

Questão 1

Substitui o plano na eq da esfera

$$x^2 + (2 - x)^2 + z^2 = 3 \implies 2x^2 - 4x + z^2 = -1 \implies 2x^2 - 4x + 2 + z^2 = -1 + 2$$

$$(\sqrt{2}x - \sqrt{2})^2 + z^2 = 1 \implies 2(x - 1)^2 + z^2 = 1 \implies \frac{(x - 1)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + z^2 = 1$$

A projeção no plano xz é uma elipse deslocada da origem. Parametriza ela

$$x(t) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t) \quad z(t) = \sin(t) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Substitui na equação do plano para achar o $y(t)$

$$y(t) = 2 - 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t) \implies y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t)$$

Tira a derivada

$$x'(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(t) \quad y'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(t) \quad z'(t) = \cos(t)$$

Módulo

$$||r'(t)|| = \sqrt{\frac{1}{2}\sin^2(t) + \frac{1}{2}\sin^2(t) + \cos^2(t)}$$

$$||r'(t)|| = 1$$

Finalmente,

$$\int_0^{2\pi} 1 - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t)\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t)\right) dt$$

$$\int_0^{2\pi} 1 - \left(1 - \frac{1}{2}\cos^2(t)\right) dt$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\cos^2(t) dt = \frac{\pi}{2}}$$

Questão 2

Primeira coisa é observar que sobre a curva C temos $x^2 + 4y^2 = 1$, de modo que podemos reescrever a integral de linha como

$$\int_C \frac{4y}{1} dx - \frac{4x}{1} dy \implies 4 \int_C y dx - x dy$$

Parametriza a elipse. Usa cartesianas mesmo porque não temos ângulo notável na reta $x = 2y$.

$$x^2 + 4y^2 = 1 \implies y = \pm \sqrt{\frac{1 - x^2}{4}}$$

Usa somente a parte positiva porque estamos no primeiro quadrante.

$$x(t) = t \quad y(t) = \frac{1}{2}\sqrt{1-t^2}$$

A interseção entre a elipse e a reta é

$$x^2 + 4\left(\frac{x}{2}\right)^2 = 1 \implies x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \implies x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

De novo usa somente a parte positiva porque estamos no primeiro quadrante. Logo, o intervalo de variação de t é

$$0 \leq t \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Agora só falta achar o dx e o dy :

$$\frac{dx}{dt} = 1 \implies dx = dt \quad , \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2} \frac{1}{2\sqrt{1-t^2}}(-2t) \implies dy = -\frac{t}{2\sqrt{1-t^2}} dt$$

Substitui tudo na integral de linha

$$I = 4 \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{2} \sqrt{1-t^2} - t \left(-\frac{t}{2\sqrt{1-t^2}} \right) dt$$

Joga no symbolab do jeito que está ali mesmo

$$\boxed{I = \frac{\pi}{2}}$$