UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Escola de Engenharia
Curso de Bacharelado em Engenharia de Sistemas

Matheus Carvalho
Raphael Henrique Braga Leivas

Otimização Não Linear (ELE077) - TC 01

Belo Horizonte
2025

SUMÁRIO

1 OBJETIVOS

Os objetivos principais desse trabalho são:

- Aplicar diferentes métodos de otimização não linear em vários problemas
- Identificar qual método utilizar dada as características do problema
- Avaliar a solução final e o desempenho dos métodos em cada um dos problemas propostos

Assim, o trabalho tem um papel importante no aprendizado de como esses métodos funcionam e, principalmente, como eles podem utilizados para resolver certos problemas de otimização mono-objetivo.

2 METODOLOGIA

Todos os códigos serão desenvolvidos em Python, usando o template disponibilizado pelo professor. Usamos os métodos de otimização disponíveis na biblioteca otimo.py no moodle ou na scipy.optimize.

Para a definição de qual métodos utilizar, usamos a tabela dada em sala de aula, exibida também na Tabela 1.

Tabela 1 – Critérios para utilização dos métodos de otimização (vista em sala da aula).

Características da Função Objetivo	**Método**
Quadrática	Newton
Diferenciável e Poucas Variáveis	Quasi-Newton (BFGS, DFP)
Diferenciável e Muitas Variáveis	Gradiente Conjugado
Não diferenciável e Contínua	Nelder Meader Simplex
Não diferenciável e Não Contínua	Hooke-Jeeves

Para cada problema analisamos a solução final obtida, discutindo também como foi a convergência do método e seu tempo de execução.

3 DESENVOLVIMENTO

Todos os códigos usados encontram-se na pasta .zip enviada junto com esse documento pdf.

3.1 Questão 1

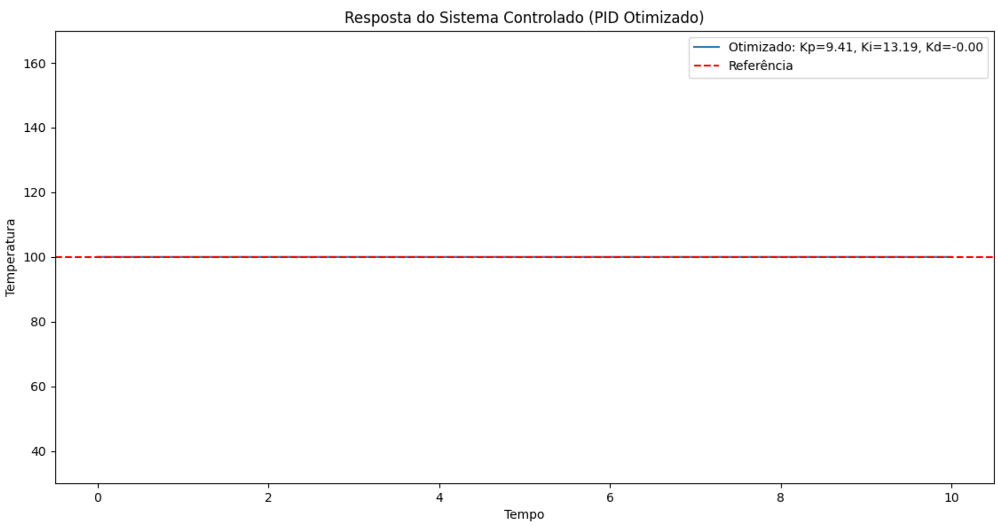
A função objetivo é definida pela integral do erro quadrático médio. Além disso ela é uma função composta da função temperatura T(Kp, Ki, Kd, t), que depende dos parâmetros do controlador PID e do tempo de simulação. A função o objetivo, em função de Kp, Ki, Kd e t não é exatamente quadrática, porque T(Kp, Ki, Kd, t) não linear. Entretanto, a função de erro médio quadrático é quadrática, então a função objetiva pode ser aproximada por uma função quadrática dentro de um intervalo.

Além disso, não há descontinuidades na função objetivo, a justificativa para este fato é que variações infinitesimais em Kd, Ki, e Kp não geram variações não infinitesimais no comportamento dinâmico do sistema de controle (a teoria de controle linear clássico mostra isso). Logo, a função objetivo é composta de funções contínuas e diferenciáveis e, portanto, é diferenciável.

Portanto, para resolver esse problema, utilizou-se um algoritmo de otimização Quasi-Newton, que utiliza o vetor gradiente e uma aproximação da matriz Hessiana da função objetivo.

Figura 1 – Resultado da simulação do sistema dinâmico controlado com o PID ótimo

.



A Figura 1 acima apresenta o resultado da simulação do sistema dinâmico controlado pelo PID ótimo. Percebe-se que algoritmo de otimização sintonizou o PID que faz com que o sistema controlado tenha erro quadrático médio pequeno. O algoritmo gastou 778 milisegundos para convergir à solução.

O comportamento dinâmico do sistema é quase igual ao comportamento de um sistema estático de erro nulo em estado estacionário. Entretanto, vale ressaltar que, nesse caso, o algoritmo de otimização não analisa a capacidade dos atuadores de atender as demandas do controlador PID ótimo que implementam tal comportamento dinâmico. Portanto, para implementar fisicamente esse sistema de controle e obter o comportamento dinâmico equivalente ao comportamento exibido pela simulação e projeto, é importante verificar se os atuadores podem atender ao sinal de controle do PID ótimo, sem saturação ou não linearidades (o que demanda, nesse caso, atuadores caros e rápidos).

3.2 Questão 2

O algoritmo gradiente conjugado foi utilizado para resolver esse problema de otimização, porque a dimensão dos vetores música é 500. O algoritmo do gradiente conjugado não utiliza aproximações da matriz Hessiana, que é grande e demanda muito processamento e memória quando a função objetivo tem 500 variáveis. Além disso, a função objetivo, por ser logarítmica, pode ser localmente aproximada por uma função quadrática. Então o algoritmo gradiente conjugado é uma boa opção para resolver o problema de otimização.

Segue abaixo uma tabela que apresenta algumas informações importantes sobre o processo de otimização.

Tabela 2 – Resultados da Questão 2.

Custo final	0,0924
Número de Iterações	5
Número de Avaliações da Função-Objetivo	8517

O algoritmo do gradiente conjugado retornou o valor das 500 variáveis que minimizam a função objetivo, obtendo o custo final exibido na Tabela 3. O vetor solução completo pode ser visualizado no arquivo questao2_vetorW_otimo.pdf, também na pasta .zip de envio.

Devido ao grande número de variáveis e avaliações da função objetivo, o método gastou cerca de 45 minutos para convergir, mesmo utilizando o método do gradiente conjugado que, conforme a Tabela 1, é o ideal para esse problema.

3.3 Questão 3

Precisamos maximizar o lucro da empresa $L(d, t, b)$, que é uma função de três variáveis conforme a modelagem que consta no enunciado. Como nossos algoritmos somente minimizam, a primeira coisa é fazer

$$\max L(d,t,b) = \min\left(-L(d,t,b)\right)$$

Agora notamos que as penalizações que manualmente adicionamos à função objetivo - tanto penalidades relativas à natureza do problema quanto as penalidades de violação de restrição, fixada em 10^6 - tornam a função descontínua e não diferenciável. Assim, usamos o método de Hooke Jeeves, disponível na biblioteca otimo.py disponibilizada no moodle pelo professor.

O método utiliza as configurações padrão do critério de parada da precisão, usando 10^{-3}.

Os resultados obtidos estão exibidos na Tabela 3.

Tabela 3 – Resultados da Questão 3.

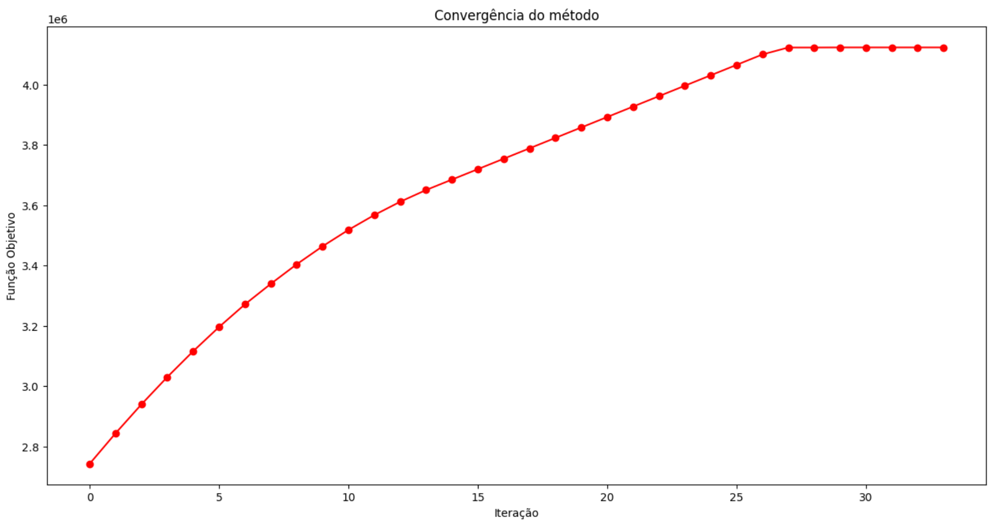
Número de Iterações	57
Número de Avaliações	337
Desconto d	20 %
Tempo t	30 dias
Orçamento m	R$ 10020
Lucro máximo L	R$ 4123576.33

Podemos variar os parâmetros de precisão e critérios de parada do método, mas obtemos os mesmos resultados exibidos na Tabela 3.

A convergência do algoritmo está exibida na Figura 2, gastando 4.8 milissegundos para convergir.

Figura 2 – Convergência do método para o valor ótimo de $L(d,t,m)$

.



Fonte: elaboração própria.

3.4 Questão 4

A função objetivo é quadrática. Então, método de Newton foi utilizado para calcular o ponto ótimo em apenas uma iteração. A hessiana da função objetivo em questão é uma matriz constante e invertível. Dessa forma, foi escrito um programa em Python para calcular a inversa da Hessiana e o vetor gradiente da função objetivo. Então, pelo método de Newton, a solução do problema de otimização é:

$$\mathbf{x}_{otimo} = \mathbf{x} - \mathbf{H}_f(\mathbf{x})^{-1} \nabla f(\mathbf{x}) \tag{3.1}$$

Onde:

- $\nabla f(\mathbf{x})$ é o vetor gradiente da função objetivo em $\mathbf{x}$;
- $\mathbf{H}_f$ é a matriz Hessiana da função objetivo.

O resultado obtido é:

$$\mathbf{x}_{otimo} = \begin{bmatrix} 64{,}36329702 & 50{,}72022898 \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

4 CONCLUSÃO

Tendo em vista os objetivos do trabalho, foi possível verificar na prática como os diferentes métodos são aplicados levando-se em conta a natureza dos problemas que otimização que queremos resolver. Nesse sentido, o trabalho permitiu uma complementação à base teórica vista nas aulas da disciplina.