

Aluno: Raphael Henrique Braga Leivas  
Matrícula: 2020028101

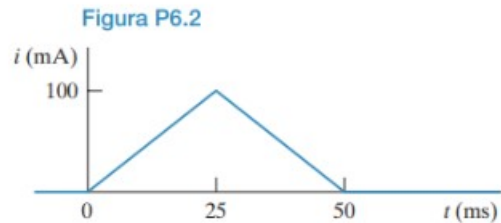
Código fonte LaTeX desse arquivo pode ser visto em meu GitHub pessoal:  
<https://github.com/RaphaelLeivas/latex/tree/main/ListaCEII>  
Aceito sugestões de melhoria do código :)

## Problema P6.2

**6.2** O pulso triangular de corrente mostrado na Figura P6.2 é aplicado a um indutor de 500 mH.

Pspice  
Multisim

- Escreva as expressões que descrevem  $i(t)$  nos quatro intervalos  $t < 0$ ,  $0 \leq t \leq 25$  ms,  $25 \text{ ms} \leq t \leq 50$  ms e  $t > 50$  ms.
- Deduz as expressões para a tensão, potência e energia do indutor. Use a convenção passiva.



**(a)**

Usando a figura, temos as expressões de  $i(t)$  dadas por

$$i(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{100 \cdot 10^{-3} - 0}{25 \cdot 10^{-3} - 0} t, & 0 \leq t < 25 \text{ ms} \\ \frac{0 - 100 \cdot 10^{-3}}{50 \cdot 10^{-3} - 25 \cdot 10^{-3}} t + (200 \cdot 10^{-3}), & 25 \leq t < 50 \text{ ms} \\ 0, & t \geq 50 \text{ ms} \end{cases} = \begin{cases} 0 \text{ A}, & t < 0 \\ 4t \text{ A}, & 0 \leq t < 25 \text{ ms} \\ 0.2 - 4t \text{ A}, & 25 \leq t < 50 \text{ ms} \\ 0 \text{ A}, & t \geq 50 \text{ ms} \end{cases}$$

**(b)**

Sabemos que a tensão em um indutor é dada por

$$v(t) = L \frac{di}{dt} \quad (6.2.1)$$

Portanto, aplicando (6.2.1) sobre o resultado do item (a), temos

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ L \cdot 4, & 0 \leq t < 25 \text{ ms} \\ L \cdot (-4), & 25 \leq t < 50 \text{ ms} \\ 0, & t \geq 50 \text{ ms} \end{cases} = \begin{cases} 0 \text{ V}, & t < 0 \\ 2 \text{ V}, & 0 \leq t < 25 \text{ ms} \\ -2 \text{ V}, & 25 \leq t < 50 \text{ ms} \\ 0 \text{ V}, & t \geq 50 \text{ ms} \end{cases}$$

Além disso, temos que a potência no indutor é dada por

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) \quad (6.2.2)$$

Assim,

$$p(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 4t \cdot 2, & 0 \leq t < 25 \text{ ms} \\ (0.2 - 4t) \cdot (-2), & 25 \leq t < 50 \text{ ms} \\ 0, & t \geq 50 \text{ ms} \end{cases} = \begin{cases} 0 \text{ W}, & t < 0 \\ 8t \text{ W}, & 0 \leq t < 25 \text{ ms} \\ 8t - 0.4 \text{ W}, & 25 \leq t < 50 \text{ ms} \\ 0 \text{ W}, & t \geq 50 \text{ ms} \end{cases}$$

Finalmente, podemos determinar a energia  $E(t)$  no indutor a partir de  $p(t)$  substituindo (6.2.1) em (6.2.2).

$$p(t) = L \frac{di}{dt} \cdot i(t) = L i(t) \frac{di}{dt}$$

Note que a potência é energia por unidade de tempo, logo  $p(t) = \frac{dE}{dt}$ . Substituindo,

$$\frac{dE}{dt} = L i(t) \frac{di}{dt}$$

$$dE = L i(t) di$$

Integrando ambos lados, temos

$$\int_{t_i}^{t_f} E(t) dt = \int_{i_i}^{i_f} L i(t) di$$

$$E(t_f) - E(t_i) = \frac{1}{2} L [i_f^2 - i_i^2]$$

Assumimos a corrente inicial  $i_i = 0$  e energia inicial  $E_i = 0$  também nula. Além disso, fazemos a energia final  $E(t_f) = E(t)$  e a corrente do estado final como  $i_f = i(t)$ . Assim, isolando  $E(t)$ ,

$$E(t) = \frac{1}{2} L [i(t)]^2 \quad (6.2.3)$$

Usando (6.2.3), temos

$$E(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2} L (4t)^2, & 0 \leq t < 25 \text{ ms} \\ \frac{1}{2} L (0.2 - 4t)^2, & 25 \leq t < 50 \text{ ms} \\ 0, & t \geq 50 \text{ ms} \end{cases} = \begin{cases} 0 \text{ J}, & t < 0 \\ 4t^2 \text{ J}, & 0 \leq t < 25 \text{ ms} \\ 0.01 - 0.4t + 4t^2 \text{ J}, & 25 \leq t < 50 \text{ ms} \\ 0 \text{ J}, & t \geq 50 \text{ ms} \end{cases}$$

## Problema P6.21

**6.21** O pulso de corrente de formato retangular mostrado na Figura P6.21 é aplicado a um capacitor de  $0,1 \mu\text{F}$ . A tensão inicial no capacitor é uma queda de  $15 \text{ V}$  na direção de referência da corrente. Deduza a expressão da tensão no capacitor para os intervalos descritos nos itens (a)–(d).

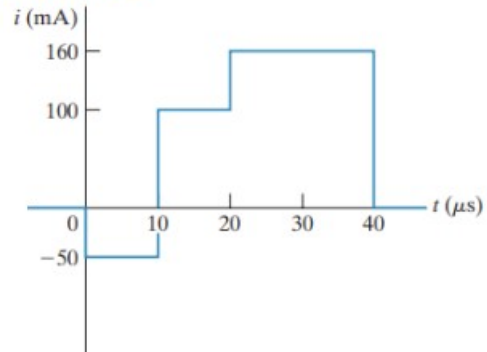
Pspice  
Multisim

- a)  $0 \leq t \leq 10 \mu\text{s}$ ;
- b)  $10 \mu\text{s} \leq t \leq 20 \mu\text{s}$ ;
- c)  $20 \mu\text{s} \leq t \leq 40 \mu\text{s}$ ;

d)  $40 \mu\text{s} \leq t < \infty$ ;

e) Faça um gráfico de  $v(t)$  no intervalo  $-10 \mu\text{s} \leq t \leq 50 \mu\text{s}$ .

Figura P6.21



**(a), (b), (c), (d)**

Sabemos que a tensão em um capacitor de capacitância  $C$  é dada por

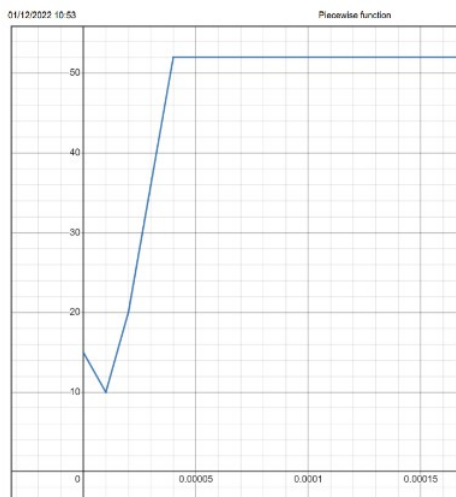
$$v(t) = V_0 + \frac{1}{C} \int_{t_i}^{t_f} i(t) dt \quad (6.21.1)$$

Usando a figura, e aplicando (6.21.1) nos intervalos correspondentes ao enunciado, temos

$$v(t) = \begin{cases} 15 + \frac{1}{C} \int_0^t (-50 \text{ mA}) dt, & 0 \leq t \leq 10 \mu\text{s} \\ 10 + \frac{1}{C} \int_{10 \mu\text{s}}^t (100 \text{ mA}) dt, & 10 \leq t \leq 20 \mu\text{s} \\ 20 + \frac{1}{C} \int_{20 \mu\text{s}}^t (160 \text{ mA}) dt, & 20 \leq t \leq 40 \mu\text{s} \\ 52 + \frac{1}{C} \int_{40 \mu\text{s}}^t (0 \text{ mA}) dt, & t > 40 \mu\text{s} \end{cases} = \begin{cases} 15 - 5 \cdot 10^5 t \text{ V}, & 0 \leq t \leq 10 \mu\text{s} \\ 10^6 t \text{ V}, & 10 \leq t \leq 20 \mu\text{s} \\ 1.6 \cdot 10^6 t - 12 \text{ V}, & 20 \leq t \leq 40 \mu\text{s} \\ 52 \text{ V}, & t > 40 \mu\text{s} \end{cases}$$

**(e)**

Usando a ferramenta online Desmos, temos o gráfico de  $v(t)$  em função do tempo  $t$  abaixo.



- 1  $v(t) = \{0 < t < 10 \cdot 10^{-6}; 15 - 5 \cdot 10^5 t\}$
- 2  $v(t) = \{10 \cdot 10^{-6} < t < 20 \cdot 10^{-6}; 10^6 t\}$
- 3  $v(t) = \{20 \cdot 10^{-6} < t < 40 \cdot 10^{-6}; 1.6 \cdot 10^6 t - 12\}$
- 4  $v(t) = \{t > 40 \cdot 10^{-6}; 52\}$
- 5

<https://www.desmos.com/calculator/3zabdb3vgf?lang=pt-BR>

## Problema P6.25

**6.25** Os três indutores no circuito da Figura P6.25 estão ligados aos terminais de uma caixa preta em  $t = 0$ . Sabe-se que a tensão resultante para  $t > 0$  é

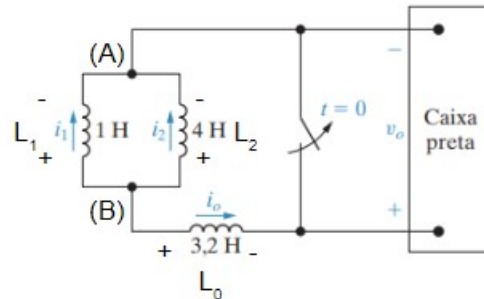
$$v_o = 2.000e^{-100t} \text{ V.}$$

Se  $i_1(0) = -6 \text{ A}$  e  $i_2(0) = 1 \text{ A}$ , determine:

- $i_o(0)$ ;
- $i_o(t), t \geq 0$ ;
- $i_1(t), t \geq 0$ ;
- $i_2(t), t \geq 0$ ;

- a energia inicial armazenada nos três indutores;
- a energia total fornecida à caixa preta;
- a energia final retida nos indutores ideais.

Figura P6.25



**(a)**

Aplicando análise nodal no nó essencial (B), temos

$$i_o(t) + i_1(t) + i_2(t) = 0 \Rightarrow i_o(t) = -i_1(t) - i_2(t)$$

Substituindo no instante  $t = 0$ ,

$$i_o(0) = -(-6) - 1$$

$$i_o(0) = 5 \text{ A}$$

**(b)**

Reduzindo os três indutores da figura via redução série-paralelo, temos um indutor equivalente  $L_{eq}$  dado por

$$L_{eq} = (1 \text{ H} // 4 \text{ H}) + 3.2 \text{ H}$$

$$L_{eq} = 4.0 \text{ H}$$

Assim, usando a expressão da corrente no indutor

$$i_o(t) = i_o(0) + \frac{1}{L} \int_{t_i}^{t_f} v_L(t) dt \quad (6.25.1)$$

Note que no sentido em que  $i_o(t)$  está definida na figura, temos, via análise de malhas,

$$+v_o(t) + v_{L_{eq}}(t) = 0 \Rightarrow v_{L_{eq}}(t) = -v_o(t)$$

Assim, temos que (6.25.1) deve ter o sinal ajustado para atender a convenção passiva definida acima, ficando

$$i_o(t) = i_o(0) - \frac{1}{L} \int_{t_i}^{t_f} v_o(t) dt \quad (6.25.2)$$

Substituindo os valores do enunciado e resultado do item (a) em (6.25.2), temos

$$i_0(t) = 5 - \frac{1}{4} \int_0^t 2000e^{-100t} dt$$

$$i_0(t) = 5 - 2000 \frac{1}{4} \frac{1}{-100} [e^{-100t} - e^0]$$

$$i_0(t) = 5 + 5 [e^{-100t} - 1]$$

$$\boxed{i_0(t) = 5e^{-100t} \quad , \quad t \geq 0}$$

**(c)**

Retornando ao circuito original, temos que a queda de tensão no indutor  $L_0 = 3.2$  H é dada por

$$v_{L_0}(t) = L_0 \frac{di_0}{dt}$$

Substituindo o resultado encontrado no item (b), temos

$$v_{L_0}(t) = 3.2(-500e^{-100t}) \text{ V} = -1600e^{-100t} \text{ V}$$

Assim, aplicamos análise de malhas para determinar a queda de tensão indutor  $L_1 = 1$  H, assumindo  $i_0(t)$  como a corrente de malha no sentido que ela foi definida na figura.

$$v_o(t) + v_{L_0}(t) - v_{L_1}(t) = 0$$

$$v_{L_1}(t) = v_o(t) + v_{L_0}(t) \quad (6.25.3)$$

Substituindo os resultados encontrados em (6.25.3), temos

$$v_{L_1}(t) = 2000e^{-100t} - 1600e^{-100t}$$

$$v_{L_1}(t) = 400e^{-100t} \text{ V}$$

Assim, novamente usando (6.25.1), temos a corrente  $i_1(t)$  dada por

$$i_1(t) = -6 + \frac{1}{1} \int_0^t 400e^{-100t} dt$$

$$i_1(t) = -6 + \frac{1}{-100} 400 [e^{-100t} - e^0]$$

$$\boxed{i_1(t) = -2 - 4e^{-100t} \text{ A} \quad , \quad t \geq 0}$$

**(d)**

Usando a análise nodal do item (a), temos

$$i_2(t) = -i_0(t) - i_1(t)$$

Substituindo os valores encontrados nos itens anteriores,

$$i_2(t) = -(5e^{-100t}) - (-2 - 4e^{-100t})$$

$$\boxed{i_2(t) = 2 - e^{-100t} \text{ A} \quad , \quad t \geq 0}$$

**(e)**

Sabemos que a energia armazenada em um indutor é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2} L [i(t)]^2 \quad (6.25.4)$$

Em  $t = 0$  usamos os valores de  $i(0)$  para cada um dos indutores, obtendo

$$E_0(0) = 40 \text{ J} \quad , \quad E_1(0) = 18 \text{ J} \quad , \quad E_2(0) = 2 \text{ J}$$

A energia total armazenada em  $t = 0$  é, portanto,

$$E_T(0) = E_0(0) + E_1(0) + E_2(0)$$

$$E_T(0) = 60 \text{ J}$$

**(f)**

Usando o circuito equivalente com  $L_{eq} = 4 \text{ H}$  e (6.25.4) em  $t = 0$ , temos

$$E_{ent}(0) = \frac{1}{2} L_{eq} [i_0(0)]^2$$

$$E_{ent}(0) = \frac{1}{2} 4 [5]^2$$

$$E_{ent}(0) = 50 \text{ J}$$

**(g)**

A energia retida  $E_R(t)$  em  $t = 0$  é dada pela diferença entre a energia inicialmente armazenada e a entregue. Assim,

$$E_R(0) = E_T(0) - E_{ent}(0)$$

$$E_R(0) = 60 \text{ J} - 50 \text{ J}$$

$$E_R(0) = 10 \text{ J}$$

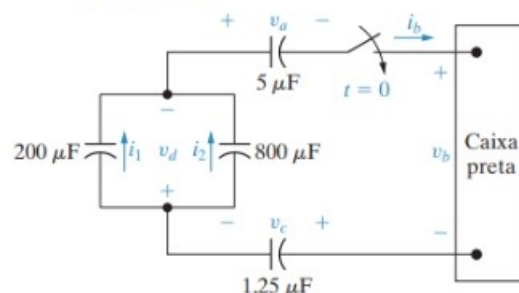
## Problema P6.32

**6.32** Os quatro capacitores no circuito da Figura P6.32 estão ligados aos terminais de uma caixa preta em  $t = 0$ . Sabe-se que a corrente resultante  $i_b$  para  $t > 0$  é

$$i_b = -5e^{-50t} \text{ mA}.$$

Se  $v_a(0) = -20 \text{ V}$ ,  $v_c(0) = -30 \text{ V}$  e  $v_d(0) = 250 \text{ V}$ , determine o seguinte para  $t \geq 0$ : (a)  $v_b(t)$ , (b)  $v_a(t)$ , (c)  $v_c(t)$ , (d)  $v_d(t)$ , (e)  $i_1(t)$  e (f)  $i_2(t)$ .

Figura P6.32



**(a)**

Começamos reduzindo os capacitores a uma capacitância equivalente  $C_{eq}$  via redução série-paralelo.

$$C_{eq} = (200 \mu F // 800 \mu F) + 5 \mu F + 1.25 \mu F$$

$$C_{eq} = 1 \mu F$$

Sabemos que a tensão em um capacitor é dada por

$$v(t) = v(0) + \frac{1}{C} \int_{t_i}^{t_f} i(t) dt \quad (6.32.1)$$

Usando  $i_b(t)$  e a capacitância equivalente,

$$v_b(t) = v_b(0) + \frac{1}{C_{eq}} \int_0^t i_b(t) dt$$

Usando análise de malhas em  $t = 0$ , com a corrente de malha  $i_b(t)$ , podemos identificar  $v_b(0)$ .

$$v_b(0) + v_a(0) + v_d(0) + v_c(0) = 0$$

$$v_b(0) = -(v_a(0) + v_d(0) + v_c(0))$$

$$v_b(0) = -(-20 + -30 + 250)$$

$$v_b(0) = -200 \text{ V}$$

Voltando à (6.32.1),

$$v_b(t) = -200 + \frac{1}{1 \mu F} \int_0^t -0.005e^{-50t} dt$$

$$v_b(t) = -200 + 100 [e^{-50t} - e^0]$$

$$\boxed{v_b(t) = -300 + 100e^{-50t} \text{ V}}$$

**(b)**

Ainda usando (6.32.1), temos

$$v_a(t) = v_a(0) + \frac{1}{C_a} \int_0^t i_b(t) dt$$

$$v_a(t) = -20 + \frac{1}{5 \mu F} \int_0^t -0.005e^{-50t} dt$$

$$v_a(t) = -20 + 20 [e^{-50t} - e^0]$$

$$\boxed{v_a(t) = -40 + 20e^{-50t} \text{ V}}$$

**(c)**

Ainda usando (6.32.1), temos

$$v_c(t) = v_c(0) + \frac{1}{C_c} \int_0^t i_b(t) dt$$

$$v_c(t) = -30 + \frac{1}{1.25 \mu F} \int_0^t -0.005e^{-50t} dt$$

$$v_c(t) = -30 + 80 [e^{-50t} - e^0]$$

$$\boxed{v_c(t) = 50 + 80e^{-50t} \text{ V}}$$

**(d)**

Ainda usando (6.32.1), temos

$$v_d(t) = v_d(0) + \frac{1}{C_d} \int_0^t i_b(t) dt$$

$$v_d(t) = 250 + \frac{1}{200 \mu F + 800 \mu F} \int_0^t -0.005e^{-50t} dt$$

$$v_d(t) = 250 + 0.1 [e^{-50t} - e^0]$$

$$\boxed{v_d(t) = 249.9 + 0.1e^{-50t} \text{ V}}$$

**(e)**

A corrente em um capacitor é dada por

$$i(t) = C \frac{dv}{dt} \quad (6.32.2)$$

Substituindo,

$$i_1(t) = (200 \mu F)(-5e^{-50t})$$

$$\boxed{i_1(t) = -e^{-50t} \text{ mA}}$$

**(f)**

Novamente usando (6.32.2), temos

$$i_2(t) = (800 \mu F)(-5e^{-50t})$$

$$\boxed{i_2(t) = -4e^{-50t} \text{ mA}}$$



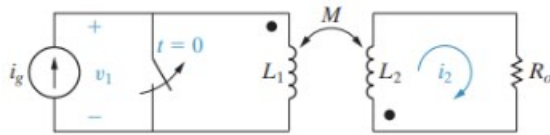
## Problema P6.39

**6.39** Não há nenhuma energia armazenada no circuito da Figura P6.39 no momento em que a chave é aberta.

- a) Deduza a equação diferencial que descreve o comportamento de  $i_2$  se  $L_1 = 5 \text{ H}$ ,  $L_2 = 0,2 \text{ H}$ ,  $M = 0,5 \text{ H}$  e  $R_o = 10 \Omega$ .
- b) Mostre que, quando  $i_g = e^{-10t} - 10 \text{ A}$ ,  $t \geq 0$ , a equação diferencial encontrada em (a) é satisfeita quando  $i_2 = 625e^{-10t} - 250e^{-50t} \text{ mA}$ ,  $t \geq 0$ .

- c) Determine a expressão para a tensão  $v_1$  nos terminais da fonte de corrente.
- d) Qual é o valor inicial de  $v_1$ ? Isso faz sentido em termos do comportamento conhecido do circuito?

Figura P6.39



**(a)**

Aplicando análise de malhas no circuito, temos na malha 1:

$$-v_1(t) + L_1 \frac{di_g}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = 0 \quad (6.39.1)$$

Na malha 2,

$$+i_2 R_o + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_g}{dt} = 0 \quad (6.39.2)$$

Substituindo os valores do enunciado na equação da malha 2,

$$10i_2 + 0.2 \frac{di_2}{dt} + 0.5 \frac{di_g}{dt} = 0$$

Isolando  $i_2$  na EDO,

$$0.2 \frac{di_2}{dt} + 10i_2 = -0.5 \frac{di_g}{dt}, \quad t \geq 0$$

**(b)**

Substituindo o valor fornecido de  $i_g(t) = e^{-10t} - 10 \text{ A}$  na EDO do item (a), temos

$$0.2 \frac{di_2}{dt} + 10i_2 = (-0.5)(-10e^{-10t})$$

$$\frac{di_2}{dt} + 50i_2 = 25e^{-10t}$$

A EDO possui fator integrante  $M(t)$  dado por

$$M(t) = e^{\int 50 dt} \Rightarrow M(t) = e^{50t}$$

Multiplicando a EDO por  $M(t)$ ,

$$e^{50t} \frac{di_2}{dt} + 50i_2 e^{50t} = 25e^{-10t} e^{50t}$$

$$e^{50t} \frac{di_2}{dt} + 50e^{50t} i_2 = 25e^{40t}$$

Aplicando o inverso da regra da derivada do produto,

$$\frac{d[i_2 \cdot e^{50t}]}{dt} = 25e^{40t}$$

Portanto,

$$i_2 \cdot e^{50t} = \int 25e^{40t} dt$$

$$i_2 \cdot e^{50t} = 25 \frac{1}{40} (e^{40t} + C)$$

$$i_2 = 0.625 \frac{e^{40t}}{e^{50t}} + \frac{C}{e^{50t}}$$

Finalmente, a solução geral da EDO é

$$i_2(t) = 0.625e^{-10t} + Ce^{-50t} \text{ A}, \quad t \geq 0$$

Como  $i_2(t) = 625e^{-10t} - 250e^{-50t}$  mA é da mesma forma que a solução geral da EDO, temos que ela satisfaz a EDO do item (a).

**(c)**

A partir de (6.39.1), temos

$$v_1(t) = L_1 \frac{di_g}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

Usando  $L_1 = 5$  H,  $M = 0.5$  H,  $i_g(t) = e^{-10t} - 10$  A e  $i_2(t) = 625e^{-10t} - 250e^{-50t}$  mA, temos

$$v_1(t) = -50e^{-10t} - 3.125e^{-10t} + 6.25e^{-50t}$$

$$v_1(t) = -53.125e^{-10t} + 6.25e^{-50t} \text{ V}, \quad t \geq 0$$

**(d)**

Usando a expressão de  $v_1(t)$  calculada no item (c), temos

$$v_1(0) = -53.125e^0 + 6.25e^0 \text{ V}$$

$$v_1(0) = -46.875 \text{ V}$$

## Problema P6.41

- 6.41 a) Mostre que os dois enrolamentos acoplados magneticamente na Figura P6.41 podem ser substituídos por um único enrolamento com uma indutância de

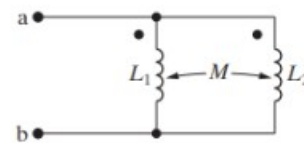
$$L_{ab} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}.$$

(Sugestão: considere  $i_1$  e  $i_2$  correntes de malha no sentido horário nas 'janelas' da esquerda e da direita da Figura P6.41, respectivamente. Some as tensões ao longo das duas malhas. Na malha 1, considere  $v_{ab}$  a tensão aplicada não especificada. Resolva para  $di_1/dt$  em função de  $v_{ab}$ .)

- b) Mostre que, se a polaridade magnética do enrolamento 2 for invertida, então

$$L_{ab} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}.$$

Figura P6.41



(a)

Aplicando análise de malhas no circuito, temos na malha 1:

$$\begin{aligned} -v_{ab} + L_1 \frac{d(i_1 - i_2)}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ v_{ab} = \frac{di_1}{dt} (L_1) + \frac{di_2}{dt} (M - L_1) \end{aligned} \quad (6.41.1)$$

Na malha 2,

$$\begin{aligned} L_1 \frac{d(i_2 - i_1)}{dt} - M \frac{di_2}{dt} + M \frac{d(i_1 - i_2)}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} = 0 \\ \frac{di_1}{dt} (-L_1 + M) + \frac{di_2}{dt} (L_1 - 2M + L_2) = 0 \end{aligned} \quad (6.41.2)$$

A partir de (6.41.1) e (6.41.2) temos o sistema linear

$$\begin{bmatrix} L_1 & M - L_1 \\ M - L_1 & L_1 - 2M + L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{di_1}{dt} \\ \frac{di_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{ab} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vamos resolver o sistema aplicando o método de Cramer. Temos

$$\Delta = \begin{vmatrix} L_1 & M - L_1 \\ M - L_1 & L_1 - 2M + L_2 \end{vmatrix} = L_1^2 - 2ML_1 + L_1 L_2 - (M^2 - 2ML_1 + L_1^2) = L_1 L_2 - M^2$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} v_{ab} & M - L_1 \\ 0 & L_1 - 2M + L_2 \end{vmatrix} = (v_{ab})(L_1 - 2M + L_2) \quad , \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} L_1 & v_{ab} \\ M - L_1 & 0 \end{vmatrix} = (v_{ab})(L_1 - M)$$

Assim,

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = v_{ab} \frac{L_1 - 2M + L_2}{L_1 L_2 - M^2}$$

$$v_{ab} = \left( \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 - 2M + L_2} \right) \frac{di_1}{dt}$$

Usando o fato de que, em um indutor, a tensão é dada por

$$v(t) = L \frac{di}{dt}$$

Temos que a impedância equivalente ao circuito acima, do ponto de vista dos terminais  $a$  e  $b$ , é

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 - 2M + L_2}$$

**(b)**

Invertendo a polaridade magnética de  $L_2$ , temos que (6.41.1) e (6.41.2) se tornam

$$v_{ab} = \frac{di_1}{dt} (L_1) + \frac{di_2}{dt} (-M - L_1)$$

$$\frac{di_1}{dt} (-L_1 - M) + \frac{di_2}{dt} (L_1 + 2M + L_2) = 0$$

Assim, o sistema linear fica como

$$\begin{bmatrix} L_1 & -M - L_1 \\ -M - L_1 & L_1 + 2M + L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{di_1}{dt} \\ \frac{di_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{ab} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Novamente usando Cramer,

$$\Delta = \begin{vmatrix} L_1 & -M - L_1 \\ -M - L_1 & L_1 + 2M + L_2 \end{vmatrix} = L_1^2 + 2ML_1 + L_1 L_2 - (M^2 + 2ML_1 + L_1^2) = L_1 L_2 - M^2$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} v_{ab} & -M - L_1 \\ 0 & L_1 + 2M + L_2 \end{vmatrix} = (v_{ab})(L_1 + 2M + L_2) \quad , \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} L_1 & v_{ab} \\ -M - L_1 & 0 \end{vmatrix} = (v_{ab})(L_1 + M)$$

Assim,

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = v_{ab} \frac{L_1 + 2M + L_2}{L_1 L_2 - M^2}$$

Com o mesmo raciocínio usado no item (a),

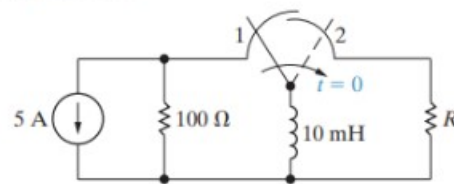
$$v_{ab} = \left( \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + 2M + L_2} \right) \frac{di_1}{dt}$$

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + 2M + L_2}$$

## Problema P7.10

**7.10** A chave no circuito da Figura P7.10 esteve na posição 1 por um longo tempo. Em  $t = 0$ , ela passa instantaneamente para a posição 2. Determine o valor de  $R$  de modo que 10% da energia inicial armazenada no indutor de 10 mH seja dissipada em  $R$  em 10  $\mu\text{s}$ .

Figura P7.10



Vamos entender primeiramente como estava o estado inicial antes da chave comutar ( $t < 0$ ). Em regime permanente de corrente contínua, o indutor se comporta como um curto-circuito. Assim, toda a corrente  $i = 5\text{ A}$  da fonte passava sobre ele, e a queda de tensão no resistor era zero. Portanto,

$$i_L(0) = 5\text{ A}$$

Quando a chave comuta, temos a seguinte equação de malha

$$L \frac{di}{dt} + iR = 0$$

Que é uma EDO cuja solução já é conhecida

$$i(t) = i(0)e^{-\frac{R}{L}t} \quad (7.10.1)$$

Com constante de tempo  $\tau = \frac{L}{R}$ .  
A energia no indutor é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2}L[i(t)]^2 \quad (7.10.2)$$

Substituindo (7.10.1) em (7.10.2), temos

$$E(t) = \frac{1}{2}L[i(0)e^{-\frac{R}{L}t}]^2$$

Isolando  $R$ , temos

$$-\frac{2t}{L}R = \ln\left(\frac{2E(t)}{Li_0^2}\right)$$

$$R = -\frac{L}{2t} \ln\left(\frac{2E(t)}{Li_0^2}\right)$$

Para que o resistor  $R$  dissipe 10% da energia inicial no indutor, temos o indutor deve ter 90% da energia inicial no instante  $t$ , ou seja,

$$E(t) = \frac{9}{10}E_0$$

Substituindo na expressão de  $R$ ,

$$R = -\frac{L}{2t} \ln\left(\frac{2\frac{9}{10}E_0}{Li_0^2}\right)$$

Note que  $E_0 = \frac{1}{2}Li_0^2$ . Logo,

$$R = -\frac{L}{2t} \ln\left(\frac{2\frac{9}{10}\frac{1}{2}Li_0^2}{Li_0^2}\right)$$

$$R = -\frac{L}{2t} \ln\left(\frac{9}{10}\right)$$

Assim, para que essa dissipação de energia ocorra no instante  $t = 10 \mu s$ , temos

$$R = 52.68 \Omega$$

## Problema P7.12

**7.12** No circuito da Figura P7.12, as expressões para tensão e corrente são

$$v = 160e^{-10t} \text{ V}, t \geq 0^+;$$

$$i = 6.4e^{-10t} \text{ A}, t \geq 0.$$

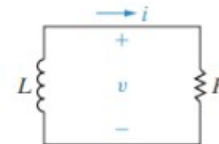
Determine

- $R$ .
- $\tau$  (em milissegundos).
- $L$ .

d) A energia inicial armazenada no indutor.

e) O tempo (em milissegundos) necessário para dissipar 60% da energia inicial armazenada.

Figura P7.12



**(a)**

Aplicando análise de malhas, temos

$$-v(t) + Ri = 0$$

Isolando  $R$ ,

$$R = \frac{v(t)}{i(t)}$$

Substituindo os valores do enunciado,

$$R = \frac{160e^{-10t}}{6.4e^{-10t}}$$

$$R = 25 \Omega$$

**(b)**

Em regime transitório CC, a função da corrente no indutor é

$$i(t) = i(0)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Onde  $\tau$  é a constante de tempo. Comparando com o valor do enunciado,

$$\tau = \frac{1}{10} = 100 \text{ ms}$$

**(c)**

Usando

$$\tau = \frac{L}{R} \Rightarrow L = R\tau$$

Temos

$$L = 25 \Omega \cdot 100 \text{ ms} = 2.5 \text{ H}$$

**(d)**

A energia em um indutor é

$$E(t) = \frac{1}{2} L [i(t)]^2 \quad (7.12.1)$$

Em  $t = 0$ , temos

$$E(0) = \frac{1}{2} \cdot 2.5 \cdot (6.4)^2 = 51.2 \text{ J}$$

**(e)**Usando (7.12.1), vamos isolar  $t$ .

$$\begin{aligned} \frac{2E(t)}{L} &= [i(t)]^2 \\ \sqrt{\frac{2E(t)}{L}} &= i_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \\ \frac{1}{i_0} \sqrt{\frac{2E(t)}{L}} &= e^{-\frac{t}{\tau}} \\ -\frac{t}{\tau} &= \ln \left( \frac{1}{i_0} \sqrt{\frac{2E(t)}{L}} \right) \\ t &= -\tau \ln \left( \frac{1}{i_0} \sqrt{\frac{2E(t)}{L}} \right) \end{aligned}$$

Para que seja dissipado 60% da energia inicial do indutor, buscamos um instante  $t$  para o qual a energia  $E(t)$  é 40% da inicial, ou seja,

$$E(t) = \frac{4}{10} E(0) = \frac{4}{10} \frac{1}{2} L i_0^2$$

Substituindo na expressão de  $t$ ,

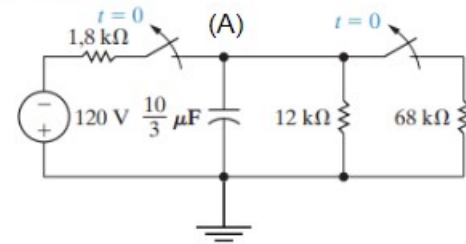
$$\begin{aligned} t &= -\tau \ln \left( \frac{1}{i_0} \sqrt{\frac{2 \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{2} L i_0^2}{L}} \right) \\ t &= -\tau \ln \left( \sqrt{\frac{2}{5}} \right) \\ t &= 41.81 \text{ ms} \end{aligned}$$

## Problema P7.26

**7.26** No circuito mostrado na Figura P7.26, ambas as chaves funcionam em conjunto; isto é, abrem-se ou fecham-se ao mesmo tempo. Elas estiveram fechadas por um longo tempo antes de se abrirem em  $t = 0$ .

- Quantos microjoules de energia foram dissipados no resistor de  $12\text{ k}\Omega$ ,  $12\text{ ms}$  depois da abertura das chaves?
- Quanto tempo leva para dissipar 75% da energia inicialmente armazenada?

Figura P7.26



**(a)**

O primeiro passo é entender o que está acontecendo antes das chaves se abrirem, ou seja, quando  $t < 0$ . Nesse caso, temos o capacitor atuando como um circuito aberto. Assim, usando análise nodal no nó essencial (A),

$$\begin{aligned}\frac{V_A - (-120)}{1.8\text{ k}} + \frac{V_A}{12\text{ k}} + \frac{V_A}{68\text{ k}} &= 0 \\ V_A \left( \frac{1}{1.8\text{ k}} + \frac{1}{12\text{ k}} + \frac{1}{68\text{ k}} \right) &= -\frac{120}{1.8\text{ k}} \\ V_A &= -\frac{\frac{120}{1.8\text{ k}}}{\frac{1}{1.8\text{ k}} + \frac{1}{12\text{ k}} + \frac{1}{68\text{ k}}} \\ V_A = v_c(0) &= -102\text{ V}\end{aligned}$$

Uma vez calculado a tensão inicial do capacitor, partimos para o  $t > 0$ . Quando as chaves abrem, o capacitor descarrega no resistor  $R_2 = 12\text{ k}\Omega$ , resultando na função já conhecida de descarga do capacitor

$$v(t) = v(0)e^{-\frac{t}{RC}}\text{ V} \quad (7.26.1)$$

Substituindo com os valores do exercício,

$$v(t) = -102e^{-25t}\text{ V}$$

A potência dissipada no resistor  $R_2$  é dada por

$$p(t) = \frac{[v(t)]^2}{R_2} = \frac{[-102e^{-25t}]^2}{12000} = 0.867e^{-50t}\text{ W}$$

Integrando  $p(t)$  no intervalo  $0 \leq t \leq 12\text{ ms}$ , temos a energia dissipada pelo resistor nesse período de tempo.

$$\begin{aligned}E &= \int_0^{12\text{ ms}} p(t) dt \\ E &= \int_0^{12\text{ ms}} 0.867e^{-50t} dt \\ E &= 0.867 \frac{1}{-50} [e^{-50(12\text{ ms})} - e^0]\end{aligned}$$

$$\boxed{E = 7823.6\text{ }\mu\text{J}}$$



**(b)**

A energia em um capacitor é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2}C[v(t)]^2 \quad (7.26.2)$$

Isolando  $t$ ,

$$v(t) = \sqrt{\frac{2E(t)}{C}}$$

Substituindo (7.26.1) na expressão acima, temos

$$\begin{aligned} e^{-\frac{t}{RC}} &= \frac{1}{v_0} \sqrt{\frac{2E(t)}{C}} \\ -\frac{t}{RC} &= \ln \left( \frac{1}{v_0} \sqrt{\frac{2E(t)}{C}} \right) \\ t &= -RC \ln \left( \frac{1}{v_0} \sqrt{\frac{2E(t)}{C}} \right) \end{aligned}$$

Queremos que seja dissipado 75% da energia inicial armazenada. Isso significa que precisamos de um instante  $t$  tal que

$$E(t) = 25\%E(0) = \frac{1}{4}E(0) = \frac{1}{4} \frac{1}{2} C v_0^2$$

Substituindo esse  $E(t)$  na expressão de  $t$  acima,

$$\begin{aligned} t &= -RC \ln \left( \frac{1}{v_0} \sqrt{\frac{2 \frac{1}{4} \frac{1}{2} C v_0^2}{C}} \right) \\ t &= -RC \ln \left( \sqrt{\frac{1}{4}} \right) \\ t &= -RC \ln \left( \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

Substituindo tudo,

$$t = 27.725 \text{ ms}$$

**Problema P7.29**

**7.29** No circuito da Figura P7.29 as expressões para a tensão e a corrente são

$$v = 72e^{-500t} \text{ V}, t \geq 0;$$

$$i = 9e^{-500t} \text{ mA}, t \geq 0^+.$$

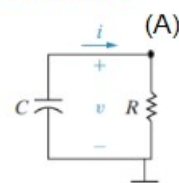
Determine

- $R$ .
- $C$ .
- $\tau$  (em milissegundos).

d) A energia inicial armazenada no capacitor.

e) Em quantos microssegundos 68% da energia inicial armazenada no capacitor são dissipados.

Figura P7.29



Antes de tudo, vamos extrair a função de  $v(t)$  genérica para o circuito. Aplicamos análise nodal no nó (A) da figura, obtendo

$$-i + \frac{V_A}{R} = 0$$

Em um capacitor, sabemos que

$$i(t) = C \frac{dv}{dt} \quad (7.29.1)$$

Note que  $i$  está entrando no terminal negativo de  $C$ . Assim, usamos sinal negativo em (7.29.1) para manter a convenção passiva. Substituindo (7.29.1) na equação nodal, e usando  $v = V_A$ , temos

$$- \left( -C \frac{dv}{dt} \right) + \frac{v}{R} = 0$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = 0$$

Usando o fator integrante  $M(t) = e^{\frac{1}{RC}t}$ , temos

$$e^{-\frac{1}{RC}t} \frac{dv}{dt} + e^{\frac{1}{RC}t} \frac{v}{RC} = 0$$

Aplicando o inverso da regra da derivada do produto,

$$\frac{d[v(t) \cdot e^{\frac{1}{RC}t}]}{dt} = 0$$

$$v(t) \cdot e^{\frac{1}{RC}t} = K$$

$$v(t) = K e^{-\frac{1}{RC}t} \text{ V}, t \geq 0 \quad (7.29.2)$$

**(a)**

Usando a Lei de Ohm,

$$R = \frac{v(t)}{i(t)} = \frac{72e^{-500t} \text{ V}}{9e^{-500t} \text{ mA}} = 8 \text{ k}\Omega$$

**(b)**

Comparando (7.29.1) com a função de  $v(t)$  dada no exercício, temos

$$-\frac{1}{RC} = -500$$

$$C = -\frac{1}{R(-500)}$$

$$C = 250 \text{ nF}$$

**(c)**

A constante de tempo  $\tau$  é definida como

$$\tau = RC \quad (7.29.3)$$

Assim,

$$\tau = 2 \text{ ms}$$

**(d)**

A energia no capacitor é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2} C [v(t)]^2 \quad (7.29.4)$$

Assim, em  $t = 0$ , temos a energia inicial

$$E(0) = \frac{1}{2} (250 \text{ nF}) [72 \text{ V}]^2$$

$$E(0) = 648 \text{ } \mu\text{J}$$

**(e)**

Isolando  $t$  em (7.29.4),

$$v(t) = \sqrt{\frac{2E(t)}{C}}$$

Substituindo a função de  $v(t)$  do enunciado na expressão acima, temos

$$\begin{aligned} e^{-\frac{t}{RC}} &= \frac{1}{v_0} \sqrt{\frac{2E(t)}{C}} \\ -\frac{t}{RC} &= \ln \left( \frac{1}{v_0} \sqrt{\frac{2E(t)}{C}} \right) \\ t &= -RC \ln \left( \frac{1}{v_0} \sqrt{\frac{2E(t)}{C}} \right) \end{aligned}$$

Queremos que seja dissipado 68% da energia inicial armazenada. Isso significa que precisamos de um instante  $t$  tal que

$$E(t) = 32\% E(0) = \frac{32}{100} E(0) = \frac{32}{100} \frac{1}{2} C v_o^2$$

Substituindo esse  $E(t)$  na expressão de  $t$  acima,

$$\begin{aligned} t &= -RC \ln \left( \frac{1}{v_0} \sqrt{\frac{2 \frac{32}{100} \frac{1}{2} C v_o^2}{C}} \right) \\ t &= -RC \ln \left( \sqrt{\frac{32}{100}} \right) \end{aligned}$$

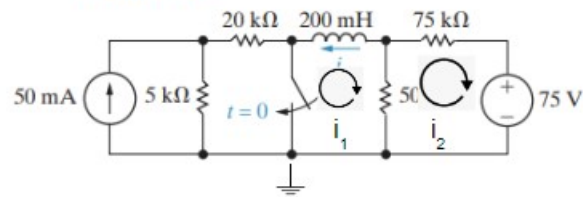
Substituindo tudo,

$$t = 1139.43 \text{ } \mu\text{s}$$

## Problema P7.35

**7.35** Depois de a chave no circuito da Figura P7.35 estar aberta por um longo tempo, ela é fechada em  $t = 0$ . Calcule (a) o valor inicial de  $i$ ; (b) o valor final de  $i$ ; (c) a constante de tempo para  $t \geq 0$  e (d) a expressão numérica para  $i(t)$  quando  $t \geq 0$ .

Figura P7.35



**(a)**

Para calcular o valor inicial  $i(0)$  de  $i$ , analisamos o circuito em  $t < 0$ , quando o indutor se comporta como um curto-circuito. Assim, aplicando análise de malhas com as correntes  $i_1$  e  $i_2$ . Na malha 1,

$$5 \text{ k}(i_1 - 50 \text{ m}) + 20 \text{ k}(i_1) + 50 \text{ k}(i_1 - i_2) = 0$$

$$i_1 (5 \text{ k} + 20 \text{ k} + 50 \text{ k}) + i_2 (-50 \text{ k}) = (5 \text{ k})(50 \text{ m})$$

$$i_1 (75 \text{ k}) + i_2 (-50 \text{ k}) = 250$$

Para a malha 2,

$$50 \text{ k}(i_2 - i_1) + 75 \text{ k}(i_2) + 75 = 0$$

$$i_1 (-50 \text{ k}) + i_2 (125 \text{ k}) = -75$$

Com as duas equações de malha, temos o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 75 \text{ k} & -50 \text{ k} \\ -50 \text{ k} & 125 \text{ k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 250 \\ 75 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 75 & -50 \\ 0 & 275 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 250 \text{ m} \\ 275 \text{ m} \end{bmatrix}$$

$$i_1 = 4 \text{ mA} \quad , \quad i_2 = 1 \text{ mA}$$

Note que a corrente de malha  $i_1$  está no sentido contrário ao definido para  $i$  no enunciado. Assim,

$$i(0) = -4 \text{ mA}$$

**(b)**

Vamos primeiro determinar a expressão de  $i(t)$  no indutor para  $t > 0$ . Quando as chaves se fecham, temos o circuito de 7.35.1 (a). Reduzindo o circuito de 7.35.1 (a) via transformações de fonte, temos o circuito de 7.35.1 (b).

Em 7.35.1 (b), aplicamos análise de malhas

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 30$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{30}{L}$$

Usando o fator integrante  $M(t) = e^{\frac{R}{L}t}$

$$e^{\frac{R}{L}t} \frac{di}{dt} + e^{\frac{R}{L}t} \frac{R}{L} i = e^{\frac{R}{L}t} \frac{30}{L}$$

Aplicando o inverso da regra da derivada do produto,

$$\frac{d[i \cdot e^{\frac{R}{L}t}]}{dt} = e^{\frac{R}{L}t} \frac{30}{L}$$

$$i \cdot e^{\frac{R}{L}t} = \int e^{\frac{R}{L}t} \frac{30}{L} dt$$

$$i(t) = e^{-\frac{R}{L}t} \frac{30}{L} \frac{L}{R} \left[ e^{\frac{R}{L}t} + K \right]$$

$$i(t) = 0.001 + K e^{-150000t}$$

Usando o resultado encontrado no item (a) que  $i(0) = -4 \text{ mA}$ , temos  $K = -0.005$ . Portanto,

$$i(t) = 1 - 5e^{-150000t} \text{ mA}, t \geq 0$$

O valor final  $i(\infty)$  da corrente é

$$\lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = 1 - 0 = 1 \text{ mA}$$

**(c)**

A constante de tempo do circuito 7.35.1 (b) é

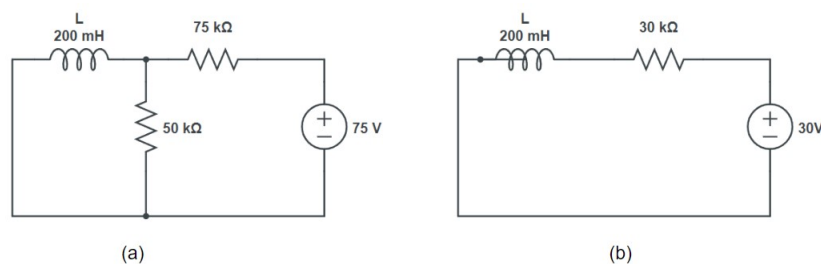
$$\tau = \frac{L}{R} = 6.67 \mu\text{s}$$

**(d)**

Como mostrado no item (b),

$$i(t) = 1 - 5e^{-150000t} \text{ mA}, t \geq 0$$

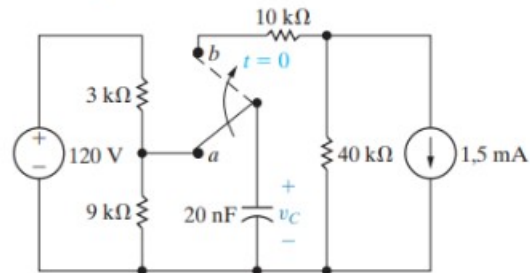
Figure 7.35.1: (a) Circuito do problema com a chave fechada. (b) Redução via transformações de fonte.



## Problema P7.53

**7.53** A chave no circuito da Figura P7.53 esteve na posição *a* por um longo tempo. Em  $t = 0$ , ela é colocada na posição *b*. Calcule (a) a tensão inicial no capacitor; (b) a tensão final no capacitor; (c) a constante de tempo (em microssegundos) para  $t > 0$  e (d) o tempo (em microssegundos) necessário para a tensão no capacitor anular-se, depois de a chave ser colocada na posição *b*.

Figura P7.53



**(a)**

Em  $t < 0$ , como o capacitor está em paralelo com um divisor de tensão, a tensão inicial no capacitor é dada por

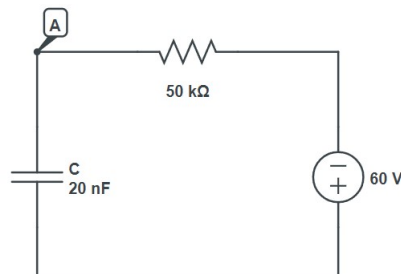
$$v(0) = 120 \frac{9 \text{ k}}{3 \text{ k} + 9 \text{ k}}$$

$$v(0) = 90 \text{ V}$$

**(b)**

Vamos determinar a função da tensão no capacitor para  $t > 0$ . Usando transformações de fonte, podemos reduzir o circuito com a chave na posição *b* para o circuito em 7.53.1.

Figure 7.53.1: Circuito com a chave em *b* reduzido.



Feito isso, aplicamos análise nodal no nó (A) mostrado em 7.53.1.

$$-i_c + \frac{V_A - (-60)}{50 \text{ k}} = 0$$

Usando  $V_A = v$ ,  $i_c = C \frac{dv}{dt}$  (com a convenção passiva), temos

$$-(-C \frac{dv}{dt}) + \frac{v}{50 \text{ k}} = -12 \cdot 10^{-3}$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{C 50 \text{ k}} = -\frac{12 \cdot 10^{-3}}{C}$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{0.001} = -60000$$

Usando o fator integrante  $M(t) = e^{1000t}$ ,

$$e^{1000t} \frac{dv}{dt} + e^{1000t} \frac{v}{0.001} = -60000e^{1000t}$$

Aplicando o inverso da regra da derivada do produto,

$$\frac{d[v(t) \cdot e^{1000t}]}{dt} = -60000e^{1000t}$$

$$v(t) \cdot e^{1000t} = \int -60000e^{1000t} dt$$

$$v(t) = e^{-1000t}(-60000) \frac{1}{1000} [e^{1000t} + K]$$

$$v(t) = -60 - 60Ke^{-1000t}$$

Sabemos que, do item (a),  $v(0) = 90 \text{ V}$ , logo temos  $K = -2.5$  e

$$v(t) = -60 + 150e^{-1000t} \text{ V}, t \geq 0 \quad (7.53.1)$$

Uma vez determinado a função de  $v(t)$ , temos que valor final  $v(\infty)$  da tensão é

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = -60 + 0 = -60 \text{ V}$$

$$\boxed{v(\infty) = -60 \text{ V}}$$

**(c)**

Na expressão de  $v(t)$  encontrada em (7.53.1), temos

$$\boxed{\tau = \frac{1}{1000} = 1 \text{ ms}}$$

**(d)**

Isolando  $t$  em (7.53.1), temos

$$e^{-1000t} = \frac{v(t) + 60}{150}$$

$$-1000t = \ln \left( \frac{v(t) + 60}{150} \right)$$

$$t = -\frac{1}{1000} \ln \left( \frac{v(t) + 60}{150} \right)$$

Queremos o instante  $t$  tal que  $v(t) = 0$ . Substituindo  $v(t) = 0$  na expressão acima, temos

$$t = -\frac{1}{1000} \ln \left( \frac{60}{150} \right)$$

$$\boxed{t = 916.29 \mu\text{s}}$$

## Problema P8.4

- 8.4 A resistência, indutância e capacitância de um circuito  $RLC$  em paralelo são  $2.000\ \Omega$ ,  $250\text{ mH}$  e  $10\text{ nF}$ , respectivamente.
- Calcule as raízes da equação característica que descreve a resposta de tensão do circuito.
  - A resposta será superamortecida, subamortecida ou criticamente amortecida?
  - Qual é o valor de  $R$  que resultará em uma frequência amortecida de  $12\text{ krads/s}$ ?
  - Quais são as raízes da equação característica para o valor de  $R$  determinado em (c)?
  - Qual é o valor de  $R$  que resultará em uma resposta criticamente amortecida?

### (a)

Sabemos que a equação característica da EDO de um circuito  $RLC$  paralelo é dada por

$$s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC} = 0 \quad (8.4.1)$$

Substituindo os dados do problema em (8.4.1), temos

$$s^2 + 5 \cdot 10^4 s + 4 \cdot 10^9 = 0$$

Aplicando Bhaskara,

$$s = \frac{-(5 \cdot 10^4) \pm \sqrt{(5 \cdot 10^4)^2 - 4(1)(4 \cdot 10^9)}}{2(1)}$$

$$s_1 = -10000\text{ rad/s} \quad , \quad s_2 = -40000\text{ rad/s}$$

### (b)

A resposta da tensão depende do valor de  $\Delta$  da equação característica, usada no item (a). Assim,

$$\Delta = (5 \cdot 10^4)^2 - 4(1)(4 \cdot 10^9)$$

$$\Delta = 9 \cdot 10^8$$

Como  $\Delta > 0$ , temos que a resposta é superamortecida.

### (c)

A frequência angular amortecida  $\omega_d$  é definida como

$$\omega_d = \sqrt{\omega_o^2 - \alpha^2} \quad (8.4.2)$$

onde  $\omega_o$  é a frequência angular de ressonância e  $\alpha$  é o fator de amortecimento. Expandindo esses dois termos conforme suas definições, (8.4.2) se torna

$$\omega_d = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^2 - \left(\frac{1}{2RC}\right)^2}$$

$$\omega_d = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}}$$

Isolando  $R$ , temos



$$\omega_d^2 = \frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}$$

$$\frac{1}{R^2} = -4C^2 \left( \omega_d^2 - \frac{1}{LC} \right)$$

$$R = \sqrt{\frac{1}{-4C^2 \left( \omega_d^2 - \frac{1}{LC} \right)}}$$

Substituindo  $\omega_d = 12 \text{ krad/s}$  e os demais valores do enunciado, temos

$$\boxed{R = 3125 \, \Omega}$$

**(d)**

Com  $R = 3125 \, \Omega$  em (8.4.1),

$$s = \frac{-(3.2 \cdot 10^4) \pm \sqrt{(3.2 \cdot 10^4)^2 - 4(1)(4 \cdot 10^8)}}{2(1)}$$

$$s = \frac{-(3.2 \cdot 10^4) \pm \sqrt{-5.76 \cdot 10^8}}{2(1)}$$

Note que agora temos que usar raízes complexas pois  $\Delta < 0$ .

$$s = \frac{-(3.2 \cdot 10^4) \pm j(2.4 \cdot 10^4)}{2(1)}$$

$$\boxed{s_1 = -16000 + j12000 \text{ rad/s} \quad , \quad s_2 = -16000 - j24000 \text{ rad/s}}$$

**(e)**

Para que o circuito seja criticamente amortecido, precisamos de  $\Delta = 0$ . Assim, novamente usando (8.4.1),

$$\Delta = \left( \frac{1}{RC} \right)^2 - 4(1) \left( \frac{1}{LC} \right) = 0$$

Isolando  $R$ ,

$$\frac{1}{R^2C^2} = 4 \frac{1}{LC}$$

$$R = \sqrt{\frac{1}{4C^2 \frac{1}{LC}}} \Rightarrow R = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Substituindo os valores do enunciado,

$$\boxed{R = 2500 \, \Omega}$$

## Problema P8.10

**8.10** A resistência do resistor no circuito do Exemplo 8.4 é alterada para  $3.200 \Omega$ .

Pspice  
Multisim

a) Determine a expressão numérica para  $v(t)$  quando  $t \geq 0$ .

b) Desenhe um gráfico de  $v(t)$  para o intervalo de tempo  $0 \leq t \leq 7$  ms. Compare essa resposta com a do Exemplo 8.4 ( $R = 20 \text{ k}\Omega$ ) e a do Exemplo 8.5 ( $R = 4 \text{ k}\Omega$ ). Em particular, compare os valores de pico de  $v(t)$  e os tempos em que esses valores ocorrem.

**(a)**

O circuito do Exemplo 8.4 é um circuito RLC paralelo, com equação característica já conhecida:

$$s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC} = 0 \quad (8.10.1)$$

Substituindo com os valores do enunciado,

$$s = \frac{-(2500) \pm \sqrt{(2500)^2 - 4(1)(1 \cdot 10^6)}}{2(1)}$$

$$s_1 = -500 \text{ rad/s}, \quad s_2 = -2000 \text{ rad/s}$$

Agora analisamos as condições iniciais do circuito. Temos

$$v(0) = 0 \text{ V} \quad (8.10.2)$$

Para a condição de inicial de  $\frac{dv(0)}{dt}$ , aplicamos análise nodal no nó superior do circuito em  $t = 0$ , obtendo

$$i_c(0) + i_L(0) + i_R = 0$$

$$i_c(0) + -12.25 \text{ mA} + \frac{v(0)}{20 \text{ k}\Omega} = 0$$

$$i_c(0) = 12.25 \text{ mA}$$

Note que

$$i_c = C \frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv(0)}{dt} = \frac{i_c(0)}{C}$$

Assim, substituindo o valor de  $i_c(0)$  encontrado, temos a segunda condição inicial da EDO dada por

$$\frac{dv(0)}{dt} = 98000 \text{ V/s} \quad (8.10.3)$$

Além disso, sabemos que a solução da EDO é da forma

$$v(t) = Ae^{st}$$

Com as duas raízes encontradas  $s_1$  e  $s_2$ , temos que a solução geral é dada pela combinação linear

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) \quad (8.10.4)$$

Onde  $v_1(t)$  e  $v_2(t)$  são duas possíveis soluções para  $v(t)$  dadas por

$$\begin{cases} v_1(t) = A_1 e^{s_1 t} \\ v_2(t) = A_2 e^{s_2 t} \end{cases}$$

Diferenciando (8.10.4) com respeito a  $t$ , temos duas equações

$$\begin{cases} v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \\ \frac{dv(t)}{dt} = A_1 s_1 e^{s_1 t} + A_2 s_2 e^{s_2 t} \end{cases}$$

Em  $t = 0$ , temos as condições iniciais já conhecidas em (8.10.2) em (8.10.3)

$$\begin{cases} v(0) = A_1 e^{s_1 0} + A_2 e^{s_2 0} \\ \frac{dv(0)}{dt} = A_1 s_1 e^{s_1 0} + A_2 s_2 e^{s_2 0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 + A_2 = 0 \text{ V} \\ A_1 s_1 + A_2 s_2 = 98000 \text{ V/s} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = 65.33 \\ A_2 = -65.33 \end{cases}$$

Conhecidos coeficientes  $A_1$  e  $A_2$ , bem como as raízes  $s_1$  e  $s_2$ , temos a solução geral  $v(t)$  dada por (8.10.4)

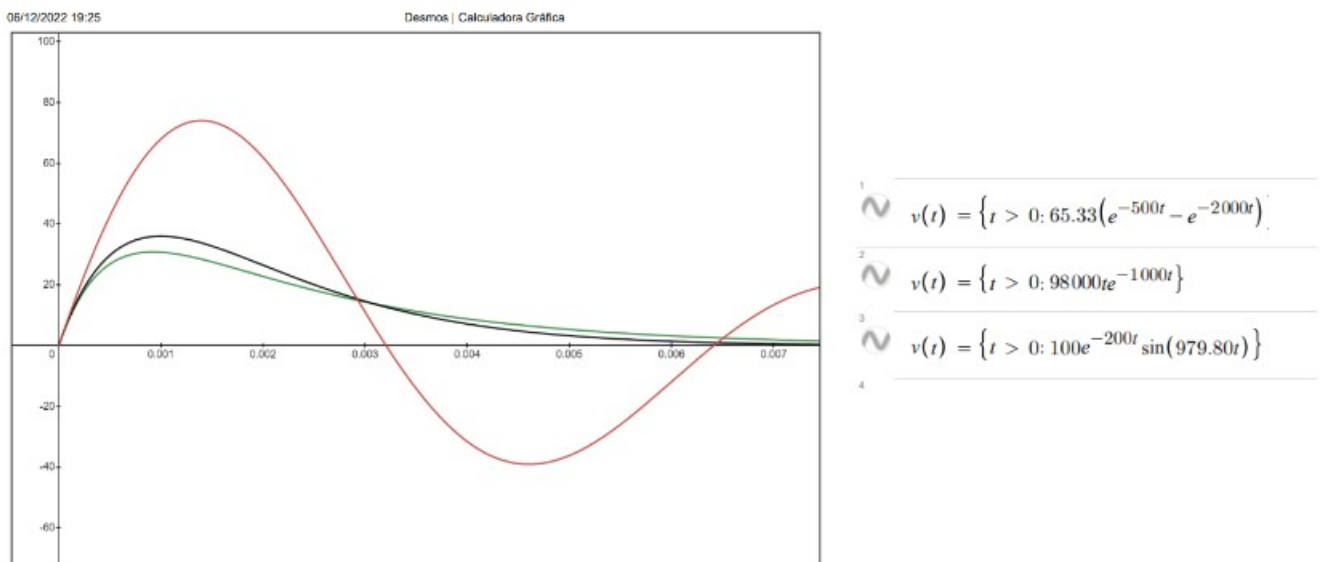
$$v(t) = 65.33 [e^{-500t} - e^{-2000t}] \text{ V}, t \geq 0$$

**(b)**

Temos três funções para  $v(t)$ :

$$\begin{cases} v(t) = 65.33 [e^{-500t} - e^{-2000t}] \text{ V}, t \geq 0 & \text{Resposta superamortecida} \\ v(t) = 98.000te^{-1.000t} \text{ V}, t \geq 0 & \text{Resposta criticamente amortecida} \\ v(t) = 100e^{-200t} \text{sen}(979.80t) \text{ V}, t \geq 0 & \text{Resposta subamortecida} \end{cases}$$

Usando a ferramenta online Desmos, temos os três gráficos das três funções abaixo. A curva vermelha é a subamortecida, a preta é a criticamente amortecida e a curva verde é a resposta superamortecida. A resposta subamortecida apresenta o maior valor de pico da tensão, mas é a que gasta mais tempo para ele ocorrer. Já a resposta superamortecida possui o menor valor de pico, mas é o que chega mais rápido nesse pico.



## Problema P8.17

- 8.17** a) Projete um circuito  $RLC$  em paralelo (veja a Figura 8.1) usando valores de componentes do Apêndice H, com uma frequência angular de ressonância de  $5.000 \text{ rad/s}$ . Escolha um resistor ou crie uma rede de resistores de modo que a resposta seja criticamente amortecida. Desenhe seu circuito.
- b) Calcule as raízes da equação característica para a resistência em (a).

**(a)**

Para o projeto do circuito, fixamos arbitrariamente o indutor selecionado o de  $L = 1 \text{ mH}$ . Para cumprir o requisito da frequência angular de ressonância ser  $\omega_o = 5000 \text{ rad/s}$ , calculamos  $C$  através de

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow C = \frac{1}{\omega_o^2 L}$$

$$C = 40 \mu\text{F}$$

Podemos atingir uma capacitância equivalente de  $C = 40 \mu\text{F}$  usando quatro capacitores de  $C_i = 10 \mu\text{F}$  em paralelo. Para o requisito de ele ser criticamente amortecido, temos que

$$\omega_o^2 = \alpha^2 \quad (8.17.1)$$

Expandindo (8.17.1) conforme as definições,

$$\left( \frac{1}{\sqrt{LC}} \right)^2 = \left( \frac{1}{2RC} \right)^2$$

Isolando  $R$ ,

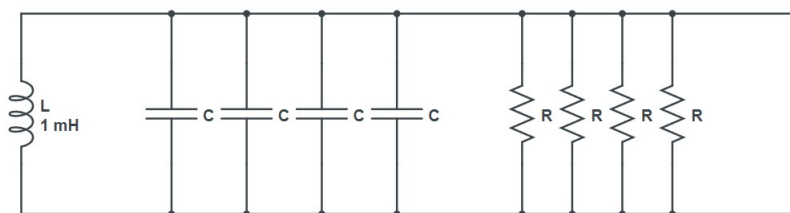
$$R = \frac{\sqrt{LC}}{2C}$$

$$R = 2.5 \Omega$$

Podemos obter exatamente uma resistência equivalente de  $R = 2.5 \Omega$  com 4 resistores de  $R_i = 10 \Omega$  em paralelo.

Assim, temos o circuito projetado na imagem abaixo.

Figure 8.17.1: Circuito RLC projetado. Temos  $R = 10 \Omega$  e  $C = 10 \mu\text{F}$ .



**(b)**

A equação característica do circuito é

$$s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC} = 0 \quad (8.17.2)$$

Cuja solução é

$$s = \frac{-\frac{1}{RC} \pm \sqrt{\Delta}}{2(1)}$$

Note que o circuito já foi projetado para ser criticamente amortecido, e foi possível obter exatamente as resistências e capacitâncias equivalentes necessárias para obter essa resposta. Logo, temos  $\Delta = 0$  e a solução se reduz a

$$s = \frac{-\frac{1}{RC}}{2} \Rightarrow s = -\frac{1}{2RC}$$

Assim, as raízes da equação característica são

$$s_1 = s_2 = -5000 \text{ rad/s}$$

**Problema P8.19**

**8.19** No circuito da Figura 8.1,  $R = 5 \text{ k}\Omega$ ,  $L = 8 \text{ H}$ ,  $C = 125 \text{ nF}$ ,  $V_0 = 30 \text{ V}$  e  $I_0 = 6 \text{ mA}$ .

Pspice  
Multisim

a) Determine  $v(t)$  para  $t \geq 0$ .

b) Determine os primeiros três valores de  $t$  para os quais  $dv/dt$  é igual a zero. Esses valores devem ser denotados como  $t_1$ ,  $t_2$  e  $t_3$ .

c) Mostre que  $t_3 - t_1 = T_d$ .

d) Mostre que  $t_2 - t_1 = T_d/2$ .

e) Calcule  $v(t_1)$ ,  $v(t_2)$  e  $v(t_3)$ .

f) Faça um gráfico de  $v(t)$  para  $0 \leq t \leq t_2$ .

**(a)**

O primeiro passo é identificar as condições iniciais de  $v(t)$ . Temos

$$v(0) = 30 \text{ V} \quad (8.19.1)$$

Além disso, para a condição de inicial de  $\frac{dv(0)}{dt}$ , aplicamos análise nodal no nó superior do circuito em  $t = 0$ , obtendo

$$i_c(0) + i_L(0) + i_R(0) = 0$$

$$i_c(0) + 6 \text{ mA} + \frac{v(0)}{5 \text{ k}\Omega} = 0$$

$$i_c(0) = -12 \text{ mA}$$

Note que

$$i_c = C \frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv(0)}{dt} = \frac{i_c(0)}{C}$$

Assim, substituindo o valor de  $i_c(0)$  encontrado, temos a segunda condição inicial da EDO dada por

$$\frac{dv(0)}{dt} = -96 \text{ kV/s} \quad (8.19.2)$$

Como o circuito da Figura 8.1 é um circuito RLC paralelo, temos que a equação característica é dada por

$$s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC} = 0 \quad (8.19.3)$$

Que possui solução

$$s = \frac{-(1600) \pm \sqrt{(1600)^2 - 4(1)(10^6)}}{2(1)}$$

Note que temos o discriminante  $\Delta < 0$ . Nesse caso, temos soluções complexas para a equação característica e a resposta da tensão é subamortecida.

$$s = \frac{-1600 \pm j1200}{2}$$

$$s_1 = -800 + j600 \text{ rad/s} \quad , \quad s_2 = -800 - j600 \text{ rad/s}$$

Sabemos que a solução da EDO é da forma

$$v(t) = Ae^{st}$$

Com as duas raízes encontradas  $s_1$  e  $s_2$ , temos que a solução geral é dada pela combinação linear

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) \quad (8.19.4)$$

Onde  $v_1(t)$  e  $v_2(t)$  são duas possíveis soluções para  $v(t)$  dadas por

$$\begin{cases} v_1(t) = A_1 e^{s_1 t} \\ v_2(t) = A_2 e^{s_2 t} \end{cases}$$

Diferenciando (8.19.4) com respeito a  $t$ , temos duas equações

$$\begin{cases} v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \\ \frac{dv(t)}{dt} = A_1 s_1 e^{s_1 t} + A_2 s_2 e^{s_2 t} \end{cases}$$

Em  $t = 0$ , temos as condições iniciais já conhecidas em (8.19.1) em (8.19.2)

$$\begin{cases} v(0) = A_1 e^{s_1 0} + A_2 e^{s_2 0} \\ \frac{dv(0)}{dt} = A_1 s_1 e^{s_1 0} + A_2 s_2 e^{s_2 0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 + A_2 = 30 \text{ V} \\ A_1 s_1 + A_2 s_2 = -96 \text{ kV/s} \end{cases}$$

De posse dessas equações, temos o sistema linear para identificar os coeficientes  $A_1$  e  $A_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ s_1 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ -96000 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -s_1 & -s_1 \\ s_1 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30s_1 \\ -96000 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -s_1 & -s_1 \\ 0 & s_2 - s_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30s_1 \\ -96000 - 30s_1 \end{bmatrix}$$

Assim, temos

$$A_2 = \frac{-96000 - 30s_1}{s_2 - s_1} \Rightarrow A_2 = \frac{-96000 - 30(-800 + j600)}{-800 - j600 - (-800 + j600)}$$

$$A_2 = \frac{-72000 - j18000}{-j1200}$$

$$A_2 = 15 - j60, \quad A_1 = 15 + j60$$

Conhecidos coeficientes  $A_1$  e  $A_2$ , bem como as raízes  $s_1$  e  $s_2$ , temos a solução geral  $v(t)$  na forma de (8.19.4)

$$v(t) = (15 + j60)e^{(-800+j600)t} + (15 - j60)e^{(-800-j600)t} \text{ V}, t \geq 0$$

Vamos remover os exponenciais complexos usando a identidade de Euler.

$$v(t) = (15 + j60)e^{-800t}e^{j600t} + (15 - j60)e^{-800t}e^{-j600t}$$

$$v(t) = (15 + j60)e^{-800t}(\cos(600t) + j\sin(600t)) + (15 - j60)e^{-800t}(\cos(600t) - j\sin(600t))$$

Evidenciando o termo  $e^{-800t}$  e expandindo os demais via propriedade distributiva, temos que todas parcelas complexas se cancelam e ficamos com

$$v(t) = e^{-800t} [30 \cos(600t) - 120 \sin(600t)] \text{ V}, t \geq 0$$

**(b)**

Diferenciando  $v(t)$  encontrado no item (a) com respeito a  $t$ , temos

$$\frac{dv}{dt} = (30 \cos(600t) - 120 \sin(600t))(-800)e^{-800t} + e^{-800t}(-30 \sin(600t)(600) - 120 \cos(600t)(600))$$

$$\frac{dv}{dt} = e^{-800t} [-24000 \cos(600t) + 96000 \sin(600t) - 18000 \sin(600t) - 72000 \cos(600t)]$$

Para que  $\frac{dv}{dt} = 0$ , temos

$$-24000 \cos(600t) + 96000 \sin(600t) - 18000 \sin(600t) - 72000 \cos(600t) = 0$$

$$\sin(600t)(96000 - 18000) - \cos(600t)(24000 + 72000) = 0$$

$$\frac{\sin(600t)}{\cos(600t)} = \frac{24000 + 72000}{96000 - 18000}$$

$$\tan(600t) = 1.23076 \Rightarrow t = \frac{\tan^{-1}(1.23076)}{600}$$

Usando a propriedade das tangentes de

$$\tan(\theta) = \tan(\theta + n\pi), n = 0, 1, 2, 3...$$

Temos

$$t = \frac{0.8884 + n\pi}{600}, n = 0, 1, 2, 3...$$

Os três primeiros valores de  $t$  que satisfazem são

$$t_1 = 1.481 \text{ ms}, t_2 = 6.717 \text{ ms}, t_3 = 11.95 \text{ ms}$$

**(c)**

Sabemos que frequência angular de amortecimento  $\omega_d$  é dada por

$$\omega_d = \sqrt{\omega_o^2 - \alpha^2} \quad (8.19.5)$$

Expandindo os termos conforme as definições,

$$\omega_d = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}}$$

O período de  $\omega_d$  é

$$T_d = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}}}$$

$$T_d = 10.47 \text{ ms}$$

A diferença  $t_3 - t_1$  é

$$t_3 - t_1 = 11.95 \text{ ms} - 1.481 \text{ ms} = 10.469 \text{ ms}$$

Portanto,

$$T_d = t_3 - t_1$$

**(d)**

Temos

$$\frac{T_d}{2} = \frac{10.47 \text{ ms}}{2} = 5.235 \text{ ms}$$

Além disso,

$$t_2 - t_1 = 6.717 \text{ ms} - 1.481 \text{ ms} = 5.236 \text{ ms}$$

Portanto,

$$\frac{T_d}{2} = t_2 - t_1$$

**(e)**

Usando o resultado do item (a), temos

$$v(t_1) = v(1.481 \text{ ms}) = -22.69 \text{ V}$$

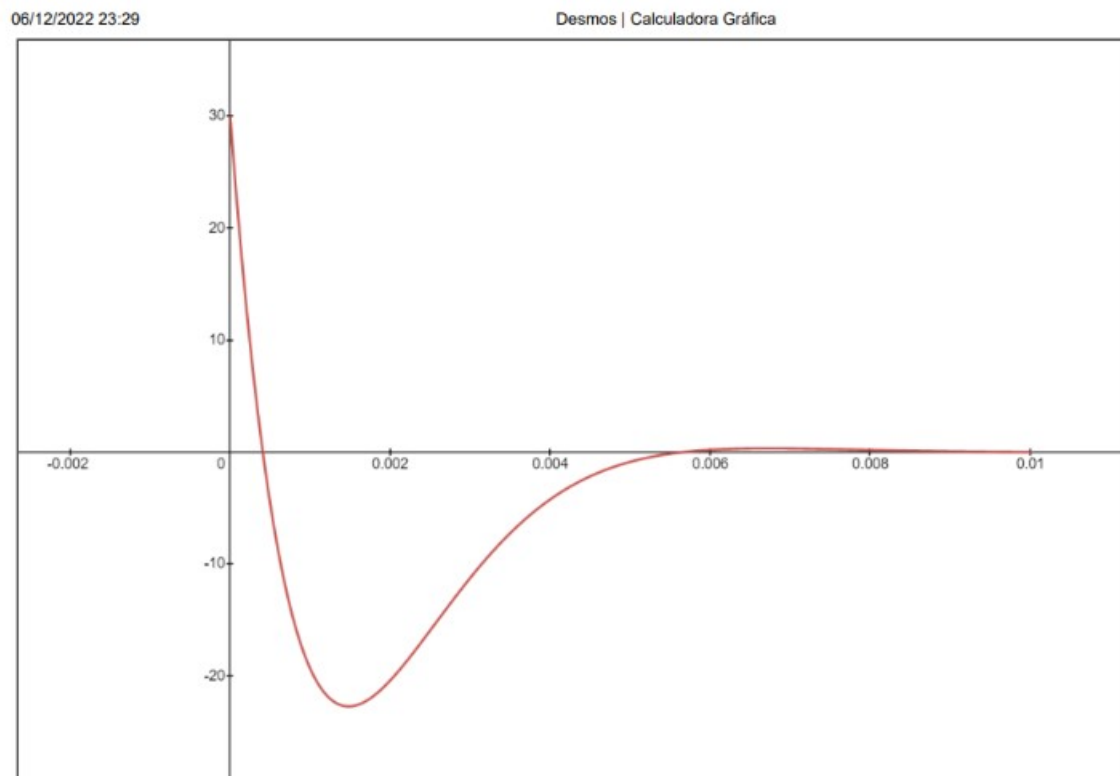
$$v(t_2) = v(6.717 \text{ ms}) = -0.344 \text{ V}$$

$$v(t_3) = v(11.95 \text{ ms}) = -5.22 \text{ mV}$$



**(f)**

Usamos a ferramenta online Desmos para plotar o gráfico de  $v(t)$ .



## Problema P9.3

9.3 Considere a tensão senoidal

$$v(t) = 25 \cos(400\pi t + 60^\circ) \text{ V.}$$

- a) Qual é a amplitude máxima da tensão?
- b) Qual é a frequência em hertz?
- c) Qual é a frequência em radianos por segundo?
- d) Qual é o ângulo de fase em radianos?
- e) Qual é o ângulo de fase em graus?
- f) Qual é o período em milissegundos?
- g) Qual é a primeira vez, após  $t = 0$ , que  $v = 0$  V?
- h) A função senoidal é deslocada 5/6 ms para a direita ao longo do eixo do tempo. Qual é a expressão para  $v(t)$ ?
- i) Qual é o valor mínimo de milissegundos de que a função deve ser deslocada para a esquerda, se a expressão para  $v(t)$  for  $25 \sin 400\pi t$  V?

**(a)**

Sabemos que uma tensão senoidal  $v(t)$  é expressa na forma

$$v(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (9.3.1)$$

onde

- $A$ : amplitude máxima da tensão (V);
- $\omega$ : frequência angular da tensão (rad/s);
- $\phi$ : defasagem em relação à origem (rad ou  $^\circ$ ).

Portanto, conforme o enunciado, temos

$$A = 25 \text{ V}$$

**(b)**

A frequência angular  $\omega$  é dada por

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi}$$

Substituindo, temos

$$f = 200 \text{ Hz}$$

**(c)**

Conforme o enunciado, temos

$$\omega = 400\pi \text{ rad/s} = 1256.64 \text{ rad/s}$$

**(d)**

Conforme o enunciado, temos  $\phi = 60^\circ$ . Convertendo para radianos, temos

$$\phi = \frac{\pi}{3} \text{ rad} = 1.047 \text{ rad}$$

**(e)**

Conforme o enunciado,

$$\phi = 60^\circ$$

**(f)**

A frequência angular  $\omega$  é dada por

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Substituindo,

$$T = 5 \text{ ms}$$

**(g)**

Isolando  $t$  em (9.3.1), temos

$$\begin{aligned} \omega t + \phi &= \cos^{-1} \left( \frac{v(t)}{A} \right) \\ t &= \frac{1}{\omega} \left[ \cos^{-1} \left( \frac{v(t)}{A} \right) - \phi \right] \end{aligned} \quad (9.3.2)$$

Para identificar os instantes  $t$  para os quais  $v(t) = 0$ , substituímos  $v(t) = 0$  em (9.3.2), obtendo

$$t = \frac{1}{\omega} [\cos^{-1}(0) - \phi]$$

O primeiro ângulo  $\theta$  para o qual  $\cos(\theta) = 0$  é  $\frac{\pi}{2}$ , portanto

$$t = \frac{1}{\omega} \left[ \frac{\pi}{2} - \phi \right]$$

Substituindo os valores do enunciado, temos

$$t = 416.67 \mu\text{s}$$

**(h)**

Do item (f), sabemos que  $T = 5\text{ms}$ . Além disso, sabemos que  $1T = 360^\circ$  para a função cosseno. Portanto, usando proporcionalidade, temos

$$\frac{T}{\Delta t} = \frac{360^\circ}{\Delta \phi}$$

Substituindo,

$$\frac{5 \text{ ms}}{\frac{5}{6} \text{ ms}} = \frac{360^\circ}{\Delta \phi}$$

$$\Delta \phi = 60^\circ$$

Portanto, um deslocamento de  $\frac{5}{6} \text{ ms}$  equivale a um deslocamento angular de  $\Delta \phi = 60^\circ$ . Note que deslocamentos à direita de uma função trigonométrica correspondem a deslocamentos com sinal negativo. Assim,

$$\Delta \phi = -60^\circ$$

Aplicando isso à função original, temos a nova expressão de  $v(t)$  dada por

$$v(t) = A \cos(\omega t + \phi + \Delta \phi)$$

$$v(t) = 25 \cos(400\pi t + 60^\circ - 60^\circ)$$

$$v(t) = 25 \cos(400\pi t) \text{ V}$$

**(i)**

Sabemos que

$$\cos(\theta) = \sin(\theta + 90^\circ)$$

Portanto, podemos reescrever a função de  $v(t)$  como

$$v(t) = A \sin(\omega t + \phi + 90^\circ)$$

Seja  $\Delta t$  o deslocamento ao longo do eixo  $x$  que provoca uma diferença de fase  $\Delta \theta$ , de tal modo que

$$A \sin(\omega t + \phi + \Delta \theta + 90^\circ) = A \sin(\omega t)$$

Para isso, precisamos de

$$\phi + \Delta \theta + 90^\circ = 0$$

Portanto,

$$\Delta\theta = -\phi - 90^\circ$$

Uma vez conhecido  $\Delta\theta$ , identificamos o deslocamento temporal  $\Delta t$  através da proporcionalidade

$$\frac{T}{\Delta t} = \frac{360^\circ}{-\phi - 90^\circ}$$

Isolando  $\Delta t$ , temos

$$\Delta t = (-\phi - 90^\circ) \frac{T}{360^\circ}$$

Substituindo,

$$\Delta t = -2.08 \text{ ms}$$

## Problema P9.14

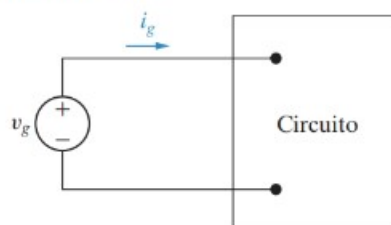
**9.14** As expressões para a tensão e a corrente de regime permanente nos terminais do circuito da Figura P9.14 são

$$v_g = 300 \cos(5.000\pi t + 78^\circ) \text{ V},$$

$$i_g = 6 \sin(5.000\pi t + 123^\circ) \text{ A}.$$

- Qual é a impedância vista pela fonte?
- De quantos microssegundos é a defasagem entre a corrente e a tensão?

Figura P9.14



**(a)**

A impedância  $Z_{in}$  vista pela fonte é dada por

$$Z_{in} = \frac{V_g}{I_g} \quad (9.14.1)$$

Usando a relação trigonométrica

$$\sin \theta = \cos(\theta - 90^\circ)$$

Podemos reescrever a expressão de  $i_g(t)$  como

$$i_g(t) = 6 \cos(5000\pi t + 123^\circ - 90^\circ)$$

$$i_g(t) = 6 \cos(5000\pi t + 33^\circ)$$

Assim, em notação fasorial, temos

$$Z_{in} = \frac{300 \angle 78^\circ}{6 \angle 33^\circ} \quad (9.14.2)$$

$$Z_{in} = 50 \angle 45^\circ \Omega$$

**(b)**

Usando proporcionalidade (regra de três simples), sabemos que uma diferença de fase de  $\Delta\phi$  corresponde a uma diferença temporal  $\Delta t$  dada por

$$\frac{T}{\Delta t} = \frac{360^\circ}{\Delta\phi}$$

onde  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  é o período do sinal. Isolando  $\Delta t$ , temos

$$\Delta t = T \frac{\Delta\phi}{360^\circ} \quad (9.14.3)$$

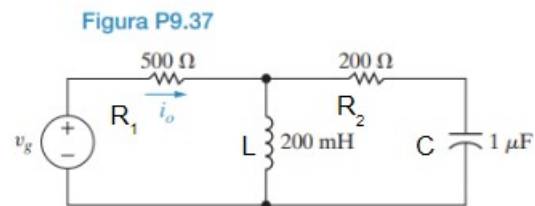
$$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega} \frac{\Delta\phi}{360^\circ}$$

Substituindo tudo, temos

$$\Delta t = 50 \mu s$$

**Problema P9.37**

- 9.37** A frequência da fonte de tensão senoidal no circuito da Figura P9.37 é ajustada até que a corrente  $i_o$  fique em fase com  $v_g$ .
- Pspice Multisim**
- Determine a frequência em hertz.
  - Determine a expressão de regime permanente para  $i_o$  (na frequência encontrada em [a]), se  $v_g = 90 \cos \omega t$  V.

**(a)**

Vamos começar identificando a impedância equivalente  $Z_{in}$  vista pela fonte  $v_g$ .

$$Z_{in} = \left( \left( \frac{1}{j\omega C} + R_2 \right) // j\omega L \right) + R_1$$

$$Z_{in} = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{\frac{1}{j\omega C} + R_2}}$$

Agora vamos isolar a parte real da parte complexa.

$$Z_{in} = R_1 + \frac{1}{-\frac{j}{\omega L} + \frac{1}{-\frac{j}{\omega C} + R_2}}$$

$$Z_{in} = R_1 + \frac{1}{-\frac{j}{\omega L} + \frac{\omega C}{-j + R_2 \omega C}}$$

$$Z_{in} = R_1 + \frac{1}{-\frac{j}{\omega L} + \frac{(\omega C)(+j + R_2 \omega C)}{1^2 + (R_2 \omega C)^2}}$$

$$Z_{in} = R_1 + \frac{1}{-\frac{j}{\omega L} + \frac{j\omega C}{1 + (R_2 \omega C)^2} + \frac{R_2 \omega^2 C^2}{1 + (R_2 \omega C)^2}}$$

$$Z_{in} = R_1 + \frac{1}{-\frac{R_2\omega^2 C^2}{1+(R_2\omega C)^2} + j\left(-\frac{1}{\omega L} + \frac{\omega C}{1+(R_2\omega C)^2}\right)}$$

Vamos adotar uma notação para simplificar a expressão. Sejam

$$A = \frac{R_2\omega^2 C^2}{1+(R_2\omega C)^2}, \quad B = -\frac{1}{\omega L} + \frac{\omega C}{1+(R_2\omega C)^2}$$

Com isso, podemos reescrever a expressão de  $Z_{in}$  como

$$Z_{in} = R_1 + \frac{1}{A + jB}$$

Continuamos o processo de isolar a parte real da parte complexa.

$$Z_{in} = R_1 + \frac{1}{A + jB}$$

$$Z_{in} = R_1 + \frac{A - jB}{A^2 + B^2}$$

$$Z_{in} = \left(R_1 + \frac{A}{A^2 + B^2}\right) - j\frac{B}{A^2 + B^2}$$

Agora é possível expressar uma função para o ângulo de fase  $\phi$  de  $Z_{in}$ , dada por

$$\begin{aligned}\phi &= \tan^{-1} \left( \frac{-\frac{B}{A^2+B^2}}{R_1 + \frac{A}{A^2+B^2}} \right) \\ \phi &= \tan^{-1} \left( \frac{-\frac{B}{A^2+B^2}}{\frac{R_1(A^2+B^2)+A}{A^2+B^2}} \right) \\ \phi &= \tan^{-1} \left( -\frac{B}{R_1(A^2+B^2)+A} \right)\end{aligned}\tag{9.37.1}$$

Uma vez calculado  $Z_{in}$ , podemos expressar a relação entre  $V_g$  e  $I_o$  através de

$$V_g = Z_{in} \cdot I_g\tag{9.37.2}$$

Para que (9.37.2) seja satisfeita com  $V_g$  e  $I_o$  em fase, temos que o ângulo de fase de  $Z_{in}$  deve ser nulo. Portanto, usando (9.37.1), temos

$$\begin{aligned}\phi &= \tan^{-1} \left( -\frac{B}{R_1(A^2+B^2)+A} \right) = 0 \\ -\frac{B}{R_1(A^2+B^2)+A} &= 0 \\ B &= 0\end{aligned}$$

Expandindo  $B$  conforme o definimos, temos

$$\begin{aligned}-\frac{1}{\omega L} + \frac{\omega C}{1+(R_2\omega C)^2} &= 0 \\ \frac{-1 - R_2^2\omega^2 C^2 + (\omega L)(\omega C)}{(\omega L)(1 + R_2^2\omega^2 C^2)} &= 0\end{aligned}$$

$$-1 - R_2^2 \omega^2 C^2 + \omega^2 LC = 0$$

Isolando  $\omega$ , temos

$$\omega^2 = \frac{1}{LC - R_2^2 C^2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC - R_2^2 C^2}}$$

Usando  $\omega = 2\pi f$ , a frequência  $f$  em Hertz da fonte de tensão deve ser

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC - R_2^2 C^2}} \quad (9.37.3)$$

Substituindo,

$$f = 397.89 \text{ Hz}$$

**(b)**

Usando (9.37.2), temos

$$i_o(t) = \frac{v_g(t)}{Z_{in}} \quad (9.37.4)$$

Note que  $Z_{in}$  é puramente real, pois o ângulo de fase é nulo (fizemos  $B = 0$  no item anterior). Assim, a expressão de  $Z_{in}$  se reduz a

$$Z_{in} = R_1 + \frac{A}{A^2 + 0}$$

$$Z_{in} = R_1 + \frac{1}{A}$$

$$Z_{in} = R_1 + \frac{1 + (R_2 \omega C)^2}{R_2 \omega^2 C^2}$$

$$Z_{in} = 1500 \, \Omega$$

Substituindo em (9.37.4),

$$i_o(t) = \frac{90 \cos(\omega t)}{1500 \, \Omega}$$

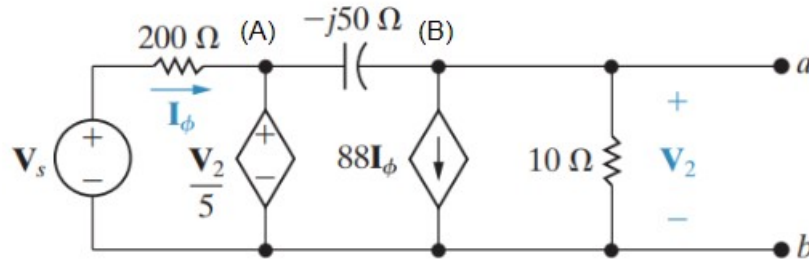
$$i_o(t) = 60 \cos(\omega t) \text{ mA}$$

$$i_o(t) = 60 \cos(2500t) \text{ mA}$$

## Problema P9.50

**9.50** Determine o circuito equivalente de Norton em relação aos terminais  $a, b$  para o circuito da Figura P9.50 quando  $\mathbf{V}_s = 5\angle 0^\circ \text{ V}$ .

Figura P9.50



Em um circuito equivalente norton, temos

$$I_N = I_{SC} \quad , \quad R_N = R_{th}$$

Vamos começar calculando a tensão de Thevenin  $V_{th}$  entre os terminais  $a$  e  $b$ , abrindo-os. Expressando as variáveis de controle em função dos elementos do circuito, obtemos

$$V_2 = V_B \quad (9.50.1)$$

$$I_\phi = \frac{5V - V_A}{200 \, \Omega} \quad (9.50.2)$$

Feito isso, aplicamos análise nodal dos nós essenciais  $A$  e  $B$ . Começamos pelo nó  $A$ . Obtemos de imediato que

$$V_A = \frac{V_2}{5} = \frac{V_B}{5} \quad (9.50.3)$$

Agora vamos para o nó  $B$ .

$$\frac{V_B - V_A}{-j50 \, \Omega} + 88I_\phi + \frac{V_B - 0}{10 \, \Omega} = 0$$

Usando (9.50.2) e (9.50.3), temos

$$\frac{V_B - \frac{V_B}{5}}{-j50 \, \Omega} + 88 \frac{5V - \frac{V_B}{5}}{200 \, \Omega} + \frac{V_B}{10 \, \Omega} = 0$$

Isolando  $V_B$ , temos

$$\frac{V_B}{-j50} - \frac{V_B}{-j250} - \frac{88V_B}{1000} + \frac{V_B}{10} = -2.2$$

$$V_B = -\frac{2.2}{\frac{1}{-j50} - \frac{1}{-j250} - \frac{88}{1000} + \frac{1}{10}}$$

$$V_B = -66 + j88V = 110\angle 126.86^\circ V \quad (9.50.4)$$

Usando (9.50.3), obtemos

$$V_A = 22\angle 126.86^\circ V \quad (9.50.5)$$



Assim, obtemos que a tensão de Thevenin é dada por

$$V_{th} = V_{ab} = V_B = 110/126.86^\circ V \quad (9.50.6)$$

Agora calculamos a corrente de curto-circuito  $I_{sc}$ . Curto circuitamos os terminais  $a$  e  $b$ , e novamente expressamos as variáveis de controle em função dos elementos do circuito.

$$V_2 = 0V \quad (9.50.7)$$

$$I_\phi = \frac{5V - V_A}{200 \Omega} \quad (9.50.8)$$

Agora aplicamos análise nodal nos nós essenciais  $A$  e  $B$ . De imediato temos que

$$V_A = \frac{V_2}{5} = \frac{V_B}{5}$$

No entanto, devido ao curto-circuito, observe que

$$V_B = 0V$$

E portanto,

$$V_A = V_B = 0V$$

Escrevendo a equação de nó de  $B$ , temos

$$\frac{V_B - \frac{V_B}{5}}{-j50 \Omega} + 88 \frac{5V - \frac{V_B}{5}}{200 \Omega} + I_{sc} = 0$$

Substituindo e isolando  $I_{sc}$ ,

$$0 + 88 \frac{5V}{200 \Omega} + I_{sc} = 0$$

$$I_{sc} = -2.2 \text{ A} = 2.2/180^\circ \text{ A} \quad (9.50.9)$$

Usando (9.50.9) e (9.50.6), obtemos a resistência de Thevenin  $R_{th}$ .

$$R_{th} = \frac{V_{th}}{I_{sc}} = \frac{110/126.86^\circ}{2.2/180^\circ} = 50/-53.14^\circ \Omega \quad (9.50.10)$$

Finalmente,

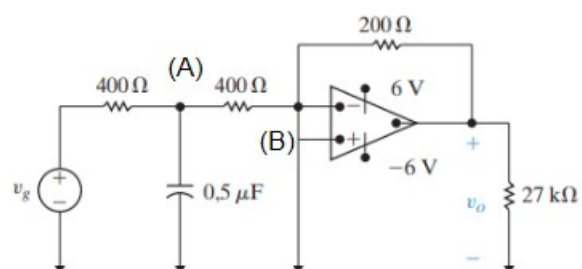
$$R_N = 50/-53.14^\circ \Omega = 30 - j40 \Omega$$

$$I_N = -2.2 \text{ A}$$

## Problema P9.69

**9.69** A fonte de tensão senoidal no circuito mostrado na Figura P9.69 está gerando a tensão  $v_g = 20 \cos 5.000t \text{ V}$ . Se o amp op for ideal, qual será a expressão de regime permanente para  $v_o(t)$ ?

Pspice  
Multisim



O primeiro passo é expressar  $V_o$  em função das tensões de entrada no AmpOp. Aplicamos análise nodal no nó (B).

$$i_- + i_+ + \frac{V_B - V_o}{R_s} + \frac{V_B - V_A}{R_2} = 0$$

Como o Amplificador Operacional é ideal, temos

$$i_- = i_+ = 0 \text{ A} \quad (9.69.1)$$

Além disso, temos  $V_B = 0$ . Substituindo na expressão do nó, temos

$$\frac{V_o}{R_s} + \frac{V_A}{R_2} = 0$$

Isolando  $V_o$ , temos

$$V_o = -\frac{R_s}{R_2} V_A \quad (9.69.2)$$

Portanto, basta encontrar a expressão de  $V_A$  para achar a expressão de  $v_o(t)$ .

Aplicando análise nodal no nó essencial (A), temos

$$\frac{V_A - 20}{400} + \frac{V_A}{\frac{1}{j\omega 0.5\mu F}} + \frac{V_A - V_B}{400} = 0$$

$$\frac{V_A - 20}{400} + \frac{V_A}{\frac{1}{j0.0025}} + \frac{V_A}{400} = 0$$

$$V_A \left( \frac{1}{400} + j0.0025 + \frac{1}{400} \right) = \frac{20}{400}$$

$$V_A = \frac{0.05}{0.005 + j0.0025}$$

$$V_A = 8.9442 \angle -26.57^\circ \text{ V}$$

Assim, voltando para (9.69.2), temos

$$V_o = -\frac{200}{400} 8.9442 \angle -26.57^\circ \text{ V}$$

$$V_o = -4.47 \angle -26.57^\circ \text{ V}$$

Removendo o sinal negativo, temos

$$V_o = 4.47 \angle -26.57^\circ + 180^\circ \text{ V}$$

$$V_o = 4.47 \angle 153.43^\circ \text{ V}$$

Convertendo do fasor para obter a expressão em função do tempo (note que usamos o valor de pico da tensão como o módulo do fasor), temos

$$v_o(t) = 4.47 \cos(5000t + 153.43^\circ) \text{ V}$$

## Problema P9.77

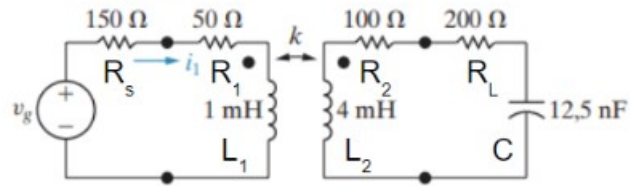
9.77 A fonte de tensão senoidal no circuito visto na Figura P9.77 está funcionando a uma

Pspice  
Multisim

frequência de 200 krad/s. O coeficiente de acoplamento é ajustado até que o valor de pico de  $i_1$  seja máximo.

- Qual é o valor de  $k$ ?
- Se  $v_g = 560 \cos(2 \times 10^5 t)$  V, qual é a amplitude máxima de  $i_1$ ?

Figura P9.77



(a)

O valor de  $i(t)$  depende da impedância  $Z_{in}$  vista pela fonte  $V_g$ . Sabemos que  $Z_{in}$  é expressa por

$$Z_{in} = Z_{11} + Z_r \quad (9.77.1)$$

Além disso, sabemos que a impedância refletida  $Z_r$  é dada por

$$Z_r = \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}} \quad (9.77.2)$$

Substituindo (9.77.2) em (9.77.1), temos

$$Z_{in} = Z_{11} + \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}} \quad (9.77.3)$$

Onde

- $Z_{11}$ : Autoimpedância da malha do primeiro enrolamento;
- $Z_{22}$ : Autoimpedância da malha do segundo enrolamento;
- $M$ : Indutância mútua.

Expandindo os termos de (9.77.3), temos

$$Z_{in} = R_s + R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 (k\sqrt{L_1 L_2})^2}{j\omega L_2 + R_2 + R_L + \frac{1}{j\omega C}} \quad (9.77.4)$$

Vamos reescrever (9.77.4) de modo a isolar a parte real da parte complexa.

$$Z_{in} = R_s + R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 k^2 L_1 L_2}{j\omega L_2 + R_2 + R_L - \frac{j}{\omega C}}$$

$$Z_{in} = R_s + R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 k^2 L_1 L_2}{R_2 + R_L + j(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})}$$

$$Z_{in} = R_s + R_1 + j\omega L_1 + \frac{(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(R_2 + R_L - j(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C}))}{(R_2 + R_L + j(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C}))(R_2 + R_L - j(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C}))}$$

$$Z_{in} = R_s + R_1 + j\omega L_1 + \frac{(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(R_2 + R_L) - j(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2}$$

$$Z_{in} = R_s + R_1 + \frac{(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(R_2 + R_L)}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2} + j \left( \omega L_1 - \frac{(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2} \right) \quad (9.77.5)$$

A partir de (9.77.5) podemos determinar o módulo de  $Z_{in}$ .

$$|Z_{in}|(k) = \sqrt{\left(R_s + R_1 + \frac{(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(R_2 + R_L)}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2}\right)^2 + \left(\omega L_1 - \frac{(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2}\right)^2} \quad (9.77.6)$$

A expressão (9.77.6) expressa o módulo de  $Z_{in}$  como uma função do coeficiente  $k$ . O valor máximo de  $i(t)$  ocorre quando  $Z_{in}(k)$  atinge seu valor mínimo, ou seja, quando

$$\frac{d}{dk}|Z_{in}|(k) = 0 \quad (9.77.7)$$

Vamos diferenciar (9.77.6) com respeito a  $k$ . Antes disso, vamos adotar uma notação para reduzir o tamanho da expressão. Sejam

$$A = \frac{(\omega^2 L_1 L_2)(R_2 + R_L)}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2}, \quad B = \frac{(\omega^2 L_1 L_2)(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2}$$

Note que  $A$  e  $B$  não dependem de  $k$ . Assim, podemos reescrever (9.77.6) como

$$|Z_{in}|(k) = \sqrt{(R_s + R_1 + Ak^2)^2 + (\omega L_1 - Bk^2)^2} \quad (9.77.8)$$

Diferenciando (9.77.8) com respeito a  $k$ , temos

$$\frac{d}{dk}|Z_{in}|(k) = \frac{1}{2} \frac{2(R_s + R_1 + Ak^2)(2Ak) + 2(\omega L_1 - Bk^2)(-2Bk)}{\sqrt{(R_s + R_1 + Ak^2)^2 + (\omega L_1 - Bk^2)^2}} \quad (9.77.9)$$

Para que (9.77.9) seja igual a zero, temos

$$2(R_s + R_1 + Ak^2)(2Ak) + 2(\omega L_1 - Bk^2)(-2Bk) = 0$$

$$(R_s + R_1 + Ak^2)(Ak) + (\omega L_1 - Bk^2)(-Bk) = 0$$

$$AkR_s + AkR_1 + A^2k^3 - \omega BkL_1 + B^2k^3 = 0$$

$$k^3(A^2 + B^2) + k(AR_s + AR_1 - \omega BL_1) = 0$$

$$k(k^2(A^2 + B^2) + (AR_s + AR_1 - \omega BL_1)) = 0$$

$$k^2(A^2 + B^2) + AR_s + AR_1 - \omega BL_1 = 0$$

$$k = \sqrt{\frac{\omega BL_1 - AR_s - AR_1}{(A^2 + B^2)}}$$

Substituindo os valores todos, temos

$$A = 192, \quad B = 256$$

$$k = 0.3536$$

**(b)**

Conhecido o valor de  $k = 0.3536$ , podemos calcular o valor da impedância vista pela fonte através de (9.77.4), obtendo

$$Z_{in} = 224 + j168 \, \Omega$$

Portanto, usando o fato que a corrente fornecida pela fonte é

$$i(t) = \frac{v_g(t)}{Z_{in}}$$

Em notação fasorial, usando o módulo do fasor como o valor RMS, temos

$$I = \frac{V_g}{Z_{in}} = \frac{\frac{560}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ}{224 + j168 \, \Omega}$$

$$I = 1.4142 \angle -36.57^\circ \, A$$

Portanto, o valor de pico de  $i(t)$  é

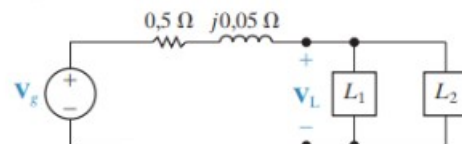
$$i_m(t) = 1.4142\sqrt{2} = 2 \, A$$

**Problema P10.22**

**10.22** As duas cargas mostradas na Figura P10.22 podem ser descritas da seguinte forma: a carga 1 absorve uma potência média de 10 kW e uma potência reativa de 4 kVAR; a carga 2 tem uma impedância de  $(60 + j80) \, \Omega$ . A tensão nos terminais das cargas é  $1000\sqrt{2} \cos 100\pi t \, V$ .

- Determine o valor eficaz da tensão da fonte.
- De quantos microssegundos é a diferença de fase entre a tensão da carga e a tensão da fonte?
- A tensão da carga está adiantada ou atrasada em relação à tensão da fonte?

Figura P10.22

**(a)**

Temos as seguintes informações dadas:

$$S_1 = 10000 + j4000 \, VA \quad , \quad Z_2 = 60 + j80 \, \Omega \quad , \quad V_1 = V_2 = 1000 \angle 0^\circ \, V$$

Em  $L_1$ , temos

$$S_1 = V_1 \cdot (I_1)^* \Rightarrow I_1 = \left( \frac{S_1}{V_1} \right)^* \Rightarrow I_1 = 10 - j4 \, A$$

Uma vez calculado  $I_1$ , agora calculamos a impedância da carga  $L_1$ .

$$Z_1 = \frac{V_1}{I_1} = \frac{1000}{10 - j4} = 86.2 + j34.5 \, \Omega$$

Agora vamos calcular a corrente  $I_2$  da carga  $L_2$ .

$$I_2 = \frac{V_2}{Z_2} = \frac{1000}{60 + j80} = 6 - j8 \text{ A}$$

Assim, a corrente fornecida pela fonte é

$$I_g = I_1 + I_2 = 10 - j4 + 6 - j8 \text{ A} = 16 - j12 \text{ A}$$

A impedância  $Z_{in}$  vista pela fonte é

$$Z_{in} = 0.5 + j0.05 + (Z_1 // Z_2)$$

$$Z_{in} = 0.5 + j0.05 + \frac{1}{\frac{1}{86.2 + j34.5} + \frac{1}{60 + j80}}$$

$$Z_{in} = 0.5 + j0.05 + 40 + j30 = 40.5 + j30.05 \Omega$$

Finalmente, a tensão da fonte é

$$V_g = Z_{in} \cdot I_g = (40.5 + j30.05)(16 - j12) = 1008.6 - j5.2 \text{ V}$$

$$V_g = 1008.6 \angle -0.295^\circ \text{ V}$$

**(b)**

Usando proporcionalidade (regra de três simples), temos

$$\frac{T}{\Delta t} = \frac{360^\circ}{\Delta \phi}$$

onde  $\Delta \phi$  é a diferença de fase entre os sinais. Portanto, usando  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ,

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega} \frac{\Delta \phi}{360^\circ}$$

Substituindo,

$$\Delta t = \frac{2\pi}{100\pi} \frac{0.295^\circ}{360^\circ}$$

$$\Delta t = 16.39 \mu\text{s}$$

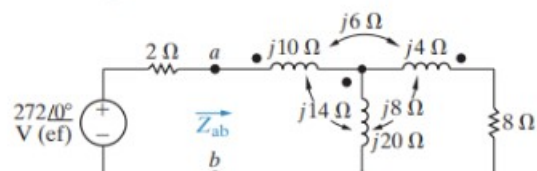
**(c)**

$V_L$  está  $\Delta \phi = 0.295^\circ$  adiantada em relação a  $V_g$ .

## Problema P10.37

- 10.37** a) Determine a potência média fornecida ao resistor de  $8 \Omega$  no circuito da Figura P10.37  
 b) Determine a potência média produzida pela fonte de tensão senoidal ideal.  
 c) Determine  $Z_{ab}$ .  
 d) Mostre que a potência média fornecida é igual à potência média dissipada.

Figura P10.37



**(a)**

Aplicamos análise de malhas nas duas malhas do circuito, considerando as indutâncias mútuas.  
Malha 1:

$$-272\angle 0^\circ + 2I_1 + j10I_1 + j14I_1 + j14(I_1 - I_2) + j6(-I_2) + j8(-I_2) + j20(I_1 - I_2) = 0$$

$$I_1(2 + j10 + j14 + j14 + j20) + I_2(-j14 - j6 - j8 - j20) = 272\angle 0^\circ$$

$$I_1(2 + j58) + I_2(-j48) = 272\angle 0^\circ \quad (10.37.1)$$

Malha 2:

$$j20(I_2 - I_1) + j4(I_2) + 8(I_2) + j8(I_2) + j8(I_2 - I_1) + j6(-I_1) + j14(-I_1) = 0$$

$$I_1(-j20 - j8 - j6 - j14) + I_2(j20 + j4 + 8 + j8 + j8) = 0$$

$$I_1(-j48) + I_2(8 + j40) = 0 \quad (10.37.2)$$

Com (10.37.1) e (10.37.2), temos o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 2 + j58 & -j48 \\ -j48 & 8 + j40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 272 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vamos resolver o sistema aplicando o método de Cramer. Temos

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 + j58 & -j48 \\ -j48 & 8 + j40 \end{vmatrix} = j544$$

$$\Delta_{I_1} = \begin{vmatrix} 272 & -j48 \\ 0 & 8 + j40 \end{vmatrix} = 2176 + j10880, \quad \Delta_{I_2} = \begin{vmatrix} 2 + j58 & 272 \\ -j48 & 0 \end{vmatrix} = j13056$$

Assim,

$$I_1 = \frac{\Delta_{I_1}}{\Delta} = \frac{2176 + j10880}{j544} = 20 - j4 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{\Delta_{I_2}}{\Delta} = \frac{j13056}{j544} = 24 \text{ A}$$

Calculadas as correntes de malha, temos a potência no resistor de  $8 \Omega$  dada por

$$P_{8\Omega} = R \cdot I_2^2 = (8)(24^2) = 4608 \text{ W}$$

**(b)**

A potência fornecida pela fonte é dada por

$$S_{V_g} = V_g \cdot (I_1)^* = 272\angle 0^\circ \cdot 20.39\angle +11.31^\circ = 5546.08\angle 11.31^\circ \text{ VA}$$

$$S_{V_g} = 5438.37 \text{ W} + j1087.6 \text{ VAR}$$

**(c)**

Temos que  $Z_{ab}$  é a impedância vista pela fonte, removido o resistor de  $2\ \Omega$ . Logo,

$$Z_{ab} = \frac{V_g}{I_1} - 2 = \frac{272\angle 0^\circ}{20.39\angle -11.31^\circ} - 2 = 13.34\angle 11.31^\circ - 2$$

$$\boxed{Z_{ab} = 11.08 + 2.62\ \Omega}$$

**(d)**

Vamos usar apenas a potência real (W). A potência real fornecida pela fonte é  $P_{V_g} = 5438.37\ \text{W}$ . Os dois resistores do circuito absorvem uma potência total de

$$P_{abs} = (2)|20 - j4|^2 + (8)(24)^2 = (2)(20.34)^2 + (8)(24)^2 = 5435.43\ \text{W}$$

Portanto,

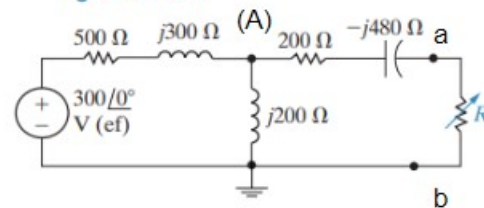
$$\boxed{P_{abs} = 5435.43\ \text{W} = P_{V_g}}$$

## Problema P10.46

**10.46** O resistor variável no circuito da Figura P10.46 é ajustado até que a potência média que ele absorve seja máxima.

- Determine  $R$ .
- Determine a máxima potência média.
- Encontre um resistor no Apêndice H que teria a maior potência média fornecida a ele.

Figura P10.46

**(a)**

Aplicamos teorema de Thevenin nos terminais  $a$  e  $b$  mostrados na figura.

Começamos calculando a tensão de Thevenin  $V_{th}$ , abrindo os terminais  $a$  e  $b$ . Nesse caso, temos apenas a malha à esquerda do nó essencial (A). Assim, aplicando análise de malhas nessa malha, temos

$$-300 + 500I + j300I + j200I = 0$$

$$I(500 + j300 + j200) = 300$$

$$I = \frac{300}{500 + j500} = 0.3 + j0.3\ \text{A} = 424.25\angle 45^\circ\ \text{mA}$$

Assim, a tensão  $V_A = V_a$  é dada por

$$V_a = j200 \cdot I = 200\angle 90^\circ\ \Omega \cdot 424.25\angle 45^\circ\ \text{mA}$$

$$V_a = V_{ab} = V_{th} = 84.85\angle 135^\circ\ \text{V}$$

Agora curto-circuitamos os terminais  $a$  e  $b$  para achar a corrente  $I_{sc}$ . Nesse caso, aplicamos análise nodal no nó essencial (A), obtendo



$$\frac{V_A - 300}{500 + j300} + \frac{V_A}{j200} + \frac{V_A}{200 - j480} = 0$$

$$V_A \left( \frac{1}{500 + j300} + \frac{1}{j200} + \frac{1}{200 - j480} \right) = \frac{300}{500 + j300}$$

$$V_A = \frac{\frac{300}{500 + j300}}{\frac{1}{500 + j300} + \frac{1}{j200} + \frac{1}{200 - j480}}$$

$$V_A = \frac{0.4412 - j0.2647}{0.00221 - j0.00410}$$

$$V_A = 110.46/30.71^\circ \text{ V}$$

Assim, temos a corrente de curto-circuito dada por

$$I_{sc} = \frac{V_A}{200 - j480} = \frac{110.46/30.71^\circ}{200 - j480} = 212.42/98.09^\circ \text{ mA}$$

Conhecido  $V_{th}$  e  $I_{sc}$ , temos a impedância de Thevenin dada por

$$Z_{th} = \frac{V_{th}}{I_{sc}} = 399.5/36.91^\circ \Omega$$

Para que tenhamos a máxima transferência de potência, precisamos que

$$R = (Z_{th})^*$$

Contudo, como a resistência  $R$  é puramente real, temos que a condição de máxima potência é

$$R = |(Z_{th})^*|$$

Portanto,

$$\boxed{R = 399.5 \Omega}$$

**(b)**

Usando o circuito equivalente Thevenin, sabemos que a corrente que passa pelo resistor  $R$  é

$$I_R = \frac{V_{th}}{R + Z_{th}}$$

$$I_R = \frac{84.85/135^\circ}{399.5 + 319.43 + j239.92} = \frac{84.85/135^\circ}{718.93 + j239.92}$$

$$I_R = 111.95/116.54^\circ \text{ mA}$$

Assim, a potência  $P_R$  no resistor de carga é

$$P_R = R \cdot |I_R|^2$$

$$\boxed{P_R = 5 \text{ W}}$$

(c)

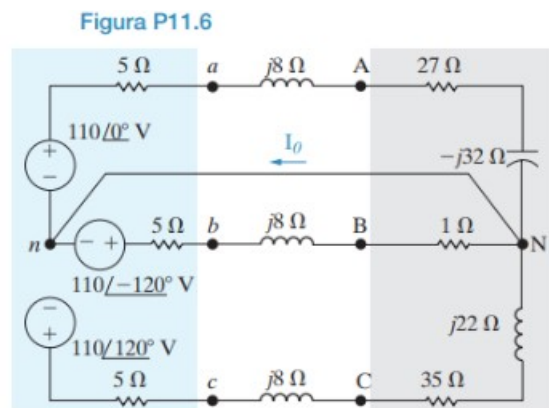
O resistor com valor comercial mais próximo do valor calculado de  $R = 399.5 \, \Omega$  é o resistor de

$$R_c = 390 \, \Omega$$

## Problema P11.06

- 11.6 a) O circuito na Figura P11.6 é ou não um sistema trifásico equilibrado? Explique.  
b) Determine  $I_o$ .

Pspice  
Multisim



(a)

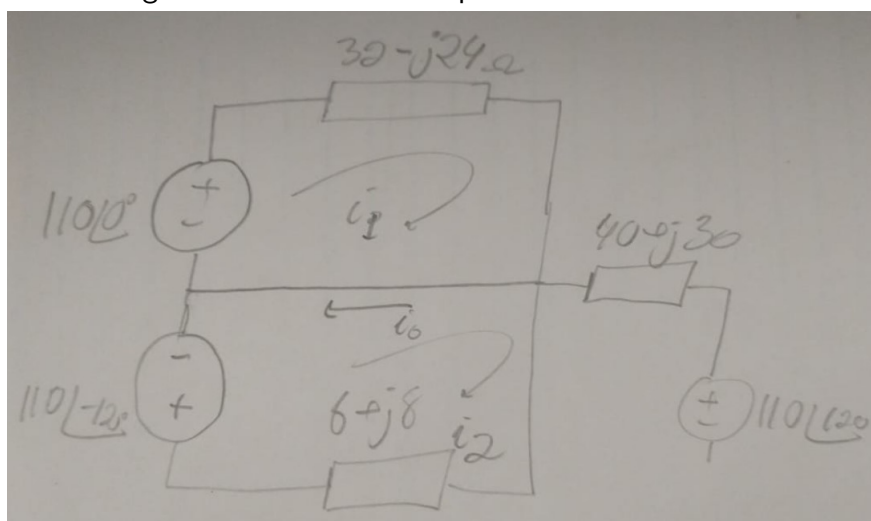
O circuito da Figura P11.6 não é equilibrado pois

- A impedância de cada fase da carga é diferente;
- A fonte da fase  $c$  não está conectada no neutro da fonte trifásica. Assim, a corrente das fases é diferente e o circuito não é equilibrado.

(b)

Combinando as impedâncias de fase e carga, e usando o fato que a fonte da fase  $c$  está desconectada do neutro da fonte trifásica, temos o circuito equivalente mostrado na Figura 11.06.1.

Figure 11.06.1: Circuito equivalente ao enunciado.



Nesse circuito equivalente, aplicamos análise de malhas com as correntes de malha  $i_1$  e  $i_2$ , usando o fato de que

$$i_0 = i_1 - i_2 \quad (11.06.1)$$

Malha 1:

$$-110 + (32 - j24)i_1 = 0$$

$$i_1 = \frac{110}{32 - j24}$$

Malha 2:

$$110\angle -120^\circ + (6 + j8)i_2 = 0$$

$$i_2 = -\frac{110\angle -120^\circ}{6 + j8}$$

Substituindo  $i_1$  e  $i_2$  em (11.06.1), temos

$$i_0 = \frac{110}{32 - j24} - \left( -\frac{110\angle -120^\circ}{6 + j8} \right)$$

$$i_0 = \frac{110}{32 - j24} - \frac{110\angle -120^\circ}{6 + j8}$$

$$i_0 = 2.75\angle 36.86^\circ - 11\angle -173.13^\circ$$

$$i_0 = 2.2 + j1.65 + 10.92 + j1.32$$

$$i_0 = 13,12 + j2.97$$

$$i_0 = 13.45\angle 12.75^\circ \text{ A}$$

## Problema P11.10

**11.10** Um circuito trifásico equilibrado tem as seguintes características:

- Está ligado em Y-Y;
- A tensão de linha na fonte,  $V_{ab}$ , é  $110\sqrt{3}\angle -60^\circ \text{ V}$ ;
- A sequência de fases é positiva;
- A impedância de linha é  $3 + j2 \Omega/\phi$ ;
- A impedância de carga é  $37 + j28 \Omega/\phi$ .

- a) Desenhe o circuito monofásico equivalente para a fase  $a$ .
- b) Calcule a corrente de linha na fase  $a$ .
- c) Calcule a tensão de linha na carga na fase  $a$ .

**(a)**

A tensão de linha da fonte trifásica é dada por

$$V_{ab} = V_a - V_b \quad (11.10.1)$$

Como a sequência das fases é positiva, temos que a fase  $a$  está adiantada em relação a fase  $b$  de  $120^\circ$ . Além disso, sabemos que a tensão de linha se relaciona com a tensão de fase através de

$$V_{ab} = |V_{an}| \sqrt{3} \angle \phi_{an} \pm 30^\circ \quad (11.10.2)$$

Como a sequência de fases é positiva, usamos o sinal positivo para a fase em (11.10.2). Dessa forma, comparando com o valor de  $V_{ab} = 110\sqrt{3} \angle -60^\circ$  fornecido no enunciado, temos

$$\phi_{an} + 30^\circ = -60^\circ \Rightarrow \phi_{an} = -90^\circ$$

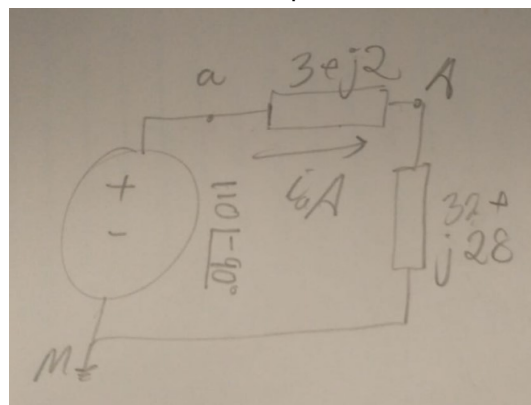
$$|V_{ab}| = |V_{an}| \sqrt{3} \Rightarrow |V_{an}| = 110 \text{ V}$$

Assim, a tensão de fase é dada por

$$V_{an} = 110 \angle -90^\circ \text{ V}$$

E o circuito monofásico equivalente da fase  $a$  está exibido na Figura 11.10.1.

Figure 11.10.1: Circuito equivalente ao enunciado.

**(b)**

A corrente da fase  $a$  é dada por

$$I_{aA} = \frac{V_{an}}{Z_{aA} + Z_L}$$

$$I_{aA} = \frac{110 \angle -90^\circ}{3 + j2 + 37 + j28} = \frac{110 \angle -90^\circ}{40 + j30}$$

$$\boxed{I_{aA} = 2.2 \angle -126.87^\circ \text{ A}}$$

**(c)**

A tensão na carga na fase  $a$  é dada por

$$V_{AN} = Z_a \cdot I_{aA} = (37 + j28)(2.2 \angle -126.87^\circ)$$

$$V_{AN} = 102.08 \angle -89.75^\circ \text{ V}$$

A tensão de linha na carga, usando (11.10.2),

$$V_{AB} = 102.08\sqrt{3} \angle -89.75 + 30^\circ \text{ V}$$

$$V_{AB} = 176.8 \angle 59.75^\circ \text{ V}$$

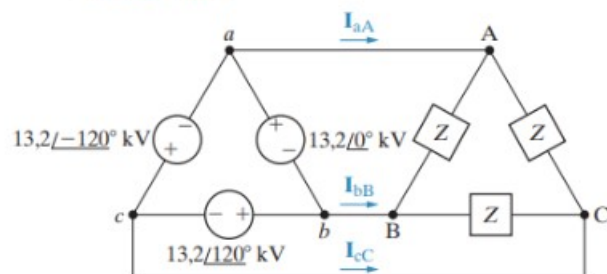
## Problema P11.19

**11.19** A impedância  $Z$  no circuito trifásico equilibrado da Figura P11.19 é  $100 - j75 \Omega$ .

Determine

- a)  $I_{AB}$ ,  $I_{BC}$  e  $I_{CA}$ ,
- b)  $I_{aA}$ ,  $I_{bB}$  e  $I_{cC}$ ,
- c)  $I_{ba}$ ,  $I_{cb}$  e  $I_{ac}$ .

Figura P11.19

**(a)**

Observe que a carga  $Z_{AB}$  está em paralelo com a fonte de tensão  $V_{ab}$ . Portanto, a queda de tensão na carga  $Z_{AB}$  é  $V_{ab}$ . Note que o mesmo se aplica para todas as cargas com suas respectivas fontes de tensão.

Assim,

$$I_{AB} = \frac{V_{ab}}{Z_{AB}} = \frac{13200 \angle 0^\circ}{100 - j75} = 105.6 \angle 36.86^\circ \text{ A}$$

$$I_{BC} = \frac{V_{bc}}{Z_{BC}} = \frac{13200 \angle 120^\circ}{100 - j75} = 105.6 \angle 156.87^\circ \text{ A}$$

$$I_{CA} = \frac{V_{ca}}{Z_{CA}} = \frac{13200 \angle -120^\circ}{100 - j75} = 105.6 \angle -83.13^\circ \text{ A}$$

**(b)**

Aplicando análise nodal no nó (A), temos

$$I_{aA} + I_{AB} + I_{CA} = 0$$

Note que, da maneira que foi definido no item (a), a corrente  $I_{CA}$  vai do nó C para o A, a corrente  $I_{AB}$  vai do nó A para o B. Logo,  $I_{CA}$  e  $I_{aA}$  entram nó (A), enquanto  $I_{AB}$  sai do nó. Corrigindo a equação nodal, temos

$$I_{aA} = I_{AB} - I_{CA}$$

$$I_{aA} = 105.6/\underline{36.86^\circ} - 105.6/\underline{-83.13^\circ}$$

$$I_{aA} = 84.49 + j63.345 - (12.63 - j104.84) = 71.65 + j168.485$$

$$I_{aA} = 183/\underline{66.96^\circ} \text{ A}$$

Aplicamos exatamente o mesmo raciocínio para as demais correntes de fase.  
Nó (B):

$$I_{bB} = I_{BC} - I_{AB}$$

$$I_{bB} = 105.6/\underline{156.87^\circ} - 105.6/\underline{36.86^\circ}$$

Extrapolando o resultado de  $I_{aA}$ ,

$$I_{bB} = 105.6\sqrt{3}/\underline{156.87 + 30^\circ} \text{ A}$$

$$I_{bB} = 183/\underline{186.87^\circ} \text{ A}$$

Por último, vamos para o nó (C):

$$I_{cC} = I_{CA} - I_{BC}$$

$$I_{cC} = 105.6/\underline{-83.13^\circ} - 105.6/\underline{156.87^\circ}$$

$$I_{cC} = 105.6\sqrt{3}/\underline{-83.13 + 30^\circ} \text{ A}$$

$$I_{cC} = 183/\underline{-53.13^\circ} \text{ A}$$

**(c)**

Usamos a relação entre corrente de fase e corrente de linha.

$$I_{ba} = \frac{1}{\sqrt{3}} I_{aA} / \underline{66.96 - 30^\circ} = 105.1/\underline{36.96^\circ} \text{ A}$$

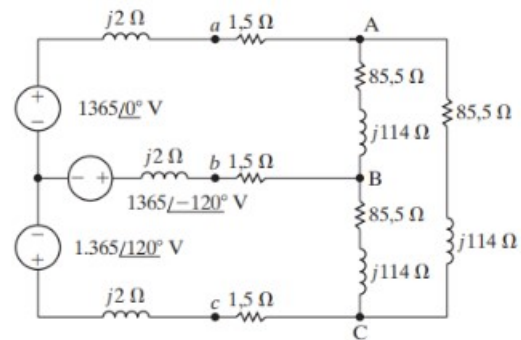
$$I_{cb} = \frac{1}{\sqrt{3}} I_{bB} / \underline{186.87 - 30^\circ} = 105.1/\underline{156.87^\circ} \text{ A}$$

$$I_{ac} = \frac{1}{\sqrt{3}} I_{cC} / \underline{-53.13 - 30^\circ} = 105.1/\underline{-83.13^\circ} \text{ A}$$

## Problema P11.23

- 11.23 a) Determine o valor eficaz e o ângulo de fase de  $I_{CA}$  no circuito da Figura P11.23.
- b) Qual percentagem da potência média fornecida pela fonte trifásica é dissipada na carga trifásica?

Figura P11.23



(a)

Como o circuito trifásico do enunciado é equilibrado, o primeiro passo é encontrar o circuito monofásico equivalente.

Para isso, aplicamos conversão delta - estrela na carga trifásica conectada à fonte. Quando todas impedâncias são iguais, temos que a conversão de uma impedância em  $\Delta$  para  $Y$  é feita via

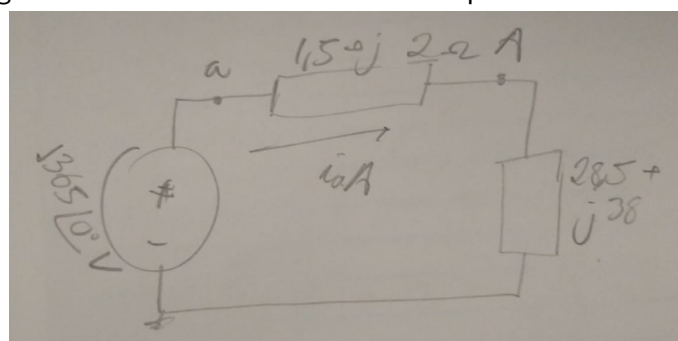
$$Z_Y = \frac{Z_{\Delta}}{3} \quad (11.23.1)$$

Assim, temos que configuração  $Y$  da carga do problema possui impedância de fase dada por

$$Z_Y = \frac{85.5 + j114}{3} = 28.5 + j38 \Omega$$

Assim, o circuito monofásico equivalente da fase  $a$  está exibido na Figura 11.23.1

Combinando as impedâncias de fase e carga, e usando o fato que a fonte da fase  $c$  está desconectada do neutro da fonte trifásica, temos o circuito equivalente mostrado na Figura 11.23.1.

Figure 11.23.1: Circuito monofásico equivalente da fase  $a$ .

Nesse circuito equivalente, temos que a corrente de fase  $I_{aA}$  é

$$I_{aA} = \frac{1365}{30 + j40} = 27.31 \angle -53.13^\circ \text{ A}$$

Assim, como as correntes de fase em um circuito equilibrado tem módulo igual mas defasagem de  $120^\circ$ , temos

$$I_{bB} = 27.31 \angle -173.13^\circ \text{ A} \quad , \quad I_{cC} = 27.31 \angle 66.87^\circ \text{ A}$$

Note que as tensões de fase são positivas (ordem  $abc$ ), logo as correntes também possuem essa ordem. Usando  $I_{cC}$ , temos que a queda de tensão  $V_{cn}$  em cada fase da carga na configuração  $Y$  é

$$V_{cn} = I_{cC} \cdot Z_Y$$

$$V_{cn} = 27.31 \angle 66.87^\circ \cdot (28.5 + j38) = 1296.78 \angle 120^\circ \text{ V}$$

Uma vez conhecido a tensão de fase  $V_{cn}$  na carga, temos que a tensão de linha  $V_{CA}$  na carga é

$$V_{CA} = \sqrt{3} |V_{cn}| \angle \phi_{cn} + 30^\circ \quad (11.23.2)$$

Substituindo, temos

$$V_{CA} = 2246 \angle 150^\circ \text{ V}$$

Finalmente, a corrente de linha  $I_{CA}$  na configuração  $\Delta$  é

$$I_{CA} = \frac{V_{CA}}{Z_\Delta} = \frac{2246 \angle 150^\circ}{85.5 + j114}$$

$$\boxed{I_{CA} = 15.46 \angle 96.86^\circ \text{ A}}$$

## (b)

Usando o circuito monofásico equivalente da Figura 11.23.1, temos que a potência fornecida pela fonte por fase é

$$S_{V/\phi} = V_{An} \cdot (I_{aA})^* = 37278.15 \angle 53.13^\circ \text{ VA}$$

A potência que efetivamente chega na carga por fase é

$$S_{L/\phi} = V_{an} \cdot (I_{aA})^*$$

Podemos usar a fase  $c$  que já conhecemos o valor de  $V_{cn}$ , usando o fato do circuito equilibrado dissipar a mesma potência em todas as fases.

$$S_{L/\phi} = V_{cn} \cdot (I_{cC})^* = 31415.06 \angle 53.13^\circ \text{ VA}$$

A porcentagem  $S_\%$  da potência fornecida pela fonte que chega na carga é

$$S_\% = \frac{S_{L/\phi}}{S_{V/\phi}} = \frac{31415.06 \angle 53.13^\circ \text{ VA}}{37278.15 \angle 53.13^\circ \text{ VA}} 100\%$$

$$\boxed{S_\% = 84.27\%}$$

## Problema P11.36

**11.36** Três cargas trifásicas equilibradas estão ligadas em paralelo. A carga 1 está ligada em Y e tem uma impedância de  $400 + j300 \Omega/\phi$ ; a carga 2 está ligada em  $\Delta$  e tem uma impedância de  $2.400 - j1.800 \Omega/\phi$ ; e a carga 3 absorve  $172,8 + j2.203,2 \text{ kVA}$ . As cargas são alimentadas por uma linha de distribuição com uma impedância de  $2 + j16 \Omega/\phi$ . O módulo da tensão fase-neutro na carga é  $24\sqrt{3} \text{ kV}$ .

- Calcule a potência complexa total no início da linha.
- Qual porcentagem da potência média, disponível no início da linha, é fornecida às cargas?



**(a)**

Começamos identificando a corrente que passa em cada carga, para assim conseguirmos calcular a corrente de fase. Uma vez calculado a corrente de fase, usamos o fato do circuito estar equilibrado para calcular a corrente total fornecida pela fonte.

Na carga 1, que possui impedância  $Z_1 = 400 + j300 \Omega$  e está ligada em  $Y$ , temos

$$I_1 = \frac{V_a}{Z_1} \Rightarrow I_1 = \frac{24000\sqrt{3}/0^\circ}{400 + j300}$$

$$I_1 = 83.14/-36.87^\circ \text{ A} = 66.52 - j49.89 \text{ A}$$

Na carga 2, ligada em  $\Delta$ , usamos o mesmo raciocínio da carga 1, mas usando a tensão de linha, uma vez que a ligação em  $\Delta$  não admite conexão ao terminal neutro.

$$I_2 = \frac{V_{ab}}{Z_2} \Rightarrow I_2 = \frac{24000\sqrt{3}\sqrt{3}/0 + 30^\circ}{2400 - j1800}$$

$$I_2 = 8/-6.87^\circ \text{ A} = 7.94 - j0.96 \text{ A}$$

Por fim, para a carga 3, usamos a potência aparente para calcular a corrente, através de

$$S_3 = V_a \cdot I_3 \Rightarrow I_3 = \left( \frac{S_3}{V_a} \right)^*$$

$$I_3 = \left( \frac{172800 + j2203200}{24000\sqrt{3}} \right)^*$$

$$I_3 = 4.15 - j53 \text{ A}$$

Com  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  calculados, temos a corrente total  $I_{T_a}$  da fase  $a$  dada por

$$I_{T_a} = I_1 + I_2 + I_3$$

$$I_{T_a} = 78.61 - j103.85 \text{ A}$$

Agora calculamos a tensão fornecida pela fonte na fase  $a$ , considerando a queda causada pela impedância de linha.

A queda causada pela linha é

$$V_l = Z_l \cdot I_{T_a} \Rightarrow V_l = (2 + j16) \cdot (78.61 - j103.85)$$

$$V_l = 1818.82 + j1050 \text{ V}$$

Assim, a tensão  $V_{T_a}$  fornecida pela fase é

$$V_{T_a} = V_a + V_l \Rightarrow V_{T_a} = 24000\sqrt{3}/0^\circ + 1818.82 + j1050$$

$$V_{T_a} = 43.39 + j1.05 \text{ kV}$$

Assim, a potência total fornecida pela fase  $a$  é

$$S_a = V_{T_a} \cdot (I_{T_a})^*$$

$$S_a = [(43.39 + j1.05) \cdot 10^3] \cdot (78.61 - j103.85)^*$$

$$S_a = 3.3 + j4.59 \text{ MVA}$$

Como o circuito está equilibrado, a potência total fornecida pela fonte (3 fases) é

$$S_T = 3 \cdot S_a$$

$$S_T = 9.9 + j13.77 \text{ MVA}$$

**(b)**

Cada fase apresenta uma queda de tensão indesejada de  $V_l = 1818.82 + j1050 \text{ V}$  causada pela impedância da linha. A potência que essa impedância de linha possui é

$$S_l = V_l \cdot (I_{T_a})^* \Rightarrow S_l = (1818.82 + j1050) \cdot (78.61 - j103.85)^*$$

$$S_l = 33.93 + j271.42 \text{ kVA}$$

Assim, nas 3 fases, a potência total perdida nas impedâncias de linha é

$$S_{l_T} = 3 \cdot S_l = 101.79 + j814.26 \text{ kVA}$$

Finalmente, o percentual de potência que efetivamente é fornecida às cargas é

$$S_{\%} = \left| \frac{S_T - S_{l_T}}{S_T} \right| 100\%$$

$$S_{\%} = \left| \frac{9.9 + j13.77 - 0.10179 - j0.8142}{9.9 + j13.77} \right| 100\%$$

$$S_{\%} = |0.9551 - j0.02315| 100\%$$

$$S_{\%} = 95.53\%$$

## Problema P11.38

**11.38** Uma fonte trifásica equilibrada está fornecendo 540 kVA, com um fp atrasado de 0,96, a duas cargas paralelas equilibradas ligadas em  $\Delta$ . A impedância da linha de distribuição que liga a fonte à carga é desprezível. A potência associada à carga 1 é 38,4 – j208,8 kVA.

- Determine os tipos de componente e suas impedâncias por fase da carga 2, se a tensão de linha for  $1.600\sqrt{3} \text{ V}$  e os componentes da impedância estiverem em série.
- Repita (a) com os componentes da impedância em paralelo.

**(a)**

A fonte trifásica fornece uma potência total  $S = 540 \text{ kVA}$ , com um fator de potência atrasado de  $FP = 0.96$ . O fator de potência atrasado significa que a carga é indutiva, possuindo um ângulo de fase  $\phi < 0$ .

Sabemos que o fator de potência é definido como

$$FP = \frac{P}{|S|} \quad (11.38.1)$$

Isolando  $P$  e substituindo, temos

$$P = (FP)|S| \Rightarrow P = 518400 \text{ W}$$

Além disso, temos que a potência aparente  $S$  se relaciona com as potências ativa  $P$  e reativa  $Q$  através de

$$S^2 = P^2 + Q^2 \quad (11.38.2)$$

Isolando  $Q$  e substituindo, temos

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} \Rightarrow Q = 151200 \text{ VAR}$$

Portanto, a potência total fornecida pela fonte é

$$S_T = 518400 \text{ W} + 151200 \text{ VAR}$$

Como a carga 1 dissipa  $S_1 = 38.4 - j208.8 \text{ kVA}$ , e sabemos que

$$S_2 = S_T - S_1$$

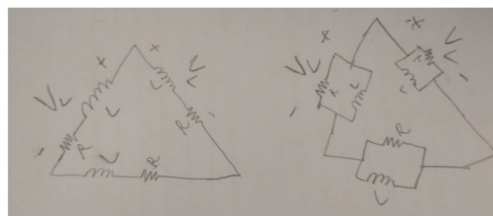
Temos

$$S_2 = 480 + j360 \text{ kVA}$$

Além disso, como as cargas são trifásicas e equilibradas, temos que cada fase recebe exatamente  $\frac{1}{3}$  da potência da carga. Assim, cada fase de  $S_2$  recebe

$$S_{2/\phi} = 160 + j120 \text{ kVA}$$

Figure 11.38.1: (a) Componentes da carga em série. (b) Componentes da carga em paralelo



(a)

(b)

No caso dos componentes da carga estarem em série, como mostra a Figura 11.38.1 (a), temos

$$S_{2/\phi} = \frac{|V_L|^2}{Z^*} \quad (11.38.3)$$

Isolando  $Z$  em (11.38.3),

$$Z_s = \left( \frac{|V_L|^2}{S_{2/\phi}} \right)^* = \left( \frac{|1600\sqrt{3}|^2}{160000 + j120000} \right)^*$$

$$Z_s = \left( \frac{7680000}{160000 + j120000} \right)^* = (30.72 - j23.04)^* = 30.72 + j23.04 \Omega$$

Assim, usando  $L = \frac{X_L}{j\omega}$  e assumindo a fonte trifásica operando em  $f = 60 \text{ Hz}$ , temos os componentes em série dados por

$$R = 30.72 \Omega, \quad L = 61.1 \text{ mH}$$

**(b)**

Agora usamos os componentes em paralelo, como mostra a Figura 11.38.1 (b). Note que o resistor  $R$  irá dissipar totalmente a parte real da potência, enquanto o indutor  $L$  está associado totalmente à parte imaginária da potência. Assim, podemos fazer

$$R = \left( \frac{|V_L|^2}{\operatorname{Re} \{S_{2/\phi}\}} \right)^*$$

$$R = \left( \frac{|1600\sqrt{3}|^2}{160000} \right)^* = 48 \, \Omega$$

Agora para a parte imaginária associada ao indutor,

$$X_L = \left( \frac{|V_L|^2}{\operatorname{Im} \{S_{2/\phi}\}} \right)^*$$

$$X_L = \left( \frac{|1600\sqrt{3}|^2}{j120000} \right)^* = (-j64)^* = j64 \, \Omega$$

Novamente usando  $L = \frac{X_L}{j\omega}$ , identificamos a indutância de  $L$ , obtendo

$R = 48 \, \Omega \quad , \quad L = 169.8 \, \text{mH}$
---