Aluno: Raphael Henrique Braga Leivas

Email: rapha.lei8@gmail.com

# Atividade 2 - Capítulo 3

O código completo usado nessa atividade se encontra no ANEXO A.

## Exercício 1 (a)

Temos um sistema linear dado por

$$-4y(t) + 3\frac{d}{dt}y(t) + \frac{d^2}{dt^2}y(t) = -2x(t) + \frac{d}{dt}x(t)$$

e condições iniciais $y(0) = 8$ e $y'(0) = -2$.
Queremos saber a resposta à entrada zero. Para isso, fazemos $x(t) = 0$, obtendo

$$-4y(t) + 3\frac{d}{dt}y(t) + \frac{d^2}{dt^2}y(t) = 0$$

Que é uma EDO linear homogênea de segunda ordem. A solução $y(t)$ é obtida via a equação característica

$$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$$

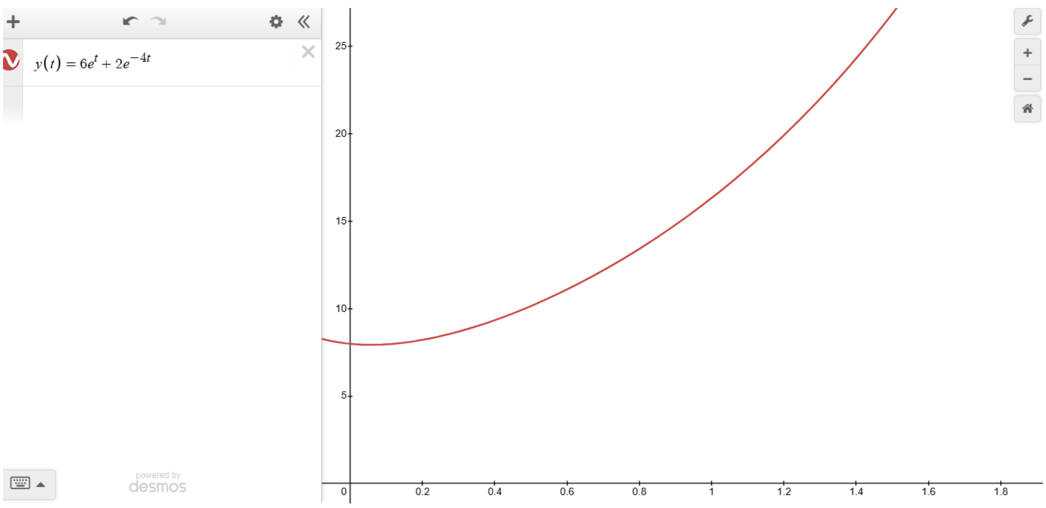
Com raízes $\lambda_1 = -4$ e $\lambda_2 = 1$. Como as raízes são reais e distintas, a solução é da forma

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

Usando as condições iniciais, obtemos

$$y(t) = 6e^{t} + 2e^{-4t}$$

Com forma de onda mostrada abaixo:



## Exercício 1 (b)

Temos um sistema linear dado por

$$9y(t) + 6\frac{d}{dt}y(t) + \frac{d^2}{dt^2}y(t) = 7x(t) + 2\frac{d}{dt}x(t)$$

e condições iniciais $y(0) = 7$ e $y'(0) = -1$.
Usando o mesmo procedimento do item 1 (a), obtemos

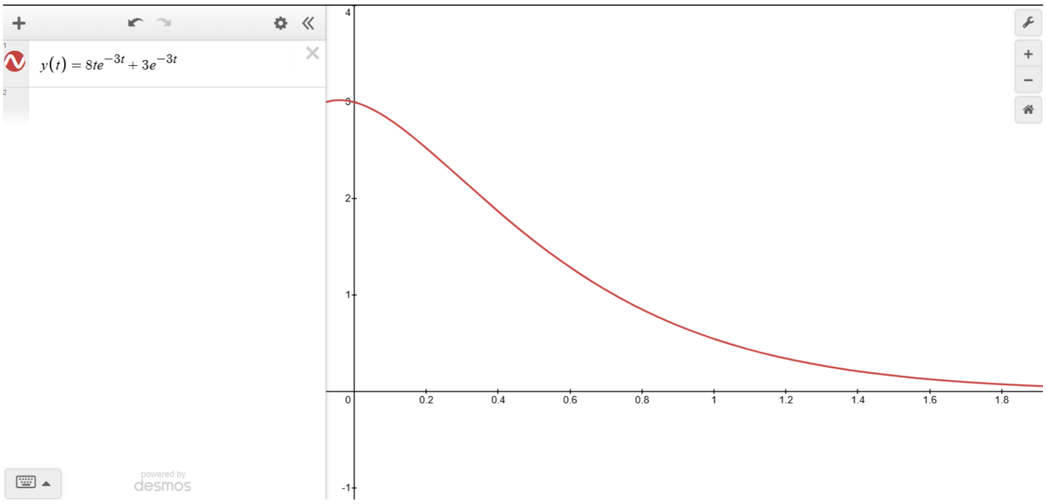
$$9y(t) + 6\frac{d}{dt}y(t) + \frac{d^2}{dt^2}y(t) = 0$$

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9$$

Com apenas uma solução real $\lambda = -3$. Assim, a solução é da forma

$$y(t) = (c_1 + c_2)\, e^{\lambda t}$$

$$y(t) = 8te^{-3t} + 3e^{-3t}$$




## Exercício 2 (a)

O sistema linear é definido por

$$2y(t) + 3\frac{d}{dt}y(t) + \frac{d^2}{dt^2}y(t) = 2x(t) + 3\frac{d}{dt}x(t)$$

Tornando todas condições iniciais nulas e aplicando a Transformada de Laplace dos dois lados da equação, obtemos

$$2Y(s) + 3sY(s) + s^2Y(s) = 2X(s) + 3sX(s)$$

$$Y(s)\left(2 + 3s + s^2\right) = X(s)\,(2 + 3s)$$

$$H(s) = \frac{P_s}{Q_s} = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2 + 3s}{2 + 3s + s^2}$$

Usando o software para tirar a transformada inversa, temos

$$h(t) = -e^{-t} + 4e^{-2t}$$

## Exercício 2 (b)

Usamos o mesmo procedimento do item 2 (a). O sistema linear é definido por

$$-4y(t) + 3\frac{d}{dt}y(t) + \frac{d^2}{dt^2}y(t) = -2x(t) + \frac{d^2}{dt^2}x(t)$$

$$-4Y(s) + 3sY(s) + s^2Y(s) = -2X(s) + s^2X(s)$$

$$H(s) = \frac{P_s}{Q_s} = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{-2 + s^2}{4 + 3s + s^2}$$

Como os graus dos polinômios são iguais, temos que incluir o Delta de Dirac:

$$h(t) = -\frac{e^t}{5} + 1\delta(t) - \frac{14e^{-4t}}{5}$$

## Exercício 3 (a)

A resposta ao estado nulo é definida por

$$y(t) = \int_{-\infty}^{-\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$$

No exercício, temos

$$x(\tau) = 500 \quad , \quad h(t-\tau) = e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)}$$

Resolvendo a integração de convolução com o software, temos

$$y(t) = 250 - 500e^{-t} + 250e^{-2t}$$

$$y(1) = 99.8941002234320$$

## Exercício 3 (b)

Mesmo procedimento do item 3 (a).

$$x(\tau) = e^{\tau} \quad , \quad h(t-\tau) = 3e^{-6(t-\tau)} + e^{(t-\tau)}$$

$$y(t) = -\frac{(7e^{6t} + 6e^{t})\,e^{-7t}}{14} + \frac{13e^t}{14}$$

$$y(1) = 2.33911679776482$$

# ANEXO A - Código

```python
from sympy import *

## Exercicio 1

t = symbols('t')
y = Function('y')(t)
x = Function('x')(t)

QN_coeffs = [9, 6, 1]
PN_coeffs = [7, 2]
cond_iniciais = [3, -1]

# define a EDO
edo_y = sum(coeff * Derivative(y, t, n) for n, coeff in enumerate(QN_coeffs))
edo_x = sum(coeff * Derivative(x, t, n) for n, coeff in enumerate(PN_coeffs))
edo_completa = Eq(edo_y, edo_x)
print(latex(edo_completa))

eq_homog = Eq(edo_y, 0) #x(t) = 0, entrada zero

# edo linear homogenea de segunda ordem: resolve com polinomio caracteristico
lambda_ = symbols('lambda')
eq_carac = sum(coeff * lambda_**n for n, coeff in enumerate(QN_coeffs))
print(latex(eq_carac))
raizes = solve(eq_carac, lambda_)
print(raizes)

# analisa as raizes da eq caracteristica para montar a solucao geral
sol_geral = 0
constantes = []
c_counter = 1

raizes_mult = roots(eq_carac, lambda_)
for raiz, mult in raizes_mult.items():
    for m in range(mult):
        constante = symbols(f'c{c_counter}')
        constantes.append(constante)
        sol_geral += constante * t**m * exp(raiz * t)
        c_counter += 1


# cond iniciais
condicoes = []
for ordem, valor in enumerate(cond_iniciais):
    condicoes.append(Eq(sol_geral.diff(t, ordem).subs(t, 0), valor))

sistema_equacoes = []
for cond in condicoes:
    sistema_equacoes.append(cond.lhs - cond.rhs)

solucao_sistema = solve(sistema_equacoes, constantes)

solucao_final = sol_geral.subs(solucao_sistema)

print(latex(solucao_final))

## Exercicio 2

def resposta_ao_impulso(Ps, Qs):
    t = symbols('t', real=True, positive=True)
    s = symbols('s')

    Hs = Ps / Qs

    h_t = inverse_laplace_transform(Hs, s, t)

    return h_t

s = symbols('s')

QN_coeffs = [-4, 3, 1]
PN_coeffs = [-2, 0, 1]
edo_y = sum(coeff * Derivative(y, t, n) for n, coeff in enumerate(QN_coeffs))
edo_x = sum(coeff * Derivative(x, t, n) for n, coeff in enumerate(PN_coeffs))
edo_completa = Eq(edo_y, edo_x)
print(latex(edo_completa))
```

```
Qs = -4 + 3*s + s**2
Ps = -2 + s**2

h_t = resposta_ao_impulso(Ps, Qs)

# verifica se e instantaneo
grau_p = degree(Ps, s)
grau_q = degree(Qs, s)

if grau_p == grau_q:
    b_0 = LC(Ps, s)
    a_0 = LC(Qs, s)

    termo_dirac = b_0 / a_0
    print(latex(termo_dirac + h_t))
else:
    print(latex(h_t))

## Exercicio 3
```