Aluno: Raphael Henrique Braga Leivas
Matrícula: 2020028101

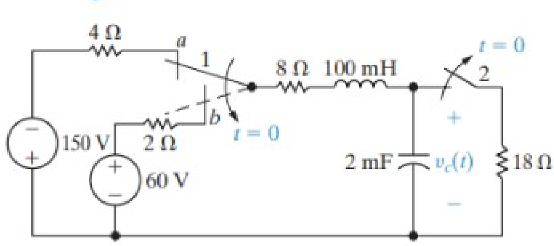
Código fonte LaTeX desse arquivo pode ser visto em meu GitHub pessoal:
https://github.com/RaphaelLeivas/latex/tree/main/ListaCEII

Aceito sugestões de melhoria do código :)

Problema P8.54

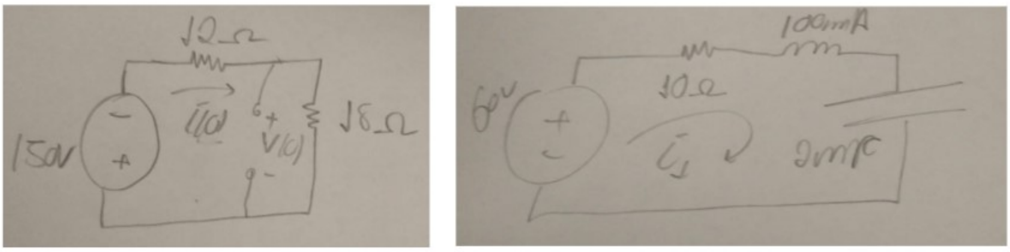
8.54 Pspice Multisim As duas chaves no circuito visto na Figura P8.54 funcionam de modo sincronizado. Quando a chave 1 está na posição a, a chave 2 está fechada. Quando a chave 1 está na posição b, a chave 2 está aberta. A chave 1 esteve na posição a por um longo tempo. Em $t = 0$, ela passa instantaneamente para a posição b. Determine $v_C(t)$ para $t \geq 0$.

Figura P8.54



O primeiro passo é identificar as condições iniciais do circuito, ou seja, as condições em $t < 0$.

Figure 8.54.1: (a) Circuito para $t < 0$. (b) Circuito para $t \geq 0$.



(a) (b)

Em $t < 0$, como mostra a Figura 8.54.1 (a), o circuito se reduz a um divisor de tensão resistivo. Assim, temos

$$v_C(0) = -150\frac{18}{12+18} = -90 \text{ V} \tag{8.54.1}$$

$$i_L(0) = \frac{-150}{12+18} = -5 \text{ A} \tag{8.54.2}$$

Além disso, para identificar a condições de iniciais das derivadas de $i_L(t)$ e $v_C(t)$, usamos

$$\frac{\mathrm{d}v_C(0)}{\mathrm{d}t} = \frac{i_C(0)}{C} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}v_C(0)}{\mathrm{d}t} = -2500 \text{ V/s} \tag{8.54.3}$$

$$\frac{\mathrm{d}i_L(0)}{\mathrm{d}t} = \frac{v_L(0)}{L} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}i_L(0)}{\mathrm{d}t} = \frac{0}{0.1} = 0 \text{ A/s} \tag{8.54.4}$$

De posse das condições inciais, aplicamos análise de malhas no circuito da Figura 8.54.1 (b), obtendo

$$-60 + Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + v_C(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt = 0$$

Derivando com respeito a t,

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}i = 0$$

A EDO acima possui equação característica dada por

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0 \tag{8.54.5}$$

Substituindo com os valores do circuito da Figura 8.54.1 (b),

$$s = \frac{-(100) \pm \sqrt{(100)^2 - 4(1)(5 \cdot 10^3)}}{2(1)}$$

$$s = \frac{-(100) \pm j100}{2(1)}$$

$$s_1 = -50 + j50 \text{ rad/s} \quad , \quad s_2 = -50 - j50 \text{ rad/s}$$

Com as duas raízes encontradas s_1 e s_2, temos que a solução geral é dada pela combinação linear

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) \tag{8.54.6}$$

Onde $i_1(t)$ e $i_2(t)$ são duas possíveis soluções para $i(t)$ dadas por

$$\begin{cases} i_1(t) = A_1 e^{s_1 t} \\ i_2(t) = A_2 e^{s_2 t} \end{cases}$$

Diferenciando (8.54.6) com respeito a t, temos duas equações

$$\begin{cases} i(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \\ \dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = A_1 s_1 e^{s_1 t} + A_2 s_2 e^{s_2 t} \end{cases}$$

Em $t = 0$, temos as condições iniciais já conhecidas em (8.54.2) em (8.54.4)

$$\begin{cases} i(0) = A_1 e^{s_1 0} + A_2 e^{s_2 0} \\ \dfrac{\mathrm{d}i(0)}{\mathrm{d}t} = A_1 s_1 e^{s_1 0} + A_2 s_2 e^{s_2 0} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A_1 + A_2 = -5 \text{ A} \\ A_1 s_1 + A_2 s_2 = 0 \text{ A/s} \end{cases}$$

De posse dessas equações, temos o sistema linear para identificar os coeficientes A_1 e A_2

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ s_1 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -s_1 & -s_1 \\ s_1 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5s_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -s_1 & -s_1 \\ 0 & s_2 - s_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5s_1 \\ 0 + 5s_1 \end{bmatrix}$$

Assim, temos

$$A_2 = \frac{5s_1}{s_2 - s_1} \quad \Rightarrow \quad A_2 = \frac{-250 + j250}{-j100}$$

$$A_2 = -2.5 - j2.5 \quad , \quad A_1 = -2.5 + j2.5$$

Conhecidos coeficientes A_1 e A_2, bem como as raízes s_1 e s_2, temos a solução geral $v(t)$ na forma de (8.54.6)

$$i(t) = (-2.5 + j2.5)e^{(-50+j50)t} + (-2.5 - j2.5)e^{(-50-j50)t} \text{ A}, \, t \geq 0$$

Vamos remover os exponenciais complexos usando a identidade de Euler.

$$i(t) = (-2.5 + j2.5)e^{-50t}e^{j50t} + (-2.5 - j2.5)e^{-50t}e^{-j50t}$$

$$i(t) = (-2.5 + j2.5)e^{-50t}(\cos(50t) + j\sin(50t)) + (-2.5 - j2.5)e^{-50t}(\cos(50t) - j\sin(50t))$$

Evidenciando o termo e^{-50t} e expandindo os demais via propriedade distributiva, temos que todas parcelas complexas se cancelam e ficamos com

$$\boxed{i(t) = e^{-50t}\left[-5\cos(50t) - 5\sin(50t)\right] \text{ A}, \, t \geq 0}$$

Por fim, usando a relação entre corrente e tensão no capacitor de

$$v_C(t) = v_C(0) + \frac{1}{C}\int i(t)\, dt$$

$$v_C(t) = -90 + \frac{1}{0.002}\int e^{-50t}\left[-5\cos(50t) - 5\sin(50t)\right]\, dt$$

$$v_C(t) = -90 + \frac{1}{0.002}\frac{1}{10}e^{-50t}\cos(50t)$$

$$\boxed{v_C(t) = -90 + 50e^{-50t}\cos(50t) \text{ V}, \, t \geq 0}$$