Aluno: Raphael Henrique Braga Leivas

Código fonte LaTeX desse arquivo pode ser visto em meu GitHub pessoal:

https://github.com/RaphaelLeivas/latex/tree/main/ListaCEII

Aceito sugestões de melhoria do código :)

Problema P7.29

7.29 No circuito da Figura P7.29 as expressões para a tensão e a corrente são

$$v = 72e^{-500t}\,\mathrm{V},\ t \geq 0;$$
$$i = 9e^{-500t}\,\mathrm{mA},\ t \geq 0^{+}.$$

Determine

a) R.

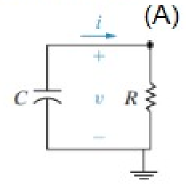
b) C.

c) τ (em milissegundos).

d) A energia inicial armazenada no capacitor.

e) Em quantos microssegundos 68% da energia inicial armazenada no capacitor são dissipados.

Figura P7.29



Antes de tudo, vamos extrair a função de $v(t)$ genérica para o circuito. Aplicamos análise nodal no nó (A) da figura, obtendo

$$-i + \frac{V_A}{R} = 0$$

Em um capacitor, sabemos que

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{7.29.1}$$

Note que i está entrando no terminal negativo de C. Assim, usamos sinal negativo em (7.29.1) para manter a convenção passiva. Substituindo (7.29.1) na equação nodal, e usando $v = V_A$, temos

$$-\left(-C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{v}{R} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{v}{RC} = 0$$

Usando o fator integrante $M(t) = e^{\frac{1}{RC}t}$, temos

$$e^{-\frac{1}{RC}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + e^{\frac{1}{RC}t}\frac{v}{RC} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}[v(t)\cdot e^{\frac{1}{RC}t}]}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$v(t)\cdot e^{\frac{1}{RC}t} = K$$

$$v(t) = Ke^{-\frac{1}{RC}t}\ \mathrm{V}\,,\ t \geq 0 \tag{7.29.2}$$

(a)

Usando a Lei de Ohm,

$$\boxed{R = \frac{v(t)}{i(t)} = \frac{72e^{-500t}\ \mathrm{V}}{9e^{-500t}\ \mathrm{mA}} = 8\ \mathrm{k\Omega}}$$

(b)

Comparando (7.29.1) com a função de $v(t)$ dada no exercício, temos

$$-\frac{1}{RC} = -500$$

$$C = -\frac{1}{R(-500)}$$

$$\boxed{C = 250\ \mathrm{nF}}$$

(c)

A constante de tempo τ é definida como

$$\tau = RC \tag{7.29.3}$$

Assim,

$$\boxed{\tau = 2\ \mathrm{ms}}$$

(d)

A energia no capacitor é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2}C[v(t)]^2 \tag{7.29.4}$$

Assim, em $t = 0$, temos a energia inicial

$$E(0) = \frac{1}{2}(250\ \mathrm{nF})[72\ \mathrm{V}]^2$$

$$\boxed{E(0) = 648\ \mu\mathrm{J}}$$

(e)

Isolando t em (7.29.4),

$$v(t) = \sqrt{\frac{2E(t)}{C}}$$

Substituindo a função de $v(t)$ do enunciado na expressão acima, temos

$$e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{1}{v_0}\sqrt{\frac{2E(t)}{C}}$$

$$-\frac{t}{RC} = \ln\left(\frac{1}{v_0}\sqrt{\frac{2E(t)}{C}}\right)$$

$$t = -RC\ln\left(\frac{1}{v_0}\sqrt{\frac{2E(t)}{C}}\right)$$

Queremos que seja dissipado 68% da energia inicial armazenada. Isso significa que precisamos de um instante t tal que

$$E(t) = 32\% E(0) = \frac{32}{100}E(0) = \frac{32}{100}\frac{1}{2}Cv_o^2$$

Substituindo esse $E(t)$ na expressão de t acima,

$$t = -RC\ln\left(\frac{1}{v_0}\sqrt{\frac{2\frac{32}{100}\frac{1}{2}Cv_o^2}{C}}\right)$$

$$t = -RC\ln\left(\sqrt{\frac{32}{100}}\right)$$

Substituindo tudo,

$$\boxed{t = 1139.43\ \mu\text{s}}$$