

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS**  
**Escola de Engenharia**  
**Curso de Bacharelado em Engenharia de Sistemas**

Raphael Henrique Braga Leivas 2020028101

Milton Pereira Bravo Neto 2018072549

Daniel Felipe de Almeida Araújo 2023422617

**Trabalho Computacional 02 – Teoria da Decisão (ELE088)**

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>MODELAGEM MULTIOBJETIVO</b>	<b>3</b>
1.1	Formulação Soma Ponderada $P_w$	4
1.2	Formulação $\epsilon$ -Restrito $P_\epsilon$	4
1.3	Normalização	5
<b>2</b>	<b>SOLUÇÃO VIA SIMPLEX</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>SOLUÇÃO VIA BVNS</b>	<b>7</b>
3.1	Abordagem de Soma Ponderada	7
3.2	Abordagem $\epsilon$ -Restrito	7
<b>4</b>	<b>INDICADORES DE QUALIDADE</b>	<b>9</b>
4.1	Formulação Matemática	9
4.2	Interpretação Geométrica	9
4.3	Implementação	10
4.4	Resultados Obtidos	10
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>13</b>
<b>6</b>	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>14</b>

## 1 MODELAGEM MULTIOBJETIVO

No TC01, modelamos duas funções objetivo:

- $f_1(\cdot)$ : minimização do custo de manutenção total
- $f_2(\cdot)$ : minimização do custo esperado de falha total

definidas por

$$\min f_1 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^J c_j x_{ij} \quad , \quad \min f_2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^J p_{ij} d_i x_{ij}$$

$x_{ij}$  : se o equipamento  $i$  executa a manutenção  $j$

sujeito a

$$\sum_{j=1}^J x_{ij} = 1 \quad , \quad \forall i = 1, 2, \dots, N$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad , \quad i = \{1, 2, \dots, N\} \quad , \quad j = \{1, 2, \dots, J\}$$

onde

- $N = 500$ : número de equipamentos
- $J = 3$ : número de planos de manutenção
- $c_j$ : custo de executar a manutenção  $j$
- $p_{ij}$ : probabilidade de falha do equipamento  $i$  executando a manutenção  $j$
- $d_i$ : custo de falha do equipamento  $i$

e

$$p_{ij} = \frac{F_i(t_0 + k_j \Delta t) - F_i(t_0)}{1 - F_i(t_0)} \quad , \quad F_i(t) = 1 - \exp \left[ - \left( \frac{t}{\eta_i} \right)^{\beta_i} \right]$$

A partir dessa modelagem, temos o nosso problema multiobjetivo

$$\min \mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}) , f_2(\mathbf{x})] \quad (1.1)$$

Considerando o problema de (1.1), podemos aplicar duas abordagens escalares para obter a fronteira Pareto-ótima no espaço de objetivos, descritas a seguir.

### 1.1 Formulação Soma Ponderada $P_w$

Seja  $0 \leq w \leq 1$  um peso qualquer gerado aleatoriamente de uma distribuição uniforme no intervalo  $[0, 1]$ . Usando a abordagem da soma ponderada, podemos reescrever (1.1) na forma de mono-objetivo de

$$\min f_w = \min w f_1 + (1 - w) f_2 \quad (1.2)$$

onde (1.2) está sujeito às mesmas restrições do problema original. Como (1.2) é escalar, podemos minimizar  $f_w$  através de métodos já conhecidos como o Simplex e o BVNS.

### 1.2 Formulação $\epsilon$ -Restrito $P_\epsilon$

Com a abordagem do  $\epsilon$ -Restrito, vamos minimizar apenas  $f_1$  usando  $f_2$  como restrição. Seja  $\epsilon_2$  um real qualquer tal que  $\min f_2 \leq \epsilon_2 \leq \max f_2$ . Temos

$$\min f_1 \quad (1.3)$$

sujeito a

$$\begin{cases} f_2 \leq \epsilon_2 \\ \sum_{j=1}^J x_{ij} = 1 \end{cases}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, N \quad (1.4)$$

em que (1.3) possui as mesmas restrições do problema original mais a restrição de  $f_2 \leq \epsilon_2$ .

Contudo, como o BVNS é usado para resolver problemas de otimização irrestritos, precisamos converter (1.3) em um problema irrestrito. Para isso, adicionamos o termo um termo de penalidade  $p(x, u)$  da seguinte forma:

$$p(x, u) = u \max [0, g(x)]^2$$

onde  $g(x)$  é a nossa restrição de desigualdade, dada por

$$g(x) \leq 0 \implies f_2 - \epsilon_2 \leq 0 \implies g(x) = f_2 - \epsilon_2$$

de modo que o nosso problema irrestrito se torna:

$$\min f_1 + u \max [0, f_2 - \epsilon_2]^2 \quad (1.5)$$

Note que as demais restrições já estão naturalmente incluídas no BVNS devido à maneira como nós fizemos a representação computacional das variáveis de decisão, de modo que só precisamos fazer a correção para a restrição do  $\epsilon$  em (1.5).

### 1.3 Normalização

Para garantir que as abordagens escalares sejam condizentes, precisamos normalizar  $f_1$  e  $f_2$  através de

$$f_1(\mathbf{x}) = \frac{f_1(\mathbf{x}) - \min f_1}{\max f_1 - \min f_1} \quad , \quad f_2(\mathbf{x}) = \frac{f_2(\mathbf{x}) - \min f_2}{\max f_2 - \min f_2} \quad (1.6)$$

A partir do trabalho realizado no TC01, já sabemos que

$$\min f_1 = 0 \quad , \quad \max f_1 = 1000 \quad , \quad \min f_2 = 1048.17 \quad , \quad \max f_2 = 1745.49$$

de modo que a formulação da soma ponderada de (1.2) pode ser reescrita como

$$\min \left( w \frac{f_1(\mathbf{x}) - \min f_1}{\max f_1 - \min f_1} + (1 - w) \frac{f_2(\mathbf{x}) - \min f_2}{\max f_2 - \min f_2} \right)$$

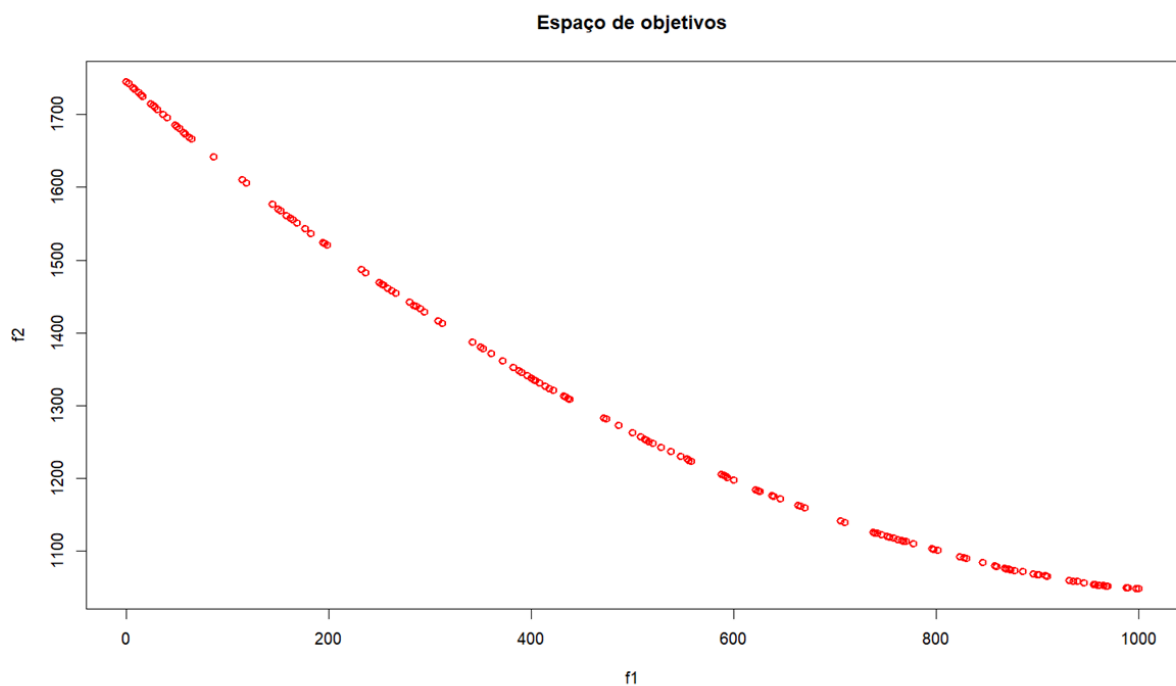
que será usado como função objetivo no código do BVNS.

## 2 SOLUÇÃO VIA SIMPLEX

Como ambas funções objetivo são lineares, podemos usar o método Simplex para rapidamente obter a fronteira Pareto ótima com muitos pontos usando a abordagem de soma ponderada com as funções normalizadas. Geramos aleatoriamente 2000 pontos de  $w$  no intervalo  $[0, 1]$  e minimizamos o problema de Programação Linear Inteira (1.2) para cada  $w$ .

O resultado obtido está exibido na Figura 1.

Figura 1 – Fronteira Pareto-ótima obtida via Simplex.



Fonte: elaboração própria.

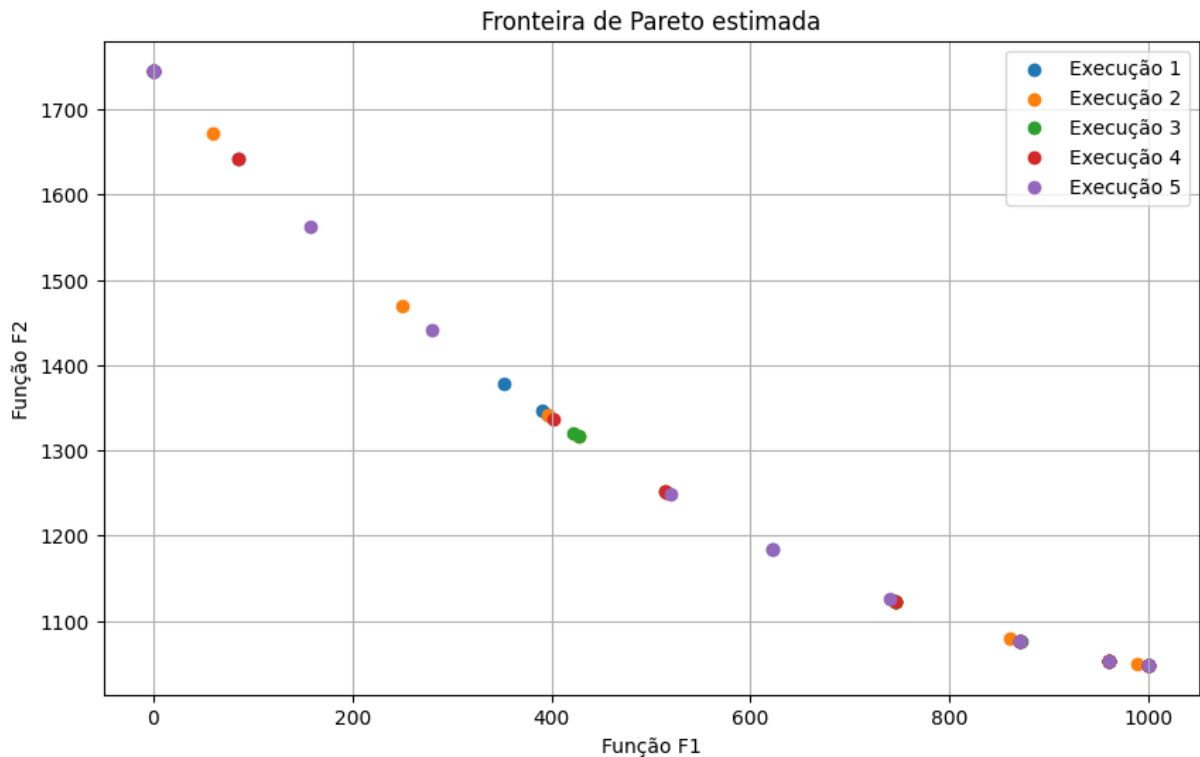
O objetivo agora é obter a fronteira Pareto usando o BVNS com 20 pontos tendo como referência a fronteira já obtida pelo Simplex.

### 3 SOLUÇÃO VIA BVNS

#### 3.1 Abordagem de Soma Ponderada

Para a soma ponderada, usamos a modelagem de (1.2) com 20 valores aleatórios de  $w$  entre 0 e 1, executando 5 vezes, obtemos a Fronteira Pareto-ótima exibida na Figura 2. A fronteira exhibe os valores absolutos das funções objetivo, mas elas foram obtidas considerando-se a função objetivo normalizada por (1.6).

Figura 2 – Fronteira Pareto-ótima obtida via BVNS com soma ponderada.



Fonte: elaboração própria.

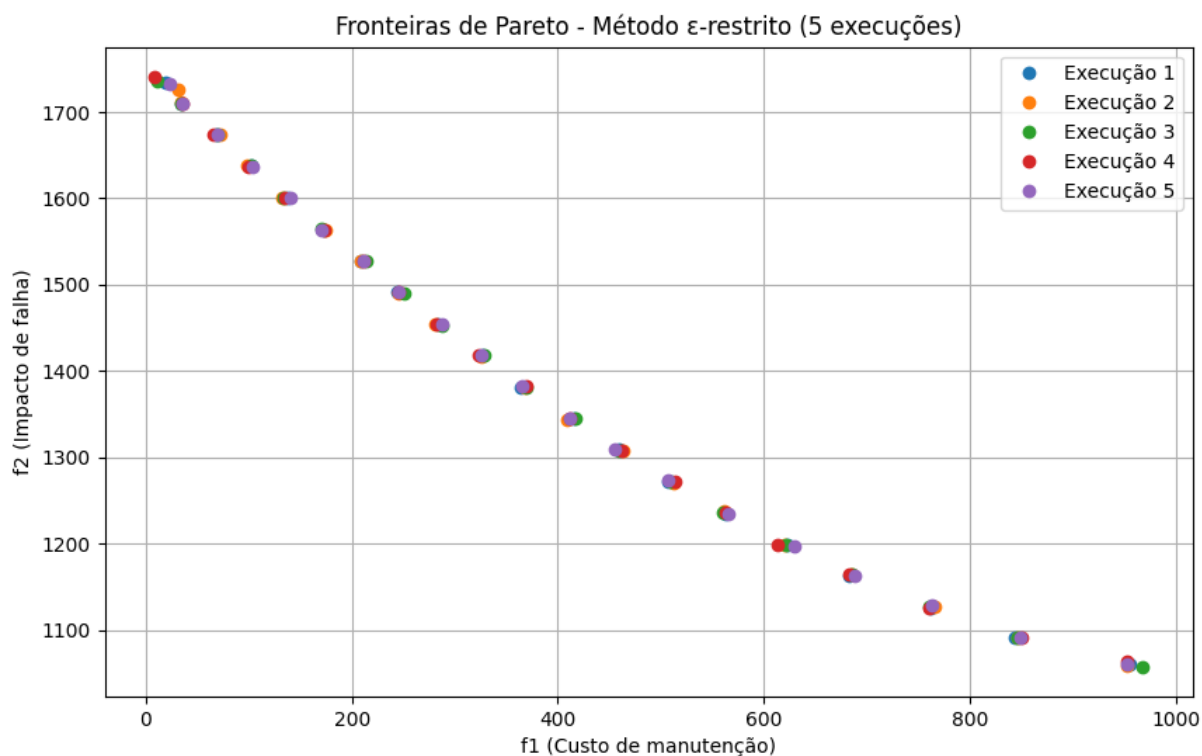
Pela própria Figura 2 já é notável uma sobreposição de pontos na fronteira, e ao analisarmos os resultados para as 5 execuções foi notado que quando  $w$  assumia valores maiores que aproximadamente 0.65 a solução converge para o valor ótimo de  $f_1$  e quando assumia valores menores que 0.15 a solução converge para o valor ótimo de  $f_2$ . Ou seja, há uma perda de resolução nos pontos da fronteira devido a essa sensibilidade aos pesos escolhidos aleatoriamente.

#### 3.2 Abordagem $\epsilon$ -Restrito

Para a abordagem  $\epsilon$ -Restrito, geramos 20 valores de  $\epsilon_2$  espaçados igualmente no intervalo  $[\min f_2, \max f_2]$ , obtendo a fronteira Pareto-ótima exibida na Figura 3.

Comparando a fronteira do  $\epsilon$ -Restrito com a da soma ponderada, vemos que há uma menor sobreposição entre os pontos da fronteira. É possível que isso seja

Figura 3 – Fronteira Pareto-ótima obtida via BVNS a abordagem  $\epsilon$ -Restrito.



Fonte: elaboração própria.

consequência do fato de estarmos selecionando 20 valores de  $\epsilon$  igualmente espaçados no intervalo de  $[\min f_2, \max f_2]$ , ao passo que na soma ponderada usamos os pesos amostrados aleatoriamente entre 0 e 1.



## 4 INDICADORES DE QUALIDADE

Para avaliar a qualidade das soluções não-dominadas obtidas pelos métodos utilizados, empregou-se o *indicador de hipervolume (s-metric)*. Este indicador é amplamente utilizado na literatura de otimização multiobjetivo por sua capacidade de capturar simultaneamente propriedades de **convergência** e **diversidade**.

### 4.1 Formulação Matemática

Dado um conjunto  $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  de soluções não-dominadas em um problema de minimização com  $m$  objetivos, e um vetor de referência  $z^{\text{ref}} = (z_1^{\text{ref}}, \dots, z_m^{\text{ref}})$ , o hipervolume  $HV(S)$  é definido como:

$$HV(S) = \text{Vol} \left( \bigcup_{x \in S} [f_1(x), z_1^{\text{ref}}] \times \dots \times [f_m(x), z_m^{\text{ref}}] \right) \quad (4.1)$$

No caso biobjetivo considerado neste trabalho ( $m = 2$ ), o hipervolume corresponde à área total dominada pelas soluções de  $S$  até o ponto de referência  $z^{\text{ref}}$ .

### 4.2 Interpretação Geométrica

Geometricamente, o hipervolume representa a união de retângulos formados por cada solução não-dominada e o vetor de referência. Assim, quanto maior o hipervolume, maior a área do espaço dos objetivos que é coberta pelas soluções, indicando tanto boa convergência quanto boa distribuição.

Na Figura 4 temos uma ilustração da métrica de hipervolume para um problema de otimização com duas funções objetivo.

O hipervolume do conjunto de referência (em vermelho, com o ponto de referência  $r = [1, 1]$ ) é utilizado como fator de normalização.

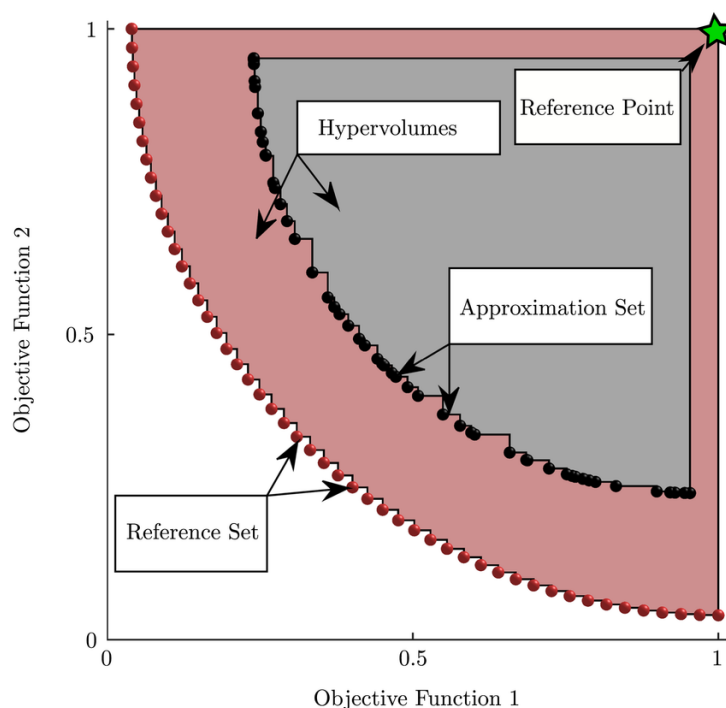
Assim, o hipervolume normalizado do *conjunto de aproximação* (em cinza) é calculado como:

$$HV_{\text{NAS}} = \frac{HV_{\text{AS}}}{HV_{\text{RS}}}$$

onde:

- $HV_{\text{NAS}}$ : hipervolume normalizado do conjunto de aproximação (Normalized Approximation Set)
- $HV_{\text{AS}}$ : hipervolume do conjunto de aproximação (Approximation Set)
- $HV_{\text{RS}}$ : hipervolume do conjunto de referência (Reference Set)

Figura 4 – Figura ilustrativa da métrica de hipervolume.



Fonte: ResearchGate

### 4.3 Implementação

Para a utilização dessa métrica para avaliar os resultados obtidos pelas fronteiras encontradas, foi fornecido uma função Matlab já ajustada ao problema trabalhado, sendo necessário apenas a entrada de um arquivo “.csv” com 500 colunas e  $N$  linhas, onde  $N$  são as soluções encontradas. Conforme sugerido nas orientações do trabalho, foi feita a união dos resultados da 5 fronteiras encontradas com 20 pontos cada, e portanto foi passado um arquivo “.csv” com 500 colunas e 100 linhas para cada um dos métodos.

O algoritmo fornecido já possui uma filtragem das soluções enviadas, logo não foi necessário uma limpeza de soluções repetidas no arquivo pois isso já era feito automaticamente.

### 4.4 Resultados Obtidos

Em todos os casos foi realizada uma redução considerável de soluções após a filtragem presente no algoritmo, principalmente naqueles em que se utilizou o método da soma ponderada. O que já era de se esperar, ainda mais com a resolução reduzida para esse método onde apenas os pesos  $w$  entre 0.15 e 0.65 eram capazes de gerar novas soluções.

Comparando os resultados obtidos do HVI para cada algoritmo, vemos que o

Figura 5 – Resultado da avaliação da métrica de hipervolume para o Simplex e soma ponderada com 100 soluções

```
Solutions before filtering: 100
Solutions after filtering: 26

Utopic: [ 0.0000 1048.1788]
Nadir : [1000.0000 1745.4898]

HVI : 0.590177
```

Fonte: elaboração própria.

Figura 6 – Resultado da avaliação da métrica de hipervolume para o simplex e soma ponderada com 2000 soluções

```
Solutions before filtering: 2000
Solutions after filtering: 148

Utopic: [ 0.0000 1048.1788]
Nadir : [1000.0000 1745.4898]

HVI : 0.621691
```

Fonte: elaboração própria.

Figura 7 – Resultado da avaliação da métrica de hipervolume para o BVNS soma ponderada com 100 soluções

```
Solutions before filtering: 100
Solutions after filtering: 24

Utopic: [ 0.0000 1048.1788]
Nadir : [1000.0000 1745.4898]

HVI : 0.591222
```

Fonte: elaboração própria.

Figura 8 – Resultado da avaliação da métrica de hipervolume para o BVNS  $\epsilon$ -Restrito com 100 soluções

```
Solutions before filtering: 100
Solutions after filtering: 51

Utopic: [ 0.0000 1048.1788]
Nadir : [1000.0000 1745.4898]

HVI : 0.590631
```

Fonte: elaboração própria.

Simplex apresenta o melhor desempenho, com um HVI superior a 0.62. Contudo, é importante notar que como o Simplex é capaz de encontrar a solução do problema em milissegundos, fomos capazes de gerar 2000 pontos na fronteira que obteve o maior

HVI. Com apenas 100 pontos, o Simplex apresenta HVI semelhante ao BVNS.

O BVNS, por ser mais lento, possui apenas 100 pontos na fronteira (o que levou mais de 1 hora para ser feito), mas ainda possui um valor bom para o HVI, próximo de 0.6.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O hipervolume é um indicador robusto e informativo para avaliação de algoritmos heurísticos em problemas multiobjetivo. Sua aplicação neste trabalho forneceu uma métrica quantitativa confiável para comparar a eficácia dos métodos escalares utilizados, validando a qualidade das soluções obtidas tanto do ponto de vista de convergência quanto de diversidade.

Excluindo-se o resultado obtido para o Simplex com 2000 pontos, a fronteira obtida com o BVNS utilizando-se o método de  $\epsilon$  restrita foi o melhor encontrado, ficando bem próximo do melhor patamar estabelecido que se inicia com um hipervolume maior que 0.60. Para a próxima etapa, serão realizadas melhorias que permitirão atingir esse patamar, para então ser feita a tomada de decisão.

## 6 REFERÊNCIAS

- M. Gendreau, J.-Y. Potvin (eds.), Handbook of Metaheuristics, Springer, 2nd ed., 2010.
- Bode, Felix & Reed, Patrick & Reuschen, Sebastian & Nowak, Wolfgang. (2019). Search Space Representation and Reduction Methods to Enhance Multi-Objective Water Supply Monitoring Design. Water Resources Research. 55. 10.1029/2018WR023133.