

Problema P9.14

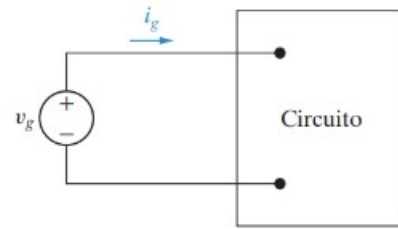
9.14 As expressões para a tensão e a corrente de regime permanente nos terminais do circuito da Figura P9.14 são

$$v_g = 300 \cos(5.000\pi t + 78^\circ) \text{ V},$$

$$i_g = 6 \sin(5.000\pi t + 123^\circ) \text{ A}.$$

- Qual é a impedância vista pela fonte?
- De quantos microssegundos é a defasagem entre a corrente e a tensão?

Figura P9.14



(a)

A impedância Z_{in} vista pela fonte é dada por

$$Z_{in} = \frac{V_g}{I_g} \quad (9.14.1)$$

Usando a relação trigonométrica

$$\sin \theta = \cos(\theta - 90^\circ)$$

Podemos reescrever a expressão de $i_g(t)$ como

$$i_g(t) = 6 \cos(5000\pi t + 123^\circ - 90^\circ)$$

$$i_g(t) = 6 \cos(5000\pi t + 33^\circ)$$

Assim, em notação fasorial, temos

$$Z_{in} = \frac{\frac{300}{\sqrt{2}} \angle 78^\circ}{\frac{6}{\sqrt{2}} \angle 33^\circ} \quad (9.14.2)$$

$$\boxed{Z_{in} = 50 \angle 45^\circ \Omega}$$

(b)

Usando proporcionalidade (regra de três simples), sabemos que uma diferença de fase de $\Delta\phi$ corresponde a uma diferença temporal Δt dada por

$$\frac{T}{\Delta t} = \frac{360^\circ}{\Delta\phi}$$

onde $T = \frac{2\pi}{\omega}$ é o período do sinal. Isolando Δt , temos

$$\Delta t = T \frac{\Delta\phi}{360^\circ} \quad (9.14.3)$$

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega} \frac{\Delta\phi}{360^\circ}$$

Substituindo tudo, temos

$$\Delta t = 50 \mu s$$

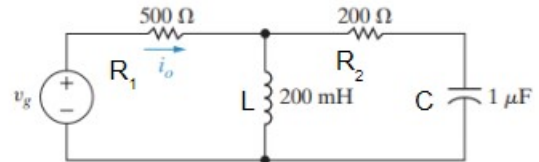
Problema P9.37

9.37 A frequência da fonte de tensão senoidal no circuito da Figura P9.37 é ajustada até que a corrente i_o fique em fase com v_g .

Pspice
Multisim

- Determine a frequência em hertz.
- Determine a expressão de regime permanente para i_o (na frequência encontrada em [a]), se $v_g = 90 \cos \omega t$ V.

Figura P9.37



(a)

Vamos começar identificando a impedância equivalente Z_{in} vista pela fonte v_g .

$$Z_{in} = \left(\left(\frac{1}{j\omega C} + R_2 \right) // j\omega L \right) + R_1$$

$$Z_{in} = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{\frac{1}{j\omega C} + R_2}}$$

Agora vamos isolar a parte real da parte complexa.

$$Z_{in} = R_1 + \frac{1}{-\frac{j}{\omega L} + \frac{1}{-\frac{j}{j\omega C} + R_2}}$$

$$Z_{in} = R_1 + \frac{1}{-\frac{j}{\omega L} - \frac{j\omega C}{j + jR_2j\omega C}}$$

$$Z_{in} = R_1 + \frac{1}{-\frac{j}{\omega L} - \frac{\omega C}{1 + jR_2\omega C}}$$

$$Z_{in} = R_1 + \frac{1}{-\frac{j}{\omega L} - \frac{\omega C(1 - jR_2\omega C)}{1^2 + (R_2\omega C)^2}}$$

$$Z_{in} = R_1 + \frac{1}{-\frac{j}{\omega L} - \frac{\omega C}{1 + R_2^2\omega^2 C^2} + j \frac{R_2\omega^2 C^2}{1 + R_2^2\omega^2 C^2}}$$

$$Z_{in} = R_1 + \frac{1}{-\frac{\omega C}{1 + R_2^2\omega^2 C^2} + j \left(-\frac{1}{\omega L} + \frac{R_2\omega^2 C^2}{1 + R_2^2\omega^2 C^2} \right)}$$

$$Z_{in} = R_1 + \frac{-\frac{\omega C}{1 + R_2^2\omega^2 C^2} - j \left(-\frac{1}{\omega L} + \frac{R_2\omega^2 C^2}{1 + R_2^2\omega^2 C^2} \right)}{\left(\frac{\omega C}{1 + R_2^2\omega^2 C^2} \right)^2 + \left(-\frac{1}{\omega L} + \frac{R_2\omega^2 C^2}{1 + R_2^2\omega^2 C^2} \right)^2}$$

Vamos adotar uma notação para simplificar a expressão. Sejam

$$A = \frac{\omega C}{1 + R_2^2 \omega^2 C^2} \quad , \quad B = -\frac{1}{\omega L} + \frac{R_2 \omega^2 C^2}{1 + R_2^2 \omega^2 C^2}$$

Com isso, podemos reescrever a expressão de Z_{in} como

$$Z_{in} = R_1 + \frac{-A - jB}{A^2 + B^2}$$

$$Z_{in} = \left(R_1 - \frac{A}{A^2 + B^2} \right) - j \frac{B}{A^2 + B^2}$$

Agora é possível expressar uma função para o ângulo de fase ϕ de Z_{in} , dada por

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{\frac{B}{A^2 + B^2}}{R_1 - \frac{A}{A^2 + B^2}} \right)$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{\frac{B}{A^2 + B^2}}{\frac{R_1(A^2 + B^2) - A}{A^2 + B^2}} \right)$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{B}{R_1(A^2 + B^2) - A} \right) \quad (9.37.1)$$

Uma vez calculado Z_{in} , podemos expressar a relação entre V_g e I_o através de

$$V_g = Z_{in} \cdot I_g \quad (9.37.2)$$

Para que (9.37.2) seja satisfeita com V_g e I_o em fase, temos que o ângulo de fase de Z_{in} deve ser nulo. Portanto, usando (9.37.1), temos

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{B}{R_1(A^2 + B^2) - A} \right) = 0$$

$$\frac{B}{R_1(A^2 + B^2) - A} = 0$$

$$B = 0$$

Expandindo B conforme o definimos, temos

$$-\frac{1}{\omega L} + \frac{R_2 \omega^2 C^2}{1 + R_2^2 \omega^2 C^2} = 0$$

$$\frac{-(1 + R_2^2 \omega^2 C^2) + (\omega L)(R_2 \omega^2 C^2)}{(\omega L)(1 + R_2^2 \omega^2 C^2)} = 0$$

$$-1 - R_2^2 \omega^2 C^2 + (\omega L)(R_2 \omega^2 C^2) = 0$$

Isolando ω , temos

$$-R_2^2 \omega^2 C^2 + \omega^3 L R_2 C^2 = 1$$

$$\omega^3 L R_2 C^2 - \omega^2 R_2^2 C^2 - 1 = 0$$

Para solucionar a equação de 3º grau, vamos substituir os valores

$$4 \cdot 10^{-11} \omega^3 - 4 \cdot 10^{-8} \omega^2 - 1 = 0$$

Usando $\omega = 2\pi f$, a frequência f em Hertz da fonte de tensão deve ser

$$f = \frac{1}{2\pi} \frac{R_2}{L} \quad (9.37.3)$$

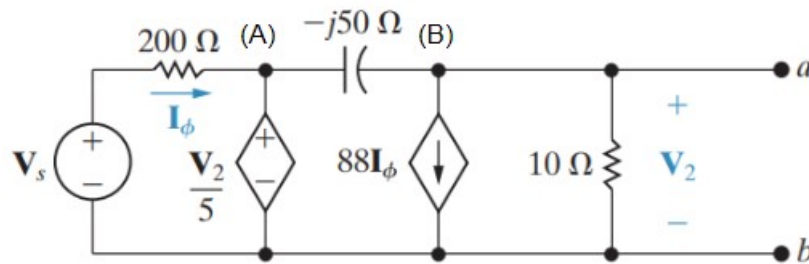
Substituindo,

$$f = 159.15 \text{ Hz}$$

Problema P9.50

9.50 Determine o circuito equivalente de Norton em relação aos terminais a, b para o circuito da Figura P9.50 quando $\mathbf{V}_s = 5\angle 0^\circ \text{ V}$.

Figura P9.50



Em um circuito equivalente norton, temos

$$I_N = I_{SC} \quad , \quad R_N = R_{th}$$

Vamos começar calculando a tensão de Thevenin V_{th} entre os terminais a e b , abrindo-os.

Expressando as variáveis de controle em função dos elementos do circuito, obtemos

$$V_2 = V_B \quad (9.50.1)$$

$$I_\phi = \frac{5V - V_A}{200 \, \Omega} \quad (9.50.2)$$

Feito isso, aplicamos análise nodal dos nós essenciais A e B . Começamos pelo nó A . Obtemos de imediato que

$$V_A = \frac{V_2}{5} = \frac{V_B}{5} \quad (9.50.3)$$

Agora vamos para o nó B .

$$\frac{V_B - V_A}{-j50 \, \Omega} + 88I_\phi + \frac{V_B - 0}{10 \, \Omega} = 0$$

Usando (9.50.2) e (9.50.3), temos

$$\frac{V_B - \frac{V_B}{5}}{-j50 \, \Omega} + 88 \frac{5V - \frac{V_B}{5}}{200 \, \Omega} + \frac{V_B}{10 \, \Omega} = 0$$

Isolando V_B , temos

$$\frac{V_B}{-j50} - \frac{V_B}{-j250} - \frac{88V_B}{1000} + \frac{V_B}{10} = -2.2$$

$$V_B = -\frac{2.2}{\frac{1}{-j50} - \frac{1}{-j250} - \frac{88}{1000} + \frac{1}{10}}$$

$$V_B = -66 + j88V = 110/\underline{126.86^\circ}V \quad (9.50.4)$$

Usando (9.50.3), obtemos

$$V_A = 22/\underline{126.86^\circ}V \quad (9.50.5)$$

Assim, obtemos que a tensão de Thevenin é dada por

$$V_{th} = V_{ab} = V_B = 110/\underline{126.86^\circ}V \quad (9.50.6)$$

Agora calculamos a corrente de curto-circuito I_{sc} . Curto circuitamos os terminais a e b , e novamente expressamos as variáveis de controle em função dos elementos do circuito.

$$V_2 = 0V \quad (9.50.7)$$

$$I_\phi = \frac{5V - V_A}{200 \, \Omega} \quad (9.50.8)$$

Agora aplicamos análise nodal nos nós essenciais A e B . De imediato temos que

$$V_A = \frac{V_2}{5} = \frac{V_B}{5}$$

No entanto, devido ao curto-circuito, observe que

$$V_B = 0V$$

E portanto,

$$V_A = V_B = 0V$$

Escrevendo a equação de nó de B , temos

$$\frac{V_B - \frac{V_B}{5}}{-j50 \, \Omega} + 88 \frac{5V - \frac{V_B}{5}}{200 \, \Omega} + I_{sc} = 0$$

Substituindo e isolando I_{sc} ,

$$0 + 88 \frac{5V}{200 \, \Omega} + I_{sc} = 0$$

$$I_{sc} = -2.2 \, A = 2.2/\underline{180^\circ} \, A \quad (9.50.9)$$

Usando (9.50.9) e (9.50.6), obtemos a resistência de Thevenin R_{th} .

$$R_{th} = \frac{V_{th}}{I_{sc}} = \frac{110/\underline{126.86^\circ}}{2.2/\underline{180^\circ}} = 50/\underline{-53.14^\circ}\Omega \quad (9.50.10)$$

Finalmente,

$$R_N = 50/\underline{-53.14^\circ}\Omega = 30 - j40\Omega$$

$$I_N = -2.2A$$

Problema P9.77

9.77 A fonte de tensão senoidal no circuito visto na Figura P9.77 está funcionando a uma frequência de 200 krad/s. O coeficiente de acoplamento é ajustado até que o valor de pico de i_1 seja máximo.

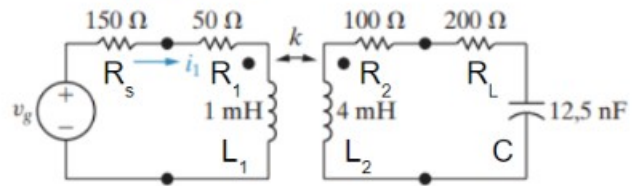
Pspice
Multisim

frequência de 200 krad/s. O coeficiente de acoplamento é ajustado até que o valor de pico de i_1 seja máximo.

a) Qual é o valor de k ?

b) Se $v_g = 560 \cos(2 \times 10^5 t)$ V, qual é a amplitude máxima de i_1 ?

Figura P9.77



(a)

O valor de $i(t)$ depende da impedância Z_{in} vista pela fonte V_g . Sabemos que Z_{in} é expressa por

$$Z_{in} = Z_{11} + Z_r \quad (9.77.1)$$

Além disso, sabemos que a impedância refletida Z_r é dada por

$$Z_r = \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}} \quad (9.77.2)$$

Substituindo (9.77.2) em (9.77.1), temos

$$Z_{in} = Z_{11} + \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}} \quad (9.77.3)$$

Onde

- Z_{11} : Autoimpedância da malha do primeiro enrolamento;
- Z_{22} : Autoimpedância da malha do segundo enrolamento;
- M : Indutância mútua.

Expandindo os termos de (9.77.3), temos

$$Z_{in} = R_s + R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 (k\sqrt{L_1 L_2})^2}{j\omega L_2 + R_2 + R_L + \frac{1}{j\omega C}} \quad (9.77.4)$$

Vamos reescrever (9.77.4) de modo a isolar a parte real da parte complexa.

$$Z_{in} = R_s + R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 k^2 L_1 L_2}{j\omega L_2 + R_2 + R_L - \frac{j}{\omega C}}$$

$$Z_{in} = R_s + R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 k^2 L_1 L_2}{R_2 + R_L + j(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})}$$

$$Z_{in} = R_s + R_1 + j\omega L_1 + \frac{(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(R_2 + R_L - j(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C}))}{(R_2 + R_L + j(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C}))(R_2 + R_L - j(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C}))}$$

$$Z_{in} = R_s + R_1 + j\omega L_1 + \frac{(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(R_2 + R_L) - j(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2}$$

$$Z_{in} = R_s + R_1 + \frac{(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(R_2 + R_L)}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2} + j \left(\omega L_1 - \frac{(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2} \right) \quad (9.77.5)$$

A partir de (9.77.5) podemos determinar o módulo de Z_{in} .

$$|Z_{in}|(k) = \sqrt{\left(R_s + R_1 + \frac{(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(R_2 + R_L)}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2} \right)^2 + \left(\omega L_1 - \frac{(\omega^2 k^2 L_1 L_2)(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2} \right)^2} \quad (9.77.6)$$

A expressão (9.77.6) expressa o módulo de Z_{in} como uma função do coeficiente k . O valor máximo de $i(t)$ ocorre quando $Z_{in}(k)$ atinge seu valor mínimo, ou seja, quando

$$\frac{d}{dk} |Z_{in}|(k) = 0 \quad (9.77.7)$$

Vamos diferenciar (9.77.6) com respeito a k . Antes disso, vamos adotar uma notação para reduzir o tamanho da expressão. Sejam

$$A = \frac{(\omega^2 L_1 L_2)(R_2 + R_L)}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2}, \quad B = \frac{(\omega^2 L_1 L_2)(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C})^2}$$

Note que A e B não dependem de k . Assim, podemos reescrever (9.77.6) como

$$|Z_{in}|(k) = \sqrt{(R_s + R_1 + Ak^2)^2 + (\omega L_1 - Bk^2)^2} \quad (9.77.8)$$

Diferenciando (9.77.8) com respeito a k , temos

$$\frac{d}{dk} |Z_{in}|(k) = \frac{1}{2} \frac{2(R_s + R_1 + Ak^2)(2Ak) + 2(\omega L_1 - Bk^2)(-2Bk)}{\sqrt{(R_s + R_1 + Ak^2)^2 + (\omega L_1 - Bk^2)^2}} \quad (9.77.9)$$

Para que (9.77.9) seja igual a zero, temos

$$2(R_s + R_1 + Ak^2)(2Ak) + 2(\omega L_1 - Bk^2)(-2Bk) = 0$$

$$(R_s + R_1 + Ak^2)(Ak) + (\omega L_1 - Bk^2)(-Bk) = 0$$

$$AkR_s + AkR_1 + A^2k^3 - \omega BkL_1 + B^2k^3 = 0$$

$$k^3(A^2 + B^2) + k(AR_s + AR_1 - \omega BL_1) = 0$$

$$k \left(k^2(A^2 + B^2) + (AR_s + AR_1 - \omega BL_1) \right) = 0$$

$$k^2(A^2 + B^2) + AR_s + AR_1 - \omega BL_1 = 0$$

$$k = \sqrt{\frac{\omega BL_1 - AR_s - AR_1}{(A^2 + B^2)}}$$

Substituindo os valores todos, temos

$$A = 192 \quad , \quad B = 256$$

$$\boxed{k = 0.3536}$$

(b)

Conhecido o valor de $k = 0.3536$, podemos calcular o valor da impedância vista pela fonte através de (9.77.4), obtendo

$$Z_{in} = 224 + j168 \, \Omega$$

Portanto, usando o fato que a corrente fornecida pela fonte é

$$i(t) = \frac{v_g(t)}{Z_{in}}$$

Em notação fasorial,

$$I = \frac{V_g}{Z_{in}} = \frac{\frac{560}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ}{224 + j168 \, \Omega}$$

$$I = 1.4142 \angle -36.57^\circ \, A$$

Portanto, o valor de pico de $i(t)$ é

$$\boxed{i_m(t) = 1.4142\sqrt{2} = 2 \, A}$$