Aluno: Raphael Henrique Braga Leivas

Código fonte LaTeX desse arquivo pode ser visto em meu GitHub pessoal:

https://github.com/RaphaelLeivas/latex/tree/main/ListaCEII

Aceito sugestões de melhoria do código :)

Problema P8.4

8.4 A resistência, indutância e capacitância de um circuito RLC em paralelo são 2.000 Ω, 250 mH e 10 nF, respectivamente.

a) Calcule as raízes da equação característica que descreve a resposta de tensão do circuito.

b) A resposta será superamortecida, subamortecida ou criticamente amortecida?

c) Qual é o valor de R que resultará em uma frequência amortecida de 12 krads/s?

d) Quais são as raízes da equação característica para o valor de R determinado em (c)?

e) Qual é o valor de R que resultará em uma resposta criticamente amortecida?

(a)

Sabemos que a equação característica da EDO de um circuito RLC paralelo é dada por

$$s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC} = 0 \tag{8.4.1}$$

Substituindo os dados do problema em (8.4.1), temos

$$s^2 + 5 \cdot 10^4 s + 4 \cdot 10^9 = 0$$

Aplicando Bhaskara,

$$s = \frac{-(5 \cdot 10^4) \pm \sqrt{(5 \cdot 10^4)^2 - 4(1)(4 \cdot 10^8)}}{2(1)}$$

$$\boxed{s_1 = -10000 \text{ rad/s} \quad , \quad s_2 = -40000 \text{ rad/s}}$$

(b)

A resposta da tensão depende do valor de Δ da equação característica, usada no item (a). Assim,

$$\Delta = (5 \cdot 10^4)^2 - 4(1)(4 \cdot 10^8)$$

$$\Delta = 9 \cdot 10^8$$

Como $\Delta > 0$, temos que a resposta é superamortecida.

(c)

A frequência angular amortecida ω_d é definida como

$$\omega_d = \sqrt{\omega_o^2 - \alpha^2} \tag{8.4.2}$$

onde ω_o é a frequência angular de ressonância e α é o fator de armotecimento. Expandindo esses dois termos conforme suas definições, (8.4.2) se torna

$$\omega_d = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^2 - \left(\frac{1}{2RC}\right)^2}$$

$$\omega_d = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}}$$

Isolando R, temos

$$\omega_d^2 = \frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}$$

$$\frac{1}{R^2} = -4C^2\left(\omega_d^2 - \frac{1}{LC}\right)$$

$$R = \sqrt{\frac{1}{-4C^2\left(\omega_d^2 - \frac{1}{LC}\right)}}$$

Substituindo $\omega_d = 12\ \mathrm{krad/s}$ e os demais valores do enunciado, temos

$$\boxed{R = 3125\ \Omega}$$

(d)

Com $R = 3125\ \Omega$ em (8.4.1),

$$s = \frac{-(3.2 \cdot 10^4) \pm \sqrt{(3.2 \cdot 10^4)^2 - 4(1)(4 \cdot 10^8)}}{2(1)}$$

$$s = \frac{-(3.2 \cdot 10^4) \pm \sqrt{-5.76 \cdot 10^8}}{2(1)}$$

Note que agora temos que usar raízes complexas pois $\Delta < 0$.

$$s = \frac{-(3.2 \cdot 10^4) \pm j(2.4 \cdot 10^4)}{2(1)}$$

$$\boxed{s_1 = -16000 + j12000\ \mathrm{rad/s} \quad , \quad s_2 = -16000 - j24000\ \mathrm{rad/s}}$$

(e)

Para que o circuito seja criticamente amortecido, precisamos de $\Delta = 0$. Assim, novamente usando (8.4.1),

$$\Delta = \left(\frac{1}{RC}\right)^2 - 4(1)\left(\frac{1}{LC}\right) = 0$$

Isolando R,

$$\frac{1}{R^2C^2} = 4\frac{1}{LC}$$

$$R = \sqrt{\frac{1}{4C^2\frac{1}{LC}}} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Substituindo os valores do enunciado,

$$\boxed{R = 2500\ \Omega}$$

Problema P8.17

8.17 a) Projete um circuito RLC em paralelo (veja a Figura 8.1) usando valores de componentes do Apêndice H, com uma frequência angular de ressonância de 5.000 rad/s. Escolha um resistor ou crie uma rede de resistores de modo que a resposta seja criticamente amortecida. Desenhe seu circuito.

b) Calcule as raízes da equação característica para a resistência em (a).

(a)

Para o projeto do circuito, fixamos arbitrariamente o indutor selecionado o de $L = 1$ mH. Para cumprir o requisito da frequência angular de ressonância ser $\omega_o = 5000$ rad/s, calculamos C através de

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{\omega_o^2 L}$$

$$C = 40\ \mu\text{F}$$

Podemos atingir uma capacitância equivalente de $C = 40\ \mu$F usando quatro capacitores de $C_i = 10\ \mu$F em paralelo. Para o requisito de ele ser criticamente amortecido, temos que

$$\omega_o^2 = \alpha^2 \tag{8.17.1}$$

Expandindo (8.17.1) conforme as definições,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^2 = \left(\frac{1}{2RC}\right)^2$$

Isolando R,

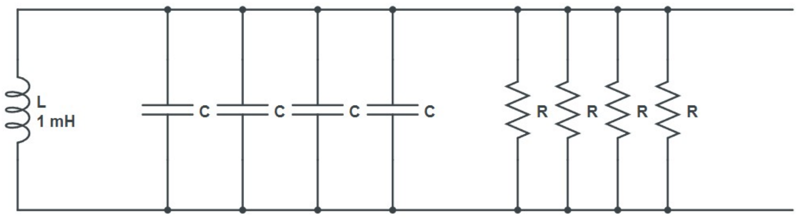
$$R = \frac{\sqrt{LC}}{2C}$$

$$R = 2.5\ \Omega$$

Podemos obter exatamente uma resistência equivalente de $R = 2.5\ \Omega$ com 4 resistores de $R_i = 10\ \Omega$ em paralelo.

Assim, temos o circuito projetado na imagem abaixo.

Figure 8.17.1: Circuito RLC projetado. Temos $R = 10\ \Omega$ e $C = 10\ \mu\mathrm{F}$.



(b)

A equação característica do circuito é

$$s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC} = 0 \tag{8.17.2}$$

Cuja solução é

$$s = \frac{-\frac{1}{RC} \pm \sqrt{\Delta}}{2(1)}$$

Note que o circuito já foi projetado para ser criticamente amortecido, e foi possível obter exatamente as resistências e capacitâncias equivalentes necessárias para obter essa reposta. Logo, temos $\Delta = 0$ e a solução se reduz a

$$s = \frac{-\frac{1}{RC}}{2} \quad \Rightarrow \quad s = -\frac{1}{2RC}$$

Assim, as raízes da equação característica são

$$\boxed{s_1 = s_2 = -5000\ \mathrm{rad/s}}$$