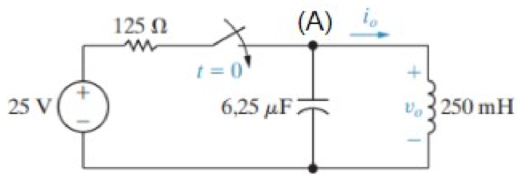
Aluno: Raphael Henrique Braga Leivas
Matrícula: 2020028101

Código fonte LaTeX desse arquivo pode ser visto em meu GitHub pessoal:
https://github.com/RaphaelLeivas/latex/tree/main/ListaCEII
Aceito sugestões de melhoria do código :)

Problema P8.33

8.33 Pspice Multisim Não há nenhuma energia armazenada no circuito da Figura P8.33 quando a chave é fechada em $t = 0$. Determine $i_o(t)$ para $t \geq 0$.

Figura P8.33



Aplicamos análise nodal no nó essencial (A) em $t > 0$.

$$i_R + i_C + i_L = 0$$

$$\frac{v_o - 25}{R} + C\frac{\mathrm{d}v_o}{\mathrm{d}t} + i_o = 0$$

Note que

$$v_0 = L\frac{\mathrm{d}i_o}{\mathrm{d}t}$$

Assim, a equação nodal se torna

$$\frac{L\frac{\mathrm{d}i_o}{\mathrm{d}t} - 25}{R} + C\frac{\mathrm{d}L\frac{\mathrm{d}i_o}{\mathrm{d}t}}{\mathrm{d}t} + i_o = 0$$

$$\frac{L\frac{\mathrm{d}i_o}{\mathrm{d}t} - 25}{R} + C\frac{\mathrm{d}\left(L\frac{\mathrm{d}i_o}{\mathrm{d}t}\right)}{\mathrm{d}t} + i_o = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 i_o}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}i_o}{\mathrm{d}t} + \frac{i_o}{LC} + \frac{25}{RLC} = 0$$

Substituindo com os valores do enunciado, temos

$$\frac{\mathrm{d}^2 i_o}{\mathrm{d}t^2} + 1280\frac{\mathrm{d}i_o}{\mathrm{d}t} + 640000 i_o + 128000 = 0$$

Observação: tentei resolver a EDO acima com o método que usei nas questões anteriores: admitindo solução na forma $i_o(t) = Ae^{-st}$ e achando os coeficientes através das condições iniciais do circuito. Contudo, não consegui identificar as condições iniciais e não achei a resposta correta. Tentei resolver pelo método dado em sala da aula, mas não sei Transformada de Laplace muito bem e as fotos que tirei do quadro ficaram ruins. Assim, coloco diretamente a solução dada em sala de aula dessa questão via Laplace.

$$\boxed{i_o(t) = 0.2u(t) - 0.2e^{-640t}\cos(480t) - \frac{4}{15}e^{-640t}\sin(480t)\ \mathrm{A}\,,\ t \geq 0}$$

Onde $u(t)$ é a função degrau unitário.

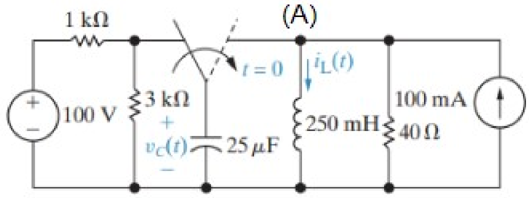
Problema P8.35

8.35 Pspice Multisim A chave no circuito da Figura P8.35 esteve na posição esquerda por um longo tempo antes de passar para a posição direita em $t = 0$. Determine

a) $i_L(t)$ para $t \geq 0$,

b) $v_C(t)$ para $t \geq 0$.

Figura P8.35



O primeiro passo é entender o estado inicial do circuito para $t < 0$.
Antes da chave comutar, o capacitor está em paralelo com um circuito divisor de tensão, e após um longo tempo possuirá tensão inicial de

$$v(0) = 100\frac{3000}{1000 + 3000}$$

$$v_C(0) = 75 \text{ V} \tag{8.35.1}$$

Além disso, o indutor se comporta como um curto-circuito para a fonte de corrente de $I = 100 \text{ mA}$. Logo,

$$i_L(0) = 100 \text{ mA} \tag{8.35.2}$$

Exatamente no instante em que a chave comuta, em $t = 0$, temos que a corrente no capacitor é nula, pois toda a corrente da fonte passa no indutor. Assim, temos a segunda condição inicial do capacitor

$$\frac{\mathrm{d}v(0)}{\mathrm{d}t} = 0 \text{ V/s} \tag{8.35.3}$$

De posse dessas condições iniciais, aplicamos análise nodal no nó essencial (A) para $t > 0$, obtendo

$$i_c + i_L + i_R = 100 \text{ mA}$$

$$C\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} + i_L(0) + \int_0^t v_L(t)\,dt + \frac{v_R(t)}{R} = 100 \text{ mA}$$

Usando $v_C = v_R = v_L = v(t)$,

$$C\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + i_L(0) + \frac{1}{L}\int_0^t v(t)\,dt + \frac{v(t)}{R} = 100 \text{ mA}$$

Derivando ambos lados com respeito a t,

$$C\frac{\mathrm{d}^2v(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{L}v(t) + \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2v(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{v(t)}{LC} = 0$$

A EDO acima já possui equação característica conhecida, dada por

$$s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC} = 0 \tag{8.35.4}$$

Substituindo com os valores do enunciado,

$$s = \frac{-(1000) \pm \sqrt{(1000)^2 - 4(1)(160000)}}{2(1)}$$

$$s_1 = -200 \text{ rad/s} \quad , \quad s_2 = -800 \text{ rad/s}$$

Além disso, sabemos que a solução da EDO é da forma

$$v(t) = Ae^{st}$$

Com as duas raízes encontradas s_1 e s_2, temos que a solução geral é dada pela combinação linear

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) \tag{8.35.5}$$

Onde $v_1(t)$ e $v_2(t)$ são duas possíveis soluções para $v(t)$ dadas por

$$\begin{cases} v_1(t) = A_1 e^{s_1 t} \\ v_2(t) = A_2 e^{s_2 t} \end{cases}$$

Diferenciando (8.35.5) com respeito a t, temos duas equações

$$\begin{cases} v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \\ \dfrac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = A_1 s_1 e^{s_1 t} + A_2 s_2 e^{s_2 t} \end{cases}$$

Em $t = 0$, temos as condições iniciais já conhecidas em (8.35.1) em (8.35.1)

$$\begin{cases} v(0) = A_1 e^{s_1 0} + A_2 e^{s_2 0} \\ \dfrac{\mathrm{d}v(0)}{\mathrm{d}t} = A_1 s_1 e^{s_1 0} + A_2 s_2 e^{s_2 0} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A_1 + A_2 = 75 \text{ V} \\ A_1 s_1 + A_2 s_2 = 0 \text{ V/s} \end{cases}$$

De posse dessas equações, temos o sistema linear para identificar os coeficientes A_1 e A_2

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ s_1 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -s_1 & -s_1 \\ s_1 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -75s_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -s_1 & -s_1 \\ 0 & s_2 - s_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -75s_1 \\ -75s_1 \end{bmatrix}$$

Assim, temos

$$A_2 = \frac{-75s_1}{s_2 - s_1} \quad \Rightarrow \quad A_2 = -25$$

$$A_1 = 100$$

Conhecidos coeficientes A_1 e A_2, bem como as raízes s_1 e s_2, temos a solução geral $v(t)$ na forma de (8.35.5)

$$\boxed{v_C(t) = 100e^{-200t} - 25e^{-800t} \text{ V} \, , \, t \geq 0}$$

Para encontrar $i_L(t)$, usamos a relação entre corrente e tensão no indutor

$$i_L(t) = i_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t v_C(t) \, dt$$

$$i_L(t) = 0.1 + \frac{1}{L}\int_0^t 100e^{-200t} - 25e^{-800t}\,dt$$

$$\boxed{i_L(t) = 0.1 - 2e^{-200t} + 0.125e^{-800t}\ \mathrm{A}\,,\ t \geq 0}$$