UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Escola de Engenharia
Curso de Bacharelado em Engenharia de Sistemas

Matheus Carvalho
Raphael Henrique Braga Leivas

Otimização Não Linear (ELE077) - TC 02

Belo Horizonte
2025

SUMÁRIO

1 METODOLOGIA

Este trabalho propõe a solução de dois problemas de otimização restrita. Nesse contexto, a ideia fundamental consiste em transformar os problemas de otimização restrita em problemas de otimização irrestrita equivalente. Para fazer isso, serão aplicados os métodos de penalidades interior e exterior, e o algoritmo do Lagrangeano Aumentado.

Os problemas equivalentes de otimização irrestrita serão resolvidos usando alguns algoritmos estudados no curso de otimização não linear (ELE077).

2 DESENVOLVIMENTO

Todos os códigos usados encontram-se na pasta .zip enviada junto com esse documento pdf.

2.1 Questão 1

A função objetivo e as restrições são diferenciáveis e possuem poucas variáveis, logo utilizamos o método de Quasi-Newton (BFGS) para a otimização irrestrita. Para as restrições, consideramos três métodos: Penalidade Exterior, Interior e Lagrangeano Aumentado.

2.1.1 Penalidade Exterior

Usamos os seguintes parâmetros para o método da Penalidade Exterior:

- Penalidade inicial: 1
- Aceleração: 2
- Precisão: 10^{-3}

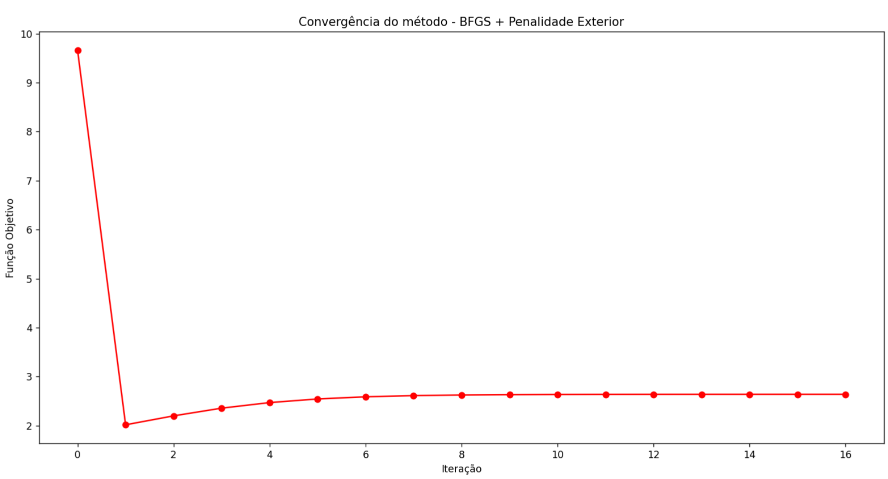
Com esses parâmetros, a solução obtida após 358 milissegundos de execução e 16 iterações foi:

$$x_1 = 0.788 \quad , \quad x_2 = 0.408 \quad , \quad f(x) = 2.64$$

e a convergência da solução pode ser vista na Figura 1.

Figura 1 – Convergência da solução - BFGS + Penalidade Exterior

.



2.1.2 Lagrangeano Aumentado

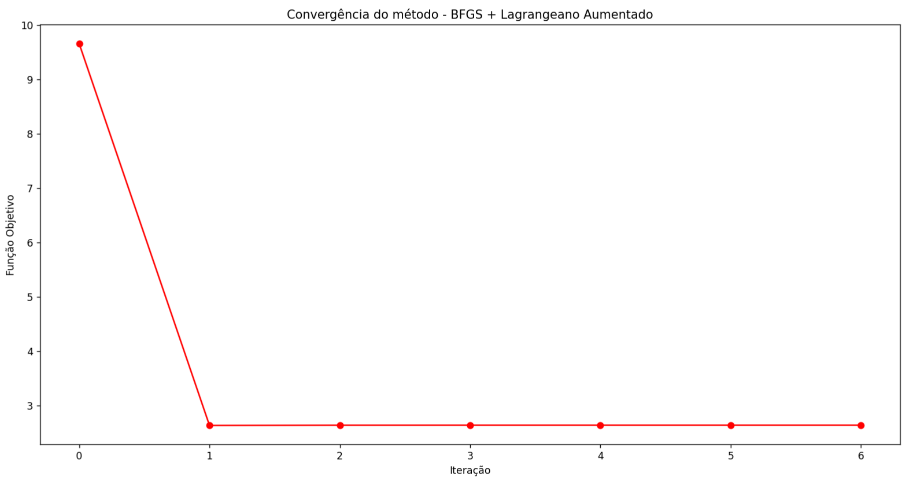
Usando os mesmos parâmetros da Penalidade Exterior, a solução obtida para o Lagrangeano Aumentado após 35 milissegundos e 6 iterações foi de:

$$x_1 = 0.788 \quad , \quad x_2 = 0.408 \quad , \quad f(x) = 2.64$$

e a convergência da solução pode ser vista na Figura 2. A solução obtida via ambos os métodos é a mesma, mas a convergência é mais rápida que o método da penalidade exterior na Figura 1, tanto em termos de número de iterações quanto em termos de tempo de execução.

Figura 2 – Convergência da solução - BFGS + Lagrangeano Aumentado

.



2.1.3 Penalidade Interior

Para o método de barreira, temos que tomar cuidado para que o ponto inicial seja factível. Como temos apenas 2 variáveis de entrada, podemos visualizar a região factível em um espaço 2D com o Desmos como mostra a Figura 3.

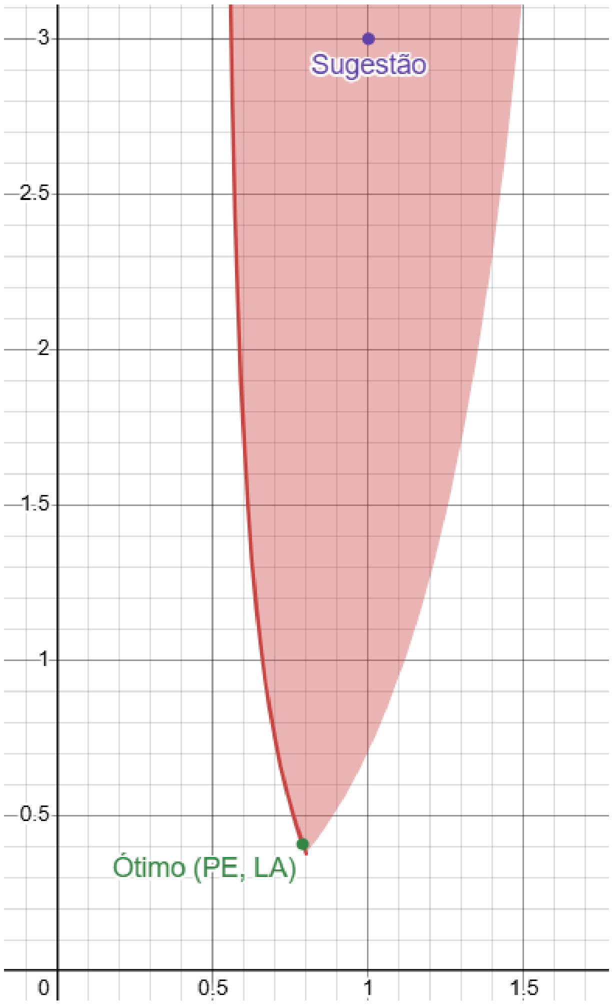
O ponto inicial sugerido de fato é factível, mas a solução ótima que queremos convergir está exatamente sobre a restrição (1b). Nesse ponto, a barreira causa instabilidades numéricas e o algoritmo não converge, apresentando um erro de overflow:

```
RuntimeWarning: overflow encountered in scalar multiply
```

indicando que a solução encontrada está tendendo ao infinito, causado pela ação da barreira perto da restrição (1b), onde o ponto ótimo se encontra.

Figura 3 – Região factível do problema 1, junto com o ponto ótimo encontrado na Penalidade Exterior (PE) e Lagrangeano Aumentando (LA), e o ponto inicial sugerido.

.



Tentativas de aumentar a desaceleração e reduzir a penalidade também não conseguiram convergindo, apresentando solução final como [NaN, NaN]. O algoritmo ainda não converge após as seguintes modificações:

- Trocar o método de otimização irrestrita para o Gradiente Conjugado, Neader-Melder Simplex e Hooke Jeeves
- Reduzir e aumentar as preciões dos métodos de otimização unidimensional e irrestrito

2.1.4 scipy.optimize

Dificuldades obtidas com o método da Penalidade Interior levaram à necessidade de verificar se poderia ser algo de errado com a utilização da biblioteca otimo.py. Assim, solucionamos o problema utilizando a scipy.optimize, usando o método Sequential Least SQuares Programming (SLSQP). A solução obitda é, novamente,

$$x_1 = 0.788 \quad , \quad x_2 = 0.408 \quad , \quad f(x) = 2.64$$

indicando que as dificuldades da Penalidade Interior de fato são relacionadas à natureza do método em si, e não da ferramenta utilizada.

2.2 Questão 2

O segundo problema proposto no trabalho computacional é um problema de otimização restrita. Nesse contexto, a solução consiste em transformar o problema de otimização restrita em um problema de otimização sem restrições. Esse processo é feito definindo-se funções de penalidade e somando-as às funções objetivo originais. Por definição, a imagem das funções de penalidade é nula quando a entrada pertence ao conjunto factível, e postitiva quando não pertencem. Dessa forma, ao resolver o problema de otimização restrita transformando-o em um problema de otiização irrestrita, o algoritmo de otimização irrestrito tende a convergir para o ótimo da função objetivo original que está na região factível. Essa é a ideia fundamental que foram utilizadas para resolver o problema proposto.

2.2.1 Penalidade Exterior

O método da penalidade exterior transforma um problema de otimização adicionando a função objetivo uma função de penalização que depende de um parâmetro de penalidade inicial, que é atualizado de acordo com um parâmetro (a constante de aceleração), que multiplica a penalidade a cada iteração do algoritmo de otimização. Nesse caso, como a constante de penalização tende a ser grande durante a execução do algoritmo, optou-se pela utilização do gradiente conjugado para resolver o problema de otimização irrestrito equivalente, pois ele não utiliza a matriz hessiana (aproximada) da função objetivo, que tende a ser malcondicionada quando a constante de penalização é muito grande. Durante os testes, percebeu-se que o gradiente conjugado apresentou comportamento mais robusto a variação das constantes de penalidade e de aceleração.

Foram implementados em Python as funções de restrição, a função objetivo, a chamada dos métodos de otimização irrestrita e os métodos de penalidade exterior implementados na biblioteca otimo.py. Nesse contexto, o método da seção áurea foi utilizado como o método de otimização unidimensional, que é executado em cada iteração do algoritmo gradiente conjugado para calcular o passo ótimo na direção de busca. As funções de penalidade foram adicionadas a função objetivo pela chamada do método da penalidade exterior (os códigos python mostram esse procedimento). Além disso, a constante de aceleração utilizada no método de penalidade exterior foi 1.3, e a penalidade inicial foi igual a um.

Dessa forma, a seguinte solução ótima S_{otima} foi encontrada:

$$\mathbf{S}_{\text{ótima}} = \begin{bmatrix} 294{,}8625 \\ 399{,}2971 \\ 175{,}5674 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

O ponto inicial utilizado foi:

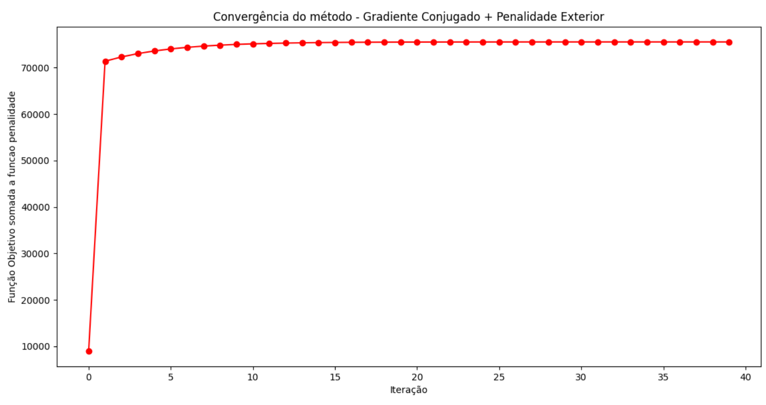
$$\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} -100 \\ 50{,}0 \\ 100{,}0 \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

É interessante observar o fato de que o ponto inicial não está na região factível, mas o algoritmo de otimização irrestrito equivalente convergiu para um ponto ótimo que pertence ao conjunto factível.

A seguir é exibido um gráfico que foi utilizado para avaliar a convergência do algoritmo. Ele apresenta o valor da função objetivo somada a função de penalidade em função da quantidade de iterações do método da penalidade exterior. Como o domínio de tal função é um subconjunto dos números naturais, os valores da função objetivo somada a função penalidade foram interpolados.

Figura 4 – Convergência da solução - Gradiente Conjugado + Penalidade Exterior

.



Percebe-se que o algoritmo quase atingiu o valor de convergência logo nas primeiras iterações. O algoritmo foi executado várias vezes mesmo próximo do valor de convergência devido a alta precisão utilizada 10^{-6}.

O algoritmo foi executado em, aproximadamente 530 ms.

2.2.2 Lagrangeano Aumentado

O método do Lagrangeano Aumentado permite que o problema de otimização restrito equivalente seja numericamente mais estável em relação ao método de penalidade exterior, pois a constante de penalização não precisa tender ao infinito (ou ser numericamente muito grande) para convergir para a solução ótima. Isso faz o algoritmo do Lagrangeano Aumentado ser mais estável numericamente. Tal fato foi percebido durante os testes, nos quais foram variados os valores das constantes de penalidade e aceleração e foi observado que o Lagrangeano Aumentado é mais robusto em relação às alterações desses parâmetros. Similarmente ao item anterior, onde foi descrito o processo de otimização pelo método de penalidade exterior, foi utilizado o gradiente conjugado para resolver o problema irrestrito equivalente. Nesse contexto, o método da seção áurea também foi utilizado dentro do algoritmo do gradiente conjugado para resolver o problema de otimização do passo a cada iteração do gradiente conjugado.

Dessa forma, a seguinte solução ótima S_{otima} foi encontrada:

$$\mathbf{S}_{\text{ótima}} = \begin{bmatrix} 294{,}8627 \\ 399{,}2965 \\ 175{,}5710 \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

O ponto inicial utilizado foi:

$$\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} 100 \\ 50{,}0 \\ 100{,}0 \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

Além disso, utilizou-se:

- Penalidade inicial: 1
- Aceleração: 2
- Precisão: 10^{-6}
- Tempo de execução: 46 ms

É importante evidenciar que, mesmo utilizando uma constante de aceleração maior em relação ao método da penalidade exterior, o algoritmo do Lagrangeano Aumentado convergiu para a solução ótimo do problema. Isso mostra a maior robustez dessa solução em relação a solução apresentada no tópico anterior (penalidade exterior).

Segue abaixo um gráfico interpolado que mostra os valores da função objetivo somada a função penalidade. Percebe-se que a função objetivo se aproximou do ótimo nas primeiras iterações do algoritmo Lagrangeano Aumentado. Entretanto, o algoritmo foi iterado mais vezes devido a alta precisão exigida 10^{-6}.

3 CONCLUSÃO

Tendo em vista os objetivos do trabalho, foi possível verificar na prática as diferenças entre os métodos de otimização restrita, tanto em termos de desempenho quanto de cuidados que devemos tomar para a utilização de cada um deles.

Em particular, vimos como os métodos de Penalidade Exterior e Lagrangeano Aumentando são numericamente mais estáveis que o método de barreira, além de não precisarem do cuidado adicional de escolher um ponto inicial factível.