UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Escola de Engenharia
Curso de Bacharelado em Engenharia de Sistemas

Raphael Henrique Braga Leivas 2020028101
Milton Pereira Bravo Neto 2018072549
Daniel Felipe de Almeida Araújo 2023422617

Trabalho Computacional 02 – Teoria da Decisão (ELE088)

Belo Horizonte
2025

SUMÁRIO

1 MODELAGEM MULTIOBJETIVO

No TC01, modelamos duas funções objetivo:

- $f_1(\cdot)$: minimização do custo de manutenção total
- $f_2(\cdot)$: minimização do custo esperado de falha total

definidas por

$$\min f_1 = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{J} c_j x_{ij} \quad , \quad \min f_2 = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{J} p_{ij}\, d_i\, x_{ij}$$

$$x_{ij} : \text{ se o equipamento } i \text{ executa a manutenção } j$$

sujeito a

$$\sum_{j=1}^{J} x_{ij} = 1 \quad , \quad \forall i = 1, 2, ..., N$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad , \quad i = \{1, 2, ..., N\} \quad , \quad j = \{1, 2, ..., J\}$$

onde

- $N = 500$: número de equipamentos
- $J = 3$: número de planos de manutenção
- c_j: custo de executar a manutenção j
- p_{ij}: probabilidade de falha do equipamento i executando a manutenção j
- d_i: custo de falha do equipamento i

e

$$p_{ij} = \frac{F_i\left(t_0 + k_j \Delta t\right) - F_i\left(t_0\right)}{1 - F_i\left(t_0\right)} \quad , \quad F_i(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\eta_i}\right)^{\beta_i}\right]$$

A partir dessa modelagem, temos o nosso problema multiobjetivo

$$\min \mathbf{f}\left(\mathbf{x}\right) = \left[f_1\left(\mathbf{x}\right) \ , \ f_2\left(\mathbf{x}\right)\right] \tag{1.1}$$

Considerando o problema de (1.1), podemos aplicar duas abordagens escalares para obter a fronteira Pareto-ótima no espaço de objetivos, descritas a seguir.

1.1 Formulação Soma Ponderada P_w

Seja $0 \leq \mathrm{w} \leq 1$ um peso qualquer gerado aleatóriamente de uma distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$. Usando a abordagem da soma ponderada, podemos reescrever (1.1) na forma de mono-objetivo de

$$\min f_{\mathrm{w}} = \min \mathrm{w} f_1 + (1 - \mathrm{w}) f_2 \tag{1.2}$$

onde (1.2) está sujeito às mesmas restrições do problema original. Como (1.2) é escalar, podemos minimizar f_{w} através de métodos já conhecidos como o Simplex e o BVNS.

1.2 Formulação ϵ-Restrito P_ϵ

Com a abordagem do ϵ-Restrito, vamos minimizar apenas f_1 usando f_2 como restrição. Seja ϵ_2 um real qualquer tal que $\min f_2 \leq \epsilon_2 \leq \max f_2$. Temos

$$\min f_1 \tag{1.3}$$

sujeito a

$$\begin{cases} f_2 \leq \epsilon_2 \\ \sum_{j=1}^{J} x_{ij} = 1 \quad , \quad \forall i = 1, 2, ..., N \end{cases} \tag{1.4}$$

em que (1.3) possui as mesmas restrições do problema original mais a restrição de $f_2 \leq \epsilon_2$.

Contudo, como o BVNS é usado para resolver problemas de otimização irrestritos, precisamos converter (1.3) em um problema irrestrito. Para isso, adicionamos o termo um termo de penalidade $p(x, u)$ da seguinte forma:

$$p(x, u) = u \, \max \left[0, g(x)\right]^2$$

onde $g(x)$ é a nossa restrição de desigualdade, dada por

$$g(x) \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad f_2 - \epsilon_2 \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad g(x) = f_2 - \epsilon_2$$

de modo que o nosso problema irrestrito se torna:

$$\min f_1 + u \, \max \left[0, f_2 - \epsilon_2\right]^2 \tag{1.5}$$

Note que as demais restrições já estão naturalmente incluídas no BVNS devido à maneira como nós fizemos a representação computacional das variáveis de decisão, de modo que só precisamos fazer a correção para a restrição do ϵ em (1.5).

1.3 Normalização

Para garantir que as abordagens escalares sejam condizentes, precisamos normalizar f_1 e f_2 através de

$$f_1(\mathbf{x}) = \frac{f_1(\mathbf{x}) - \min f_1}{\max f_1 - \min f_1} \quad , \quad f_2(\mathbf{x}) = \frac{f_2(\mathbf{x}) - \min f_2}{\max f_2 - \min f_2} \tag{1.6}$$

A partir do trabalho realizado no TC01, já sabemos que

$$\min f_1 = 0 \quad , \quad \max f_1 = 1000 \quad , \quad \min f_2 = 1048.17 \quad , \quad \max f_2 = 1745.49$$

de modo que a formulação da soma ponderada de (1.2) pode ser reescrita como

$$\min \left(\mathrm{w} \frac{f_1(\mathbf{x}) - \min f_1}{\max f_1 - \min f_1} + (1 - \mathrm{w}) \frac{f_2(\mathbf{x}) - \min f_2}{\max f_2 - \min f_2} \right)$$

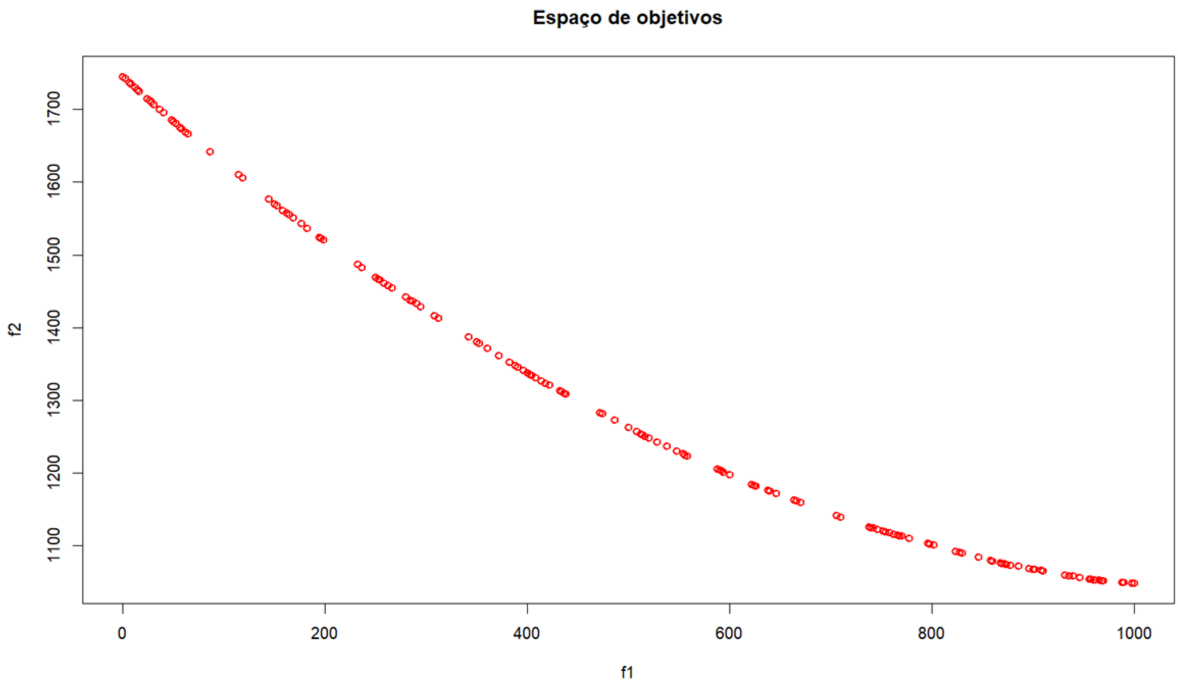
que será usado como função objetivo no código do BNVS.

2 SOLUÇÃO VIA SIMPLEX

Como ambas funções objetivo são lineares, podemos usar o método Simplex para rapidamente obter a fronteira Pareto ótima com muitos pontos usando a abordagem de soma ponderada com as funções normalizadas. Geramos aleatóriamente 2000 pontos de w no intervalo $[0, 1]$ e minimizamos o problema de Programação Linear Inteira (1.2) para cada w.

O resultado obtido está exibido na Figura 1.

Figura 1 – Fronteira Pareto-ótima obtida via Simplex.



Fonte: elaboração própria.

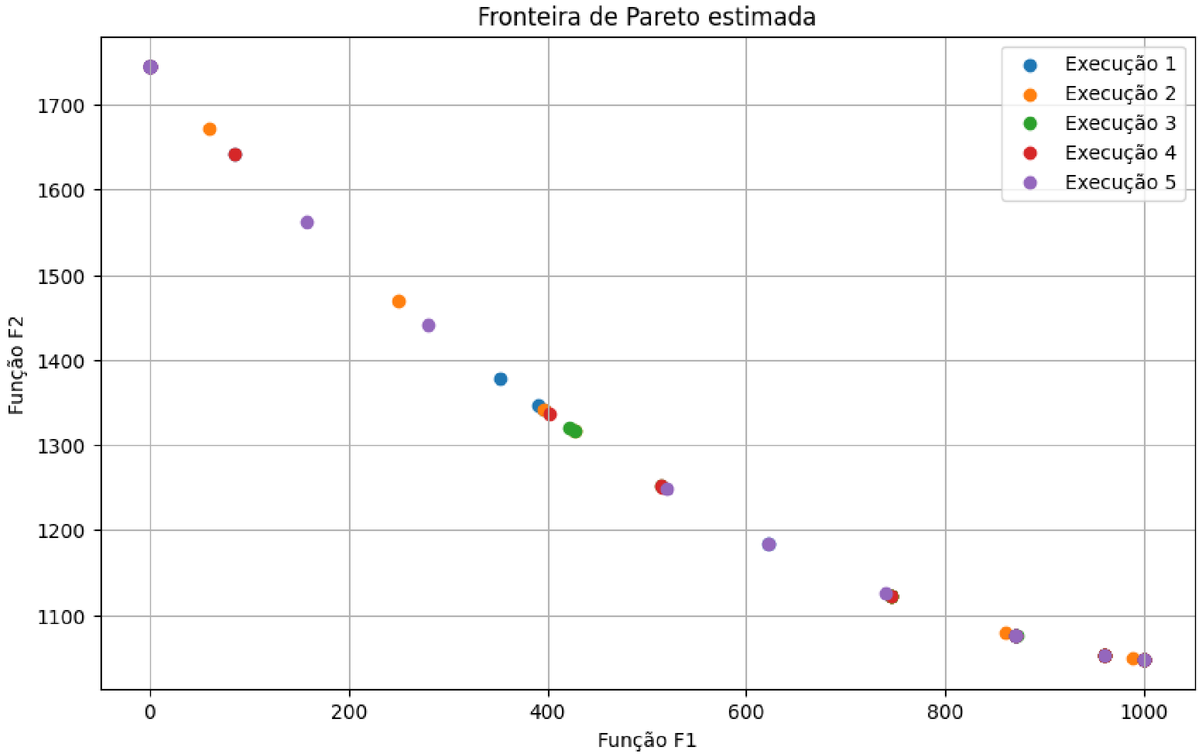
O objetivo agora é obter a fronteira Pareto usando o BVNS com 20 pontos tendo como referência a fronteira já obtida pelo Simplex.

3 SOLUÇÃO VIA BVNS

3.1 Abordagem de Soma Ponderada

Para a soma ponderada, usamos a modelagem de (1.2) com 20 valores aleatórios de w entre 0 e 1, executando 5 vezes, obtemos a Fronteira Pareto-ótima exibida na Figura 2.

Figura 2 – Fronteira Pareto-ótima obtida via BVNS com soma ponderada.

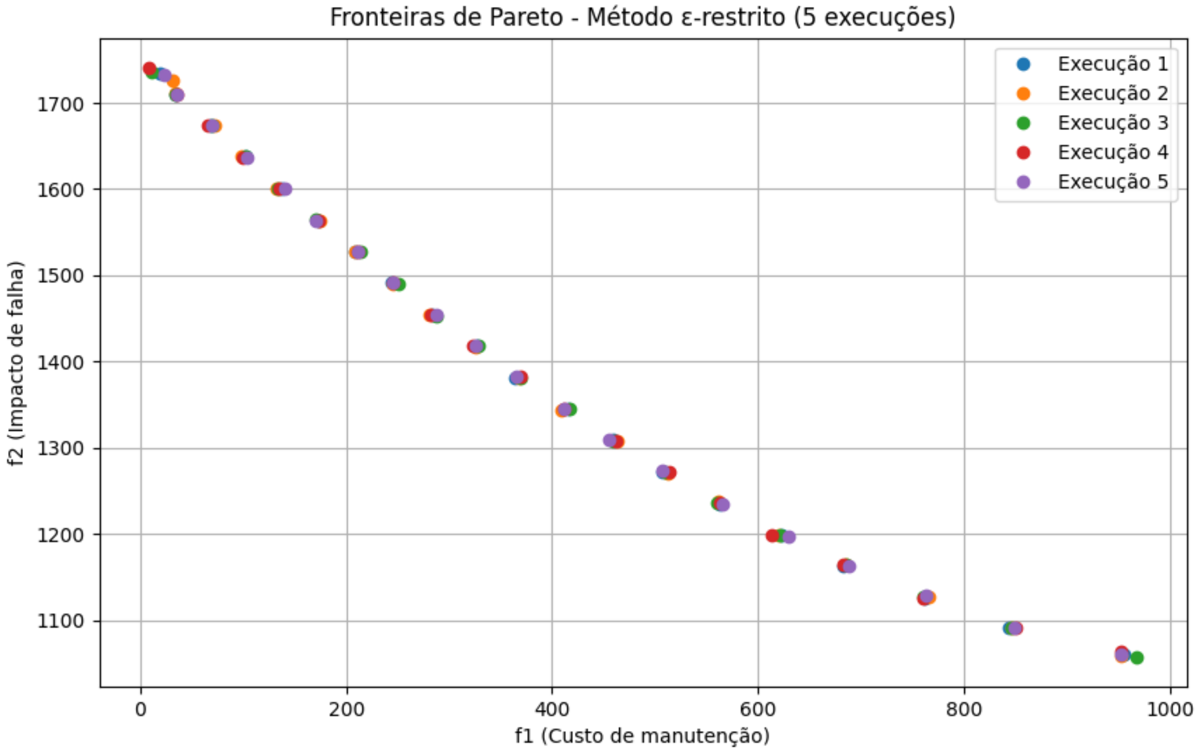


Fonte: elaboração própria.

3.2 Abordagem ϵ-Restrito

Para a abordagem ϵ-Restrito, geramos 20 valores de ϵ_2 espaçados igualmente no intervalo $[\min f_2, \max f_2]$, obtendo a fronteira Pareto-ótima exibida na Figura 3. A fronteira exibe os valores absolutos das funções objetivo, mas elas foram obtidas considerando-se a função objetivo normalizada por (1.6).

Figura 3 – Fronteira Pareto-ótima obtida via BVNS a abordagem ϵ-Restrito.



Fonte: elaboração própria.

4 INDICADORES DE QUALIDADE

5 REFERÊNCIAS

M. Gendreau, J.-Y. Potvin (eds.), Handbook of Metaheuristics, Springer, 2nd ed., 2010.