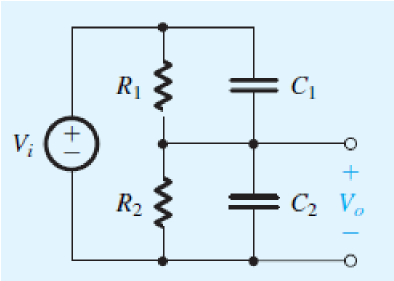
Aluno: Raphael Henrique Braga Leivas
Matrícula: 2020028101

Problema 1.80

Para deduzir a função de transferência, precisamos usar LATEX pois as contas ficam muito grandes e difíceis de fazer no papel. A Figura abaixo mostra o circuito do problema.



Sejam $Z_1 = R_1 \parallel C_1$ e $Z_2 = R_2 \parallel C_2$. Temos

$$Z_1 = \frac{R_1 \frac{1}{sC_1}}{R_1 + \frac{1}{sC_1}} = \frac{R_1}{sR_1C_1 + 1}$$

$$Z_2 = \frac{R_2 \frac{1}{sC_2}}{R_2 + \frac{1}{sC_2}} = \frac{R_2}{sR_2C_2 + 1}$$

Agora aplicamos a regra do divisor de tensão:

$$V_o = V_i \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Substituindo e reorganizando os termos,

$$V_o = V_i \frac{\frac{R_2}{sR_2C_2+1}}{\frac{R_1}{sR_1C_1+1} + \frac{R_2}{sR_2C_2+1}}$$

$$V_o = V_i \frac{\frac{R_2}{sR_2C_2+1}}{\frac{R_1(sR_2C_2+1)+R_2(sR_1C_1+1)}{(sR_1C_1+1)(sR_2C_2+1)}}$$

$$V_o = V_i \frac{R_2}{\frac{R_1(sR_2C_2+1)+R_2(sR_1C_1+1)}{sR_1C_1+1}}$$

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{R_2}{\frac{R_1(sR_2C_2+1)}{sR_1C_1+1} + R_2}$$

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{R_2}{\frac{sR_1R_2C_2+R_1+R_2(sR_1C_1+1)}{sR_1C_1+1}}$$

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{R_2(sR_1C_1 + 1)}{sR_1R_2C_2 + R_1 + R_2(sR_1C_1 + 1)}$$

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{sR_1R_2C_1 + R_2}{R_1 + R_2 + sR_1R_2C_2 + sR_2R_1C_1}$$

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{R_2 + sR_1R_2C_1}{R_1 + R_2 + s(R_1R_2C_2 + R_2R_1C_1)}$$

Agora multiplicamos a fração pelo conjugado do denominador, lembrando que s é uma variável complexa dada por $s = j\omega$.

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{(R_2 + sR_1R_2C_1)(R_1 + R_2 - s(R_1R_2C_2 + R_2R_1C_1))}{(R_1 + R_2)^2 + (R_1R_2C_2 + R_2R_1C_1)^2}$$

Expandindo o produto no numerador através de distribuitiva, temos

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{(R_1 + R_2)(sR_1R_2C_1) + R_2(R_1 + R_2) + (R_1R_2C_1)(R_1R_2C_2 + R_2R_1C_1) - sR_2(R_1R_2C_2 + R_2R_1C_1)}{(R_1 + R_2)^2 + (R_1R_2C_2 + R_2R_1C_1)^2}$$

Colocando a parte imaginária em evidência no numerador,

$$s\left[(R_1 + R_2)(R_1R_2C_1) - R_2(R_1R_2C_2 + R_2R_1C_1)\right]$$

A parte imaginária tem que ser nula para que a função de transferência não dependa da frequência. Portanto,

$$(R_1 + R_2)(R_1R_2C_1) - R_2(R_1R_2C_2 + R_2R_1C_1) = 0$$

$$(R_1 + R_2)(R_1R_2C_1) = R_2(R_1R_2C_2 + R_2R_1C_1)$$

$$R_1^2R_2C_1 + R_1R_2^2C_1 = R_1R_2^2C_2 + R_1R_2^2C_1$$

$$R_1^2R_2C_1 = R_1R_2^2C_2$$

$$\boxed{R_1C_1 = R_2C_2}$$

Finalmente, para que a função de transferência não dependa da frequência, temos que a condição $R_1C_1 = R_2C_2$ deve ser atendida, uma vez que a parte imaginária é nula nessa condição.

A análise com LTSpice desse problema está disponível no próximo arquivo em anexo.