

Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG
Curso de Graduação em Engenharia de Sistemas

EMA255 - Fluidos e Termodinâmica Computacional

Lista de Exercícios de Dinâmica dos Fluidos

Aluno: Raphael Henrique Braga Leivas

Matrícula: 2020028101

Belo Horizonte

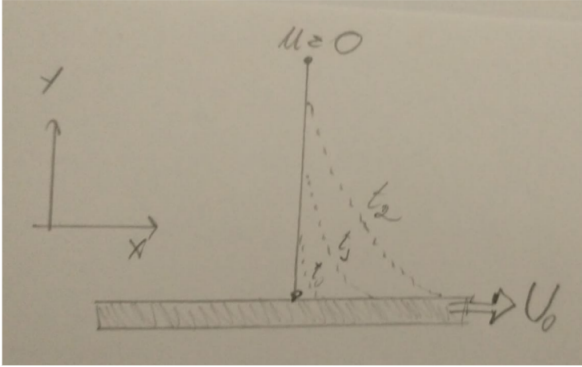
Semestre 2023/1

1 Primeira Questão (6 pts)

1.1 Análise Analítica

Um fluido de viscosidade μ e massa específica ρ está em repouso sobre uma placa horizontal quando ela começa a se mover com velocidade constante U_0 . A Figura 1.1 exibe a geometria do problema.

Figura 1.1: Geometria da questão 1.



Fonte: elaboração própria.

Como mostra a Figura 1.1, a linha média do fluido começa a ser arrastada pelo movimento da placa, e a cada instante de tempo t_0 , t_1 e t_2 o movimento da placa atinge pontos cada vez mais altos da linha média do fluido. Nesse cenário, a velocidade horizontal u do fluido é uma função de duas variáveis: posição vertical y e tempo t .

A equação diferencial que modela o problema é

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1.1)$$

com as seguintes condições de contorno:

$$\begin{cases} u(0, t) = U_0, & 0 \leq t \leq T & \text{Cond. contorno 1} \\ u(H, t) = 0, & 0 \leq t \leq T & \text{Cond. contorno 2} \\ u(y, 0) = 0, & 0 \leq y \leq H & \text{Cond. inicial} \end{cases} \quad (1.2)$$

Veja que o problema é modelado por uma equação diferencial de segunda ordem em regime transiente, logo precisamos de duas condições de contorno e uma condição inicial.

No nosso sistema de coordenadas, $y = 0$ corresponde ao ponto do fluido em contato com a placa, e $y = H$ é a altura máxima que iremos considerar na análise. Note que, para H suficiente grande, faz sentido assumir que o movimento da placa não atinge esses pontos do fluido

a uma grande distância da placa, de modo que $u(H, t) = 0$. O tempo total de análise é dado por T .

O problema dado por (1.1) e (1.2) possui solução analítica dada por

$$u(y, t) = U_0 \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{y}{2\sqrt{\frac{\mu}{\rho}t}} \right) \right] \quad (1.3)$$

em que erf é a função erro dada por

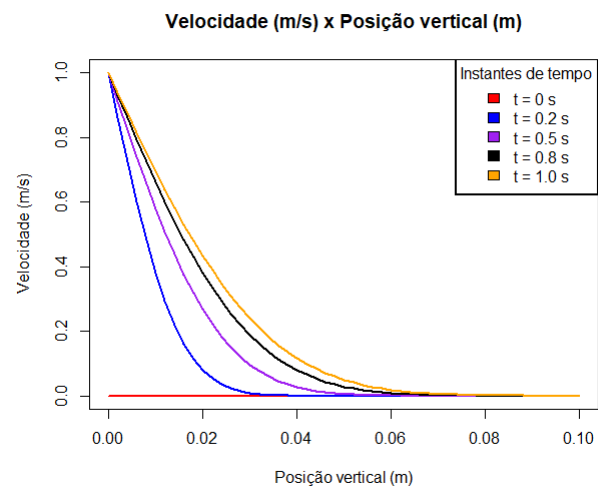
$$\operatorname{erf}(\beta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\beta e^{-x^2} dx \quad (1.4)$$

Usando linguagem R e a IDE RStudio, é possível obter a distribuição de velocidades do fluido a partir da equação (1.3), uma vez que a função erro erf já está implementada em pacotes da linguagem. Usamos os seguintes parâmetros:

- Domínio de análise vertical: $H = 10$ cm
- Domínio de análise no tempo: $T = 1$ s
- Viscosidade: $\mu = 0.29 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$
- Massa específica: $\rho = 891 \text{ kg m}^{-3}$
- Velocidade da placa: $U_0 = 1 \text{ m/s}$

A Figura 1.2 exibe os valores de $u(y, t)$ em função do tempo e posição vertical obtidos através da equação (1.3) com os parâmetros acima.

Figura 1.2: Velocidade u do fluido em função da posição e tempo.



Fonte: elaboração própria.

As velocidades obtidas analiticamente na Figura 1.2 são condizentes com o analisado da geometria na Figura 1.1. Conforme o tempo passa, os pontos do fluido apresentam velocidade u cada vez maior, uma vez que são arrastados pelo movimento da placa. Os pontos em $y > 7$ cm já não sofrem nenhum efeito do movimento da placa até $t = 1$ s.

Analisando os pontos específicos pedidos no exercício, temos

$$u(3 \text{ cm}, 0.5 \text{ s}) = 0.096 \text{ m/s}$$

$$u(3 \text{ cm}, 1 \text{ s}) = 0.24 \text{ m/s}$$

1.2 Análise Numérica

Uma vez entendido o que está acontecendo analiticamente, podemos fazer uma análise numérica do problema usando o método de diferenças finitas. O primeiro passo é discretizar a equação diferencial (1.1), trocando os diferenciais por diferenças.

$$\frac{u^{p+1} - u^p}{\Delta t} = \frac{\mu}{\rho} \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta y)^2} \quad (1.5)$$

Em (1.5) adotamos a seguinte simbologia:

- Sobrescrito p : indica o tempo da velocidade u . p indica o tempo atual, $p + 1$ o próximo tempo
- Subscrito i : indica a posição vertical da velocidade u . i indica a posição atual, $i + 1$ a próxima posição
- Δt : intervalo de discretização no tempo
- Δy : intervalo de discretização no espaço (vertical)

Assim, a linha média da Figura 1.1 é discretizada em $H/\Delta y$ elementos de comprimento Δy , e o tempo é transcorrido a partir de $t = 0$ até $t = T$ em intervalos de Δt . Vamos reescrever (1.5) de modo a expressar a velocidade futura em função da velocidade antiga.

$$u^{p+1} = u^p + \frac{\mu}{\rho} \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2} (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) \quad (1.6)$$

Em (1.6), usamos o método explícito ao aplicar as diferenças finitas. Portanto, é fundamental analisar os critérios de estabilidade para que a solução

converja. Em transferência de calor, vimos que a equação diferencial de condução unidimensional em regime transiente é

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (1.7)$$

onde α é a difusividade térmica do material. Nesse modelo, o critério de estabilidade é, segundo Incropera (2007),

$$\frac{\alpha \Delta t}{(\Delta y)^2} \leq \frac{1}{2} \quad (1.8)$$

Comparando as equações diferenciais (1.1) e (1.7), podemos ver que as constantes α e μ/ρ possuem o mesmo papel, apesar de uma ter um significado físico de transferência de calor e outra um significado de mecânica dos fluidos. Nesse sentido, podemos inferir que o critério de estabilidade de (1.6) é

$$\frac{\mu}{\rho} \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2} \leq \frac{1}{2} \quad (1.9)$$

Concluída essa análise, podemos jogar (1.6) no computador para obter a solução numérica do problema. Novamente usando R e a IDE RStudio, o pseudocódigo abaixo mostra o procedimento para resolver o problema numericamente.

```
listaSoluções ← Lista()
i ← 0
for Δt em T do
  i ← i + 1
  soluçãoAntiga ← listaSoluções[i]
  for Δy em H do
    calcule novaVelocidade
  end for
  listaSoluções[i + 1] ← novaVelocidade
end for
return listaSoluções
```

O pseudocódigo acima está bastante simplificado, mas ele mostra a ideia principal: percorremos dois loops, um para o tempo e um para a posição vertical. Percorremos todos os intervalos verticais, calculando as velocidades, para cada intervalo de tempo. Ao final de cada loop do tempo, salva o novo vetor de velocidades calculado na lista de soluções. No final da execução, a lista de soluções tem $T/\Delta t$ elementos, e cada elemento é um vetor de tamanho $H/\Delta y$.

O código completo desenvolvido em R, que implementa o pseudocódigo acima, pode ser visto

no ANEXO A. A Figura 1.3 mostra a distribuição de velocidades obtida com o código do ANEXO A para $\Delta t = 0.05$ s e $\Delta y = 1$ cm.

Figura 1.3: Distribuição de velocidades obtida com a solução numérica.

Posição y (cm)	Velocidade (m/s)				
	0 s	0.25 s	0.5 s	0.75 s	1 s
0	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
1	0.00	0.46	0.59	0.66	0.70
2	0.00	0.14	0.28	0.37	0.44
3	0.00	0.03	0.10	0.18	0.25
4	0.00	0.00	0.03	0.08	0.12
5	0.00	0.00	0.01	0.03	0.05
6	0.00	0.00	0.00	0.01	0.02
7	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01
8	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
9	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
10	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Fonte: elaboração própria.

Note que os valores escolhidos de Δt e Δy atendem ao critério de estabilidade:

$$\frac{\mu}{\rho} \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2} = 0.1627 \leq 0.5$$

A tabela da Figura 1.3 foi construída com o pacote `flextable` da linguagem, que formata a lista de soluções na forma de uma tabela.

Os dados obtidos na Figura 1.3 são condizentes tanto com o esperado da geometria quanto do resultado analítico da Figura (1.2). Com o passar no tempo, as velocidades mais distantes da placa aumentam, e pontos muito distantes não sofrem efeito algum.

Em particular, na Figura 1.3, obtemos

$$u(3 \text{ cm}, 0.5 \text{ s}) = 0.10 \text{ m/s}$$

$$u(3 \text{ cm}, 1 \text{ s}) = 0.25 \text{ m/s}$$

através da solução numérica. O erro percentual com a solução analítica é dado por

$$E\% = \frac{V_{\text{numerico}} - V_{\text{analitico}}}{V_{\text{analitico}}} 100\% \quad (1.10)$$

Assim, para $y = 3$ cm em $t = 0.5$ s temos erro

$$E\% = \frac{0.10 - 0.096}{0.096} 100\% = 4.2\%$$

e para $y = 3$ cm em $t = 1$ s,

$$E\% = \frac{0.25 - 0.24}{0.24} 100\% = 4.2\%$$

com ambos erros inferiores a 5% em relação ao resultado analítico. Assim, podemos concluir que o modelo numérico é satisfatório.

2 Segunda Questão (9 pts)

2.1 Análise Analítica

O escoamento de um fluido de viscosidade μ e massa específica ρ , plenamente desenvolvido em regime permanente, em coordenadas cilíndricas, é modelado pela equação diferencial

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} + \frac{\mu}{\rho} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = 0$$

note que podemos cancelar a massa específica ρ , obtendo

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu} \quad (2.1)$$

Com um gradiente de pressão constante, temos que a velocidade axial u é uma função de apenas uma variável r . Assim, temos as condições de contorno:

$$\begin{cases} u(0) = \text{simetria} & \Rightarrow \frac{du}{dr} = 0, \\ u(R) = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

onde R é o raio da tubulação por onde o fluido está escoando. Quando $r = R$ estamos em contato com as paredes da tubulação, que naturalmente têm velocidade nula. A primeira condição de contorno (simetria) é consequência do sistema de coordenadas cilíndricas adotado.

Como (2.1) é uma EDO de primeira ordem, podemos tentar obter uma solução analítica por integração direta.

$$\int \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) dr = \int r \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu} dr$$

$$r \frac{du}{dr} = \frac{r^2}{2} \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu} + C_1$$

$$\int \frac{du}{dr} dr = \int \frac{r}{2} \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu} + \frac{C_1}{r} dr$$

$$u(r) = \frac{r^2}{4} \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu} + C_1 \ln(r) + C_2 \quad (2.3)$$

A equação (2.3) é a solução geral para a EDO (2.1). Para que ela atenda às condições de contorno de (2.2), de imediato temos $C_1 = 0$, pois o logaritmo natural não está definido para $r = 0$, sendo que fisicamente já sabemos que há uma velocidade no centro da tubulação. Assim, (2.3) se reduz a

$$u(r) = \frac{r^2}{4} \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu} + C_2$$

A constante C_2 pode ser identificada usando a condição de contorno $u(R) = 0$:

$$0 = \frac{R^2}{4} \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu} + C_2$$

$$C_2 = -\frac{R^2}{4} \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu}$$

Assim, a solução analítica do problema é

$$u(r) = \frac{r^2}{4} \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu} - \frac{R^2}{4} \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu}$$

$$u(r) = \frac{1}{4} \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu} (r^2 - R^2) \quad (2.4)$$

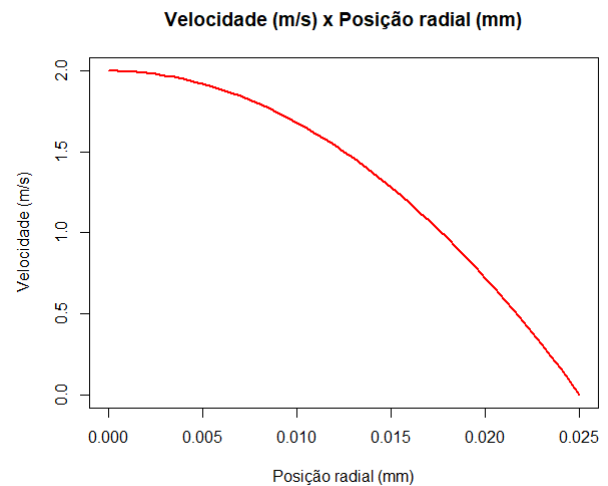
No problema temos os seguintes parâmetros:

- Raio do tubo: $R = 25 \text{ mm}$
- Viscosidade: $\mu = 1.01 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$
- Gradiente de pressão: $\frac{dp}{dz} = -12.928 \text{ N/m}$
- Massa específica: $\rho = 998 \text{ kg m}^{-3}$

Com esses parâmetros, a Figura 2.1 mostra o perfil de velocidade dentro da tubulação conforme a solução analítica em (2.4).

O perfil de velocidade da Figura 2.1 é consistente com o esperado fisicamente: a velocidade é máxima no centro do tubo, e zero nas paredes na tubulação, atendendo também às condições de contorno de (2.2). Além disso, igual visto durante as aulas da disciplina, temos um perfil parabólico para o escoamento plenamente desenvolvido na tubulação.

Figura 2.1: Solução analítica da questão 2.



Fonte: elaboração própria.

2.2 Análise Numérica

Concluída a análise analítica, podemos realizar uma análise numérica do problema. De modo semelhante ao feito na Questão 1, o primeiro passo é discretizar a equação diferencial (2.1) via diferenças finitas.

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = r \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu}$$

aplicando a regra do produto no primeiro membro da equação,

$$\frac{du}{dr} + r \frac{d^2u}{dr^2} = r \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu}$$

agora substituímos os diferenciais por diferenças finitas:

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta r} + r \left(\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta r)^2} \right) = r \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu}$$

$$u_{i+1} - u_i + r \left(\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta r} \right) = (\Delta r) r \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu}$$

agrupando as velocidades,

$$u_{i+1} \left(1 + \frac{r}{\Delta r} \right) + u_i \left(-1 - 2\frac{r}{\Delta r} \right) + u_{i-1} \left(\frac{1}{\Delta r} \right) = (\Delta r) r \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu} \quad (2.5)$$

Note que (2.5) é a forma implícita de diferenças finitas para os nós internos do domínio. Os

termos ligados às velocidades são os coeficientes do sistema linear, e o segundo membro de (2.5) tem os coeficientes independentes do sistema linear.

Antes de tentar montar o sistema linear em software, precisamos identificar as equações dos nós do contorno da geometria. Na parede, temos condição de contorno $u(R) = 0$, logo a equação para $i = R$ é

$$u_i = 0 \quad (2.6)$$

Além disso, na linha de centro temos simetria, dada matematicamente por

$$\frac{du}{dr} = 0$$

Durante a análise analítica, vimos que

$$\frac{du}{dr} = \frac{r}{2} \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu} + \frac{C_1}{r}$$

com $C_1 = 0$,

$$\frac{du}{dr} = \frac{r}{2} \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu}$$

Discretizando a expressão acima, e usando $r = \Delta r/2$ para analisarmos o que está acontecendo no nó central, temos

$$\begin{aligned} \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta r} &= \frac{\Delta r/2}{2} \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu} \\ u_{i+1} - u_i &= \frac{(\Delta r)^2}{4} \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Assim, quando estivermos percorrendo cada Δr no domínio, identificamos se ele é um nó interno, nó central ou nó em contato com as paredes. Em seguida usamos a seguinte metodologia:

- Se estamos em um nó interno, calcula os coeficientes através de (2.5)
- Se estamos na parede, calcula os coeficientes através de (2.6)
- Se estamos no nó central, calcula os coeficientes através de (2.7)

Uma vez calculados todos os coeficientes, teremos uma matriz de coeficientes A de dimensão $N \times N$, onde $N = R/\Delta y$, e um vetor de coeficientes independentes B de dimensão $N \times 1$. O vetor solução X , que contém as velocidades u de cada nó, tem dimensão $N \times 1$ e é calculado através da equação matricial

$$X = A^{-1}B \quad (2.8)$$

O pseudocódigo abaixo mostra a ideia principal do software desenvolvido em R que implementa essa solução numérica. O software completo pode ser visto no ANEXO B.

```

N ← R/Δy
A ← Matriz(N × N)
B ← Vetor(N × 1)
i ← 0
for cada Δy em R do
  if Δy atual é nó interno then
    A[linha i] ← equação (2.5)
    B[i] ← equação (2.5)
  end if
  if Δy atual é parede then
    A[linha i] ← equação (2.6)
    B[i] ← equação (2.6)
  end if
  if Δy atual é nó central then
    A[linha i] ← equação (2.7)
    B[i] ← equação (2.7)
  end if
  i ← i + 1
end for
X ← inversa(A) * B
return X

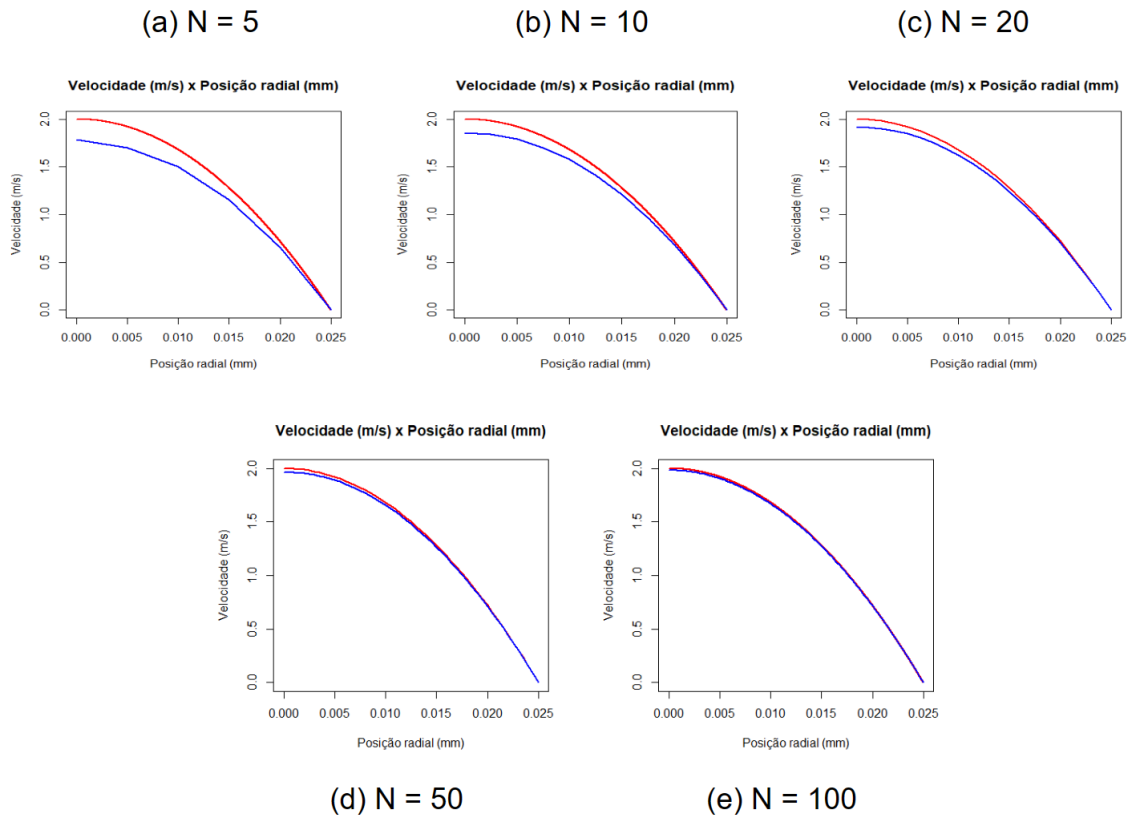
```

Ao contrário do problema 1, temos apenas um loop no código. Não temos marcha no tempo uma vez que o regime de escoamento é permanente. Nesse caso, basta percorrer cada intervalo Δy em R , identificar a natureza nesse nó, calcular os coeficientes, jogar nas matrizes A e B e resolver a equação matricial.

A Figura 2.2 mostra uma comparação entre os valores numéricos obtidos no código com a solução analítica da Figura 2.1 para diversas malhas.

Na Figura 2.2 (a) temos apenas 5 nós, e a solução obtida está longe da analítica. Além disso, é possível ver as retas das diferenças finitas na curva azul, uma vez que N é baixo, e assim não temos uma curva suave como a analítica. Conforme N aumenta nas Figuras 2.2 (b), (c) e (d), a solução numérica vai se aproximando da analítica, ficando cada vez mais suave, até ficar praticamente idêntica à analítica para $N = 100$.

Com base nos gráficos da Figura 2.2, temos que modelo numérico desenvolvido é satisfatório para $N \geq 50$. Note que usamos o método implícito, e portanto não precisamos nos preocupar com critérios de estabilidade como na Problema 1. Nesse sentido,

Figura 2.2: Solução numérica (azul) e solução analítica (vermelha) para vários valores de N .

Fonte: elaboração própria.

não temos restrições teóricas para o valor máximo de N . Contudo, o uso de N muito elevando aumenta o custo computacional do software, principalmente da matriz de coeficientes que possui N^2 elementos. Assim, não é necessário, com base nos dados obtidos, usar N muito maior que 100 para esse modelo.

3 Terceira Questão (9 pts)

3.1 Análise Analítica

Para modelar o problema dado, temos que partir das equações de Navier-Stokes e da equação de conservação da massa. Assumindo escoamento incompressível (massa específica constante), temos

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (3.1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (3.2)$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (3.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.4)$$

As equações (3.1), (3.2) e (3.3) são as três equações de Navier-Stokes, e a equação (3.4) é a equação de conservação da massa.

Com base nos dados do problema, podemos fazer várias simplificações nas equações acima:

- Escoamento unidimensional apenas na direção x : $v = w = 0$

- Escoamento em regime permanente: $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$

- Gravidade atua apenas na componente y : $g_x = g_z = 0$
- Escoamento plenamente desenvolvido: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$
- Na geometria analisada, o sistema de coordenadas possui apenas eixos x e y : $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$

Com todas essas simplificações, as equações acima se reduzem a

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{dp}{dx} = 0 \quad (3.5)$$

em que u é função de apenas uma variável y . Assim, temos as seguintes condições de contorno para (3.5):

$$\begin{cases} u(-h) = 0, \\ u(h) = U \end{cases} \quad (3.6)$$

De modo semelhante ao feito na Questão 3, podemos tentar obter uma solução analítica para o modelo através de integração direta, assumindo que o gradiente de pressão na direção do escoamento $\frac{dp}{dx}$ é constante.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{dp}{dx} \frac{1}{\mu}$$

$$\int \frac{\partial u}{\partial y} dy = \int y \frac{dp}{dx} \frac{1}{\mu} + C_1 dy$$

$$u(y) = \frac{y^2}{2} \frac{dp}{dx} \frac{1}{\mu} + yC_1 + C_2 \quad (3.7)$$

(3.7) é a solução geral da EDP (3.5). Com as condições de contorno, temos

$$\begin{cases} 0 = \frac{(-h)^2}{2} \frac{dp}{dx} \frac{1}{\mu} - hC_1 + C_2, \\ U = \frac{h^2}{2} \frac{dp}{dx} \frac{1}{\mu} + hC_1 + C_2 \end{cases}$$

somando as duas equações, temos

$$U = h^2 \frac{dp}{dx} \frac{1}{\mu} + 2C_2$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \left(U - h^2 \frac{dp}{dx} \frac{1}{\mu} \right)$$

Agora substituímos esse C_2 calculado de volta, para achar o C_1 :

$$0 = \frac{h^2}{2} \frac{dp}{dx} \frac{1}{\mu} - hC_1 + \frac{1}{2} \left(U - h^2 \frac{dp}{dx} \frac{1}{\mu} \right)$$

$$0 = \frac{h^2}{2} \frac{dp}{dx} \frac{1}{\mu} - hC_1 + \frac{1}{2}U - \frac{1}{2}h^2 \frac{dp}{dx} \frac{1}{\mu}$$

$$-\frac{1}{2}U = -hC_1 \Rightarrow C_1 = \frac{U}{2h}$$

Finalmente, a solução analítica de (3.5) com as condições de contorno de (3.6) é

$$u(y) = \frac{y^2}{2} \frac{dp}{dx} \frac{1}{\mu} + y \frac{U}{2h} + \frac{1}{2} \left(U - h^2 \frac{dp}{dx} \frac{1}{\mu} \right)$$

$$u(y) = \frac{y^2}{2} \frac{dp}{dx} \frac{1}{\mu} + y \frac{U}{2h} + \frac{1}{2}U - \frac{1}{2}h^2 \frac{dp}{dx} \frac{1}{\mu}$$

$$\frac{u(y)}{U} = \frac{y^2}{2U} \frac{dp}{dx} \frac{1}{\mu} + \frac{y}{2h} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2U}h^2 \frac{dp}{dx} \frac{1}{\mu}$$

$$\frac{u(y)}{U} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{y}{h} \right) - \frac{dp}{dx} \frac{h^2}{2\mu U} \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right)$$

definimos P tal que

$$P = -\frac{dp}{dx} \frac{h^2}{2\mu U}$$

e assim podemos reescrever a expressão como

$$\frac{u(y)}{U} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{y}{h} \right) + P \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right) \quad (3.8)$$

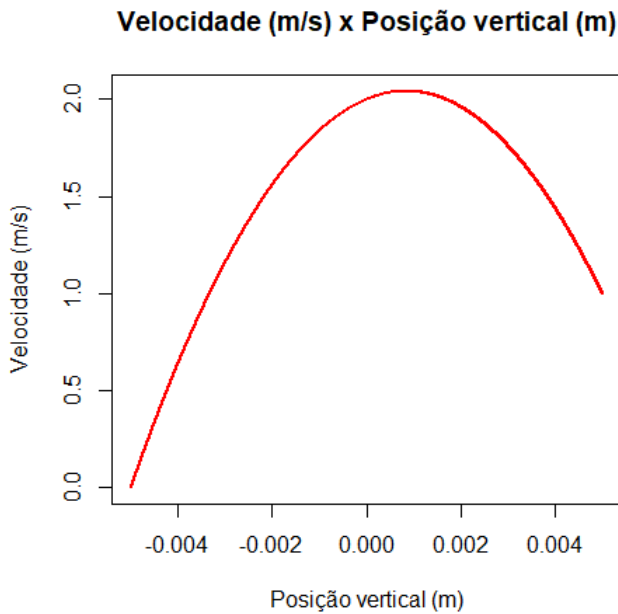
Usamos os seguintes parâmetros:

- Domínio de análise vertical: $-h \leq y \leq h$, com $h = 5 \text{ mm}$
- Viscosidade: $\mu = 1.49 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$
- Velocidade de deslocamento da placa superior: $U = 1 \text{ m/s}$
- Gradiente de pressão: $\frac{dp}{dx} = -178800 \text{ Pa}$

Com (3.8) e os parâmetros, podemos obter a distribuição de velocidades do fluido analiticamente. A Figura (3.1) exibe a solução obtida.

Na Figura (3.1) temos um perfil parabólico para um escoamento plenamente desenvolvido, conforme visto nas aulas da disciplina. Note que a velocidade máxima está quase no centro, deslocada devido ao movimento da placa superior.

Figura 3.1: Solução analítica da questão 3.



Fonte: elaboração própria.

3.2 Análise Numérica

Vamos discretizar (3.5) com o método das diferenças finitas. Note que usamos o diferencial de pressão como constante, logo ele não precisa ser discretizado. Além disso, como o regime é permanente, usamos o método implícito.

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta y)^2} = \frac{dp}{dx}$$

$$u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} = (\Delta y)^2 \frac{dp}{dx} \quad (3.9)$$

A equação (3.9) é a equação para todos os nós internos no domínio. Nos contornos, de modo bem parecido como feito no Problema 2, temos, para $i = -h$,

$$u_i = 0 \quad (3.10)$$

que corresponde ao ponto de contato do fluido com a placa inferior, em repouso. Similarmente, quando $i = h$, temos

$$u_i = U \quad (3.11)$$

que corresponde ao ponto de contato do fluido com a placa superior, com velocidade igual a U .

O algoritmo usado na solução é precisamente o mesmo da questão 2, apenas trocando as equações e os parâmetros físicos. Continuamos percorrendo

cada Δy , identificando se ele é um nó interno, borda inferior ou de borda superior, e salvando os coeficientes nas matrizes. No final, resolvemos o sistema linear e obtemos o vetor solução.

O código completo feito em R nessa questão está disponível no ANEXO C. Repare que sua estrutura é a mesma que o código no ANEXO B. A Figura 3.2 exibe uma comparação entre as curvas obtidas analiticamente e numericamente para vários valores de N , onde $N = 2h/\Delta y$.

De modo bastante semelhante ao visto no Problema 2, na Figura 3.2 (a) vemos que o baixo de valor N resulta em um modelo de baixa exatidão, com o baixo número de pontos discretizados tornando as aproximações lineares insuficientes para modelar a solução analítica, que é quadrática.

Conforme o valor de N aumenta, temos que as aproximações ficam cada vez melhores, e a partir $N \geq 10$ o modelo numérico já está bastante parecido com a solução analítica, como mostram as Figuras 3.2 (c) e (d).

4 Quarta Questão (9 pts)

4.1 Análise Analítica

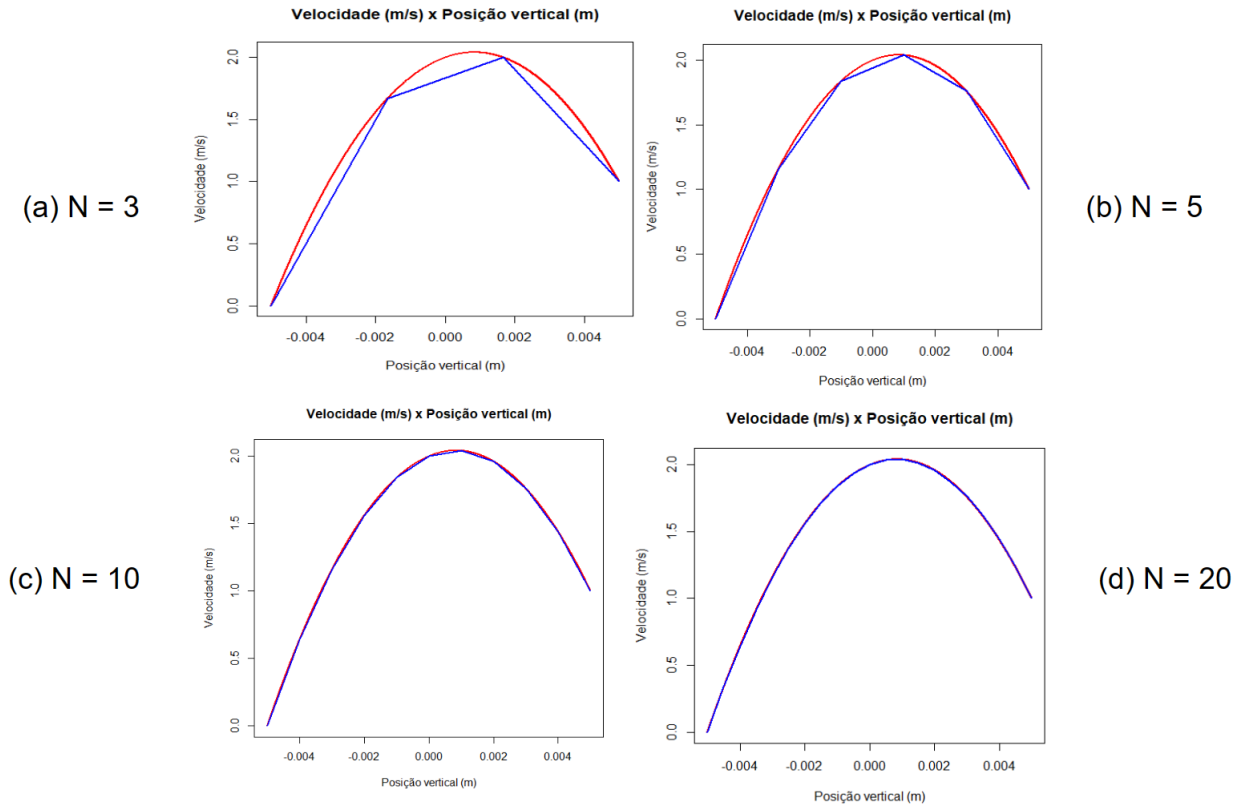
De modo parecido à modelagem do Problema 3, temos que partir das equações de Navier-Stokes e da equação de conservação da massa, assumindo escoamento incompressível. Podemos fazer as seguintes simplificações:

- Estamos modelando a geometria apenas em duas dimensões x e y : $w = 0$ e derivadas em relação a z nulas.
- Gravidade atua apenas na componente y : $g_x = g_z = 0$
- Regime permanente: derivadas em relação a t nulas $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$

Com essas simplificações, temos três equações que modelam o problema

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (4.1)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (4.2)$$

Figura 3.2: Solução numérica (azul) e solução analítica (vermelha) para vários valores de N .

Fonte: elaboração própria.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.3)$$

Conforme as equações (4.1), (4.2) e (4.3), temos que as velocidades horizontal u e vertical v são funções de duas variáveis: x e y . A injeção de ar pela face sul é de baixo para cima, logo temos efeito da gravidade no fluido, representada pelo termo ρg_y em (4.2).

Os gradientes de pressão na direção x e y não foram informados no enunciado do problema, mas podemos assumir que existem gradientes causando os movimentos do fluido em ambas direções x e y . Nessa interpretação, usamos a analogia que gradientes de pressão causam movimento de fluidos da mesma forma que gradientes de potencial elétrico (tensão) geram fluxo de corrente elétrica.

Uma vez identificado as equações diferenciais que modelam o problema, temos que determinar as condições de contorno. Na face oeste, temos

$$\begin{cases} u(0, y) = 0.06 \text{ m/s}, & 0 \leq y \leq 1 \text{ cm} \\ v(0, y) = 0.06 \text{ m/s}, & 0 \leq y \leq 1 \text{ cm} \end{cases} \quad (4.4)$$

Na face leste temos saída, que significa escoamento plenamente desenvolvido, ou seja, derivadas espaciais nulas.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0, & x = 20 \text{ cm}, 0 \leq y \leq 1 \text{ cm} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0, & x = 20 \text{ cm}, 0 \leq y \leq 1 \text{ cm} \end{cases} \quad (4.5)$$

Na face sul temos uma região da parede que é fixa, e outra que é porosa com injeção de ar. Assim, temos

$$\begin{cases} u(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq 20 \text{ cm} \\ v(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq 10 \text{ cm} \\ v(x, 0) = 0.02 \text{ m/s}, & 10 \leq x \leq 20 \text{ cm} \end{cases} \quad (4.6)$$

Na face norte temos condições de contorno simétricas à face sul

$$\begin{cases} u(x, 1 \text{ cm}) = 0, & 0 \leq x \leq 20 \text{ cm} \\ v(x, 1 \text{ cm}) = 0, & 0 \leq x \leq 10 \text{ cm} \\ v(x, 1 \text{ cm}) = 0.02 \text{ m/s}, & 10 \leq x \leq 20 \text{ cm} \end{cases} \quad (4.7)$$

Finalmente, o problema é modelado matematicamente pelas equações diferenciais parciais (4.1), (4.2) e (4.3), com as condições de contorno especificadas em (4.4), (4.5), (4.6) e (4.7).

4.2 Análise Numérica

Ao contrário dos Problemas 1, 2 e 3, discretizar as equações diferenciais (4.1), (4.2) e (4.3) e desenvolver um programa para analisar numericamente seria bastante trabalhoso. Assim, usamos o software gratuito CFD Studio para obter a distribuição de velocidades.

As configurações usadas no software foram as seguintes:

- Tipo de malha utilizado: malha cartesiana, como 10 divisões na vertical e 20 na horizontal
- Esquema de interpolação:
- Algoritmo de acoplamento pressão velocidade (P-V):
- Coeficiente de sub-relaxação da pressão:
- Pressão de referência
- Local de imposição de pressão de referência
- Número de iterações necessárias até convergir
- Solver utilizado