|^2}{Z^*} \quad (11.38.3)$$

Isolando Z em (11.38.3),

$$Z_s = \left(\frac{|V_L|^2}{S_{2/\phi}} \right)^* = \left(\frac{|1600\sqrt{3}|^2}{160000 + j120000} \right)^*$$

$$Z_s = \left(\frac{7680000}{160000 + j120000} \right)^* = (30.72 - j23.04)^* = 30.72 + j23.04 \Omega$$

Assim, usando $L = \frac{X_L}{j\omega}$ e assumindo a fonte trifásica operando em $f = 60 \text{ Hz}$, temos os componentes em série dados por

$$R = 30.72 \Omega, \quad L = 61.1 \text{ mH}$$

(b)

Agora usamos os componentes em paralelo, como mostra a Figura 11.38.1 (b). Note que o resistor R irá dissipar totalmente a parte real da potência, enquanto o indutor L está associado totalmente à parte imaginária da potência. Assim, podemos fazer

$$R = \left(\frac{|V_L|^2}{\operatorname{Re} \{S_{2/\phi}\}} \right)^*$$

$$R = \left(\frac{|1600\sqrt{3}|^2}{160000} \right)^* = 48 \, \Omega$$

Agora para a parte imaginária associada ao indutor,

$$X_L = \left(\frac{|V_L|^2}{\operatorname{Im} \{S_{2/\phi}\}} \right)^*$$

$$X_L = \left(\frac{|1600\sqrt{3}|^2}{j120000} \right)^* = (-j64)^* = j64 \, \Omega$$

Novamente usando $L = \frac{X_L}{j\omega}$, identificamos a indutância de L , obtendo

$R = 48 \, \Omega \quad , \quad L = 169.8 \, \text{mH}$
