

Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG  
Curso de Graduação em Engenharia de Sistemas

EMA255 - Fluidos e Termodinâmica Computacional

Lista de Exercícios de Dinâmica dos Fluidos

**Aluno: Raphael Henrique Braga Leivas**

Matrícula: 2020028101

Belo Horizonte

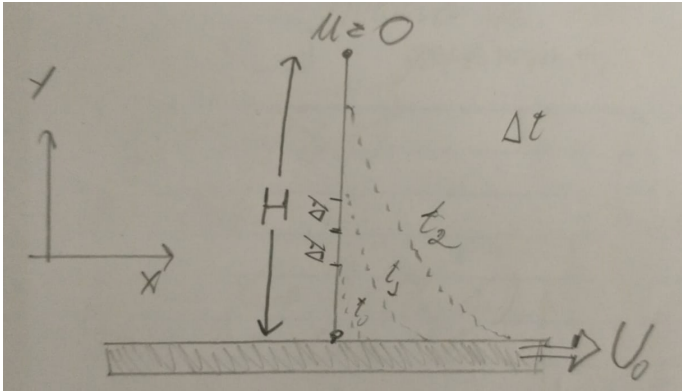
Semestre 2023/1

# 1 Primeira Questão (6 pts)

## 1.1 Análise Analítica

Um fluido de viscosidade  $\mu$  e massa específica  $\rho$  está em repouso sobre uma placa horizontal quando ela começa a se mover com velocidade constante  $U_0$ . A Figura 1.1 exibe a geometria do problema.

Figura 1.1: Geometria da questão 1.



Fonte: elaboração própria.

Como mostra a Figura 1.1, a linha média do fluido começa a ser arrastada pelo movimento da placa, e a cada instante de tempo  $t_0$ ,  $t_1$  e  $t_2$  o movimento da placa atinge pontos cada vez mais altos da linha média do fluido. Nesse cenário, a velocidade horizontal  $u$  do fluido é uma função de duas variáveis: posição vertical  $y$  e tempo  $t$ .

A equação diferencial que modela o problema é

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1.1)$$

com as seguintes condições de contorno:

$$\begin{cases} u(0, t) = U_0, & 0 \leq t \leq T & \text{Cond. contorno 1} \\ u(H, t) = 0, & 0 \leq t \leq T & \text{Cond. contorno 2} \\ u(y, 0) = 0, & 0 < y \leq H & \text{Cond. inicial} \end{cases} \quad (1.2)$$

Veja que o problema é modelado por uma equação diferencial de segunda ordem em regime transiente, logo precisamos de duas condições de contorno e uma condição inicial. Estamos analisando apenas o que acontece com a linha média, logo temos apenas uma dimensão de análise  $y$ .

No nosso sistema de coordenadas,  $y = 0$  corresponde ao ponto do fluido em contato com a placa, e  $y = H$  é a altura máxima que iremos considerar na análise. Note que, para  $H$  su-

ficiente grande, faz sentido assumir que o movimento da placa não atinge esses pontos do fluido a uma grande distância da placa, de modo que  $u(H, t) = 0$ . O tempo total de análise é dado por  $T$ .

O problema modelado por (1.1) e (1.2) possui solução analítica dada por

$$u(y, t) = U_0 \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{y}{2\sqrt{\frac{\mu}{\rho}t}} \right) \right] \quad (1.3)$$

em que  $\operatorname{erf}$  é a função erro definida como

$$\operatorname{erf}(\beta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\beta e^{-x^2} dx \quad (1.4)$$

Usando linguagem R e a IDE RStudio, é possível obter a distribuição de velocidades do fluido a partir da equação (1.3), uma vez que a função erro  $\operatorname{erf}$  já está implementada em pacotes da linguagem. Usamos os seguintes parâmetros:

- Domínio de análise vertical:  $H = 10$  cm
- Domínio de análise no tempo:  $T = 1$  s
- Viscosidade:  $\mu = 0.29$  kg m<sup>-1</sup> s<sup>-1</sup>
- Massa específica:  $\rho = 891$  kg m<sup>-3</sup>
- Velocidade da placa:  $U_0 = 1$  m/s

A Figura 1.2 exibe os valores de  $u(y, t)$  em função do tempo e posição vertical obtidos através da equação (1.3) com os parâmetros acima.

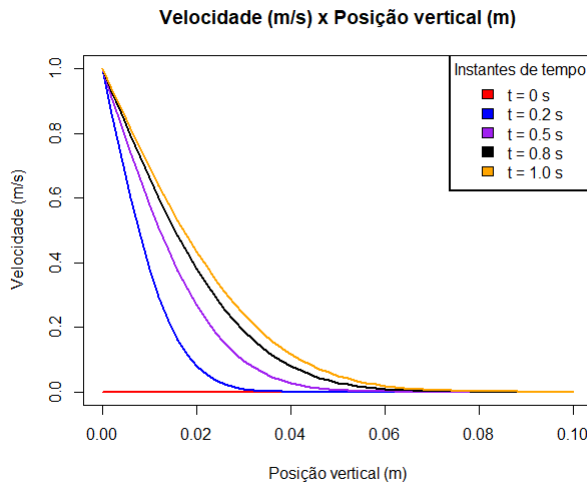
As velocidades obtidas analiticamente na Figura 1.2 são condizentes com o analisado da geometria na Figura 1.1. Conforme o tempo passa, os pontos do fluido apresentam velocidade  $u$  cada vez maior, uma vez que são arrastados pelo movimento da placa. Os pontos em  $y > 7$  cm já não sofrem nenhum efeito do movimento da placa até  $t = 1$  s.

Analisando os pontos específicos pedidos no exercício, temos

$$u(3 \text{ cm}, 0.5 \text{ s}) = 0.0963 \text{ m/s}$$

$$u(3 \text{ cm}, 1 \text{ s}) = 0.2396 \text{ m/s}$$

Figura 1.2: Velocidade  $u$  do fluido em função da posição e tempo.



Fonte: elaboração própria.

## 1.2 Análise Numérica

Uma vez entendido o que está acontecendo analiticamente, podemos fazer uma análise numérica do problema usando o método de diferenças finitas. O primeiro passo é discretizar a equação diferencial (1.1), trocando os diferenciais por diferenças.

$$\frac{u^{p+1} - u^p}{\Delta t} = \frac{\mu}{\rho} \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta y)^2} \quad (1.5)$$

Em (1.5) adotamos a seguinte simbologia:

- Sobrescrito  $p$ : indica o tempo da velocidade  $u$ .  $p$  indica o tempo atual,  $p + 1$  o próximo tempo
- Subscrito  $i$ : indica a posição vertical da velocidade  $u$ .  $i$  indica a posição atual,  $i + 1$  a próxima posição
- $\Delta t$ : intervalo de discretização no tempo
- $\Delta y$ : intervalo de discretização no espaço (vertical)

Assim, a linha média da Figura 1.1 é discretizada em  $H/\Delta y$  elementos de comprimento  $\Delta y$ , e o tempo é transcorrido a partir de  $t = 0$  até  $t = T$  em intervalos de  $\Delta t$ . Vamos reescrever (1.5) de modo a expressar a velocidade futura em função da velocidade antiga.

$$u^{p+1} = u^p + \frac{\mu}{\rho} \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2} (u_{i+1}^p - 2u_i^p + u_{i-1}^p) \quad (1.6)$$

Em (1.6), usamos o método explícito ao aplicar as diferenças finitas. Portanto, é fundamental analisar os critérios de estabilidade para que a solução converja. Em transferência de calor, vimos que a equação diferencial de condução unidimensional em regime transiente é

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (1.7)$$

onde  $\alpha$  é a difusividade térmica do material. Nesse modelo, o critério de estabilidade é, segundo Incropera (2007),

$$\frac{\alpha \Delta t}{(\Delta y)^2} \leq \frac{1}{2} \quad (1.8)$$

Comparando as equações diferenciais (1.1) e (1.7), podemos ver que as constantes  $\alpha$  e  $\mu/\rho$  possuem o mesmo papel, apesar de uma ter um significado físico de transferência de calor e outra um significado de mecânica dos fluidos. Nesse sentido, podemos inferir que o critério de estabilidade de (1.6) é

$$\frac{\mu}{\rho} \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2} \leq \frac{1}{2} \quad (1.9)$$

Concluída essa análise, podemos jogar (1.6) no computador para obter a solução numérica do problema. Novamente usando R e a IDE RStudio, o pseudocódigo abaixo mostra o procedimento para resolver o problema numericamente.

```
listaSoluções ← Lista()
i ← 0
for Δt em T do
  soluçãoAntiga ← listaSoluções[i]
  for Δy em H do
    calcule novasVelocidades
  end for
  i ← i + 1
  listaSoluções[i] ← novasVelocidades
end for
return listaSoluções
```

O pseudocódigo acima está bastante simplificado, mas ele mostra a ideia principal: percorremos dois loops, um para o tempo e um para a posição vertical. Percorremos todos os intervalos verticais, calculando a velocidade em cada nó, para cada intervalo de tempo. Ao final de cada loop do tempo, salva o novo vetor de velocidades calculado na lista de soluções. No final da execução, a lista de soluções tem  $T/\Delta t$  elementos, e cada elemento é um vetor de tamanho  $H/\Delta y$ .

O código completo desenvolvido em R, que implementa o pseudocódigo acima, pode ser visto no ANEXO A. A Figura 1.3 mostra a distribuição de velocidades obtida com o código do ANEXO A para  $\Delta t = 0.05$  s e  $\Delta y = 1$  cm.

Figura 1.3: Distribuição de velocidades obtida com a solução numérica.

| Posição<br>y (cm) | Velocidade (m/s) |        |       |        |      |
|-------------------|------------------|--------|-------|--------|------|
|                   | 0 s              | 0.25 s | 0.5 s | 0.75 s | 1 s  |
| 0                 | 1.00             | 1.00   | 1.00  | 1.00   | 1.00 |
| 1                 | 0.00             | 0.46   | 0.59  | 0.66   | 0.70 |
| 2                 | 0.00             | 0.14   | 0.28  | 0.37   | 0.44 |
| 3                 | 0.00             | 0.03   | 0.10  | 0.18   | 0.25 |
| 4                 | 0.00             | 0.00   | 0.03  | 0.08   | 0.12 |
| 5                 | 0.00             | 0.00   | 0.01  | 0.03   | 0.05 |
| 6                 | 0.00             | 0.00   | 0.00  | 0.01   | 0.02 |
| 7                 | 0.00             | 0.00   | 0.00  | 0.00   | 0.01 |
| 8                 | 0.00             | 0.00   | 0.00  | 0.00   | 0.00 |
| 9                 | 0.00             | 0.00   | 0.00  | 0.00   | 0.00 |
| 10                | 0.00             | 0.00   | 0.00  | 0.00   | 0.00 |

Fonte: elaboração própria.

Note que os valores escolhidos de  $\Delta t$  e  $\Delta y$  atendem ao critério de estabilidade:

$$\frac{\mu}{\rho} \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2} = 0.1627 \leq 0.5$$

A tabela da Figura 1.3 foi construída com o pacote `flectable` da linguagem, que formata a lista de soluções na forma de uma tabela.

Os dados obtidos na Figura 1.3 são condizentes tanto com o esperado da geometria quanto com o resultado analítico da Figura (1.2). Com o passar no tempo, as velocidades mais distantes da placa aumentam, e pontos muito distantes não sofrem efeito algum.

Em particular, na Figura 1.3, obtemos

$$u(3 \text{ cm}, 0.5 \text{ s}) = 0.1049 \text{ m/s}$$

$$u(3 \text{ cm}, 1 \text{ s}) = 0.2455 \text{ m/s}$$

através da solução numérica. É importante destacar que na Figura 1.3 os valores foram arredondados para a segunda casa decimal para facilitar a leitura. O erro percentual com a solução analítica é dado por

$$E\% = \frac{V_{\text{numerico}} - V_{\text{analitico}}}{V_{\text{analitico}}} 100\% \quad (1.10)$$

Assim, para  $y = 3$  cm em  $t = 0.5$  s temos erro

$$E\% = \frac{0.1049 - 0.0963}{0.0963} 100\% = 8.9\%$$

e para  $y = 3$  cm em  $t = 1$  s,

$$E\% = \frac{0.2455 - 0.2396}{0.2396} 100\% = 2.5\%$$

com ambos erros inferiores a 10% em relação ao resultado analítico. Podemos recalculer esses valores para diferentes malhas, isto é, para diferentes valores de  $\Delta t$  e  $\Delta y$ . No software, basta alterar as variáveis no início do código e refazer a simulação. A Figura 1.4 mostra o resultado desse teste de malhas.

Figura 1.4: Erros percentuais com a solução analítica para diferentes malhas.

| $\Delta t$ (s) | $\Delta y$ (cm) | $\frac{\mu}{\rho} \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2}$ | Erro (%)<br>$u(3 \text{ cm}, 0.5 \text{ s})$ | Erro (%)<br>$u(0.3 \text{ cm}, 1.0 \text{ s})$ |
|----------------|-----------------|--|--|--|
| 0.05           | 1               | 0.167  | 8.9  | 2.5  |
| 0.1            | 1               | 0.325  | 10.8   | 4.5  |
| 0.1            | 0.5             | 1.301  | -98.96                                       | 314340   |
| 0.5            | 0.5             | 0.6509   | 705.81                                       | 32333.2  |
| 0.25           | 0.5             | 0.325  | 2.54   | 1.12   |
| 0.05           | 0.25            | 0.260  | 0.622  | 0.2921   |

Fonte: elaboração própria.

Na Figura 1.4, os erros percentuais nas duas últimas colunas foram calculados com (1.10). A terceira coluna se refere ao critério de estabilidade da inequação (1.9). É interessante ver, nas linhas 3 e 4 da tabela, que quando esse valor ultrapassa 0.5 a solução diverge, apresentando erros percentuais muito grandes.

Por outro lado, como mostram as duas últimas linhas da tabela, o refinamento da malha (de modo que a estabilidade continue menor que 0.5) resultou em uma grande redução dos erros em relação à solução analítica, obtendo erros inferiores a 1% na última linha. Por fim, o melhor resultado obtido com o modelo numérico, como mostra a última linha da tabela, foi com  $\Delta y = 25$  mm e  $\Delta t = 50$  ms, obtendo

$$u(3 \text{ cm}, 0.5 \text{ s}) = 0.0969 \text{ m/s}$$

$$u(3 \text{ cm}, 1 \text{ s}) = 0.2403 \text{ m/s}$$

## 2 Segunda Questão (9 pts)

### 2.1 Análise Analítica

O escoamento de um fluido de viscosidade  $\mu$  e massa específica  $\rho$ , plenamente desenvolvido em regime permanente, em coordenadas cilíndricas, é modelado pela equação diferencial

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} + \frac{\mu}{\rho} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) = 0$$

note que podemos cancelar a massa específica  $\rho$ , obtendo

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) = \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu} \quad (2.1)$$

Com um gradiente de pressão constante, temos que a velocidade axial  $u$  é uma função de apenas uma variável  $r$ . Assim, temos as condições de contorno:

$$\begin{cases} u(0) = \text{simetria} & \Rightarrow \frac{du}{dr} = 0, \\ u(R) = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

onde  $R$  é o raio da tubulação por onde o fluido está escoando. Quando  $r = R$  estamos em contato com as paredes da tubulação, que naturalmente têm velocidade nula. A primeira condição de contorno (simetria) é consequência do sistema de coordenadas cilíndricas adotado.

Como (2.1) é uma EDO de primeira ordem, podemos tentar obter uma solução analítica por integração direta.

$$\int \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) dr = \int r \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu} dr$$

$$r \frac{du}{dr} = \frac{r^2}{2} \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu} + C_1$$

$$\int \frac{du}{dr} dr = \int \frac{r}{2} \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu} + \frac{C_1}{r} dr$$

$$u(r) = \frac{r^2}{4} \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu} + C_1 \ln(r) + C_2 \quad (2.3)$$

A equação (2.3) é a solução geral para a EDO (2.1). Para que ela atenda às condições de contorno de (2.2), de imediato temos  $C_1 = 0$ , pois o logaritmo natural não está definido para  $r = 0$ , sendo

que fisicamente já sabemos que há uma velocidade no centro da tubulação. Assim, (2.3) se reduz a

$$u(r) = \frac{r^2}{4} \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu} + C_2$$

A constante  $C_2$  pode ser identificada usando a condição de contorno  $u(R) = 0$ :

$$0 = \frac{R^2}{4} \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu} + C_2$$

$$C_2 = -\frac{R^2}{4} \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu}$$

Assim, a solução analítica do problema é

$$u(r) = \frac{r^2}{4} \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu} - \frac{R^2}{4} \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu}$$

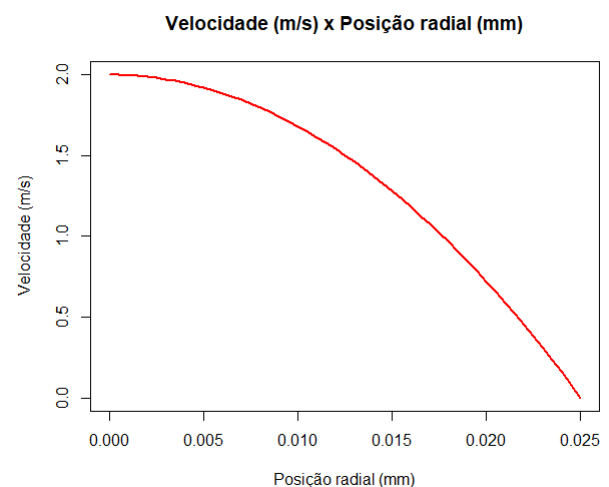
$$u(r) = \frac{1}{4} \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu} (r^2 - R^2) \quad (2.4)$$

No problema temos os seguintes parâmetros:

- Raio do tubo:  $R = 25 \text{ mm}$
- Viscosidade:  $\mu = 1.01 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$
- Gradiente de pressão:  $\frac{dp}{dz} = -12.928 \text{ N/m}$
- Massa específica:  $\rho = 998 \text{ kg m}^{-3}$

Com esses parâmetros, a Figura 2.1 mostra o perfil de velocidade dentro da tubulação conforme a solução analítica em (2.4).

Figura 2.1: Solução analítica da questão 2.



Fonte: elaboração própria.

O perfil de velocidade da Figura 2.1 é consistente com o esperado fisicamente: a velocidade

é máxima no centro do tubo, e zero nas paredes na tubulação, atendendo também às condições de contorno de (2.2). Além disso, igual visto durante as aulas da disciplina, temos um perfil parabólico para o escoamento plenamente desenvolvido na tubulação.

## 2.2 Análise Numérica

Concluída a análise analítica, podemos realizar uma análise numérica do problema. De modo semelhante ao feito na Questão 1, o primeiro passo é discretizar a equação diferencial (2.1) via diferenças finitas.

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) = r \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu}$$

aplicando a regra do produto no primeiro membro da equação,

$$\frac{du}{dr} + r \frac{d^2u}{dr^2} = r \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu}$$

agora substituímos os diferenciais por diferenças finitas:

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta r} + r \left( \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta r)^2} \right) = r \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu}$$

$$u_{i+1} - u_i + r \left( \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta r} \right) = (\Delta r) r \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu}$$

agrupando as velocidades,

$$u_{i+1} \left( 1 + \frac{r}{\Delta r} \right) + u_i \left( -1 - 2 \frac{r}{\Delta r} \right) + u_{i-1} \left( \frac{1}{\Delta r} \right) = (\Delta r) r \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu} \quad (2.5)$$

Note que (2.5) é a forma implícita de diferenças finitas para os nós internos do domínio. Os termos ligados às velocidades são os coeficientes do sistema linear, e o segundo membro de (2.5) tem os coeficientes independentes do sistema linear.

Antes de tentar montar o sistema linear em software, precisamos identificar as equações dos nós do contorno da geometria. Na parede, temos condição de contorno  $u(R) = 0$ , logo a equação para  $i = R$  é

$$u_i = 0 \quad (2.6)$$

Além disso, na linha de centro temos simetria, dada matematicamente por

$$\frac{du}{dr} = 0$$

Durante a análise analítica, vimos que

$$\frac{du}{dr} = \frac{r}{2} \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu} + \frac{C_1}{r}$$

com  $C_1 = 0$ ,

$$\frac{du}{dr} = \frac{r}{2} \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu}$$

Discretizando a expressão acima, e usando  $r = \Delta r/2$  para analisarmos o que está acontecendo no nó central, temos

$$\begin{aligned} \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta r} &= \frac{\Delta r/2}{2} \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu} \\ u_{i+1} - u_i &= \frac{(\Delta r)^2}{4} \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu} \quad (2.7) \end{aligned}$$

Assim, quando estivermos percorrendo cada  $\Delta r$  no domínio, identificamos se ele é um nó interno, nó central ou nó em contato com as paredes. Em seguida usamos a seguinte metodologia:

- Se estamos em um nó interno, calcula os coeficientes através de (2.5)
- Se estamos na parede, calcula os coeficientes através de (2.6)
- Se estamos no nó central, calcula os coeficientes através de (2.7)

Uma vez calculados todos os coeficientes, teremos uma matriz de coeficientes  $A$  de dimensão  $N \times N$ , onde  $N = R/\Delta y$ , e um vetor de coeficientes independentes  $B$  de dimensão  $N \times 1$ . O vetor solução  $X$ , que contém as velocidades  $u$  de cada nó, tem dimensão  $N \times 1$  e é calculado através da equação matricial

$$X = A^{-1}B \quad (2.8)$$

O pseudocódigo abaixo mostra a ideia principal do software desenvolvido em R que implementa essa solução numérica. O software completo pode ser visto no ANEXO B.

```
N ← R/Δy
A ← Matriz(N × N)
B ← Vetor(N × 1)
i ← 0
```

```

for cada  $\Delta y$  em  $R$  do
  if  $\Delta y$  atual é nó interno then
     $A[\text{linha } i] \leftarrow \text{equação (2.5)}$ 
     $B[i] \leftarrow \text{equação (2.5)}$ 
  end if
  if  $\Delta y$  atual é parede then
     $A[\text{linha } i] \leftarrow \text{equação (2.6)}$ 
     $B[i] \leftarrow \text{equação (2.6)}$ 
  end if
  if  $\Delta y$  atual é nó central then
     $A[\text{linha } i] \leftarrow \text{equação (2.7)}$ 
     $B[i] \leftarrow \text{equação (2.7)}$ 
  end if
   $i \leftarrow i + 1$ 
end for
 $X \leftarrow \text{inversa}(A) * B$ 
return  $X$ 

```

Ao contrário do problema 1, temos apenas um loop no código. Não temos marcha no tempo uma vez que o regime de escoamento é permanente. Nesse caso, basta percorrer cada intervalo  $\Delta y$  em  $R$ , identificar a natureza nesse nó, calcular os coeficientes, jogar nas matrizes  $A$  e  $B$  e resolver a equação matricial.

A Figura 2.2 mostra uma comparação entre os valores numéricos obtidos no código com a solução analítica da Figura 2.1 para diversas malhas.

Na Figura 2.2 (a) temos apenas 5 nós, e a solução obtida está longe da analítica. Além disso, é possível ver as retas das diferenças finitas na curva azul, uma vez que  $N$  é baixo, e assim não temos uma curva suave como a analítica. Conforme  $N$  aumenta nas Figuras 2.2 (b), (c) e (d), a solução numérica vai ser aproximando da analítica, ficando cada vez mais suave, até ficar praticamente idêntica à analítica para  $N = 100$ .

Com base nos gráficos da Figura 2.2, temos que modelo numérico desenvolvido é satisfatório para  $N \geq 50$ . Note que usamos o método implícito, e portanto não precisamos nos preocupar com critérios de estabilidade como na Problema 1. Nesse sentido, não temos restrições teóricas para o valor máximo de  $N$ . Contudo, o uso de  $N$  muito elevando aumenta o custo computacional do software, principalmente da matriz de coeficientes que possui  $N^2$  elementos. Assim, não é necessário, com base nos dados obtidos, usar  $N$  muito maior que 100 para esse modelo.

## 3 Terceira Questão (9 pts)

### 3.1 Análise Analítica

Para modelar o problema dado, temos que partir das equações de Navier-Stokes e da equação de conservação da massa. Assumindo escoamento incompressível (massa específica constante), temos

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (3.1)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (3.2)$$

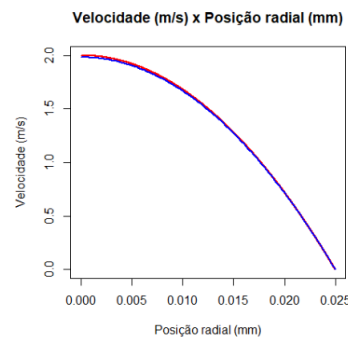
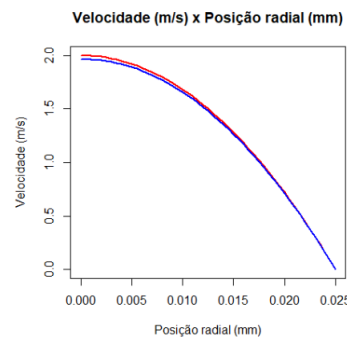
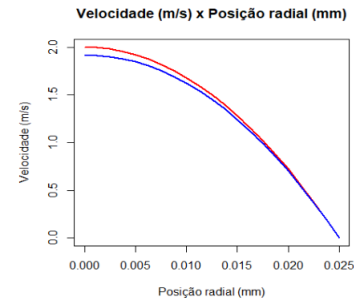
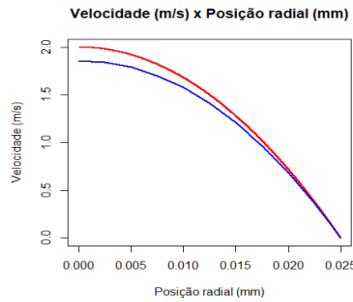
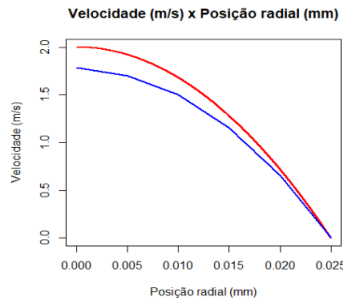
$$\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (3.3)$$

$$\nabla \cdot V = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.4)$$

As equações (3.1), (3.2) e (3.3) são as três equações de Navier-Stokes, e a equação (3.4) é a equação de conservação da massa.

Com base nos dados do problema, podemos fazer várias simplificações nas equações acima:

- Escoamento unidimensional apenas na direção  $x$ :  $v = w = 0$
- Escoamento em regime permanente:  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$
- Gravidade atua apenas na componente  $y$ :  $g_x = g_z = 0$
- Escoamento plenamente desenvolvido:  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$
- Na geometria analisada, o sistema de coordenadas possui apenas eixos  $x$  e  $y$ :  $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$

Figura 2.2: Solução numérica (azul) e solução analítica (vermelha) para vários valores de  $N$ .(a)  $N = 5$ (b)  $N = 10$ (c)  $N = 20$ (d)  $N = 50$ (e)  $N = 100$ 

Fonte: elaboração própria.

Com todas essas simplificações, as equações acima se reduzem a

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{dp}{dx} = 0 \quad (3.5)$$

em que  $u$  é função de apenas uma variável  $y$ . Assim, temos as seguintes condições de contorno para (3.5):

$$\begin{cases} u(-h) = 0, \\ u(h) = U \end{cases} \quad (3.6)$$

De modo semelhante ao feito na Questão 3, podemos tentar obter uma solução analítica para o modelo através de integração direta, assumindo que o gradiente de pressão na direção do escoamento  $\frac{dp}{dx}$  é constante.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{dp}{dx} \frac{1}{\mu}$$

$$\int \frac{\partial u}{\partial y} dy = \int y \frac{dp}{dx} \frac{1}{\mu} + C_1 dy$$

$$u(y) = \frac{y^2}{2} \frac{dp}{dx} \frac{1}{\mu} + yC_1 + C_2 \quad (3.7)$$

(3.7) é a solução geral da EDP (3.5). Com as condições de contorno, temos

$$\begin{cases} 0 = \frac{(-h)^2}{2} \frac{dp}{dx} \frac{1}{\mu} - hC_1 + C_2, \\ U = \frac{h^2}{2} \frac{dp}{dx} \frac{1}{\mu} + hC_1 + C_2 \end{cases}$$

somando as duas equações, temos

$$U = h^2 \frac{dp}{dx} \frac{1}{\mu} + 2C_2$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \left( U - h^2 \frac{dp}{dx} \frac{1}{\mu} \right)$$

Agora substituímos esse  $C_2$  calculado de volta, para achar o  $C_1$ :

$$0 = \frac{h^2}{2} \frac{dp}{dx} \frac{1}{\mu} - hC_1 + \frac{1}{2} \left( U - h^2 \frac{dp}{dx} \frac{1}{\mu} \right)$$

$$0 = \frac{h^2}{2} \frac{dp}{dx} \frac{1}{\mu} - hC_1 + \frac{1}{2}U - \frac{1}{2}h^2 \frac{dp}{dx} \frac{1}{\mu}$$

$$-\frac{1}{2}U = -hC_1 \Rightarrow C_1 = \frac{U}{2h}$$



Finalmente, a solução analítica de (3.5) com as condições de contorno de (3.6) é

$$u(y) = \frac{y^2}{2} \frac{dp}{dx} \frac{1}{\mu} + y \frac{U}{2h} + \frac{1}{2} \left( U - h^2 \frac{dp}{dx} \frac{1}{\mu} \right)$$

$$u(y) = \frac{y^2}{2} \frac{dp}{dx} \frac{1}{\mu} + y \frac{U}{2h} + \frac{1}{2} U - \frac{1}{2} h^2 \frac{dp}{dx} \frac{1}{\mu}$$

$$\frac{u(y)}{U} = \frac{y^2}{2U} \frac{dp}{dx} \frac{1}{\mu} + \frac{y}{2h} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2U} h^2 \frac{dp}{dx} \frac{1}{\mu}$$

$$\frac{u(y)}{U} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{y}{h} \right) - \frac{dp}{dx} \frac{h^2}{2\mu U} \left( 1 - \frac{y^2}{h^2} \right)$$

definimos  $P$  tal que

$$P = -\frac{dp}{dx} \frac{h^2}{2\mu U}$$

e assim podemos reescrever a expressão como

$$\frac{u(y)}{U} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{y}{h} \right) + P \left( 1 - \frac{y^2}{h^2} \right) \quad (3.8)$$

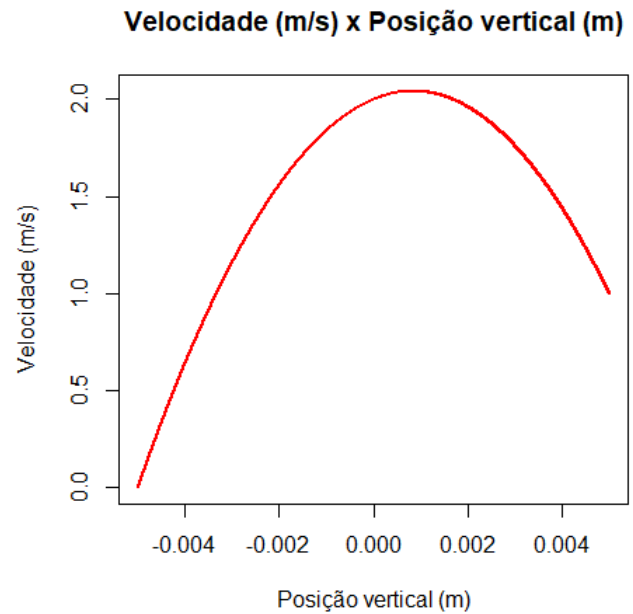
Usamos os seguintes parâmetros:

- Domínio de análise vertical:  $-h \leq y \leq h$ , com  $h = 5 \text{ mm}$
- Viscosidade:  $\mu = 1.49 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$
- Velocidade de deslocamento da placa superior:  $U = 1 \text{ m/s}$
- Gradiente de pressão:  $\frac{dp}{dx} = -178800 \text{ Pa}$

Com (3.8) e os parâmetros, podemos obter a distribuição de velocidades do fluido analiticamente. A Figura (3.1) exibe a solução obtida.

Na Figura (3.1) temos um perfil parabólico para um escoamento plenamente desenvolvido, conforme visto nas aulas da disciplina. Note que a velocidade máxima está quase no centro, deslocada devido ao movimento da placa superior.

Figura 3.1: Solução analítica da questão 3.



Fonte: elaboração própria.

## 3.2 Análise Numérica

Vamos discretizar (3.5) com o método das diferenças finitas. Note que usamos o diferencial de pressão como constante, logo ele não precisa ser discretizado. Além disso, como o regime é permanente, usamos o método implícito.

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta y)^2} = \frac{dp}{dx}$$

$$u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} = (\Delta y)^2 \frac{dp}{dx} \quad (3.9)$$

A equação (3.9) é a equação para todos os nós internos no domínio. Nos contornos, de modo bem parecido como feito no Problema 2, temos, para  $i = -h$ ,

$$u_i = 0 \quad (3.10)$$

que corresponde ao ponto de contato do fluido com a placa inferior, em repouso. Similarmente, quando  $i = h$ , temos

$$u_i = U \quad (3.11)$$

que corresponde ao ponto de contato do fluido com a placa superior, com velocidade igual a  $U$ .

O algoritmo usado na solução é precisamente o mesmo da questão 2, apenas trocando as equações e os parâmetros físicos. Continuamos percorrendo

cada  $\Delta y$ , identificando se ele é um nó interno, borda inferior ou de borda superior, e salvando os coeficientes nas matrizes. No final, resolvemos o sistema linear e obtemos o vetor solução.

O código completo feito em R nessa questão está disponível no ANEXO C. Repare que sua estrutura é a mesma que o código no ANEXO B. A Figura 3.2 exibe uma comparação entre as curvas obtidas analiticamente e numericamente para vários valores de  $N$ , onde  $N = 2h/\Delta y$ .

De modo bastante semelhante ao visto no Problema 2, na Figura 3.2 (a) vemos que o baixo de valor  $N$  resulta em um modelo de baixa exatidão, com o baixo número de pontos discretizados tornando as aproximações lineares insuficientes para modelar a solução analítica, que é quadrática.

Conforme o valor de  $N$  aumenta, temos que as aproximações ficam cada vez melhores, e a partir  $N \geq 10$  o modelo numérico já está bastante parecido com a solução analítica, como mostram as Figuras 3.2 (c) e (d).

## 4 Quarta Questão (9 pts)

### 4.1 Análise Analítica

De modo parecido à modelagem do Problema 3, temos que partir das equações de Navier-Stokes e da equação de conservação da massa, assumindo escoamento incompressível. Podemos fazer as seguintes simplificações:

- Estamos modelando a geometria apenas em duas dimensões  $x$  e  $y$ :  $w = 0$  e derivadas em relação a  $z$  nulas.
- Gravidade atua apenas na componente  $y$ :  $g_x = g_z = 0$
- Regime permanente: derivadas em relação a  $t$  nulas

Com essas simplificações, temos três equações que modelam o problema

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (4.1)$$

$$\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.3)$$

Conforme as equações (4.1), (4.2) e (4.3), temos que as velocidades horizontal  $u$  e vertical  $v$  são funções de duas variáveis:  $x$  e  $y$ . A injeção de ar pela face sul é de baixo para cima, logo temos efeito da gravidade no fluido, representada pelo termo  $\rho g_y$  em (4.2).

Os gradientes de pressão na direção  $x$  e  $y$  não foram informados no enunciado do problema, mas podemos assumir que existem gradientes causando os movimentos do fluido em ambas direções  $x$  e  $y$ . Nessa interpretação, usamos a analogia que gradientes de pressão causam movimento de fluidos da mesma forma que gradientes de potencial elétrico (tensão) geram fluxo de corrente elétrica.

Uma vez identificado as equações diferenciais que modelam o problema, temos que determinar as condições de contorno. Na face oeste, temos

$$\begin{cases} u(0, y) = 0.06 \text{ m/s}, & 0 \leq y \leq 1 \text{ cm} \\ v(0, y) = 0 \text{ m/s}, & 0 \leq y \leq 1 \text{ cm} \end{cases} \quad (4.4)$$

Na face leste temos saída, que significa escoamento plenamente desenvolvido, ou seja, derivadas espaciais nulas.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0, & x = 20 \text{ cm}, 0 \leq y \leq 1 \text{ cm} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0, & x = 20 \text{ cm}, 0 \leq y \leq 1 \text{ cm} \end{cases} \quad (4.5)$$

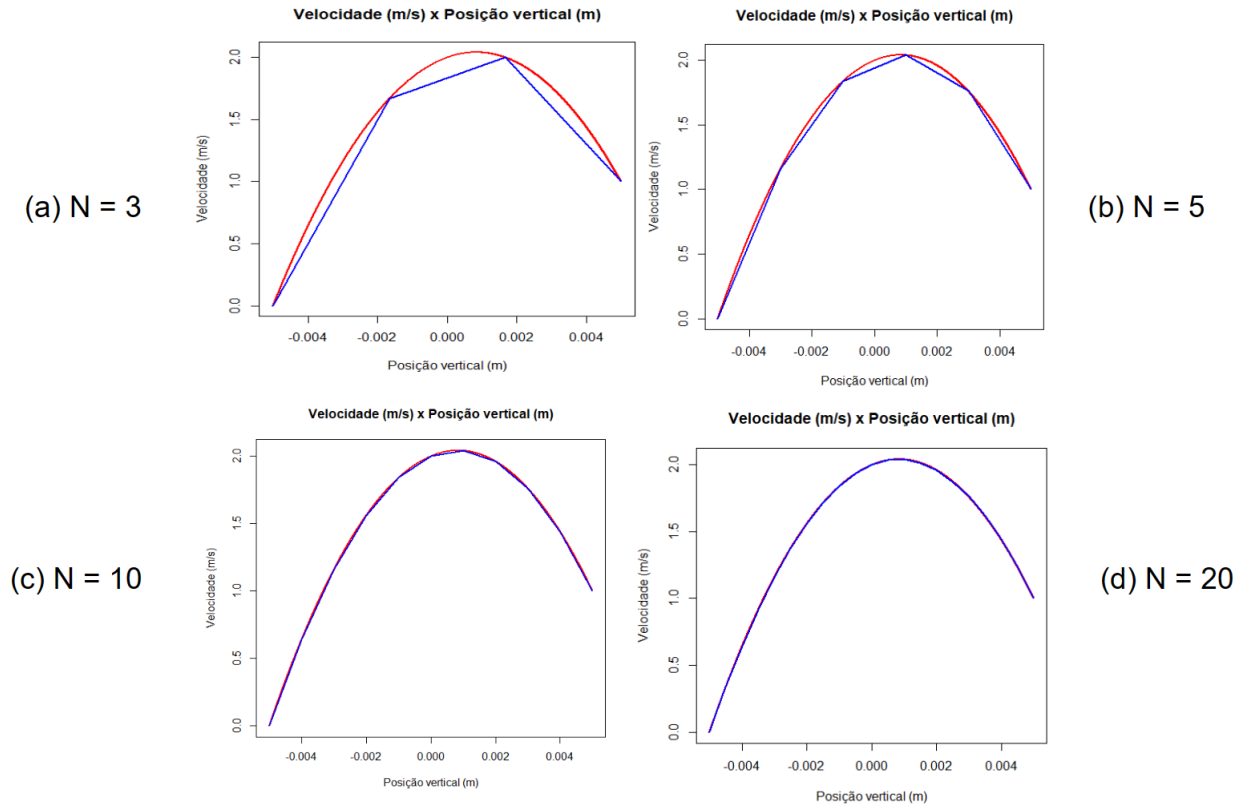
Na face sul temos uma região da parede que é fixa, e outra que é porosa com injeção de ar de baixo para cima. Assim, temos

$$\begin{cases} u(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq 20 \text{ cm} \\ v(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq 10 \text{ cm} \\ v(x, 0) = 0.02 \text{ m/s}, & 10 \leq x \leq 20 \text{ cm} \end{cases} \quad (4.6)$$

Na face norte temos condições de contorno simétricas à face sul. Note que na face sul é injeção de ar, e na face norte é sucção de ar, de modo que a direção e sentido de  $v$  em ambas faces é a mesma.

$$\begin{cases} u(x, 1 \text{ cm}) = 0, & 0 \leq x \leq 20 \text{ cm} \\ v(x, 1 \text{ cm}) = 0, & 0 \leq x \leq 10 \text{ cm} \\ v(x, 1 \text{ cm}) = 0.02 \text{ m/s}, & 10 \leq x \leq 20 \text{ cm} \end{cases} \quad (4.7)$$

Figura 3.2: Solução numérica (azul) e solução analítica (vermelha) para vários valores de  $N$ .



Fonte: elaboração própria.

Finalmente, o problema é modelado matematicamente pelas equações diferenciais parciais (4.1), (4.2) e (4.3), com as condições de contorno especificadas em (4.4), (4.5), (4.6) e (4.7).

## 4.2 Análise Numérica

Ao contrário dos Problemas 1, 2 e 3, discretizar as equações diferenciais (4.1), (4.2) e (4.3) e desenvolver um programa para analisar numericamente seria bastante trabalhoso. Assim, usamos o software gratuito CFD Studio para obter a distribuição de velocidades.

As configurações usadas no software foram as seguintes:

- Tipo de malha utilizado: malha cartesiana, com 10 divisões na vertical e 20 na horizontal
- Esquema de interpolação: UDS
- Algoritmo de acoplamento pressão velocidade (P-V): simplec
- Coeficiente de sub-relaxação da pressão: 1.00
- Pressão de referência: 0 N/m

- Local de imposição de pressão de referência: Malha  $i = 19$ ,  $j = 0$ , no canto inferior da face leste
- Número de iterações necessárias até convergir: 5000
- Solver utilizado: Gauss Seidel

As demais configurações do software foram as padrões para escoamento sem transferência de calor, seguindo os passos do Assistente de Problema CFD.

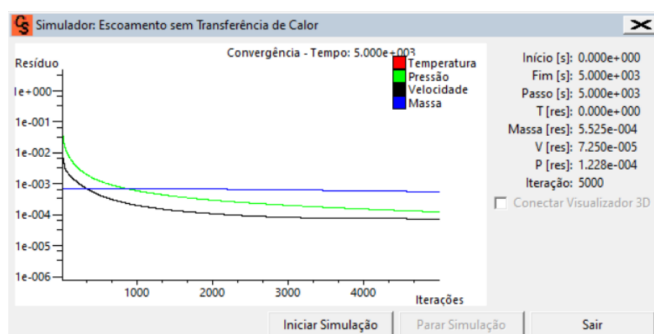
As condições iniciais são  $u = v = 0$  em todo o domínio pois o regime de escoamento é permanente. O material selecionado foi ar, com propriedades de viscosidade  $\mu = 1.85 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$  e massa específica  $\rho = 1.161 \text{ kg m}^{-3}$ .

As condições de contorno (4.4), (4.5), (4.6) e (4.7) podem facilmente ser inseridas no software através da interface gráfica.

Uma vez inseridos todas essas condições de contorno e configurações, a Figura 4.1 exibe a convergência da simulação realizada.

Como visto na Figura 4.1, a configuração selecionada atingiu uma boa convergência de velocidade, pressão e massa. A Figura 4.2 exibe a distribuição do campo de velocidades simulado. Os

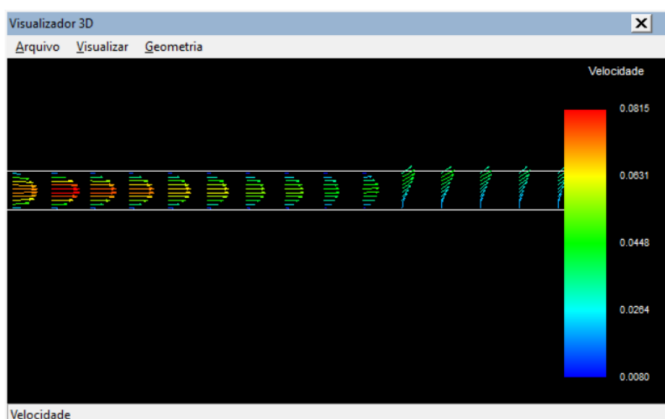
Figura 4.1: Convergência da simulação no CFD Studio.



Fonte: elaboração própria.

vetores da imagem foram escalados por um fator 3 para melhorar a visualização.

Figura 4.2: Distribuição de velocidades no problema, obtida com o CFD Studio.

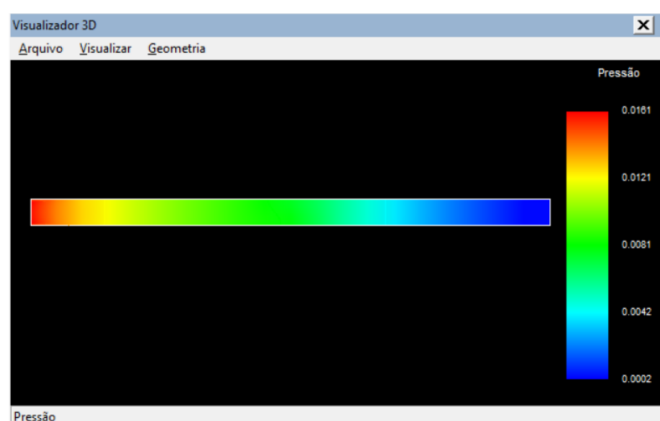


Fonte: elaboração própria.

A distribuição na Figura 4.2 é condizente com o esperado fisicamente. Quando o fluido de alta velocidade entra no espaço entre as placas, o escoamento apresenta um perfil parabólico, e conforme o fluido avança no espaço entre as placas na direção  $x$  a velocidade vai se reduzindo. Ao atingir o centro do tubo ( $x = 10$  cm), a injeção vertical de ar através da face sul porosa deforma o perfil até então parabólico do escoamento. De fato, para  $x \geq 10$  cm, temos uma distribuição de velocidades como uma parábola deslocada para cima, resultado da força para cima exercida pelo ar injetado.

A Figura 4.3 exibe a distribuição de pressão ao longo do tubo. Note que fixamos a pressão de referência em zero no canto inferior direito da geometria na configuração da pressão de referência. Além disso, temos que a pressão é máxima no ponto de entrada do fluido de alta velocidade, o que também é conforme o esperado fisicamente.

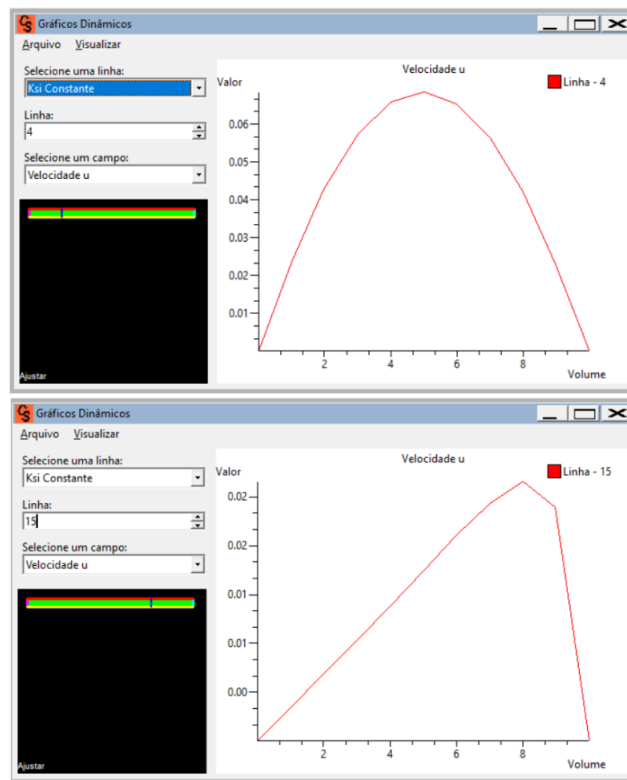
Figura 4.3: Distribuição de pressão no problema, obtida com o CFD Studio.



Fonte: elaboração própria.

A Figura 4.4 mostra o perfil de velocidades ao longo de duas retas verticais no tubo, a primeira na linha  $i = 4$  (quinta divisão horizontal), antes da injeção de ar, e a segunda na linha em  $i = 15$  (décima sexta divisão horizontal), que é depois da injeção de ar.

Figura 4.4: Perfil de velocidades ao longo linhas verticais  $i = 4$  e  $i = 15$  no tubo.

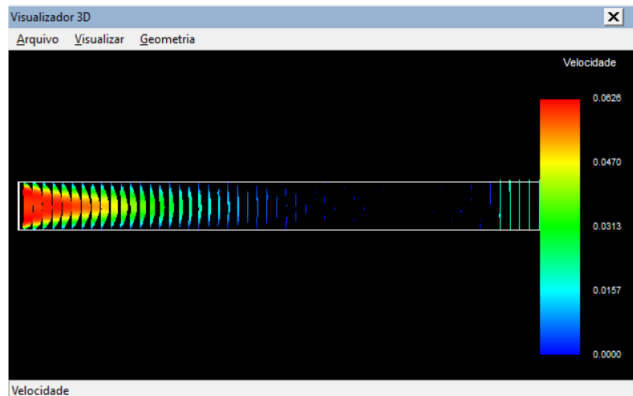


Fonte: elaboração própria.

Os gráficos da Figura 4.4 reforçam a análise feita com o campo vetorial da velocidade na Figura 4.2. Após a injeção de ar, o perfil parabólico do escoamento é deformado para cima.

A última análise que podemos fazer com o CFD Studio é o teste de malhas. Os resultados acima foram obtidos com uma malha  $20 \times 10$ , totalizando 200 nós. Vamos refazer a simulação com uma malha  $100 \times 50$ , com 5000 nós, para verificar o impacto do refinamento da malha nos resultados. A distribuição de velocidades obtida com essa malha foi está exibida na

Figura 4.5: Perfil de velocidades obtido com a malha  $100 \times 50$ .



Fonte: elaboração própria.

Comparando as Figuras 4.2 e 4.5, temos que as velocidades calculadas na entrada e no início da região porosa são similares. A principal diferença observada é que, na malha  $100 \times 50$ , o escoamento praticamente se encerrou em  $x = 5$  cm, sendo retomado apenas quando ocorre a injeção de ar a partir de  $x \geq 10$  cm. Por outro lado, na entrada do tubo, temos um perfil muito mais detalhado da distribuição de velocidades quando o ar inicialmente entra no espaço entre as placas.

É importante destacar que a simulação feita na Figura 4.5 foi com apenas 1000 iterações, ao passo que a iteração da Figura 4.2 teve 5000. Isso foi feito pois, com o aumento no número de nós, o tempo gasto por iteração aumentou consideravelmente. Para executar as 1000 iterações na nova malha, foi gasto quase 2 minutos.

## 5 Referências

INCROPERA, Frank, et. al. Fundamentals of Heat and Mass Transfer. 6 ed. John Wiley & Sons Inc. 2007.

PRITCHARD, Philip J. Fox and McDonald's Introduction to Fluid Mechanics. 8 ed. John Wiley & Sons Inc. 2011.

## Anexo A

Aqui está o código completo desenvolvido em R na questão 1. O código de formatação dos dados com o pacote flextable não está exibido.

```
U0 <- 1
mu <- 0.29
rho <- 891

H <- 10 * 10^-2 # tamanho vertical do dominio, em metros
T <- 1 # periodo total de analise, em segundos
N <- 40 # numero de malhas (intervalos) da direcao y, unidimensional
M <- 200 # numeros de pontos no tempo
dy <- H / N # metros por divisao
dt <- T / M # segundos por divisao
K = (mu / rho) * dt / (dy^2) # deve ser que menor que 0.5

N <- N + 1 # ajuste para incluir a posicao zero

y <- c()

# configura a malha
for (yi in 1:N) {
  y[yi] <- (yi - 1) * dy
}

solutionsList <- list()

boundaryVelBottom <- 1
boundaryVelTop <- 0
initialVel <- 0 # inicialmente em repouso

initialMesh <- c()

# associa condicao inicial a malha
for (yi in 1:N) {
  if (yi == 1) {
    # se esta na base
    initialMesh <- append(initialMesh, boundaryVelBottom)
  } else if (yi == N) {
    # se esta no topo
    initialMesh <- append(initialMesh, boundaryVelTop)
  } else {
    # se nao, eh malha interna
    initialMesh <- append(initialMesh, initialVel)
  }
}

solutionsList[[1]] <- initialMesh

for (t in 1:M) {
  prevU <- solutionsList[[t]]

  newU <- c()
  for (yi in 1:N) {
```

```
# se esta na base ou no topo, temos condicao de contorno
if (yi == 1) {
  # se esta na base
  newU <- append(newU, boundaryVelBottom)
} else if (yi == N) {
  # se esta no topo
  newU <- append(newU, boundaryVelTop)
} else {
  # se nao, eh malha interna e usa a expressao deduzida
  newU <- append(newU, prevU[yi] + K * (prevU[yi + 1] - 2 * prevU[yi] + prevU[yi -
    1] ))
}
}

solutionsList[[t + 1]] <- newU
}
```