Aluno: Raphael Henrique Braga Leivas

Código fonte LaTeX desse arquivo pode ser visto em meu GitHub pessoal:

https://github.com/RaphaelLeivas/latex/tree/main/ListaCEII

Aceito sugestões de melhoria do código :)

Problema P8.19

8.19 Pspice Multisim No circuito da Figura 8.1, $R = 5\ \text{k}\Omega$, $L = 8$ H, $C = 125$ nF, $V_0 = 30$ V e $I_0 = 6$ mA.

a) Determine $v(t)$ para $t \geq 0$.

b) Determine os primeiros três valores de t para os quais dv/dt é igual a zero. Esses valores devem ser denotados como t_1, t_2 e t_3.

c) Mostre que $t_3 - t_1 = T_d$.

d) Mostre que $t_2 - t_1 = T_d/2$.

e) Calcule $v(t_1)$, $v(t_2)$ e $v(t_3)$.

f) Faça um gráfico de $v(t)$ para $0 \leq t \leq t_2$.

(a)

O primeiro passo é identificar as condições inicias de $v(t)$. Temos

$$v(0) = 30\ \text{V} \tag{8.19.1}$$

Além disso, para a condição de inicial de $\dfrac{\mathrm{d}v(0)}{\mathrm{d}t}$, aplicamos análise nodal no nó superior do circuito em $t = 0$, obtendo

$$i_c(0) + i_L(0) + i_R(0) = 0$$

$$i_c(0) + 6\ \text{mA} + \frac{v(0)}{5\ \text{k}\Omega} = 0$$

$$i_c(0) = -12\ \text{mA}$$

Note que

$$i_c = C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}v(0)}{\mathrm{d}t} = \frac{i_c(0)}{C}$$

Assim, subsituindo o valor de $i_c(0)$ encontrado, temos a segunda condição inicial da EDO dada por

$$\frac{\mathrm{d}v(0)}{\mathrm{d}t} = -96\ \text{kV/s} \tag{8.19.2}$$

Como o circuito da Figura 8.1 é um circuito RLC paralelo, temos que a equação característica é dada por

$$s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC} = 0 \tag{8.19.3}$$

Que possui solução

$$s = \frac{-(1600) \pm \sqrt{(1600)^2 - 4(1)(10^6)}}{2(1)}$$

Note que temos o discriminante $\Delta < 0$. Nesse caso, temos soluções complexas para a equação característica e a resposta da tensão é subamortecida.

$$s = \frac{-1600 \pm j1200}{2}$$

$$s_1 = -800 + j600 \text{ rad/s} \quad , \quad s_2 = -800 - j600 \text{ rad/s}$$

Sabemos que a solução da EDO é da forma

$$v(t) = Ae^{st}$$

Com as duas raízes encontradas s_1 e s_2, temos que a solução geral é dada pela combinação linear

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) \tag{8.19.4}$$

Onde $v_1(t)$ e $v_2(t)$ são duas possíveis soluções para $v(t)$ dadas por

$$\begin{cases} v_1(t) = A_1 e^{s_1 t} \\ v_2(t) = A_2 e^{s_2 t} \end{cases}$$

Diferenciando (8.19.4) com respeito a t, temos duas equações

$$\begin{cases} v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \\ \dfrac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = A_1 s_1 e^{s_1 t} + A_2 s_2 e^{s_2 t} \end{cases}$$

Em $t = 0$, temos as condições iniciais já conhecidas em (8.19.1) em (8.19.2)

$$\begin{cases} v(0) = A_1 e^{s_1 0} + A_2 e^{s_2 0} \\ \dfrac{\mathrm{d}v(0)}{\mathrm{d}t} = A_1 s_1 e^{s_1 0} + A_2 s_2 e^{s_2 0} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A_1 + A_2 = 30 \text{ V} \\ A_1 s_1 + A_2 s_2 = -96 \text{ kV/s} \end{cases}$$

De posse dessas equações, temos o sistema linear para identificar os coeficientes A_1 e A_2

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ s_1 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ -96000 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -s_1 & -s_1 \\ s_1 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30s_1 \\ -96000 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -s_1 & -s_1 \\ 0 & s_2 - s_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30s_1 \\ -96000 - 30s_1 \end{bmatrix}$$

Assim, temos

$$A_2 = \frac{-96000 - 30s_1}{s_2 - s_1} \quad \Rightarrow \quad A_2 = \frac{-96000 - 30(-800 + j600)}{-800 - j600 - (-800 + j600)}$$

$$A_2 = \frac{-72000 - j18000}{-j1200}$$

$$A_2 = 15 - j60 \quad , \quad A_1 = 15 + j60$$

Conhecidos coeficientes A_1 e A_2, bem como as raízes s_1 e s_2, temos a solução geral $v(t)$ na forma de (8.19.4)

$$v(t) = (15 + j60)e^{(-800+j600)t} + (15 - j60)e^{(-800-j600)t} \text{ V} \, , \, t \geq 0$$

Vamos remover os exponenciais complexos usando a identidade de Euler.

$$v(t) = (15 + j60)e^{-800t}e^{j600t} + (15 - j60)e^{-800t}e^{-j600t}$$

$$v(t) = (15 + j60)e^{-800t}(\cos(600t) + j\sin(600t)) + (15 - j60)e^{-800t}(\cos(600t) - j\sin(600t))$$

Evidenciando o termo e^{-800t} e expandindo os demais via propriedade distributiva, temos que todas parcelas complexas se cancelam e ficamos com

$$\boxed{v(t) = e^{-800t}\left[30\cos(600t) - 120\sin(600t)\right] \text{ V} \, , \, t \geq 0}$$

(b)

Diferenciando $v(t)$ encontrado no item (a) com respeito a t, temos

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = (30\cos(600t) - 120\sin(600t))(-800)e^{-800t} + e^{-800t}(-30\sin(600t)(600) - 120\cos(600t)(600))$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = e^{-800t}\left[-24000\cos(600t) + 96000\sin(600t) - 18000\sin(600t) - 72000\cos(600t)\right]$$

Para que $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$, temos

$$-24000\cos(600t) + 96000\sin(600t) - 18000\sin(600t) - 72000\cos(600t) = 0$$

$$\sin(600t)(96000 - 18000) - \cos(600t)(24000 + 72000) = 0$$

$$\frac{\sin(600t)}{\cos(600t)} = \frac{24000 + 72000}{96000 - 18000}$$

$$\tan(600t) = 1.23076 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\tan^{-1}(1.23076)}{600}$$

Usando a propriedade das tangentes de

$$\tan(\theta) = \tan(\theta + n\pi) \, , \, n = 0, 1, 2, 3...$$

Temos

$$t = \frac{0.8884 + n\pi}{600} \, , \, n = 0, 1, 2, 3...$$

Os três primeiros valores de t que satisfazem são

$$\boxed{t_1 = 1.481 \text{ ms}\,,\; t_2 = 6.717 \text{ ms}\,,\; t_3 = 11.95 \text{ ms}}$$

(c)

Sabemos que frequência angular de amortecimento ω_d é dada por

$$\omega_d = \sqrt{\omega_o^2 - \alpha^2} \tag{8.19.5}$$

Expandindo os termos conforme as definições,

$$\omega_d = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}}$$

O período de ω_d é

$$T_d = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}}}$$

$$T_d = 10.47 \text{ ms}$$

A diferença $t_3 - t_1$ é

$$t_3 - t_1 = 11.95 \text{ ms} - 1.481 \text{ ms} = 10.469 \text{ ms}$$

Portanto,

$$\boxed{T_d = t_3 - t_1}$$

(d)

Temos

$$\frac{T_d}{2} = \frac{10.47 \text{ ms}}{2} = 5.235 \text{ ms}$$

Além disso,

$$t_2 - t_1 = 6.717 \text{ ms} - 1.481 \text{ ms} = 5.236 \text{ ms}$$

Portanto,

$$\boxed{\frac{T_d}{2} = t_2 - t_1}$$

(e)

Usando o resultado do item (a), temos

$$v(t_1) = v(1.481 \text{ ms}) = -22.69 \text{ V}$$

$$v(t_2) = v(6.717 \text{ ms}) = -0.344 \text{ V}$$

$$v(t_3) = v(11.95 \text{ ms}) = -5.22 \text{ mV}$$

(f)

Usamos a ferramente online Desmos para plotar o gráfico de $v(t)$.