

Problema P9.77

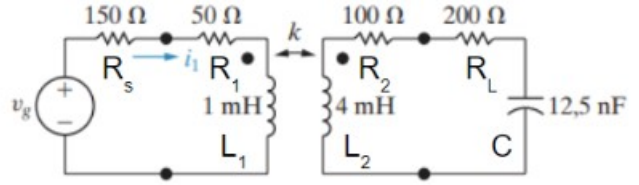
9.77 A fonte de tensão senoidal no circuito visto na Figura P9.77 está funcionando a uma frequência de 200 krad/s. O coeficiente de acoplamento é ajustado até que o valor de pico de i_1 seja máximo.

Pspice
Multisim

frequência de 200 krad/s. O coeficiente de acoplamento é ajustado até que o valor de pico de i_1 seja máximo.

- Qual é o valor de k ?
- Se $v_g = 560 \cos(2 \times 10^5 t)$ V, qual é a amplitude máxima de i_1 ?

Figura P9.77



(a)

O valor de $i(t)$ depende da impedância Z_{in} vista pela fonte V_g . Sabemos que Z_{in} é expressa por

$$Z_{in} = Z_{11} + Z_r \quad (1)$$

Além disso, sabemos que a impedância refletida Z_r é dada por

$$Z_r = \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}} \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1), temos

$$Z_{in} = Z_{11} + \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}} \quad (3)$$

Onde

- Z_{11} : Autoimpedância da malha do primeiro enrolamento;
- Z_{22} : Autoimpedância da malha do segundo enrolamento;
- M : Indutância mútua.

Expandindo os termos de (3), temos

$$Z_{in} = R_s + R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 (k\sqrt{L_1 L_2})^2}{j\omega L_2 + R_2 + R_L + \frac{1}{j\omega C}} \quad (4)$$

Vamos reescrever (4) de modo a isolar a parte real da parte complexa.

$$Z_{in} = R_s + R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 k^2 L_1 L_2}{j\omega L_2 + R_2 + R_L - \frac{j}{\omega C}}$$

$$Z_{in} = R_s + R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 k^2 L_1 L_2}{R_2 + R_L + j(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})}$$

$$Z_{in} = R_s + R_1 + j\omega L_1 + \frac{(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(R_2 + R_L - j(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C}))}{(R_2 + R_L + j(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C}))(R_2 + R_L - j(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C}))}$$

$$Z_{in} = R_s + R_1 + j\omega L_1 + \frac{(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(R_2 + R_L) - j(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2}$$

$$Z_{in} = R_s + R_1 + \frac{(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(R_2 + R_L)}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2} + j \left(\omega L_1 - \frac{(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2} \right) \quad (5)$$

A partir de (5) podemos determinar o módulo de Z_{in} .

$$|Z_{in}|(k) = \sqrt{\left(R_s + R_1 + \frac{(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(R_2 + R_L)}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2} \right)^2 + \left(\omega L_1 - \frac{(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2} \right)^2} \quad (6)$$

A expressão (6) expressa o módulo de Z_{in} como uma função do coeficiente k . O valor máximo de $i(t)$ ocorre quando $Z_{in}(k)$ atinge seu valor mínimo, ou seja, quando

$$\frac{d}{dk} |Z_{in}|(k) = 0 \quad (7)$$

Vamos diferenciar (6) com respeito a k . Antes disso, vamos adotar uma notação para reduzir o tamanho da expressão.

Sejam

$$A = \frac{(\omega^2 L_1 L_2)(R_2 + R_L)}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2}$$

e

$$B = \frac{(\omega^2 L_1 L_2)(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2}$$

Note que A e B não dependem de k . Assim, podemos reescrever (6) como

$$|Z_{in}|(k) = \sqrt{(R_s + R_1 + Ak^2)^2 + (\omega L_1 - Bk^2)^2} \quad (8)$$

Diferenciando (8) com respeito a k , temos

$$\frac{d}{dk} |Z_{in}|(k) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{(R_s + R_1 + Ak^2)^2 + (\omega L_1 - Bk^2)^2}} (2(R_s + R_1 + Ak^2)(2Ak) + 2(\omega L_1 - Bk^2)(2Bk)) \quad (9)$$

Para que (9) seja igual a zero, temos

$$2(R_s + R_1 + Ak^2)(2Ak) + 2(\omega L_1 - Bk^2)(-2Bk) = 0$$

$$(R_s + R_1 + Ak^2)(Ak) + (\omega L_1 - Bk^2)(-Bk) = 0$$

$$AkR_s + AkR_1 + A^2k^3 - \omega BkL_1 + B^2k^3 = 0$$

$$k^3(A^2 + B^2) + k(AR_s + AR_1 - \omega BL_1) = 0$$

$$k \left(k^2(A^2 + B^2) + (AR_s + AR_1 - \omega BL_1) \right) = 0$$

$$k^2(A^2 + B^2) + AR_s + AR_1 - \omega BL_1 = 0$$

$$k = \sqrt{\frac{\omega BL_1 - AR_s - AR_1}{(A^2 + B^2)}}$$

Substituindo os valores todos, temos

$$A = 192$$

$$B = 256$$

$$k = 0.3536$$

(b)

Conhecido o valor de $k = 0.3536$, podemos calcular o valor da impedância vista pela fonte através de (4), obtendo

$$Z_{in} = 224 + j168 \, \Omega$$

Portanto, usando o fato que a corrente fornecida pela fonte é

$$i(t) = \frac{v_g(t)}{Z_{in}}$$

Em notação fasorial,

$$I = \frac{V_g}{Z_{in}} = \frac{\frac{560}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ}{224 + j168 \, \Omega}$$

$$I = 1.4142 \angle -36.57^\circ \, A$$

Portanto, o valor de pico de $i(t)$ é

$$i_m(t) = 1.4142\sqrt{2} = 2 \, A$$