Aluno: Raphael Henrique Braga Leivas

Código fonte LaTeX desse arquivo pode ser visto em meu GitHub pessoal:

https://github.com/RaphaelLeivas/latex/tree/main/ListaCEII

Aceito sugestões de melhoria do código :)

Problema P8.4

8.4 A resistência, indutância e capacitância de um circuito *RLC* em paralelo são 2.000 Ω, 250 mH e 10 nF, respectivamente.

a) Calcule as raízes da equação característica que descreve a resposta de tensão do circuito.

b) A resposta será superamortecida, subamortecida ou criticamente amortecida?

c) Qual é o valor de *R* que resultará em uma frequência amortecida de 12 krads/s?

d) Quais são as raízes da equação característica para o valor de *R* determinado em (c)?

e) Qual é o valor de *R* que resultará em uma resposta criticamente amortecida?

(a)

Sabemos que a equação característica da EDO de um circuito RLC paralelo é dada por

$$s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC} = 0 \tag{8.4.1}$$

Substituindo os dados do problema em (8.4.1), temos

$$s^2 + 5 \cdot 10^4 s + 4 \cdot 10^9 = 0$$

Aplicando Bhaskara,

$$s = \frac{-(5 \cdot 10^4) \pm \sqrt{(5 \cdot 10^4)^2 - 4(1)(4 \cdot 10^8)}}{2(1)}$$

$$\boxed{s_1 = -10000 \text{ rad/s} \quad , \quad s_2 = -40000 \text{ rad/s}}$$

(b)

A resposta da tensão depende do valor de Δ da equação característica, usada no item (a). Assim,

$$\Delta = (5 \cdot 10^4)^2 - 4(1)(4 \cdot 10^8)$$

$$\Delta = 9 \cdot 10^8$$

Como $\Delta > 0$, temos que a resposta é superamortecida.

(c)

A frequência angular amortecida ω_d é definida como

$$\omega_d = \sqrt{\omega_o^2 - \alpha^2} \tag{8.4.2}$$

onde ω_o é a frequência angular de ressonância e α é o fator de armotecimento. Expandindo esses dois termos conforme suas definições, (8.4.2) se torna

$$\omega_d = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^2 - \left(\frac{1}{2RC}\right)^2}$$

$$\omega_d = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}}$$

Isolando R, temos

$$\omega_d^2 = \frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}$$

$$\frac{1}{R^2} = -4C^2\left(\omega_d^2 - \frac{1}{LC}\right)$$

$$R = \sqrt{\frac{1}{-4C^2\left(\omega_d^2 - \frac{1}{LC}\right)}}$$

Substituindo $\omega_d = 12\ \mathrm{krad/s}$ e os demais valores do enunciado, temos

$$\boxed{R = 3125\ \Omega}$$

(d)

Com $R = 3125\ \Omega$ em (8.4.1),

$$s = \frac{-(3.2 \cdot 10^4) \pm \sqrt{(3.2 \cdot 10^4)^2 - 4(1)(4 \cdot 10^8)}}{2(1)}$$

$$s = \frac{-(3.2 \cdot 10^4) \pm \sqrt{-5.76 \cdot 10^8}}{2(1)}$$

Note que agora temos que usar raízes complexas pois $\Delta < 0$.

$$s = \frac{-(3.2 \cdot 10^4) \pm j(2.4 \cdot 10^4)}{2(1)}$$

$$\boxed{s_1 = -16000 + j12000\ \mathrm{rad/s} \quad , \quad s_2 = -16000 - j24000\ \mathrm{rad/s}}$$

(e)

Para que o circuito seja criticamente amortecido, precisamos de $\Delta = 0$. Assim, novamente usando (8.4.1),

$$\Delta = \left(\frac{1}{RC}\right)^2 - 4(1)\left(\frac{1}{LC}\right) = 0$$

Isolando R,

$$\frac{1}{R^2C^2} = 4\frac{1}{LC}$$

$$R = \sqrt{\frac{1}{4C^2\frac{1}{LC}}} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Substituindo os valores do enunciado,

$$\boxed{R = 2500\,\Omega}$$