Aluno: Raphael Henrique Braga Leivas

Código fonte LaTeX desse arquivo pode ser visto em meu GitHub pessoal:

https://github.com/RaphaelLeivas/latex/tree/main/ListaCEII

Aceito sugestões de melhoria do código :)

Problema P8.10

8.10 Pspice Multisim A resistência do resistor no circuito do Exemplo 8.4 é alterada para 3.200 Ω.

a) Determine a expressão numérica para $v(t)$ quando $t \geq 0$.

b) Desenhe um gráfico de $v(t)$ para o intervalo de tempo $0 \leq t \leq 7$ ms. Compare essa resposta com a do Exemplo 8.4 ($R = 20$ kΩ) e a do Exemplo 8.5 ($R = 4$ kΩ). Em particular, compare os valores de pico de $v(t)$ e os tempos em que esses valores ocorrem.

(a)

O circuito do Exemplo 8.4 é um circuito RLC paralelo, com equação característica já conhecida:

$$s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC} = 0 \tag{8.10.1}$$

Substituindo com os valores do enunciado,

$$s = \frac{-(2500) \pm \sqrt{(2500)^2 - 4(1)(1 \cdot 10^6)}}{2(1)}$$

$$s_1 = -500 \text{ rad/s} \quad , \quad s_2 = -2000 \text{ rad/s}$$

Agora analisamos as condições iniciais do circuito. Temos

$$v(0) = 0 \text{ V} \tag{8.10.2}$$

Para a condição de inicial de $\dfrac{\mathrm{d}v(0)}{\mathrm{d}t}$, aplicamos análise nodal no nó superior do circuito em $t = 0$, obtendo

$$i_c(0) + i_L(0) + i_R = 0$$

$$i_c(0) + -12.25 \text{ mA} + \frac{v(0)}{20 \text{ k}\Omega} = 0$$

$$i_c(0) = 12.25 \text{ mA}$$

Note que

$$i_c = C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}v(0)}{\mathrm{d}t} = \frac{i_c(0)}{C}$$

Assim, subsituindo o valor de $i_c(0)$ encontrado, temos a segunda condição inicial da EDO dada por

$$\frac{\mathrm{d}v(0)}{\mathrm{d}t} = 98000 \text{ V/s} \tag{8.10.3}$$

Além disso, sabemos que a solução da EDO é da forma

$$v(t) = Ae^{st}$$

Com as duas soluções encontradas s_1 e s_2, temos que a solução geral é dada pela combinação linear

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) \tag{8.10.4}$$

Onde $v_1(t)$ e $v_2(t)$ são duas possíveis soluções para $v(t)$ dadas por

$$\begin{cases} v_1(t) = A_1 e^{s_1 t} \\ v_2(t) = A_2 e^{s_2 t} \end{cases}$$

Diferenciando (8.10.4) com respeito a t, temos duas equações

$$\begin{cases} v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \\ \dfrac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = A_1 s_1 e^{s_1 t} + A_2 s_2 e^{s_2 t} \end{cases}$$

Em $t = 0$, temos as condições iniciais já conhecidas em (8.10.2) em (8.10.3)

$$\begin{cases} v(0) = A_1 e^{s_1 0} + A_2 e^{s_2 0} \\ \dfrac{\mathrm{d}v(0)}{\mathrm{d}t} = A_1 s_1 e^{s_1 0} + A_2 s_2 e^{s_2 0} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A_1 + A_2 = 0 \text{ V} \\ A_1 s_1 + A_2 s_2 = 98000 \text{ V/s} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A_1 = 65.33 \\ A_2 = -65.33 \end{cases}$$

Conhecidos coeficientes A_1 e A_2, bem como as raízes s_1 e s_2, temos a solução geral $v(t)$ dada por (8.10.4)

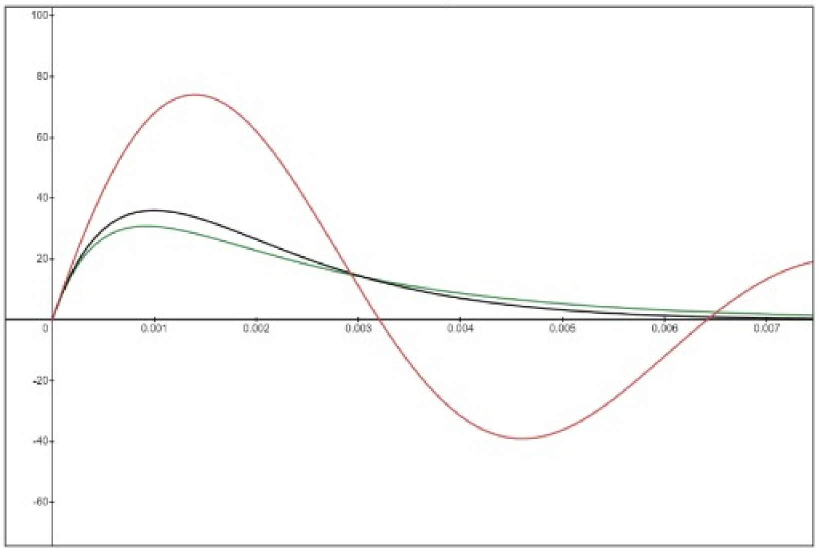
$$\boxed{v(t) = 65.33 \left[e^{-500t} - e^{-2000t}\right] \text{ V} \, , \, t \geq 0}$$

(b)

Temos três funções para $v(t)$:

$$\begin{cases} v(t) = 65.33 \left[e^{-500t} - e^{-2000t}\right] \text{ V} \, , \, t \geq 0 & \text{Resposta superamortecida} \\ v(t) = 98.000 t e^{-1.000t} \text{ V} \, , \, t \geq 0 & \text{Resposta criticamente amortecida} \\ v(t) = 100 e^{-200t} sen(979.80t) \text{ V} \, , \, t \geq 0 & \text{Resposta subamortecida} \end{cases}$$

Usando a ferramenta online Desmos, temos os três gráficos das três funções abaixo. A curva vermelha é a subamortecida, a preta é a criticamente amortecida e a curva verde é a resposta superamortecida.
A resposta subamortecida apresenta o maior valor de pico da tensão, mas é a que gasta mais tempo para ele ocorrer. Já a resposta superamortecida possui o menor valor de pico, mas é o que chega mais rápido nesse pico.



1 $v(t) = \{t > 0: 65.33(e^{-500t} - e^{-2000t})$

2 $v(t) = \{t > 0: 98000te^{-1000t}\}$

3 $v(t) = \{t > 0: 100e^{-200t}\sin(979.80t)\}$

4