

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Escola de Engenharia
Curso de Bacharelado em Engenharia de Sistemas

Raphael Henrique Braga Leivas 2020028101

Milton Pereira Bravo Neto 2018072549

Daniel Felipe de Almeida Araújo 2023422617

Trabalho Computacional 02 – Teoria da Decisão (ELE088)

SUMÁRIO

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | MODELAGEM MULTIOBJETIVO | 3 |
| 1.1 | Formulação Soma Ponderada P_w | 4 |
| 1.2 | Formulação ϵ -Restrito P_ϵ | 4 |
| 1.3 | Normalização | 5 |
| 2 | SOLUÇÃO VIA SIMPLEX | 6 |
| 3 | SOLUÇÃO VIA BVNS | 7 |
| 3.1 | Abordagem de Soma Ponderada | 7 |
| 3.2 | Abordagem ϵ -Restrito | 7 |
| 4 | INDICADORES DE QUALIDADE | 9 |
| 4.1 | Formulação Matemática | 9 |
| 4.2 | Interpretação Geométrica | 9 |
| 4.3 | Implementação | 10 |
| 4.4 | Resultados Obtidos | 10 |
| 5 | CONSIDERAÇÕES FINAIS | 12 |
| 6 | REFERÊNCIAS | 13 |

1 MODELAGEM MULTIOBJETIVO

No TC01, modelamos duas funções objetivo:

- $f_1(\cdot)$: minimização do custo de manutenção total
- $f_2(\cdot)$: minimização do custo esperado de falha total

definidas por

$$\min f_1 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^J c_j x_{ij} \quad , \quad \min f_2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^J p_{ij} d_i x_{ij}$$

x_{ij} : se o equipamento i executa a manutenção j

sujeito a

$$\sum_{j=1}^J x_{ij} = 1 \quad , \quad \forall i = 1, 2, \dots, N$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad , \quad i = \{1, 2, \dots, N\} \quad , \quad j = \{1, 2, \dots, J\}$$

onde

- $N = 500$: número de equipamentos
- $J = 3$: número de planos de manutenção
- c_j : custo de executar a manutenção j
- p_{ij} : probabilidade de falha do equipamento i executando a manutenção j
- d_i : custo de falha do equipamento i

e

$$p_{ij} = \frac{F_i(t_0 + k_j \Delta t) - F_i(t_0)}{1 - F_i(t_0)} \quad , \quad F_i(t) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{t}{\eta_i} \right)^{\beta_i} \right]$$

A partir dessa modelagem, temos o nosso problema multiobjetivo

$$\min \mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}) , f_2(\mathbf{x})] \quad (1.1)$$

Considerando o problema de (1.1), podemos aplicar duas abordagens escalares para obter a fronteira Pareto-ótima no espaço de objetivos, descritas a seguir.

1.1 Formulação Soma Ponderada P_w

Seja $0 \leq w \leq 1$ um peso qualquer gerado aleatoriamente de uma distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$. Usando a abordagem da soma ponderada, podemos reescrever (1.1) na forma de mono-objetivo de

$$\min f_w = \min w f_1 + (1 - w) f_2 \quad (1.2)$$

onde (1.2) está sujeito às mesmas restrições do problema original. Como (1.2) é escalar, podemos minimizar f_w através de métodos já conhecidos como o Simplex e o BVNS.

1.2 Formulação ϵ -Restrito P_ϵ

Com a abordagem do ϵ -Restrito, vamos minimizar apenas f_1 usando f_2 como restrição. Seja ϵ_2 um real qualquer tal que $\min f_2 \leq \epsilon_2 \leq \max f_2$. Temos

$$\min f_1 \quad (1.3)$$

sujeito a

$$\begin{cases} f_2 \leq \epsilon_2 \\ \sum_{j=1}^J x_{ij} = 1 \end{cases}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, N \quad (1.4)$$

em que (1.3) possui as mesmas restrições do problema original mais a restrição de $f_2 \leq \epsilon_2$.

Contudo, como o BVNS é usado para resolver problemas de otimização irrestritos, precisamos converter (1.3) em um problema irrestrito. Para isso, adicionamos o termo um termo de penalidade $p(x, u)$ da seguinte forma:

$$p(x, u) = u \max [0, g(x)]^2$$

onde $g(x)$ é a nossa restrição de desigualdade, dada por

$$g(x) \leq 0 \implies f_2 - \epsilon_2 \leq 0 \implies g(x) = f_2 - \epsilon_2$$

de modo que o nosso problema irrestrito se torna:

$$\min f_1 + u \max [0, f_2 - \epsilon_2]^2 \quad (1.5)$$

Note que as demais restrições já estão naturalmente incluídas no BVNS devido à maneira como nós fizemos a representação computacional das variáveis de decisão, de modo que só precisamos fazer a correção para a restrição do ϵ em (1.5).

1.3 Normalização

Para garantir que as abordagens escalares sejam condizentes, precisamos normalizar f_1 e f_2 através de

$$f_1(\mathbf{x}) = \frac{f_1(\mathbf{x}) - \min f_1}{\max f_1 - \min f_1} \quad , \quad f_2(\mathbf{x}) = \frac{f_2(\mathbf{x}) - \min f_2}{\max f_2 - \min f_2} \quad (1.6)$$

A partir do trabalho realizado no TC01, já sabemos que

$$\min f_1 = 0 \quad , \quad \max f_1 = 1000 \quad , \quad \min f_2 = 1048.17 \quad , \quad \max f_2 = 1745.49$$

de modo que a formulação da soma ponderada de (1.2) pode ser reescrita como

$$\min \left(w \frac{f_1(\mathbf{x}) - \min f_1}{\max f_1 - \min f_1} + (1 - w) \frac{f_2(\mathbf{x}) - \min f_2}{\max f_2 - \min f_2} \right)$$

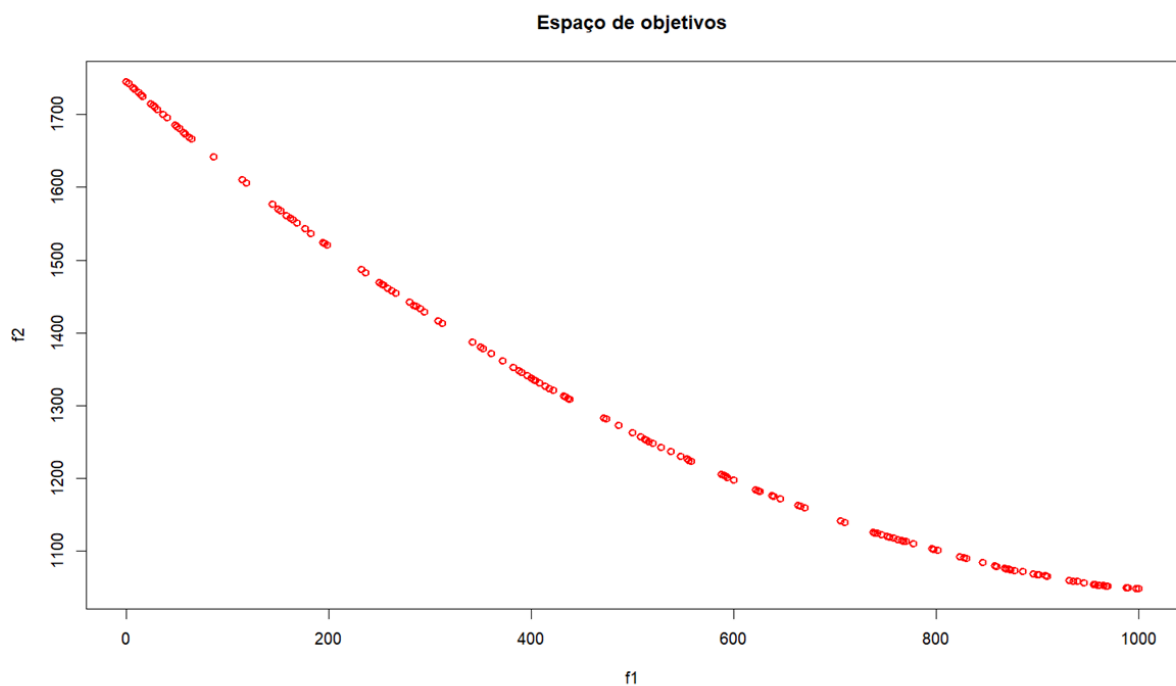
que será usado como função objetivo no código do BNVS.

2 SOLUÇÃO VIA SIMPLEX

Como ambas funções objetivo são lineares, podemos usar o método Simplex para rapidamente obter a fronteira Pareto ótima com muitos pontos usando a abordagem de soma ponderada com as funções normalizadas. Geramos aleatoriamente 2000 pontos de w no intervalo $[0, 1]$ e minimizamos o problema de Programação Linear Inteira (1.2) para cada w .

O resultado obtido está exibido na Figura 1.

Figura 1 – Fronteira Pareto-ótima obtida via Simplex.



Fonte: elaboração própria.

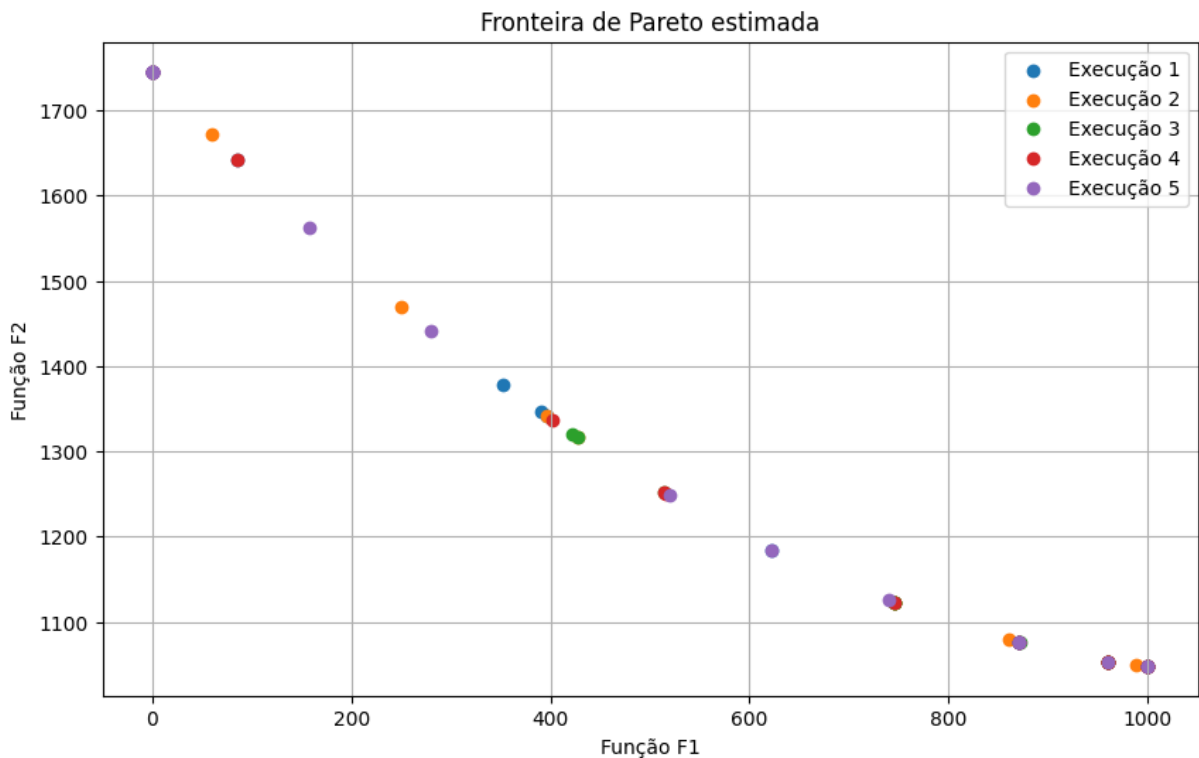
O objetivo agora é obter a fronteira Pareto usando o BVNS com 20 pontos tendo como referência a fronteira já obtida pelo Simplex.

3 SOLUÇÃO VIA BVNS

3.1 Abordagem de Soma Ponderada

Para a soma ponderada, usamos a modelagem de (1.2) com 20 valores aleatórios de w entre 0 e 1, executando 5 vezes, obtemos a Fronteira Pareto-ótima exibida na Figura 2.

Figura 2 – Fronteira Pareto-ótima obtida via BVNS com soma ponderada.



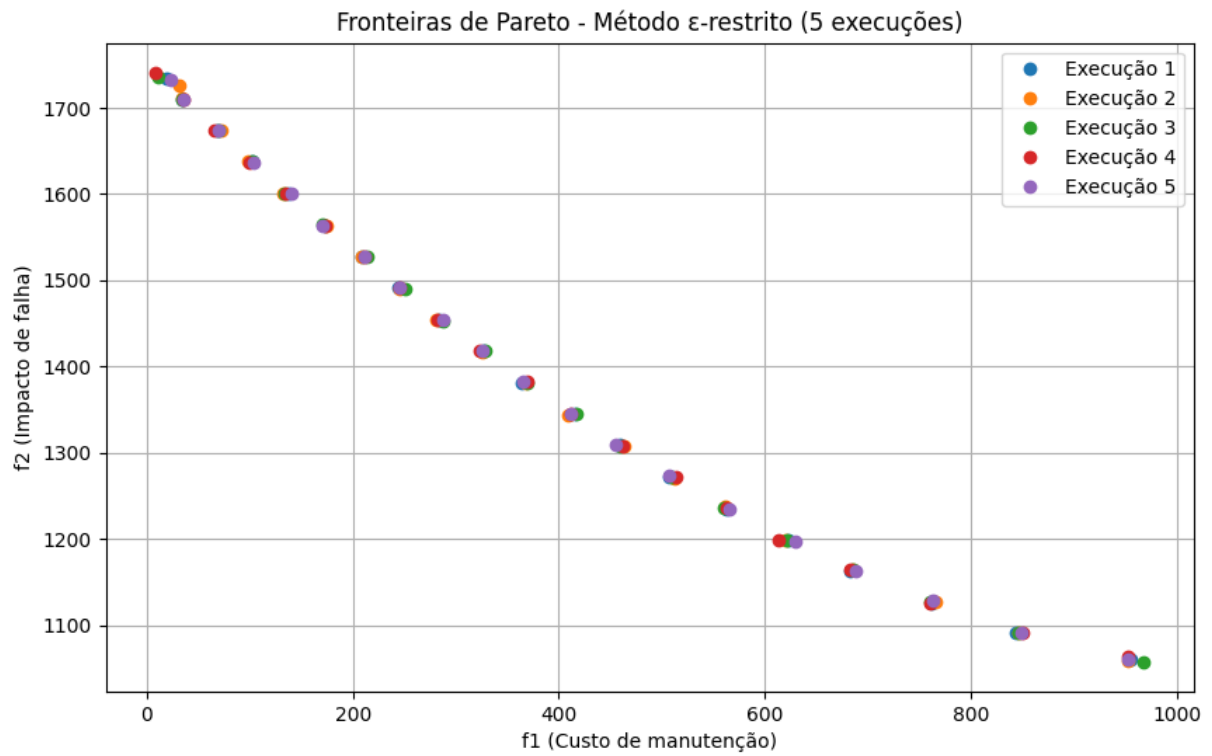
Fonte: elaboração própria.

Pela própria Figura 2 já é notável uma sobreposição de pontos na fronteira, e ao analisarmos os resultados para as 5 execuções foi notado que quando w assumia valores maiores que aproximadamente 0.65 a solução converge para o valor ótimo de f_1 e quando assumia valores menores que 0.15 a solução converge para o valor ótimo de f_2 . Ou seja, há uma perda de resolução nos pontos da fronteira devido a essa sensibilidade aos pesos escolhidos aleatoriamente.

3.2 Abordagem ϵ -Restrito

Para a abordagem ϵ -Restrito, geramos 20 valores de ϵ_2 espaçados igualmente no intervalo $[\min f_2, \max f_2]$, obtendo a fronteira Pareto-ótima exibida na Figura 3. A fronteira exibe os valores absolutos das funções objetivo, mas elas foram obtidas considerando-se a função objetivo normalizada por (1.6).

Figura 3 – Fronteira Pareto-ótima obtida via BVNS a abordagem ϵ -Restrito.



Fonte: elaboração própria.

4 INDICADORES DE QUALIDADE

Para avaliar a qualidade das soluções não-dominadas obtidas pelos métodos utilizados, empregou-se o *indicador de hipervolume (s-metric)*. Este indicador é amplamente utilizado na literatura de otimização multiobjetivo por sua capacidade de capturar simultaneamente propriedades de **convergência** e **diversidade**.

4.1 Formulação Matemática

Dado um conjunto $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de soluções não-dominadas em um problema de minimização com m objetivos, e um vetor de referência $z^{\text{ref}} = (z_1^{\text{ref}}, \dots, z_m^{\text{ref}})$, o hipervolume $HV(S)$ é definido como:

$$HV(S) = \text{Vol} \left(\bigcup_{x \in S} [f_1(x), z_1^{\text{ref}}] \times \dots \times [f_m(x), z_m^{\text{ref}}] \right) \quad (4.1)$$

No caso biobjetivo considerado neste trabalho ($m = 2$), o hipervolume corresponde à área total dominada pelas soluções de S até o ponto de referência z^{ref} .

4.2 Interpretação Geométrica

Geometricamente, o hipervolume representa a união de retângulos formados por cada solução não-dominada e o vetor de referência. Assim, quanto maior o hipervolume, maior a área do espaço dos objetivos que é coberta pelas soluções, indicando tanto boa convergência quanto boa distribuição.

Na Figura 4 temos uma ilustração da métrica de hipervolume para um problema de otimização com duas funções objetivo.

O hipervolume do conjunto de referência (em vermelho, com o ponto de referência $r = [1, 1]$) é utilizado como fator de normalização.

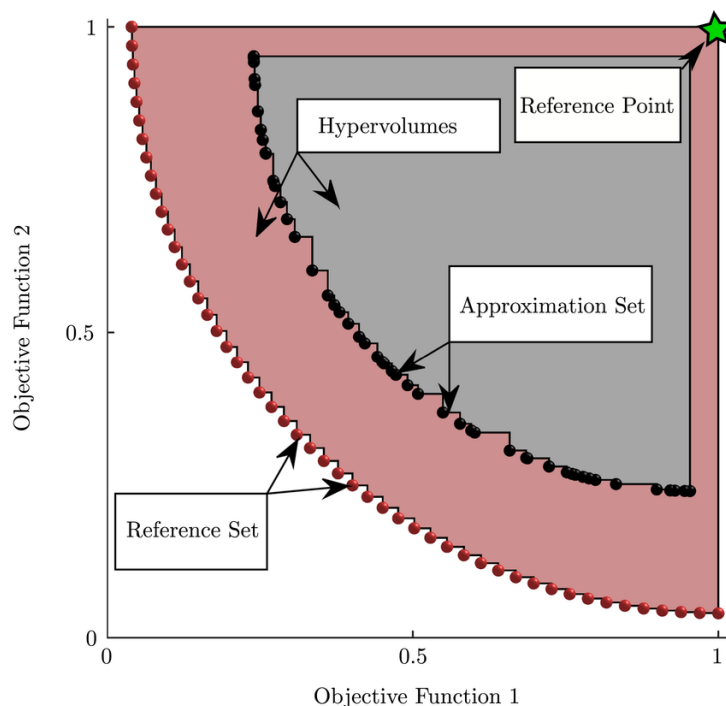
Assim, o hipervolume normalizado do *conjunto de aproximação* (em cinza) é calculado como:

$$HV_{\text{NAS}} = \frac{HV_{\text{AS}}}{HV_{\text{RS}}}$$

onde:

- HV_{NAS} : hipervolume normalizado do conjunto de aproximação (Normalized Approximation Set)
- HV_{AS} : hipervolume do conjunto de aproximação (Approximation Set)
- HV_{RS} : hipervolume do conjunto de referência (Reference Set)

Figura 4 – Figura ilustrativa da métrica de hipervolume.



Fonte: ResearchGate

4.3 Implementação

Para a utilização dessa métrica para avaliar os resultados obtidos pelas fronteiras encontradas, foi fornecido uma função Matlab já ajustada ao problema trabalhado, sendo necessário apenas a entrada de um arquivo “.csv” com 500 colunas e N linhas, onde N são as soluções encontradas. Conforme sugerido nas orientações do trabalho, foi feita a união dos resultados da 5 fronteiras encontradas com 20 pontos cada, e portanto foi passado um arquivo “.csv” com 500 colunas e 100 linhas para cada um dos métodos.

O algoritmo fornecido já possui uma filtragem das soluções enviadas, logo não foi necessário uma limpeza de soluções repetidas no arquivo pois isso já era feito automaticamente.

4.4 Resultados Obtidos

Em todos os casos foi realizada uma redução considerável de soluções após a filtragem presente no algoritmo, principalmente naqueles em que se utilizou o método da soma ponderada. O que já era de se esperar, ainda mais com a resolução reduzida para esse método onde apenas os pesos w entre 0.15 e 0.65 eram capazes de gerar novas soluções.

Figura 5 – Resultado da avaliação da métrica de hipervolume para o Simplex e soma ponderada com 100 soluções

```
Solutions before filtering: 100
Solutions after filtering: 26

Utopic: [ 0.0000 1048.1788]
Nadir : [1000.0000 1745.4898]

HVI : 0.590177
```

Fonte: elaboração própria.

Figura 6 – Resultado da avaliação da métrica de hipervolume para o simplex e soma ponderada com 2000 soluções

```
Solutions before filtering: 2000
Solutions after filtering: 148

Utopic: [ 0.0000 1048.1788]
Nadir : [1000.0000 1745.4898]

HVI : 0.621691
```

Fonte: elaboração própria.

Figura 7 – Resultado da avaliação da métrica de hipervolume para o BVNS soma ponderada com 100 soluções

```
Solutions before filtering: 100
Solutions after filtering: 24

Utopic: [ 0.0000 1048.1788]
Nadir : [1000.0000 1745.4898]

HVI : 0.591222
```

Fonte: elaboração própria.

Figura 8 – Resultado da avaliação da métrica de hipervolume para o BVNS ϵ -Restrito com 100 soluções

```
Solutions before filtering: 100
Solutions after filtering: 51

Utopic: [ 0.0000 1048.1788]
Nadir : [1000.0000 1745.4898]

HVI : 0.590631
```

Fonte: elaboração própria.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O hipervolume é um indicador robusto e informativo para avaliação de algoritmos heurísticos em problemas multiobjetivo. Sua aplicação neste trabalho forneceu uma métrica quantitativa confiável para comparar a eficácia dos métodos escalares utilizados, validando a qualidade das soluções obtidas tanto do ponto de vista de convergência quanto de diversidade.

Excluindo-se o resultado obtido para o Simplex com 2000 pontos, a fronteira obtida com o BVNS utilizando-se o método de soma restrita foi o melhor encontrado, ficando bem próximo do melhor patamar estabelecido que se inicia com um hipervolume maior que 0.60. Para a próxima etapa, serão realizadas melhorias que permitirão atingir esse patamar, para então ser feita a tomada de decisão.

6 REFERÊNCIAS

- M. Gendreau, J.-Y. Potvin (eds.), Handbook of Metaheuristics, Springer, 2nd ed., 2010.
- Bode, Felix & Reed, Patrick & Reuschen, Sebastian & Nowak, Wolfgang. (2019). Search Space Representation and Reduction Methods to Enhance Multi-Objective Water Supply Monitoring Design. Water Resources Research. 55. 10.1029/2018WR023133.