**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS**
**Escola de Engenharia**
**Curso de Bacharelado em Engenharia de Sistemas**

Raphael Henrique Braga Leivas 2020028101
Milton Pereira Bravo Neto 2018072549
Daniel Felipe de Almeida Araújo 2023422617

**Trabalho Computacional 02 – Teoria da Decisão (ELE088)**

Belo Horizonte
2025

## SUMÁRIO


**1 MODELAGEM MULTIOBJETIVO . . . . . . . . . . 3**

1.1 Formulação Soma Ponderada $P_w$ . . . . . . . . . . 4

1.2 Formulação $\epsilon$-Restrito $P_\epsilon$ . . . . . . . . . . 4

1.3 Normalização . . . . . . . . . . 4

**2 SOLUÇÃO VIA SIMPLEX . . . . . . . . . . 5**

**3 SOLUÇÃO VIA BVNS . . . . . . . . . . 6**

3.1 Abordagem de Soma Ponderada . . . . . . . . . . 6

3.2 Abordagem $\epsilon$-Restrito . . . . . . . . . . 6

**4 REFERÊNCIAS . . . . . . . . . . 7**

# 1 MODELAGEM MULTIOBJETIVO

No TC01, modelamos duas funções objetivo:

- $f_1(\cdot)$: minimização do custo de manutenção total
- $f_2(\cdot)$: minimização do custo esperado de falha total

definidas por

$$\min f_1 = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{J} c_j x_{ij} \quad , \quad \min f_2 = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{J} p_{ij} \, d_i \, x_{ij}$$

$$x_{ij} : \text{ se o equipamento } i \text{ executa a manutenção } j$$

sujeito a

$$\sum_{j=1}^{J} x_{ij} = 1 \quad , \quad \forall i = 1, 2, ..., N$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad , \quad i = \{1, 2, ..., N\} \quad , \quad j = \{1, 2, ..., J\}$$

onde

- $N = 500$: número de equipamentos
- $J = 3$: número de planos de manutenção
- $c_j$: custo de executar a manutenção $j$
- $p_{ij}$: probabilidade de falha do equipamento $i$ executando a manutenção $j$
- $d_i$: custo de falha do equipamento $i$

e

$$p_{ij} = \frac{F_i\left(t_0 + k_j \Delta t\right) - F_i\left(t_0\right)}{1 - F_i\left(t_0\right)} \quad , \quad F_i(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\eta_i}\right)^{\beta_i}\right]$$

A partir dessa modelagem, temos o nosso problema multiobjetivo

$$\min \mathbf{f}\left(\mathbf{x}\right) = \left[f_1\left(\mathbf{x}\right) \, , \, f_2\left(\mathbf{x}\right)\right] \tag{1.1}$$

Considerando o problema de (1.1), podemos aplicar duas abordagens escalares para obter a fronteira Pareto-ótima no espaço de objetivos, descritas a seguir.

### *1.1 Formulação Soma Ponderada $P_w$*

Seja $0 \leq \mathrm{w} \leq 1$ um peso qualquer gerado aleatóriamente de uma distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$. Usando a abordagem da soma ponderada, podemos reescrever (1.1) na forma de mono-objetivo de

$$\min f_{\mathrm{w}} = \min \mathrm{w} f_1 + (1 - \mathrm{w}) f_2 \tag{1.2}$$

onde (1.2) está sujeito às mesmas restrições do problema original. Como (1.2) é escalar, podemos minimizar $f_{\mathrm{w}}$ através de métodos já conhecidos como o Simplex e o BVNS.

### *1.2 Formulação $\epsilon$-Restrito $P_\epsilon$*

Com a abordagem do $\epsilon$-Restrito, vamos minimizar apenas $f_1$ usando $f_2$ como restrição. Seja $\epsilon_2$ um real qualquer tal que $\min f_2 \leq \epsilon_2 \leq \max f_2$. Temos

$$\min f_1 \tag{1.3}$$

sujeito a

$$\begin{cases} f_2 \leq \epsilon_2 \\ \sum_{j=1}^{J} x_{ij} = 1 \quad , \quad \forall i = 1, 2, ..., N \end{cases} \tag{1.4}$$

em que (1.3) possui as mesmas restrições do problema original mais a restrição de $f_2 \leq \epsilon_2$.

### *1.3 Normalização*

Para garantir que as abordagens escalares sejam condizentes, precisamos normalizar $f_1$ e $f_2$ através de

$$f_1(\mathbf{x}) = \frac{f_1(\mathbf{x}) - \min f_1}{\max f_1 - \min f_1} \quad , \quad f_2(\mathbf{x}) = \frac{f_2(\mathbf{x}) - \min f_2}{\max f_2 - \min f_2} \tag{1.5}$$

A partir do trabalho realizado no TC01, já sabemos que

$$\min f_1 = 0 \quad , \quad \max f_1 = 1000 \quad , \quad \min f_2 = 1048.17 \quad , \quad \max f_2 = 1745.49$$

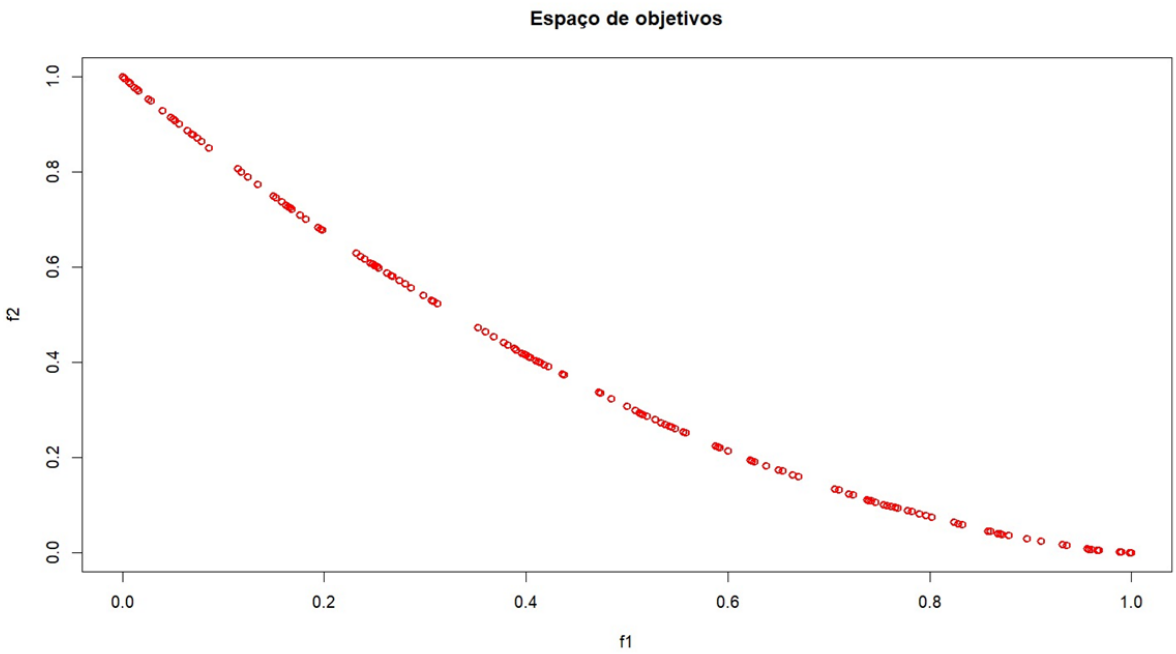
de modo que esses valores serão usados em (1.5) nos algoritmos.

## 2 SOLUÇÃO VIA SIMPLEX

Como ambas funções objetivo são lineares, podemos usar o método Simplex para rapidamente obter a fronteira Pareto ótima com muitos pontos usando a abordagem de soma ponderada com as funções normalizadas. Geramos aleatóriamente 2000 pontos de $\mathrm{w}$ no intervalo $[0, 1]$ e minimizamos o problema de Programação Linear Inteira (1.2) para cada $\mathrm{w}$.

O resultado obtido está exibido na Figura 1.

Figura 1 – Fronteira Pareto-ótima obtida via Simplex.




Fonte: elaboração própria.

O objetivo agora é obter a fronteira Pareto usando o BVNS com 20 pontos tendo como referência a fronteira já obtida pelo Simplex.

# 3 SOLUÇÃO VIA BVNS

## *3.1 Abordagem de Soma Ponderada*

## *3.2 Abordagem $\epsilon$-Restrito*

## 4 REFERÊNCIAS

M. Gendreau, J.-Y. Potvin (eds.), Handbook of Metaheuristics, Springer, 2nd ed., 2010.