

Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG  
Curso de Graduação em Engenharia de Sistemas

EMA255 - Fluidos e Termodinâmica Computacional

Lista de Exercícios de Dinâmica dos Fluidos

**Aluno: Raphael Henrique Braga Leivas**

Matrícula: 2020028101

Belo Horizonte

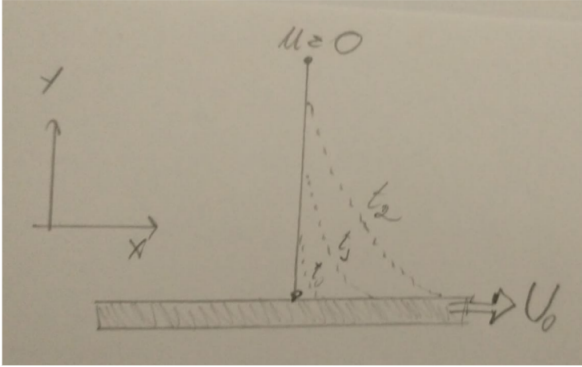
Semestre 2023/1

# 1 Primeira Questão (6 pts)

## 1.1 Análise Analítica

Um fluido de viscosidade  $\mu$  e massa específica  $\rho$  está em repouso sobre uma placa horizontal quando ela começa a se mover com velocidade constante  $U_0$ . A Figura 1.1 exibe a geometria do problema.

Figura 1.1: Geometria da questão 1.



Fonte: elaboração própria.

Como mostra a Figura 1.1, a linha média do fluido começa a ser arrastada pelo movimento da placa, e a cada instante de tempo  $t_0$ ,  $t_1$  e  $t_2$  o movimento da placa atinge pontos cada vez mais altos da linha média do fluido. Nesse cenário, a velocidade horizontal  $u$  do fluido é uma função de duas variáveis: posição vertical  $y$  e tempo  $t$ .

A equação diferencial que modela o problema é

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1.1)$$

com as seguintes condições de contorno:

$$\begin{cases} u(0, t) = U_0, & \text{Condição de contorno 1} \\ u(H, t) = 0, & \text{Condição de contorno 2} \\ u(y, 0) = 0, & \text{Condição inicial} \end{cases} \quad (1.2)$$

Veja que o problema é modelado por uma equação diferencial de segunda ordem em regime transiente, logo precisamos de duas condições de contorno e uma condição inicial.

No nosso sistema de coordenadas,  $y = 0$  corresponde ao ponto do fluido em contato com a placa, e  $y = H$  é a altura máxima que iremos considerar na análise. Note que, para  $H$  suficiente grande, faz sentido assumir que o movimento da placa não atinge esses pontos do fluido

a uma grande distância da placa, de modo que  $u(H, t) = 0$ .

O problema dado por (1.1) e (1.2) possui solução analítica dada por

$$u(y, t) = U_0 \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{y}{2\sqrt{\frac{\mu}{\rho}t}} \right) \right] \quad (1.3)$$

em que  $\operatorname{erf}$  é a função erro dada por

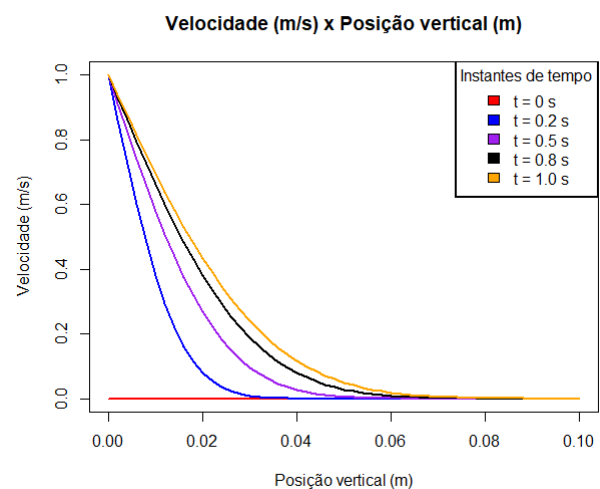
$$\operatorname{erf}(\beta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\beta e^{-x^2} dx \quad (1.4)$$

Usando linguagem R e a IDE RStudio, é possível obter a distribuição de velocidades do fluido a partir da equação (1.3), uma vez que a função erro  $\operatorname{erf}$  já está implementada em pacotes da linguagem. Usamos os seguintes parâmetros:

- Domínio de análise vertical:  $H = 10$  cm
- Domínio de análise no tempo:  $T = 1$  s
- Viscosidade:  $\mu = 0.29$  kg m<sup>-1</sup> s<sup>-1</sup>
- Massa específica:  $\rho = 891$  kg m<sup>-3</sup>
- Velocidade da placa:  $U_0 = 1$  m/s

A Figura 1.2 exibe os valores de  $u(y, t)$  em função do tempo e posição vertical obtidos através da equação (1.3) com os parâmetros acima.

Figura 1.2: Velocidade  $u$  do fluido em função da posição e tempo.



Fonte: elaboração própria.

As velocidades obtidas analiticamente na Figura 1.2 são condizentes com o analisado da geometria na Figura 1.1. Conforme o tempo passa, os

pontos do fluido apresentam velocidade  $u$  cada vez maior, uma vez que são arrastados pelo movimento da placa. Os pontos em  $y > 7$  cm já não sofrem nenhum efeito do movimento da placa até  $t = 1$  s.

Analisando os pontos específicos pedidos no exercício, temos

$$u(3 \text{ cm}, 0.5 \text{ s}) = 0.096 \text{ m/s}$$

$$u(3 \text{ cm}, 1 \text{ s}) = 0.24 \text{ m/s}$$

## 1.2 Análise Numérica

Uma vez entendido o que está acontecendo analiticamente, podemos fazer uma análise numérica do problema usando o método de diferenças finitas. O primeiro passo é discretizar a equação diferencial (1.1), trocando os diferenciais por diferenças.

$$\frac{u^{p+1} - u^p}{\Delta t} = \frac{\mu}{\rho} \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta y)^2} \quad (1.5)$$

Em (1.5) adotamos a seguinte simbologia:

- Sobrescrito  $p$ : indica o tempo da velocidade  $u$ .  $p$  indica o tempo atual,  $p + 1$  o próximo tempo
- Subscrito  $i$ : indica a posição vertical da velocidade  $u$ .  $i$  indica a posição atual,  $i + 1$  a próxima posição
- $\Delta t$ : intervalo de discretização no tempo
- $\Delta y$ : intervalo de discretização no espaço (vertical)

Assim, a linha média da Figura 1.1 é discretizada em  $H/\Delta y$  elementos de comprimento  $\Delta y$ , e o tempo é transcorrido a partir de  $t = 0$  até  $t = T$  em intervalos de  $\Delta t$ . Vamos reescrever (1.5) de modo a expressar a velocidade futura em função da velocidade antiga.

$$u^{p+1} = u^p + \frac{\mu}{\rho} \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2} (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) \quad (1.6)$$

Em (1.6), usamos o método explícito ao aplicar as diferenças finitas. Portanto, é fundamental analisar os critérios de estabilidade para que a solução converja. Em transferência de calor, vimos que a equação diferencial de condução unidimensional em regime transiente é

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (1.7)$$

onde  $\alpha$  é a difusividade térmica do material. Nesse modelo, o critério de estabilidade é, segundo Incropera (2007),

$$\frac{\alpha \Delta t}{(\Delta y)^2} \leq \frac{1}{2} \quad (1.8)$$

Comparando as equações diferenciais (1.1) e (1.7), podemos ver que as constantes  $\alpha$  e  $\mu/\rho$  possuem o mesmo papel, apesar de uma ter um significado físico de transferência de calor e outra um significado de mecânica dos fluidos. Nesse sentido, podemos inferir que o critério de estabilidade de (1.6) é

$$\frac{\mu}{\rho} \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2} \leq \frac{1}{2} \quad (1.9)$$

Concluindo essa análise, podemos jogar (1.6) no computador para obter a solução numérica do problema. Novamente usando R e a IDE RStudio, o pseudocódigo abaixo mostra o procedimento para resolver o problema numericamente.

```
listaSoluções ← Lista()
i ← 0
for Δt em T do
  i ← i + 1
  soluçãoAntiga ← listaSoluções[i]
  for Δy em H do
    calcule novaVelocidade
  end for
  listaSoluções[i + 1] ← novaVelocidade
end for
return listaSoluções
```

O pseudocódigo acima está bastante simplificado, mas ele mostra a ideia principal: percorremos dois loops, um para o tempo e um para a posição vertical. Percorremos todos os intervalos verticais, calculando as velocidades, para cada intervalo de tempo. Ao final de cada loop do tempo, salva o novo vetor de velocidades calculado na lista de soluções. No final da execução, a lista de soluções tem  $T/\Delta t$  elementos, e cada elemento é um vetor de tamanho  $H/\Delta y$ .

O código completo desenvolvido em R, que implementa o pseudocódigo acima, pode ser visto no ANEXO A. A Figura 1.3 mostra a distribuição de velocidades obtida com o código do ANEXO A para  $\Delta t = 0.05$  s e  $\Delta y = 1$  cm.

Figura 1.3: Distribuição de velocidades obtida com a solução numérica.

Posição y (cm)	Velocidade (m/s)				
	0 s	0.25 s	0.5 s	0.75 s	1 s
0	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
1	0.00	0.46	0.59	0.66	0.70
2	0.00	0.14	0.28	0.37	0.44
3	0.00	0.03	0.10	0.18	0.25
4	0.00	0.00	0.03	0.08	0.12
5	0.00	0.00	0.01	0.03	0.05
6	0.00	0.00	0.00	0.01	0.02
7	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01
8	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
9	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
10	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Fonte: elaboração própria.

Note que os valores escolhidos de  $\Delta t$  e  $\Delta y$  atendem ao critério de estabilidade:

$$\frac{\mu}{\rho} \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2} = 0.1627 \leq 0.5$$

Os dados obtidos na Figura 1.3 são condizentes tanto com o esperado da geometria quanto do resultado analítico da Figura (1.2). Com o passar no tempo, as velocidades mais distantes da placa aumentam, e pontos muito distantes não sofrem efeito algum.

Em particular, na Figura 1.3, obtemos

$$u(3 \text{ cm}, 0.5 \text{ s}) = 0.10 \text{ m/s}$$

$$u(3 \text{ cm}, 1 \text{ s}) = 0.25 \text{ m/s}$$

através da solução numérica. O erro percentual com a solução analítica é dado por

$$E\% = \frac{V_{\text{numerico}} - V_{\text{analitico}}}{V_{\text{analitico}}} 100\% \quad (1.10)$$

Assim, para  $y = 3 \text{ cm}$  em  $t = 0.5 \text{ s}$  temos erro

$$E\% = \frac{0.10 - 0.096}{0.096} 100\% = 4.2\%$$

e para  $y = 3 \text{ cm}$  em  $t = 1 \text{ s}$ ,

$$E\% = \frac{0.25 - 0.24}{0.24} 100\% = 4.2\%$$

com ambos erros inferiores a 5% em relação ao resultado analítico. Assim, podemos concluir que o modelo numérico é satisfatório.

## 2 Segunda Questão (9 pts)

### 2.1 Análise Analítica

O escoamento de um fluido de viscosidade  $\mu$  e massa específica  $\rho$ , plenamente desenvolvido em regime permanente, em coordenadas cilíndricas, é modelado pela equação diferencial

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} + \frac{\mu}{\rho} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) = 0$$

note que podemos cancelar a massa específica  $\rho$ , obtendo

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) = \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu} \quad (2.1)$$

Com um gradiente de pressão constante, temos que a velocidade axial  $u$  é uma função de apenas uma variável  $r$ . Assim, temos as condições de contorno:

$$\begin{cases} u(0) = \text{simetria} & \Rightarrow \frac{du}{dr} = 0, \\ u(R) = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

onde  $R$  é o raio da tubulação por onde o fluido está escoando. Quando  $r = R$  estamos em contato com as paredes da tubulação, que naturalmente têm velocidade nula. A primeira condição de contorno (simetria) é consequência do sistema de coordenadas cilíndricas adotado.

Como (2.1) é uma EDO de primeira ordem, podemos tentar obter uma solução analítica por integração direta.

$$\int \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) dr = \int r \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu} dr$$

$$r \frac{du}{dr} = \frac{r^2}{2} \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu} + C_1$$

$$\int \frac{du}{dr} dr = \int \frac{r}{2} \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu} + \frac{C_1}{r} dr$$

$$u(r) = \frac{r^2}{4} \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu} + C_1 \ln(r) + C_2 \quad (2.3)$$

A equação (2.3) é a solução geral para a EDO (2.1). Para que ela atenda às condições de contorno de (2.2), de imediato temos  $C_1 = 0$ , pois o logaritmo natural não está definido para  $r = 0$ , sendo que fisicamente já sabemos que há uma velocidade no centro da tubulação. Assim, (2.3) se reduz a

$$u(r) = \frac{r^2}{4} \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu} + C_2$$

A constante  $C_2$  pode ser identificada usando a condição de contorno  $u(R) = 0$ :

$$0 = \frac{R^2}{4} \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu} + C_2$$

$$C_2 = -\frac{R^2}{4} \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu}$$

Assim, a solução analítica do problema é

$$u(r) = \frac{r^2}{4} \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu} - \frac{R^2}{4} \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu}$$

$$u(r) = \frac{1}{4} \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu} (r^2 - R^2) \quad (2.4)$$

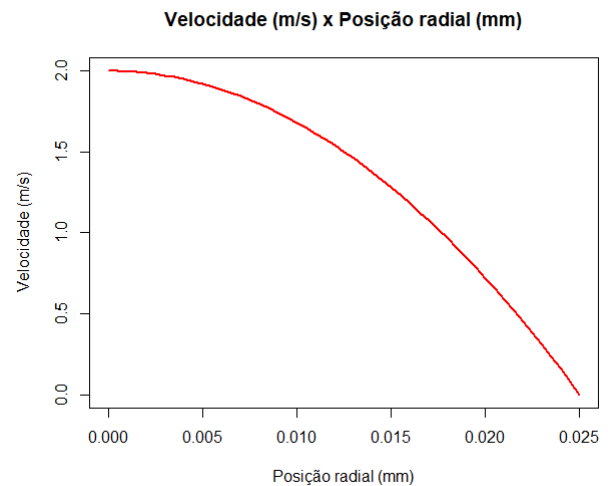
No problema temos os seguintes parâmetros:

- Raio do tubo:  $R = 25 \text{ mm}$
- Viscosidade:  $\mu = 1.01 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$
- Gradiente de pressão:  $\frac{dp}{dz} = -12.928 \text{ N/m}$
- Massa específica:  $\rho = 998 \text{ kg m}^{-3}$

Com esses parâmetros, a Figura 2.1 mostra o perfil de velocidade dentro da tubulação conforme a solução analítica em (2.4).

O perfil de velocidade da Figura 2.1 é con-  
dizente com o esperado fisicamente: a velocidade é máxima no centro do tubo, e zero nas paredes na tubulação, atendendo também às condições de contorno de (2.2). Além disso, igual visto durante as aulas da disciplina, temos um perfil parabólico para o escoamento plenamente desenvolvido na tubulação.

Figura 2.1: Solução analítica da questão 2.



Fonte: elaboração própria.

## 2.2 Análise Numérica

Concluída a análise analítica, podemos realizar uma análise numérica do problema. De modo semelhante ao feito na Questão 1, o primeiro passo é discretizar a equação diferencial (2.1) via diferenças finitas.