

## Problema P9.3

9.3 Considere a tensão senoidal

$$v(t) = 25 \cos(400\pi t + 60^\circ) \text{ V.}$$

- a) Qual é a amplitude máxima da tensão?
- b) Qual é a frequência em hertz?
- c) Qual é a frequência em radianos por segundo?
- d) Qual é o ângulo de fase em radianos?
- e) Qual é o ângulo de fase em graus?
- f) Qual é o período em milissegundos?
- g) Qual é a primeira vez, após  $t = 0$ , que  $v = 0 \text{ V}$ ?
- h) A função senoidal é deslocada 5/6 ms para a direita ao longo do eixo do tempo. Qual é a expressão para  $v(t)$ ?
- i) Qual é o valor mínimo de milissegundos de que a função deve ser deslocada para a esquerda, se a expressão para  $v(t)$  for  $25 \sin 400\pi t \text{ V}$ ?

(a)

Sabemos que uma tensão senoidal  $v(t)$  é expressa na forma

$$v(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (9.3.1)$$

onde

- $A$ : amplitude máxima da tensão (V);
- $\omega$ : frequência angular da tensão (rad/s);
- $\phi$ : defasagem em relação à origem (rad ou  $^\circ$ ).

Portanto, conforme o enunciado, temos

$$A = 25 \text{ V}$$

(b)

A frequência angular  $\omega$  é dada por

$$\omega = 2\pi f \quad \Rightarrow \quad f = \frac{\omega}{2\pi}$$

Substituindo, temos

$$f = 200 \text{ Hz}$$

(c)

Conforme o enunciado, temos

$$\omega = 400\pi \text{ rad/s} = 1256,64 \text{ rad/s}$$

(d)

Conforme o enunciado, temos  $\phi = 60^\circ$ . Convertendo para radianos, temos

$$\phi = \frac{\pi}{3} \text{ rad} = 1,047 \text{ rad}$$

**(e)**

Conforme o enunciado,

$$\phi = 60^\circ$$

**(f)**

A frequência angular  $\omega$  é dada por

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Substituindo,

$$T = 5 \text{ ms}$$

**(g)**

Isolando  $t$  em (9.3.1), temos

$$\begin{aligned}\omega t + \phi &= \cos^{-1} \left( \frac{v(t)}{A} \right) \\ t &= \frac{1}{\omega} \left[ \cos^{-1} \left( \frac{v(t)}{A} \right) - \phi \right]\end{aligned}\tag{9.3.2}$$

Para identificar os instantes  $t$  para os quais  $v(t) = 0$ , substituímos  $v(t) = 0$  em (9.3.2), obtendo

$$t = \frac{1}{\omega} \left[ \cos^{-1}(0) - \phi \right]$$

O primeiro ângulo  $\theta$  para o qual  $\cos(\theta) = 0$  é  $\frac{\pi}{2}$ , portanto

$$t = \frac{1}{\omega} \left[ \frac{\pi}{2} - \phi \right]$$

Substituindo os valores do enunciado, temos

$$t = 416,67 \mu\text{s}$$

**(h)**

Do item (f), sabemos que  $T = 5\text{ms}$ . Além disso, sabemos que  $1T = 360^\circ$  para a função cosseno. Portanto, usando proporcionalidade, temos

$$\frac{T}{\Delta t} = \frac{360^\circ}{\Delta \phi}$$

Substituindo,

$$\frac{5 \text{ ms}}{\frac{5}{6} \text{ ms}} = \frac{360^\circ}{\Delta \phi}$$

$$\Delta\phi = 60^\circ$$

Portanto, um deslocamento de  $\frac{5}{6}$  ms equivale a um deslocamento angular de  $\Delta\phi = 60^\circ$ . Note que deslocamentos à direita de uma função trigonométrica correspondem a deslocamentos com sinal negativo. Assim,

$$\Delta\phi = -60^\circ$$

Aplicando isso à função original, temos a nova expressão de  $v(t)$  dada por

$$v(t) = A \cos(\omega t + \phi + \Delta\phi)$$

$$v(t) = 25 \cos(400\pi t + 60^\circ - 60^\circ)$$

$$\boxed{v(t) = 25 \cos(400\pi t) \text{ V}}$$

**(i)**

Sabemos que

$$\cos(\theta) = \sin(\theta + 90^\circ)$$

Portanto, podemos reescrever a função de  $v(t)$  como

$$v(t) = A \sin(\omega t + \phi + 90^\circ)$$

Seja  $\Delta t$  o deslocamento ao longo do eixo  $x$  que provoca uma diferença de fase  $\Delta\theta$ , de tal modo que

$$A \sin(\omega t + \phi + \Delta\theta + 90^\circ) = A \sin(\omega t)$$

Para isso, precisamos de

$$\phi + \Delta\theta + 90^\circ = 0$$

Portanto,

$$\Delta\theta = -\phi - 90^\circ$$

Uma vez conhecido  $\Delta\theta$ , identificamos o deslocamento temporal  $\Delta t$  através da proporcionalidade

$$\frac{T}{\Delta t} = \frac{360^\circ}{-\phi - 90^\circ}$$

Isolando  $\Delta t$ , temos

$$\Delta t = (-\phi - 90^\circ) \frac{T}{360^\circ}$$

Substituindo,

$$\boxed{\Delta t = -2,08 \text{ ms}}$$

## Problema P9.14

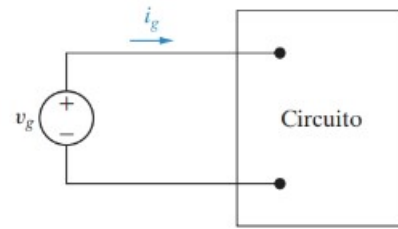
9.14 As expressões para a tensão e a corrente de regime permanente nos terminais do circuito da Figura P9.14 são

$$v_g = 300 \cos(5.000\pi t + 78^\circ) \text{ V},$$

$$i_g = 6 \sin(5.000\pi t + 123^\circ) \text{ A}.$$

- Qual é a impedância vista pela fonte?
- De quantos microssegundos é a defasagem entre a corrente e a tensão?

Figura P9.14



**(a)**

A impedância  $Z_{in}$  vista pela fonte é dada por

$$Z_{in} = \frac{V_g}{I_g} \quad (9.14.1)$$

Usando a relação trigonométrica

$$\sin \theta = \cos(\theta - 90^\circ)$$

Podemos reescrever a expressão de  $i_g(t)$  como

$$i_g(t) = 6 \cos(5000\pi t + 123^\circ - 90^\circ)$$

$$i_g(t) = 6 \cos(5000\pi t + 33^\circ)$$

Assim, em notação fasorial, temos

$$Z_{in} = \frac{\frac{300}{\sqrt{2}} \angle 78^\circ}{\frac{6}{\sqrt{2}} \angle 33^\circ} \quad (9.14.2)$$

$$\boxed{Z_{in} = 50 \angle 45^\circ \Omega}$$

**(b)**

Usando proporcionalidade (regra de três simples), sabemos que uma diferença de fase de  $\Delta\phi$  corresponde a uma diferença temporal  $\Delta t$  dada por

$$\frac{T}{\Delta t} = \frac{360^\circ}{\Delta\phi}$$

onde  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  é o período do sinal. Isolando  $\Delta t$ , temos

$$\Delta t = T \frac{\Delta\phi}{360^\circ} \quad (9.14.3)$$

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega} \frac{\Delta\phi}{360^\circ}$$

Substituindo tudo, temos

$$\Delta t = 50 \mu s$$

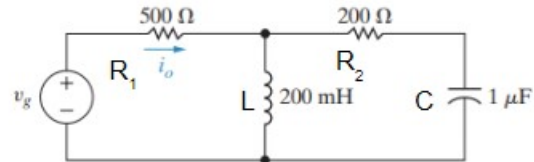
## Problema P9.37

**9.37** A frequência da fonte de tensão senoidal no circuito da Figura P9.37 é ajustada até que a corrente  $i_o$  fique em fase com  $v_g$ .

Pspice  
Multisim

- Determine a frequência em hertz.
- Determine a expressão de regime permanente para  $i_o$  (na frequência encontrada em [a]), se  $v_g = 90 \cos \omega t$  V.

Figura P9.37



**(a)**

Vamos começar identificando a impedância equivalente  $Z_{in}$  vista pela fonte  $v_g$ .

$$Z_{in} = \left( \left( \frac{1}{j\omega C} + R_2 \right) // j\omega L \right) + R_1$$

$$Z_{in} = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{\frac{1}{j\omega C} + R_2}}$$

Agora vamos isolar a parte real da parte complexa.

$$Z_{in} = R_1 + \frac{1}{-\frac{j}{\omega L} + \frac{1}{-\frac{j}{\omega C} + R_2}}$$

$$Z_{in} = R_1 + \frac{1}{-\frac{j}{\omega L} + \frac{\omega C}{-j + R_2 \omega C}}$$

$$Z_{in} = R_1 + \frac{1}{-\frac{j}{\omega L} + \frac{(\omega C)(+j + R_2 \omega C)}{1^2 + (R_2 \omega C)^2}}$$

$$Z_{in} = R_1 + \frac{1}{-\frac{j}{\omega L} + \frac{j\omega C}{1 + (R_2 \omega C)^2} + \frac{R_2 \omega^2 C^2}{1 + (R_2 \omega C)^2}}$$

$$Z_{in} = R_1 + \frac{1}{-\frac{R_2 \omega^2 C^2}{1 + (R_2 \omega C)^2} + j \left( -\frac{1}{\omega L} + \frac{\omega C}{1 + (R_2 \omega C)^2} \right)}$$

Vamos adotar uma notação para simplificar a expressão. Sejam

$$A = \frac{R_2 \omega^2 C^2}{1 + (R_2 \omega C)^2} \quad , \quad B = -\frac{1}{\omega L} + \frac{\omega C}{1 + (R_2 \omega C)^2}$$

Com isso, podemos reescrever a expressão de  $Z_{in}$  como

$$Z_{in} = R_1 + \frac{1}{A + jB}$$

Continuamos o processo de isolar a parte real da parte complexa.

$$Z_{in} = R_1 + \frac{1}{A + jB}$$

$$Z_{in} = R_1 + \frac{A - jB}{A^2 + B^2}$$

$$Z_{in} = \left( R_1 + \frac{A}{A^2 + B^2} \right) - j \frac{B}{A^2 + B^2}$$

Agora é possível expressar uma função para o ângulo de fase  $\phi$  de  $Z_{in}$ , dada por

$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{-\frac{B}{A^2+B^2}}{R_1 + \frac{A}{A^2+B^2}} \right)$$

$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{-\frac{B}{A^2+B^2}}{\frac{R_1(A^2+B^2)+A}{A^2+B^2}} \right)$$

$$\phi = \tan^{-1} \left( -\frac{B}{R_1(A^2 + B^2) + A} \right) \quad (9.37.1)$$

Uma vez calculado  $Z_{in}$ , podemos expressar a relação entre  $V_g$  e  $I_o$  através de

$$V_g = Z_{in} \cdot I_g \quad (9.37.2)$$

Para que (9.37.2) seja satisfeita com  $V_g$  e  $I_o$  em fase, temos que o ângulo de fase de  $Z_{in}$  deve ser nulo. Portanto, usando (9.37.1), temos

$$\phi = \tan^{-1} \left( -\frac{B}{R_1(A^2 + B^2) + A} \right) = 0$$

$$-\frac{B}{R_1(A^2 + B^2) + A} = 0$$

$$B = 0$$

Expandindo  $B$  conforme o definimos, temos

$$-\frac{1}{\omega L} + \frac{\omega C}{1 + (R_2 \omega C)^2} = 0$$

$$\frac{-1 - R_2^2 \omega^2 C^2 + (\omega L)(\omega C)}{(\omega L)(1 + R_2^2 \omega^2 C^2)} = 0$$

$$-1 - R_2^2 \omega^2 C^2 + \omega^2 LC = 0$$

Isolando  $\omega$ , temos

$$\omega^2 = \frac{1}{LC - R_2^2 C^2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC - R_2^2 C^2}}$$

Usando  $\omega = 2\pi f$ , a frequência  $f$  em Hertz da fonte de tensão deve ser

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC - R_2^2 C^2}} \quad (9.37.3)$$

Substituindo,

$$f = 397.89 \text{ Hz}$$

**(b)**

Usando (9.37.2), temos

$$i_o(t) = \frac{v_g(t)}{Z_{in}} \quad (9.37.4)$$

Note que  $Z_{in}$  é puramente real, pois o ângulo de fase é nulo (fizemos  $B = 0$  no item anterior). Assim, a expressão de  $Z_{in}$  se reduz a

$$Z_{in} = R_1 + \frac{A}{A^2 + 0}$$

$$Z_{in} = R_1 + \frac{1}{A}$$

$$Z_{in} = R_1 + \frac{1 + (R_2 \omega C)^2}{R_2 \omega^2 C^2}$$

$$Z_{in} = 1500 \, \Omega$$

Substituindo em (9.37.4),

$$i_o(t) = \frac{90 \cos(\omega t)}{1500 \, \Omega}$$

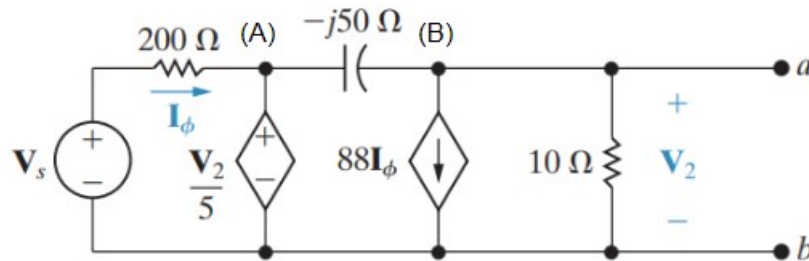
$$i_o(t) = 60 \cos(\omega t) \text{ mA}$$

$$i_o(t) = 60 \cos(2500t) \text{ mA}$$

## Problema P9.50

**9.50** Determine o circuito equivalente de Norton em relação aos terminais  $a, b$  para o circuito da Figura P9.50 quando  $\mathbf{V}_s = 5\angle 0^\circ \text{ V}$ .

Figura P9.50



Em um circuito equivalente norton, temos

$$I_N = I_{SC} \quad , \quad R_N = R_{th}$$

Vamos começar calculando a tensão de Thevenin  $V_{th}$  entre os terminais  $a$  e  $b$ , abrindo-os.

Expressando as variáveis de controle em função dos elementos do circuito, obtemos

$$V_2 = V_B \quad (9.50.1)$$

$$I_\phi = \frac{5V - V_A}{200 \, \Omega} \quad (9.50.2)$$

Feito isso, aplicamos análise nodal dos nós essenciais  $A$  e  $B$ . Começamos pelo nó  $A$ . Obtemos de imediato que

$$V_A = \frac{V_2}{5} = \frac{V_B}{5} \quad (9.50.3)$$

Agora vamos para o nó  $B$ .

$$\frac{V_B - V_A}{-j50 \, \Omega} + 88I_\phi + \frac{V_B - 0}{10 \, \Omega} = 0$$

Usando (9.50.2) e (9.50.3), temos

$$\frac{V_B - \frac{V_B}{5}}{-j50 \, \Omega} + 88 \frac{5V - \frac{V_B}{5}}{200 \, \Omega} + \frac{V_B}{10 \, \Omega} = 0$$

Isolando  $V_B$ , temos

$$\frac{V_B}{-j50} - \frac{V_B}{-j250} - \frac{88V_B}{1000} + \frac{V_B}{10} = -2.2$$

$$V_B = -\frac{2.2}{\frac{1}{-j50} - \frac{1}{-j250} - \frac{88}{1000} + \frac{1}{10}}$$

$$V_B = -66 + j88V = 110\angle 126.86^\circ V \quad (9.50.4)$$



Usando (9.50.3), obtemos

$$V_A = 22/\underline{126.86^\circ}V \quad (9.50.5)$$

Assim, obtemos que a tensão de Thevenin é dada por

$$V_{th} = V_{ab} = V_B = 110/\underline{126.86^\circ}V \quad (9.50.6)$$

Agora calculamos a corrente de curto-circuito  $I_{sc}$ . Curto circuitamos os terminais  $a$  e  $b$ , e novamente expressamos as variáveis de controle em função dos elementos do circuito.

$$V_2 = 0V \quad (9.50.7)$$

$$I_\phi = \frac{5V - V_A}{200 \Omega} \quad (9.50.8)$$

Agora aplicamos análise nodal nos nós essenciais  $A$  e  $B$ . De imediato temos que

$$V_A = \frac{V_2}{5} = \frac{V_B}{5}$$

No entanto, devido ao curto-circuito, observe que

$$V_B = 0V$$

E portanto,

$$V_A = V_B = 0V$$

Escrevendo a equação de nó de  $B$ , temos

$$\frac{V_B - \frac{V_B}{5}}{-j50 \Omega} + 88 \frac{5V - \frac{V_B}{5}}{200 \Omega} + I_{sc} = 0$$

Substituindo e isolando  $I_{sc}$ ,

$$0 + 88 \frac{5V}{200 \Omega} + I_{sc} = 0$$

$$I_{sc} = -2.2 A = 2.2/\underline{180^\circ} A \quad (9.50.9)$$

Usando (9.50.9) e (9.50.6), obtemos a resistência de Thevenin  $R_{th}$ .

$$R_{th} = \frac{V_{th}}{I_{sc}} = \frac{110/\underline{126.86^\circ}}{2.2/\underline{180^\circ}} = 50/\underline{-53.14^\circ}\Omega \quad (9.50.10)$$

Finalmente,

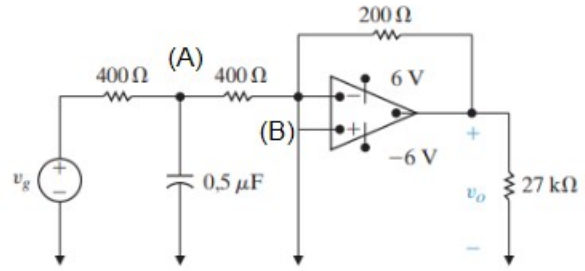
$$\boxed{R_N = 50/\underline{-53.14^\circ}\Omega = 30 - j40\Omega}$$

$$\boxed{I_N = -2.2A}$$

## Problema P9.69

**9.69** A fonte de tensão senoidal no circuito mostrado na Figura P9.69 está gerando a tensão  $v_g = 20 \cos 5.000t$  V. Se o amp op for ideal, qual será a expressão de regime permanente para  $v_o(t)$ ?

Pspice  
Multisim



O primeiro passo é expressar  $V_o$  em função das tensões de entrada no AmpOp. Aplicamos análise nodal no nó (B).

$$i_- + i_+ + i_{GND} + \frac{V_B - V_o}{R_s} + \frac{V_B - V_A}{R_2} = 0$$

Como o Amplificador Operacional é ideal, temos

$$i_- = i_+ = 0 \text{ A} \quad (9.69.1)$$

Além disso, temos  $V_B = 0$ . Substituindo na expressão do nó, temos

$$i_{GND} + \frac{V_o}{R_s} + \frac{V_A}{R_2} = 0$$

Isolando  $V_o$ , temos

$$V_o = -R_s \left( i_{GND} + \frac{V_A}{R_2} \right) \quad (9.69.2)$$

Agora aplicamos análise de malhas, com as correntes de malha  $i_1$  e  $i_2$  na figura. Note que  $i_2 = i_{GND}$ . Começamos pela malha 1:

$$-V_g + R_1 i_1 + \frac{1}{j\omega C} (i_1 - i_2) = 0$$

$$R_1 i_1 - \frac{j}{\omega C} (i_1 - i_2) = V_g$$

$$i_1 \left( R_1 - \frac{j}{\omega C} \right) + i_2 \left( \frac{j}{\omega C} \right) = V_g$$

Agora vamos para a malha 2:

$$\frac{1}{j\omega C} (i_2 - i_1) + R_2 i_2 = 0$$

$$i_1 \left( \frac{j}{\omega C} \right) + i_2 \left( R_2 - \frac{j}{\omega C} \right) = 0$$

Com as duas equações de malha, temos o sistema linear

$$\begin{bmatrix} R_1 - \frac{j}{\omega C} & \frac{j}{\omega C} \\ \frac{j}{\omega C} & R_2 - \frac{j}{\omega C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_g \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9.69.3)$$

Substituindo os valores, temos

$$\begin{bmatrix} 400 - j400 & 400 \\ 400 & 400 - j400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5000}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 400 - j400(400 + j400) & 400(400 + j400) \\ 400 & 400 - j400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5000}{\sqrt{2}}(400 + j400) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 320000 & 400(400 + j400) \\ 400 & 400 - j400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5000}{\sqrt{2}}(400 + j400) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 320000 & -400(400 + j400) \\ 0 & 400 - j400 + \frac{400(400+j400)}{-800} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5000}{\sqrt{2}}(400 + j400) \\ 0 + \frac{\frac{5000}{\sqrt{2}}(400+j400)}{-800} \end{bmatrix}$$

Resolvendo, temos

$$i_2 = \frac{\frac{\frac{5000}{\sqrt{2}}(400+j400)}{-800}}{400 - j400 + \frac{-400(400+j400)}{-800}}$$

$$i_2 = \frac{\frac{5000}{\sqrt{2}}(400 + j400)}{-320000 + j320000 - 400(400 + j400)}$$

$$i_2 = \frac{1414200 + j1414200}{-480000 + j160000}$$

$$i_2 = \frac{2 \cdot 10^6 / 45^\circ}{505964 / 161.57^\circ}$$

$$i_2 = i_{GND} = 3,95 / -116,57^\circ \text{ A} \quad (9.69.4)$$

## Problema P9.77

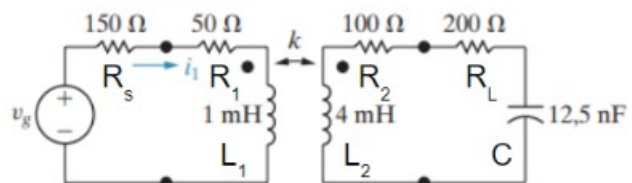
**9.77** A fonte de tensão senoidal no circuito visto na Figura P9.77 está funcionando a uma

Pspice  
Multisim

frequência de 200 krad/s. O coeficiente de acoplamento é ajustado até que o valor de pico de  $i_1$  seja máximo.

- Qual é o valor de  $k$ ?
- Se  $v_g = 560 \cos(2 \times 10^5 t)$  V, qual é a amplitude máxima de  $i_1$ ?

Figura P9.77



**(a)**

O valor de  $i(t)$  depende da impedância  $Z_{in}$  vista pela fonte  $V_g$ . Sabemos que  $Z_{in}$  é expressa por

$$Z_{in} = Z_{11} + Z_r \quad (9.77.1)$$

Além disso, sabemos que a impedância refletida  $Z_r$  é dada por

$$Z_r = \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}} \quad (9.77.2)$$

Substituindo (9.77.2) em (9.77.1), temos

$$Z_{in} = Z_{11} + \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}} \quad (9.77.3)$$

Onde

- $Z_{11}$ : Autoimpedância da malha do primeiro enrolamento;
- $Z_{22}$ : Autoimpedância da malha do segundo enrolamento;
- $M$ : Indutância mútua.

Expandindo os termos de (9.77.3), temos

$$Z_{in} = R_s + R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 (k\sqrt{L_1 L_2})^2}{j\omega L_2 + R_2 + R_L + \frac{1}{j\omega C}} \quad (9.77.4)$$

Vamos reescrever (9.77.4) de modo a isolar a parte real da parte complexa.

$$Z_{in} = R_s + R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 k^2 L_1 L_2}{j\omega L_2 + R_2 + R_L - \frac{j}{\omega C}}$$

$$Z_{in} = R_s + R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 k^2 L_1 L_2}{R_2 + R_L + j(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})}$$

$$Z_{in} = R_s + R_1 + j\omega L_1 + \frac{(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(R_2 + R_L - j(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C}))}{(R_2 + R_L + j(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C}))(R_2 + R_L - j(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C}))}$$

$$Z_{in} = R_s + R_1 + j\omega L_1 + \frac{(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(R_2 + R_L) - j(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2}$$

$$Z_{in} = R_s + R_1 + \frac{(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(R_2 + R_L)}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2} + j \left( \omega L_1 - \frac{(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2} \right) \quad (9.77.5)$$

A partir de (9.77.5) podemos determinar o módulo de  $Z_{in}$ .

$$|Z_{in}|(k) = \sqrt{\left( R_s + R_1 + \frac{(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(R_2 + R_L)}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2} \right)^2 + \left( \omega L_1 - \frac{(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2} \right)^2} \quad (9.77.6)$$

A expressão (9.77.6) expressa o módulo de  $Z_{in}$  como uma função do coeficiente  $k$ . O valor máximo de  $i(t)$  ocorre quando  $Z_{in}(k)$  atinge seu valor mínimo, ou seja, quando

$$\frac{d}{dk} |Z_{in}|(k) = 0 \quad (9.77.7)$$

Vamos diferenciar (9.77.6) com respeito a  $k$ . Antes disso, vamos adotar uma notação para reduzir o tamanho da expressão. Sejam

$$A = \frac{(\omega^2 L_1 L_2)(R_2 + R_L)}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2} \quad , \quad B = \frac{(\omega^2 L_1 L_2)(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2}$$

Note que  $A$  e  $B$  não dependem de  $k$ . Assim, podemos reescrever (9.77.6) como

$$|Z_{in}|(k) = \sqrt{(R_s + R_1 + Ak^2)^2 + (\omega L_1 - Bk^2)^2} \quad (9.77.8)$$

Diferenciando (9.77.8) com respeito a  $k$ , temos

$$\frac{d}{dk}|Z_{in}|(k) = \frac{1}{2} \frac{2(R_s + R_1 + Ak^2)(2Ak) + 2(\omega L_1 - Bk^2)(-2Bk)}{\sqrt{(R_s + R_1 + Ak^2)^2 + (\omega L_1 - Bk^2)^2}} \quad (9.77.9)$$

Para que (9.77.9) seja igual a zero, temos

$$2(R_s + R_1 + Ak^2)(2Ak) + 2(\omega L_1 - Bk^2)(-2Bk) = 0$$

$$(R_s + R_1 + Ak^2)(Ak) + (\omega L_1 - Bk^2)(-Bk) = 0$$

$$AkR_s + AkR_1 + A^2k^3 - \omega BkL_1 + B^2k^3 = 0$$

$$k^3(A^2 + B^2) + k(AR_s + AR_1 - \omega BL_1) = 0$$

$$k(k^2(A^2 + B^2) + (AR_s + AR_1 - \omega BL_1)) = 0$$

$$k^2(A^2 + B^2) + AR_s + AR_1 - \omega BL_1 = 0$$

$$k = \sqrt{\frac{\omega BL_1 - AR_s - AR_1}{(A^2 + B^2)}}$$

Substituindo os valores todos, temos

$$A = 192 \quad , \quad B = 256$$

$$\boxed{k = 0.3536}$$

**(b)**

Conhecido o valor de  $k = 0.3536$ , podemos calcular o valor da impedância vista pela fonte através de (9.77.4), obtendo

$$Z_{in} = 224 + j168 \, \Omega$$

Portanto, usando o fato que a corrente fornecida pela fonte é

$$i(t) = \frac{v_g(t)}{Z_{in}}$$

Em notação fasorial,

$$I = \frac{V_g}{Z_{in}} = \frac{\frac{560}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ}{224 + j168 \, \Omega}$$

$$I = 1.4142 \angle -36.57^\circ \text{ A}$$

Portanto, o valor de pico de  $i(t)$  é

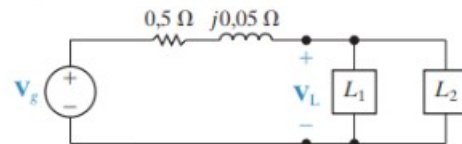
$$i_m(t) = 1.4142\sqrt{2} = 2 \text{ A}$$

## Problema P10.22

**10.22** As duas cargas mostradas na Figura P10.22 podem ser descritas da seguinte forma: a carga 1 absorve uma potência média de 10 kW e uma potência reativa de 4 kVAR; a carga 2 tem uma impedância de  $(60 + j80) \, \Omega$ . A tensão nos terminais das cargas é  $1000\sqrt{2} \cos 100\pi t \text{ V}$ .

- Determine o valor eficaz da tensão da fonte.
- De quantos microssegundos é a diferença de fase entre a tensão da carga e a tensão da fonte?
- A tensão da carga está adiantada ou atrasada em relação à tensão da fonte?

Figura P10.22



**(a)**

Temos as seguintes informações dadas:

$$S_1 = 10000 + j4000 \text{ VA} \quad , \quad Z_2 = 60 + j80 \, \Omega \quad , \quad V_1 = V_2 = 1000 \angle 0^\circ \text{ V}$$

Em  $L_1$ , temos

$$S_1 = V_1 \cdot (I_1)^* \Rightarrow I_1 = \left( \frac{S_1}{V_1} \right)^* \Rightarrow I_1 = 10 - j4 \text{ A}$$

Uma vez calculado  $I_1$ , agora calculamos a impedância da carga  $L_1$ .

$$Z_1 = \frac{V_1}{I_1} = \frac{1000}{10 - j4} = 86,2 + j34,5 \, \Omega$$

Agora vamos calcular a corrente  $I_2$  da carga  $L_2$ .

$$I_2 = \frac{V_2}{Z_2} = \frac{1000}{60 + j80} = 6 - j8 \text{ A}$$

Assim, a corrente fornecida pela fonte é

$$I_g = I_1 + I_2 = 10 - j4 + 6 - j8 \text{ A} = 16 - j12 \text{ A}$$

A impedância  $Z_{in}$  vista pela fonte é

$$Z_{in} = 0,5 + j0,05 + (Z_1 // Z_2)$$

$$Z_{in} = 0,5 + j0,05 + \frac{1}{\frac{1}{86,2+j34,5} + \frac{1}{60+j80}}$$

$$Z_{in} = 0,5 + j0,05 + 40 + j30 = 40,5 + j30,05 \Omega$$

Finalmente, a tensão da fonte é

$$V_g = Z_{in} \cdot I_g = (40,5 + j30,05)(16 - j12) = 1008,6 - j5,2 \text{ V}$$

$$\boxed{V_g = 1008,6 \angle -0,295^\circ \text{ V}}$$

**(b)**

Usando proporcionalidade (regra de três simples), temos

$$\frac{T}{\Delta t} = \frac{360^\circ}{\Delta \phi}$$

onde  $\Delta \phi$  é a diferença de fase entre os sinais. Portanto, usando  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ,

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega} \frac{\Delta \phi}{360^\circ}$$

Substituindo,

$$\Delta t = \frac{2\pi}{100\pi} \frac{0,295^\circ}{360^\circ}$$

$$\boxed{\Delta t = 16,39 \mu s}$$

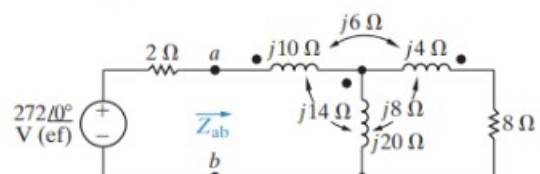
**(c)**

$V_L$  está  $\Delta \phi = 0,295^\circ$  adiantada em relação a  $V_g$ .

## Problema P10.37

- 10.37** a) Determine a potência média fornecida ao resistor de  $8 \Omega$  no circuito da Figura P10.37  
b) Determine a potência média produzida pela fonte de tensão senoidal ideal.  
c) Determine  $Z_{ab}$ .  
d) Mostre que a potência média fornecida é igual à potência média dissipada.

Figura P10.37



**(a)**

Aplicamos análise de malhas nas duas malhas do circuito, considerando as indutâncias mútuas.  
Malha 1:

$$-272\angle 0^\circ + 2I_1 + j10I_1 + j14I_1 + j14(I_1 - I_2) + j6(-I_2) + j8(-I_2) + j20(I_1 - I_2) = 0$$

$$I_1(2 + j10 + j14 + j14 + j20) + I_2(-j14 - j6 - j8 - j20) = 272\angle 0^\circ$$

$$I_1(2 + j58) + I_2(-j48) = 272\angle 0^\circ \quad (10.37.1)$$

Malha 2:

$$j20(I_2 - I_1) + j4(I_2) + 8(I_2) + j8(I_2) + j8(I_2 - I_1) + j6(-I_1) + j14(-I_1) = 0$$

$$I_1(-j20 - j8 - j6 - j14) + I_2(j20 + j4 + 8 + j8 + j8) = 0$$

$$I_1(-j48) + I_2(8 + j40) = 0 \quad (10.37.2)$$

Com (10.37.1) e (10.37.2), temos o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 2 + j58 & -j48 \\ -j48 & 8 + j40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 272 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vamos resolver o sistema aplicando o método de Cramer. Temos

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 + j58 & -j48 \\ -j48 & 8 + j40 \end{vmatrix} = j544$$

$$\Delta_{I_1} = \begin{vmatrix} 272 & -j48 \\ 0 & 8 + j40 \end{vmatrix} = 2176 + j10880, \quad \Delta_{I_2} = \begin{vmatrix} 2 + j58 & 272 \\ -j48 & 0 \end{vmatrix} = j13056$$

Assim,

$$I_1 = \frac{\Delta_{I_1}}{\Delta} = \frac{2176 + j10880}{j544} = 20 - j4 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{\Delta_{I_2}}{\Delta} = \frac{j13056}{j544} = 24 \text{ A}$$

Calculadas as correntes de malha, temos a potência no resistor de  $8 \Omega$  dada por

$$P_{8\Omega} = R \cdot I_2^2 = (8)(24^2) = 4608 \text{ W}$$

**(b)**

A potência fornecida pela fonte é dada por

$$S_{V_g} = V_g \cdot (I_1)^* = 272\angle 0^\circ \cdot 20,39\angle +11,31^\circ = 5546,08\angle 11,31^\circ \text{ VA}$$



$$S_{V_g} = 5438,37 \text{ W} + j1087,6 \text{ VA}_R$$

(c)

Temos que  $Z_{ab}$  é a impedância vista pela fonte, removido o resistor de  $2 \Omega$ . Logo,

$$Z_{ab} = \frac{V_g}{I_1} - 2 = \frac{272/0^\circ}{20,39/-11,31^\circ} - 2 = 13,34/11,31^\circ - 2$$

$$Z_{ab} = 11,08 + j2,62 \Omega$$

(d)

Vamos usar apenas a potência real (W). A potência real fornecida pela fonte é  $P_{V_g} = 5438,37 \text{ W}$ . Os dois resistores do circuito absorvem uma potência total de

$$P_{abs} = (2)|20 - j4|^2 + (8)(24)^2 = (2)(20,34)^2 + (8)(24)^2 = 5435,43 \text{ W}$$

Portanto,

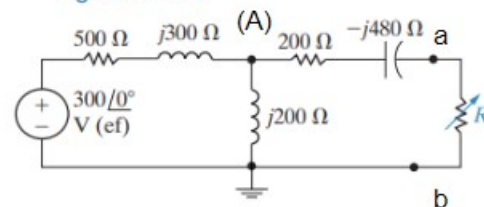
$$P_{abs} = 5435,43 \text{ W} = P_{V_g}$$

## Problema P10.46

**10.46** O resistor variável no circuito da Figura P10.46 é ajustado até que a potência média que ele absorve seja máxima.

- Determine  $R$ .
- Determine a máxima potência média.
- Encontre um resistor no Apêndice H que teria a maior potência média fornecida a ele.

Figura P10.46



(a)

Aplicamos teorema de Thevenin nos terminais  $a$  e  $b$  mostrados na figura.

Começamos calculando a tensão de Thevenin  $V_{th}$ , abrindo os terminais  $a$  e  $b$ . Nesse caso, temos apenas a malha à esquerda do nó essencial (A). Assim, aplicando análise de malhas nessa malha, temos

$$-300 + 500I + j300I + j200I = 0$$

$$I(500 + j300 + j200) = 300$$

$$I = \frac{300}{500 + j500} = 0,3 + j0,3 \text{ A} = 424,25/45^\circ \text{ mA}$$

Assim, a tensão  $V_A = V_a$  é dada por

$$V_a = j200 \cdot I = 200/90^\circ \Omega \cdot 424,25/45^\circ \text{ mA}$$

$$V_a = V_{ab} = V_{th} = 84,85/\underline{135^\circ} \text{ V}$$

Agora curto-circuitamos os terminais  $a$  e  $b$  para achar a corrente  $I_{sc}$ . Nesse caso, aplicamos análise nodal no nó essencial (A), obtendo

$$\frac{V_A - 300}{500 + j300} + \frac{V_A}{j200} + \frac{V_A}{200 - j480} = 0$$

$$V_A \left( \frac{1}{500 + j300} + \frac{1}{j200} + \frac{1}{200 - j480} \right) = \frac{300}{500 + j300}$$

$$V_A = \frac{\frac{300}{500 + j300}}{\frac{1}{500 + j300} + \frac{1}{j200} + \frac{1}{200 - j480}}$$

$$V_A = \frac{0,4412 - j0,2647}{0,00221 - j0,00410}$$

$$V_A = 110,46/\underline{30,71^\circ} \text{ V}$$

Assim, temos a corrente de curto-circuito dada por

$$I_{sc} = \frac{V_A}{200 - j480} = \frac{110,46/\underline{30,71^\circ}}{200 - j480} = 212,42/\underline{98,09^\circ} \text{ mA}$$

Conhecido  $V_{th}$  e  $I_{sc}$ , temos a impedância de Thevenin dada por

$$Z_{th} = \frac{V_{th}}{I_{sc}} = 399,5/\underline{36,91^\circ} \Omega$$

Para que tenhamos a máxima transferência de potência, precisamos que

$$R = (Z_{th})^*$$

Contudo, como a resistência  $R$  é puramente real, temos que a condição de máxima potência é

$$R = |(Z_{th})^*|$$

Portanto,

$$\boxed{R = 399,5 \Omega}$$

**(b)**

Usando o circuito equivalente Thevenin, sabemos que a corrente que passa pelo resistor  $R$  é

$$I_R = \frac{V_{th}}{R + Z_{th}}$$

$$I_R = \frac{84,85/\underline{135^\circ}}{399,5 + 319,43 + j239,92} = \frac{84,85/\underline{135^\circ}}{718,93 + j239,92}$$

$$I_R = 111,95/\underline{116,54^\circ} \text{ mA}$$

Assim, a potência  $P_R$  no resistor de carga é

$$P_R = R \cdot |I_R|^2$$

$$P_R = 5 \text{ W}$$

**(c)**

O resistor com valor comercial mais próximo do valor calculado de  $R = 399,5 \, \Omega$  é o resistor de

$$R_c = 390 \, \Omega$$