

## Problema P9.14

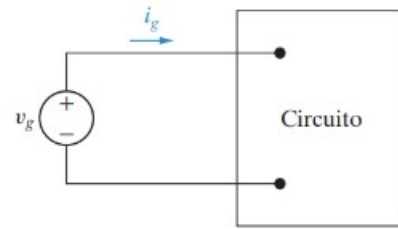
9.14 As expressões para a tensão e a corrente de regime permanente nos terminais do circuito da Figura P9.14 são

$$v_g = 300 \cos(5.000\pi t + 78^\circ) \text{ V},$$

$$i_g = 6 \sin(5.000\pi t + 123^\circ) \text{ A}.$$

- Qual é a impedância vista pela fonte?
- De quantos microssegundos é a defasagem entre a corrente e a tensão?

Figura P9.14



**(a)**

A impedância  $Z_{in}$  vista pela fonte é dada por

$$Z_{in} = \frac{V_g}{I_g} \quad (9.14.1)$$

Usando a relação trigonométrica

$$\sin \theta = \cos(\theta - 90^\circ)$$

Podemos reescrever a expressão de  $i_g(t)$  como

$$i_g(t) = 6 \cos(5000\pi t + 123^\circ - 90^\circ)$$

$$i_g(t) = 6 \cos(5000\pi t + 33^\circ)$$

Assim, em notação fasorial, temos

$$Z_{in} = \frac{\frac{300}{\sqrt{2}} \angle 78^\circ}{\frac{6}{\sqrt{2}} \angle 33^\circ} \quad (9.14.2)$$

$$\boxed{Z_{in} = 50 \angle 45^\circ \Omega}$$

**(b)**

Usando proporcionalidade (regra de três simples), sabemos que uma diferença de fase de  $\Delta\phi$  corresponde a uma diferença temporal  $\Delta t$  dada por

$$\frac{T}{\Delta t} = \frac{360^\circ}{\Delta\phi}$$

onde  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  é o período do sinal. Isolando  $\Delta t$ , temos

$$\Delta t = T \frac{\Delta\phi}{360^\circ} \quad (9.14.3)$$

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega} \frac{\Delta\phi}{360^\circ}$$

Substituindo tudo, temos

$$\Delta t = 50 \mu s$$

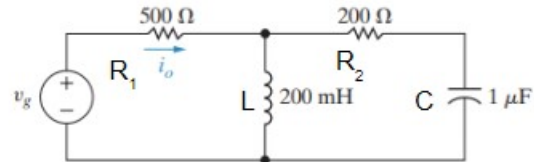
## Problema P9.37

**9.37** A frequência da fonte de tensão senoidal no circuito da Figura P9.37 é ajustada até que a corrente  $i_o$  fique em fase com  $v_g$ .

Pspice  
Multisim

- Determine a frequência em hertz.
- Determine a expressão de regime permanente para  $i_o$  (na frequência encontrada em [a]), se  $v_g = 90 \cos \omega t$  V.

Figura P9.37



**(a)**

Vamos começar identificando a impedância equivalente  $Z_{in}$  vista pela fonte  $v_g$ .

$$Z_{in} = \left( \left( \frac{1}{j\omega C} + R_2 \right) // j\omega L \right) + R_1$$

$$Z_{in} = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{\frac{1}{j\omega C} + R_2}}$$

Agora vamos isolar a parte real da parte complexa.

$$Z_{in} = R_1 + \frac{1}{-\frac{j}{\omega L} + \frac{1}{-\frac{j}{\omega C} + R_2}}$$

$$Z_{in} = R_1 + \frac{1}{-\frac{j}{\omega L} + \frac{\omega C}{-j + R_2 \omega C}}$$

$$Z_{in} = R_1 + \frac{1}{-\frac{j}{\omega L} + \frac{(\omega C)(+j + R_2 \omega C)}{1^2 + (R_2 \omega C)^2}}$$

$$Z_{in} = R_1 + \frac{1}{-\frac{j}{\omega L} + \frac{j\omega C}{1 + (R_2 \omega C)^2} + \frac{R_2 \omega^2 C^2}{1 + (R_2 \omega C)^2}}$$

$$Z_{in} = R_1 + \frac{1}{-\frac{R_2 \omega^2 C^2}{1 + (R_2 \omega C)^2} + j \left( -\frac{1}{\omega L} + \frac{\omega C}{1 + (R_2 \omega C)^2} \right)}$$

Vamos adotar uma notação para simplificar a expressão. Sejam

$$A = \frac{R_2 \omega^2 C^2}{1 + (R_2 \omega C)^2} \quad , \quad B = -\frac{1}{\omega L} + \frac{\omega C}{1 + (R_2 \omega C)^2}$$

Com isso, podemos reescrever a expressão de  $Z_{in}$  como

$$Z_{in} = R_1 + \frac{1}{A + jB}$$

Continuamos o processo de isolar a parte real da parte complexa.

$$Z_{in} = R_1 + \frac{1}{A + jB}$$

$$Z_{in} = R_1 + \frac{A - jB}{A^2 + B^2}$$

$$Z_{in} = \left( R_1 + \frac{A}{A^2 + B^2} \right) - j \frac{B}{A^2 + B^2}$$

Agora é possível expressar uma função para o ângulo de fase  $\phi$  de  $Z_{in}$ , dada por

$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{-\frac{B}{A^2+B^2}}{R_1 + \frac{A}{A^2+B^2}} \right)$$

$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{-\frac{B}{A^2+B^2}}{\frac{R_1(A^2+B^2)+A}{A^2+B^2}} \right)$$

$$\phi = \tan^{-1} \left( -\frac{B}{R_1(A^2 + B^2) + A} \right) \quad (9.37.1)$$

Uma vez calculado  $Z_{in}$ , podemos expressar a relação entre  $V_g$  e  $I_o$  através de

$$V_g = Z_{in} \cdot I_g \quad (9.37.2)$$

Para que (9.37.2) seja satisfeita com  $V_g$  e  $I_o$  em fase, temos que o ângulo de fase de  $Z_{in}$  deve ser nulo. Portanto, usando (9.37.1), temos

$$\phi = \tan^{-1} \left( -\frac{B}{R_1(A^2 + B^2) + A} \right) = 0$$

$$-\frac{B}{R_1(A^2 + B^2) + A} = 0$$

$$B = 0$$

Expandindo  $B$  conforme o definimos, temos

$$-\frac{1}{\omega L} + \frac{\omega C}{1 + (R_2 \omega C)^2} = 0$$

$$\frac{-1 - R_2^2 \omega^2 C^2 + (\omega L)(\omega C)}{(\omega L)(1 + R_2^2 \omega^2 C^2)} = 0$$

$$-1 - R_2^2 \omega^2 C^2 + \omega^2 LC = 0$$

Isolando  $\omega$ , temos

$$\omega^2 = \frac{1}{LC - R_2^2 C^2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC - R_2^2 C^2}}$$

Usando  $\omega = 2\pi f$ , a frequência  $f$  em Hertz da fonte de tensão deve ser

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC - R_2^2 C^2}} \quad (9.37.3)$$

Substituindo,

$$\boxed{f = 397.89 \text{ Hz}}$$

**(b)**

Usando (9.37.2), temos

$$i_o(t) = \frac{v_g(t)}{Z_{in}} \quad (9.37.4)$$

Note que  $Z_{in}$  é puramente real, pois o ângulo de fase é nulo (fizemos  $B = 0$  no item anterior). Assim, a expressão de  $Z_{in}$  se reduz a

$$Z_{in} = R_1 + \frac{A}{A^2 + 0}$$

$$Z_{in} = R_1 + \frac{1}{A}$$

$$Z_{in} = R_1 + \frac{1 + (R_2 \omega C)^2}{R_2 \omega^2 C^2}$$

$$Z_{in} = 1500 \, \Omega$$

Substituindo em (9.37.4),

$$i_o(t) = \frac{90 \cos(\omega t)}{1500 \, \Omega}$$

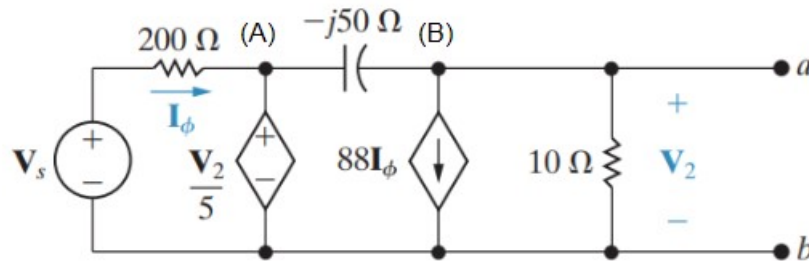
$$i_o(t) = 60 \cos(\omega t) \text{ mA}$$

$$\boxed{i_o(t) = 60 \cos(2500t) \text{ mA}}$$

## Problema P9.50

**9.50** Determine o circuito equivalente de Norton em relação aos terminais  $a, b$  para o circuito da Figura P9.50 quando  $\mathbf{V}_s = 5\angle 0^\circ \text{ V}$ .

Figura P9.50



Em um circuito equivalente norton, temos

$$I_N = I_{SC} \quad , \quad R_N = R_{th}$$

Vamos começar calculando a tensão de Thevenin  $V_{th}$  entre os terminais  $a$  e  $b$ , abrindo-os.

Expressando as variáveis de controle em função dos elementos do circuito, obtemos

$$V_2 = V_B \quad (9.50.1)$$

$$I_\phi = \frac{5V - V_A}{200 \, \Omega} \quad (9.50.2)$$

Feito isso, aplicamos análise nodal dos nós essenciais  $A$  e  $B$ . Começamos pelo nó  $A$ . Obtemos de imediato que

$$V_A = \frac{V_2}{5} = \frac{V_B}{5} \quad (9.50.3)$$

Agora vamos para o nó  $B$ .

$$\frac{V_B - V_A}{-j50 \, \Omega} + 88I_\phi + \frac{V_B - 0}{10 \, \Omega} = 0$$

Usando (9.50.2) e (9.50.3), temos

$$\frac{V_B - \frac{V_B}{5}}{-j50 \, \Omega} + 88 \frac{5V - \frac{V_B}{5}}{200 \, \Omega} + \frac{V_B}{10 \, \Omega} = 0$$

Isolando  $V_B$ , temos

$$\frac{V_B}{-j50} - \frac{V_B}{-j250} - \frac{88V_B}{1000} + \frac{V_B}{10} = -2.2$$

$$V_B = -\frac{2.2}{\frac{1}{-j50} - \frac{1}{-j250} - \frac{88}{1000} + \frac{1}{10}}$$

$$V_B = -66 + j88V = 110\angle 126.86^\circ V \quad (9.50.4)$$

Usando (9.50.3), obtemos

$$V_A = 22/\underline{126.86^\circ}V \quad (9.50.5)$$

Assim, obtemos que a tensão de Thevenin é dada por

$$V_{th} = V_{ab} = V_B = 110/\underline{126.86^\circ}V \quad (9.50.6)$$

Agora calculamos a corrente de curto-circuito  $I_{sc}$ . Curto circuitamos os terminais  $a$  e  $b$ , e novamente expressamos as variáveis de controle em função dos elementos do circuito.

$$V_2 = 0V \quad (9.50.7)$$

$$I_\phi = \frac{5V - V_A}{200\ \Omega} \quad (9.50.8)$$

Agora aplicamos análise nodal nos nós essenciais  $A$  e  $B$ . De imediato temos que

$$V_A = \frac{V_2}{5} = \frac{V_B}{5}$$

No entanto, devido ao curto-circuito, observe que

$$V_B = 0V$$

E portanto,

$$V_A = V_B = 0V$$

Escrevendo a equação de nó de  $B$ , temos

$$\frac{V_B - \frac{V_B}{5}}{-j50\ \Omega} + 88 \frac{5V - \frac{V_B}{5}}{200\ \Omega} + I_{sc} = 0$$

Substituindo e isolando  $I_{sc}$ ,

$$0 + 88 \frac{5V}{200\ \Omega} + I_{sc} = 0$$

$$I_{sc} = -2.2\ A = 2.2/\underline{180^\circ}\ A \quad (9.50.9)$$

Usando (9.50.9) e (9.50.6), obtemos a resistência de Thevenin  $R_{th}$ .

$$R_{th} = \frac{V_{th}}{I_{sc}} = \frac{110/\underline{126.86^\circ}}{2.2/\underline{180^\circ}} = 50/\underline{-53.14^\circ}\Omega \quad (9.50.10)$$

Finalmente,

$$\boxed{R_N = 50/\underline{-53.14^\circ}\Omega = 30 - j40\Omega}$$

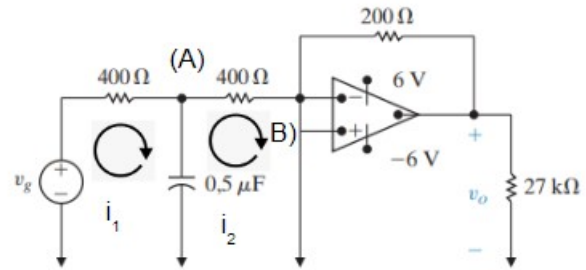
$$\boxed{I_N = -2.2A}$$

## Problema P9.69

9.69

Pspice  
Multisim

A fonte de tensão senoidal no circuito mostrado na Figura P9.69 está gerando a tensão  $v_g = 20 \cos 5.000t$  V. Se o amp op for ideal, qual será a expressão de regime permanente para  $v_o(t)$ ?



O primeiro passo é expressar  $V_o$  em função das tensões de entrada no AmpOp. Aplicamos análise nodal no nó (B).

$$i_- + i_+ + i_{GND} + \frac{V_B - V_o}{R_s} + \frac{V_B - V_A}{R_2} = 0$$

Como o Amplificador Operacional é ideal, temos

$$i_- = i_+ = 0 \text{ A} \quad (9.69.1)$$

Além disso, temos  $V_B = 0$ . Substituindo na expressão do nó, temos

$$i_{GND} + \frac{V_o}{R_s} + \frac{V_A}{R_2} = 0$$

Isolando  $V_o$ , temos

$$V_o = -R_s \left( i_{GND} + \frac{V_A}{R_2} \right) \quad (9.69.2)$$

Agora aplicamos análise de malhas, com as correntes de malha  $i_1$  e  $i_2$  na figura. Note que  $i_2 = i_{GND}$ . Começamos pela malha 1:

$$-V_g + R_1 i_1 + \frac{1}{j\omega C} (i_1 - i_2) = 0$$

$$R_1 i_1 - \frac{j}{\omega C} (i_1 - i_2) = V_g$$

$$i_1 \left( R_1 - \frac{j}{\omega C} \right) + i_2 \left( \frac{j}{\omega C} \right) = V_g$$

Agora vamos para a malha 2:

$$\frac{1}{j\omega C} (i_2 - i_1) + R_2 i_2 = 0$$

$$i_1 \left( \frac{j}{\omega C} \right) + i_2 \left( R_2 - \frac{j}{\omega C} \right) = 0$$

Com as duas equações de malha, temos o sistema linear

$$\begin{bmatrix} R_1 - \frac{j}{\omega C} & \frac{j}{\omega C} \\ \frac{j}{\omega C} & R_2 - \frac{j}{\omega C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_g \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9.69.3)$$

Substituindo os valores, temos

$$\begin{bmatrix} 400 - j400 & 400 \\ 400 & 400 - j400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5000}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 400 - j400(400 + j400) & 400(400 + j400) \\ 400 & 400 - j400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5000}{\sqrt{2}}(400 + j400) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 320000 & 400(400 + j400) \\ 400 & 400 - j400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5000}{\sqrt{2}}(400 + j400) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 320000 & -400(400 + j400) \\ 0 & 400 - j400 + \frac{400(400+j400)}{-800} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5000}{\sqrt{2}}(400 + j400) \\ 0 + \frac{\frac{5000}{\sqrt{2}}(400+j400)}{-800} \end{bmatrix}$$

Resolvendo, temos

$$i_2 = \frac{\frac{\frac{5000}{\sqrt{2}}(400+j400)}{-800}}{400 - j400 + \frac{-400(400+j400)}{-800}}$$

$$i_2 = \frac{\frac{5000}{\sqrt{2}}(400 + j400)}{-320000 + j320000 - 400(400 + j400)}$$

$$i_2 = \frac{1414200 + j1414200}{-480000 + j160000}$$

$$i_2 = \frac{2 \cdot 10^6 / 45^\circ}{505964 / 161.57^\circ}$$

$$i_2 = i_{GND} = 3,95 / -116,57^\circ \text{ A} \quad (9.69.4)$$

## Problema P9.77

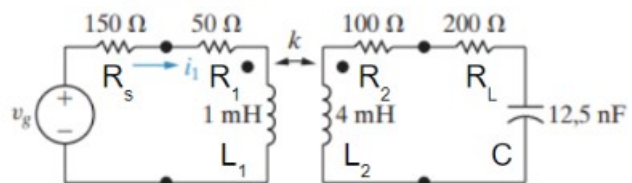
**9.77** A fonte de tensão senoidal no circuito visto na Figura P9.77 está funcionando a uma

Pspice  
Multisim

frequência de 200 krad/s. O coeficiente de acoplamento é ajustado até que o valor de pico de  $i_1$  seja máximo.

- Qual é o valor de  $k$ ?
- Se  $v_g = 560 \cos(2 \times 10^5 t)$  V, qual é a amplitude máxima de  $i_1$ ?

Figura P9.77



**(a)**

O valor de  $i(t)$  depende da impedância  $Z_{in}$  vista pela fonte  $V_g$ . Sabemos que  $Z_{in}$  é expressa por

$$Z_{in} = Z_{11} + Z_r \quad (9.77.1)$$



Além disso, sabemos que a impedância refletida  $Z_r$  é dada por

$$Z_r = \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}} \quad (9.77.2)$$

Substituindo (9.77.2) em (9.77.1), temos

$$Z_{in} = Z_{11} + \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}} \quad (9.77.3)$$

Onde

- $Z_{11}$ : Autoimpedância da malha do primeiro enrolamento;
- $Z_{22}$ : Autoimpedância da malha do segundo enrolamento;
- $M$ : Indutância mútua.

Expandindo os termos de (9.77.3), temos

$$Z_{in} = R_s + R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 (k\sqrt{L_1 L_2})^2}{j\omega L_2 + R_2 + R_L + \frac{1}{j\omega C}} \quad (9.77.4)$$

Vamos reescrever (9.77.4) de modo a isolar a parte real da parte complexa.

$$\begin{aligned} Z_{in} &= R_s + R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 k^2 L_1 L_2}{j\omega L_2 + R_2 + R_L - \frac{j}{\omega C}} \\ Z_{in} &= R_s + R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 k^2 L_1 L_2}{R_2 + R_L + j(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})} \\ Z_{in} &= R_s + R_1 + j\omega L_1 + \frac{(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(R_2 + R_L - j(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C}))}{(R_2 + R_L + j(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C}))(R_2 + R_L - j(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C}))} \\ Z_{in} &= R_s + R_1 + j\omega L_1 + \frac{(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(R_2 + R_L) - j(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2} \\ Z_{in} &= R_s + R_1 + \frac{(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(R_2 + R_L)}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2} + j \left( \omega L_1 - \frac{(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2} \right) \end{aligned} \quad (9.77.5)$$

A partir de (9.77.5) podemos determinar o módulo de  $Z_{in}$ .

$$|Z_{in}|(k) = \sqrt{\left( R_s + R_1 + \frac{(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(R_2 + R_L)}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2} \right)^2 + \left( \omega L_1 - \frac{(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2} \right)^2} \quad (9.77.6)$$

A expressão (9.77.6) expressa o módulo de  $Z_{in}$  como uma função do coeficiente  $k$ . O valor máximo de  $i(t)$  ocorre quando  $Z_{in}(k)$  atinge seu valor mínimo, ou seja, quando

$$\frac{d}{dk} |Z_{in}|(k) = 0 \quad (9.77.7)$$

Vamos diferenciar (9.77.6) com respeito a  $k$ . Antes disso, vamos adotar uma notação para reduzir o tamanho da expressão. Sejam

$$A = \frac{(\omega^2 L_1 L_2)(R_2 + R_L)}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2} \quad , \quad B = \frac{(\omega^2 L_1 L_2)(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2}$$

Note que  $A$  e  $B$  não dependem de  $k$ . Assim, podemos reescrever (9.77.6) como

$$|Z_{in}|(k) = \sqrt{(R_s + R_1 + Ak^2)^2 + (\omega L_1 - Bk^2)^2} \quad (9.77.8)$$

Diferenciando (9.77.8) com respeito a  $k$ , temos

$$\frac{d}{dk}|Z_{in}|(k) = \frac{1}{2} \frac{2(R_s + R_1 + Ak^2)(2Ak) + 2(\omega L_1 - Bk^2)(-2Bk)}{\sqrt{(R_s + R_1 + Ak^2)^2 + (\omega L_1 - Bk^2)^2}} \quad (9.77.9)$$

Para que (9.77.9) seja igual a zero, temos

$$2(R_s + R_1 + Ak^2)(2Ak) + 2(\omega L_1 - Bk^2)(-2Bk) = 0$$

$$(R_s + R_1 + Ak^2)(Ak) + (\omega L_1 - Bk^2)(-Bk) = 0$$

$$AkR_s + AkR_1 + A^2k^3 - \omega BkL_1 + B^2k^3 = 0$$

$$k^3(A^2 + B^2) + k(AR_s + AR_1 - \omega BL_1) = 0$$

$$k(k^2(A^2 + B^2) + (AR_s + AR_1 - \omega BL_1)) = 0$$

$$k^2(A^2 + B^2) + AR_s + AR_1 - \omega BL_1 = 0$$

$$k = \sqrt{\frac{\omega BL_1 - AR_s - AR_1}{(A^2 + B^2)}}$$

Substituindo os valores todos, temos

$$A = 192 \quad , \quad B = 256$$

$$\boxed{k = 0.3536}$$

**(b)**

Conhecido o valor de  $k = 0.3536$ , podemos calcular o valor da impedância vista pela fonte através de (9.77.4), obtendo

$$Z_{in} = 224 + j168 \, \Omega$$

Portanto, usando o fato que a corrente fornecida pela fonte é

$$i(t) = \frac{v_g(t)}{Z_{in}}$$

Em notação fasorial,

$$I = \frac{V_g}{Z_{in}} = \frac{\frac{560}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ}{224 + j168 \, \Omega}$$

$$I = 1.4142 \angle -36.57^\circ \, A$$

Portanto, o valor de pico de  $i(t)$  é

$$i_m(t) = 1.4142\sqrt{2} = 2 \, A$$