Problema P9.14

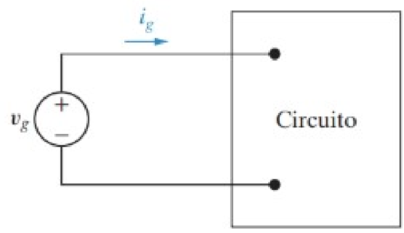
9.14 As expressões para a tensão e a corrente de regime permanente nos terminais do circuito da Figura P9.14 são

$$v_g = 300\cos(5.000\pi t + 78°)\ \text{V},$$
$$i_g = 6\,\text{sen}\,(5.000\pi t + 123°)\ \text{A}.$$

a) Qual é a impedância vista pela fonte?

b) De quantos microssegundos é a defasagem entre a corrente e a tensão?

Figura P9.14



(a)

A impedância Z_{in} vista pela fonte é dada por

$$Z_{in} = \frac{V_g}{I_g} \tag{9.14-1}$$

Usando a relação trigonométrica

$$\sin\theta = \cos(\theta - 90°)$$

Podemos reescrever a expressão de $i_g(t)$ como

$$i_g(t) = 6\cos(5000\pi + 123° - 90°)$$

$$i_g(t) = 6\cos(5000\pi + 33°)$$

Assim, em notação fasorial, temos

$$Z_{in} = \frac{\frac{300}{\sqrt{2}}\underline{/78°}}{\frac{6}{\sqrt{2}}\underline{/33°}} \tag{9.14-2}$$

$$\boxed{Z_{in} = 50\underline{/45°}\ \Omega}$$

(b)

Usando proporcionalidade (regra de três simples), sabemos que uma diferença de fase de $\Delta\phi$ corresponde a uma diferença temporal Δt dada por

$$\frac{T}{\Delta t} = \frac{360°}{\Delta\phi}$$

onde $T = \frac{2\pi}{\omega}$ é o período do sinal. Isolando Δt, temos

$$\Delta t = T\frac{\Delta\phi}{360°} \tag{9.14-3}$$

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega}\frac{\Delta\phi}{360°}$$

Substituindo tudo, temos

$$\boxed{\Delta t = 50\ \mu s}$$

Problema P9.77

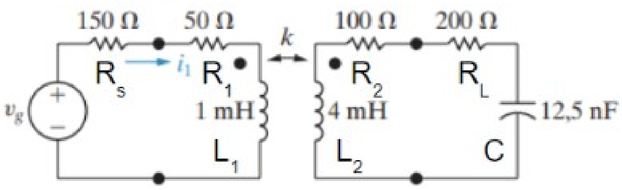
9.77 A fonte de tensão senoidal no circuito visto na Figura P9.77 está funcionando a uma frequência de 200 krad/s. O coeficiente de acoplamento é ajustado até que o valor de pico de i_1 seja máximo.

Pspice Multisim

a) Qual é o valor de k?

b) Se $v_g = 560\cos(2\times10^5 t)$ V, qual é a amplitude máxima de i_1?

Figura P9.77



(a)

O valor de $i(t)$ depende da impedância Z_{in} vista pela fonte V_g. Sabemos que Z_{in} é expressa por

$$Z_{in} = Z_{11} + Z_r \tag{9.77-1}$$

Além disso, sabemos que a impedância refletida Z_r é dada por

$$Z_r = \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}} \tag{9.77-2}$$

Substituindo (9.77-2) em (9.77-1), temos

$$Z_{in} = Z_{11} + \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}} \tag{9.77-3}$$

Onde

- Z_{11}: Autoimpedância da malha do primeiro enrolamento;
- Z_{22}: Autoimpedância da malha do segundo enrolamento;
- M: Indutância mútua.

Expandindo os termos de (9.77-3), temos

$$Z_{in} = R_s + R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 (k\sqrt{L_1 L_2})^2}{j\omega L_2 + R_2 + R_L + \frac{1}{j\omega C}} \tag{9.77-4}$$

Vamos reescrever (9.77-4) de modo a isolar a parte real da parte complexa.

$$Z_{in} = R_s + R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 k^2 L_1 L_2}{j\omega L_2 + R_2 + R_L - \frac{j}{\omega C}}$$

$$Z_{in} = R_s + R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 k^2 L_1 L_2}{R_2 + R_L + j(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})}$$

$$Z_{in} = R_s + R_1 + j\omega L_1 + \frac{(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(R_2 + R_L - j(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C}))}{(R_2 + R_L + j(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C}))(R_2 + R_L - j(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C}))}$$

$$Z_{in} = R_s + R_1 + j\omega L_1 + \frac{(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(R_2 + R_L) - j(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2}$$

$$Z_{in} = R_s + R_1 + \frac{(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(R_2 + R_L)}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2} + j\left(\omega L_1 - \frac{(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2}\right) \qquad (9.77\text{-}5)$$

A partir de (9.77-5) podemos determinar o módulo de Z_{in}.

$$|Z_{in}|(k) = \sqrt{\left(R_s + R_1 + \frac{(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(R_2 + R_L)}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2}\right)^2 + \left(\omega L_1 - \frac{(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2}\right)^2} \qquad (9.77\text{-}6)$$

A expressão (9.77-6) expressa o módulo de Z_{in} como uma função do coeficiente k. O valor máximo de $i(t)$ ocorre quando $Z_{in}(k)$ aitinge seu valor mínimo, ou seja, quando

$$\frac{d}{dk}|Z_{in}|(k) = 0 \qquad (9.77\text{-}7)$$

Vamos diferenciar (9.77-6) com respeito a k. Antes disso, vamos adotar uma notação para reduzir o tamanho da expressão. Sejam

$$A = \frac{(\omega^2 L_1 L_2)(R_2 + R_L)}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2} \quad , \quad B = \frac{(\omega^2 L_1 L_2)(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2}$$

Note que A e B não dependem de k. Assim, podemos reescrever (9.77-6) como

$$|Z_{in}|(k) = \sqrt{(R_s + R_1 + Ak^2)^2 + (\omega L_1 - Bk^2)^2} \qquad (9.77\text{-}8)$$

Diferenciando (9.77-8) com respeito a k, temos

$$\frac{d}{dk}|Z_{in}|(k) = \frac{1}{2}\frac{2(R_s + R_1 + Ak^2)(2Ak) + 2(\omega L_1 - Bk^2)(2Bk)}{\sqrt{(R_s + R_1 + Ak^2)^2 + (\omega L_1 - Bk^2)^2}} \qquad (9.77\text{-}9)$$

Para que (9.77-9) seja igual a zero, temos

$$2(R_s + R_1 + Ak^2)(2Ak) + 2(\omega L_1 - Bk^2)(-2Bk) = 0$$

$$(R_s + R_1 + Ak^2)(Ak) + (\omega L_1 - Bk^2)(-Bk) = 0$$

$$AkR_s + AkR_1 + A^2k^3 - \omega BkL_1 + B^2k^3 = 0$$

$$k^3(A^2 + B^2) + k(AR_s + AR_1 - \omega BL_1) = 0$$

$$k\left(k^2(A^2 + B^2) + (AR_s + AR_1 - \omega BL_1)\right) = 0$$

$$k^2(A^2 + B^2) + AR_s + AR_1 - \omega BL_1 = 0$$

$$k = \sqrt{\frac{\omega B L_1 - A R_s - A R_1}{(A^2 + B^2)}}$$

Substituindo os valores todos, temos

$$A = 192 \quad , \quad B = 256$$

$$\boxed{k = 0.3536}$$

(b)

Conhecido o valor de $k = 0.3536$, podemos calcular o valor da impedância vista pela fonte através de (9.77-4), obtendo

$$Z_{in} = 224 + j168\ \Omega$$

Portanto, usando o fato que a corrente forncecida pela fonte é

$$i(t) = \frac{v_g(t)}{Z_{in}}$$

Em notação fasorial,

$$I = \frac{V_g}{Z_{in}} = \frac{\frac{560}{\sqrt{2}}\angle 0^\circ}{224 + j168\ \Omega}$$

$$I = 1.4142\underline{/-36.57^\circ}\ A$$

Portanto, o valor de pico de $i(t)$ é

$$\boxed{i_m(t) = 1.4142\sqrt{2} = 2\ A}$$