Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG
Curso de Graduação em Engenharia de Sistemas

EMA255 - Fluidos e Termodinâmica Computacional

Lista de Exercícios de Dinâmica dos Fluidos

Aluno: Raphael Henrique Braga Leivas

Matrícula: 2020028101

Belo Horizonte

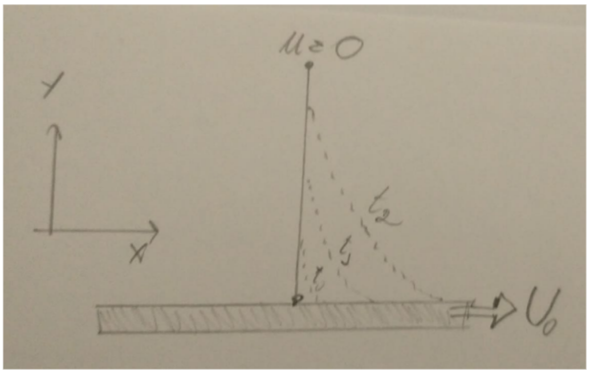
Semestre 2023/1

1 Primeira Questão (6 pts)

1.1 Análise Analítica

Um fluido de viscosidade μ e massa específica ρ está em repouso sobre uma placa horizontal quando ela começa a se mover com velocidade constante U_0. A Figura 1.1 exibe a geometria do problema.

Figura 1.1: Geometria da questão 1.



Fonte: elaboração própria.

Como mostra a Figura 1.1, a linha média do fluido começa a ser arrastada pelo movimento da placa, e a cada instante de tempo t_0, t_1 e t_2 o movimento da placa atinge pontos cada vez mais altos da linha média do fluido. Nesse cenário, a velocidade horizontal u do fluido é uma função de duas variáveis: posição vertical y e tempo t.

A equação diferencial que modela o problema é

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{1.1}$$

com as seguintes condições de contorno:

$$\begin{cases} u(0,t) = U_0, & \text{Condição de contorno 1} \\ u(H,t) = 0, & \text{Condição de contorno 2} \\ u(y,0) = 0, & \text{Condição inicial} \end{cases} \tag{1.2}$$

Veja que o problema é modelado por uma equação diferencial de segunda ordem em regime transiente, logo precisamos de duas condições de contorno e uma condição inicial.

No nosso sistema de coordenadas, $y = 0$ corresponde ao ponto do fluido em contato com a placa, e $y = H$ é a altura máxima que iremos considerar na análise. Note que, para H suficiente grande, faz sentido assumir que o movimento da placa não atinge esses pontos do fluido a uma grande distância da placa, de modo que $u(H,t) = 0$.

O problema dado por (1.1) e (1.2) possui solução analítica dada por

$$u(y,t) = U_0\left[1 - erf\left(\frac{y}{2\sqrt{\frac{\mu}{\rho}t}}\right)\right] \tag{1.3}$$

em que erf é a função erro dada por

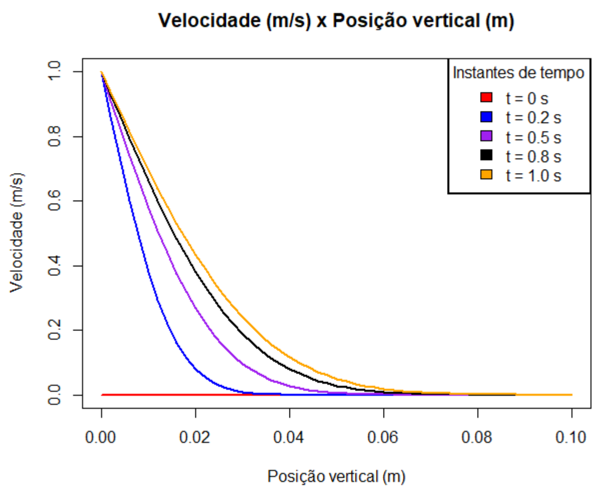
$$erf(\beta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\beta e^{-x^2}\,dx \tag{1.4}$$

Usando linguagem R e a IDE RStudio, é possível obter a distribuição de velocidades do fluido a partir da equação (1.3), uma vez que a função erro erf já está implementada em pacotes da linguagem. Usamos os seguintes parâmetros:

- Domínio de análise vertical: $H = 10$ cm
- Domínio de análise no tempo: $T = 1$ s
- Viscosidade: $\mu = 0.29\ \text{kg m}^{-1}\ \text{s}^{-1}$
- Massa específica: $\rho = 891\ \text{kg m}^{-3}$
- Velocidade da placa: $U_0 = 1$ m/s

A Figura 1.2 exibe os valores de $u(y,t)$ em função do tempo e posição vertical obtidos através da equação (1.3) com os parâmetros acima.

Figura 1.2: Velocidade u do fluido função da posição e tempo.



Fonte: elaboração própria.

As velocidades obtidas analiticamente na Figura 1.2 são condizentes com o analisado da geometria na Figura 1.1. Conforme o tempo passa, os pontos do fluido apresentam velocidade u cada vez maior, uma vez que são arrastados pelo movimento da placa. Os pontos em $y > 7\ \mathrm{cm}$ já não sofrem nenhum efeito do movimento da placa até $t = 1\ \mathrm{s}$.

Analisando os pontos específicos pedidos no exercício, temos

$$u(3\ \mathrm{cm}, 0.5\ \mathrm{s}) = 0.096\ \mathrm{m/s}$$
$$u(3\ \mathrm{cm}, 1\ \mathrm{s}) = 0.24\ \mathrm{m/s}$$

1.2 Análise Numérica

Uma vez entendido o que está acontecendo analiticamente, podemos fazer uma análise numérica do problema usando o método de diferenças finitas. O primeiro passo é discretizar a equação diferencial (1.1), trocando os diferenciais por diferenças.

$$\frac{u^{p+1} - u^p}{\Delta t} = \frac{\mu}{\rho}\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta y)^2} \tag{1.5}$$

Em (1.5) adotamos a seguinte simbologia:

- Sobrescrito p: indica o tempo da velocidade u. p indica o tempo atual, $p + 1$ o próximo tempo
- Subscrito i: indica a posição vertical da velocidade u. i indica a posição atual, $i + 1$ a próxima posição
- Δt: intervalo de discretização no tempo
- Δy: intervalo de discretização no espaço (vertical)

Assim, a linha média da Figura 1.1 é discretizada em $H/\Delta y$ elementos de comprimento Δy, e o tempo é transcorrido a partir de $t = 0$ até $t = T$ em intervalos de Δt. Vamos reescrever (1.5) de modo a expressar a velocidade futura em função da velocidade antiga.