

Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG  
Curso de Graduação em Engenharia de Sistemas

EMA255 - Fluidos e Termodinâmica Computacional

Lista de Exercícios de Dinâmica dos Fluidos

**Aluno: Raphael Henrique Braga Leivas**

Matrícula: 2020028101

Belo Horizonte

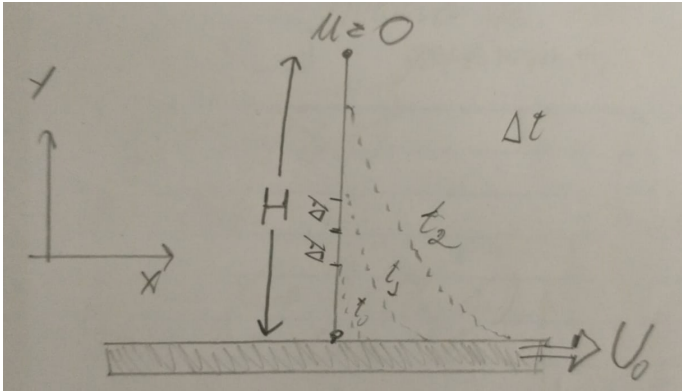
Semestre 2023/1

# 1 Primeira Questão (6 pts)

## 1.1 Análise Analítica

Um fluido de viscosidade  $\mu$  e massa específica  $\rho$  está em repouso sobre uma placa horizontal quando ela começa a se mover com velocidade constante  $U_0$ . A Figura 1.1 exibe a geometria do problema.

Figura 1.1: Geometria da questão 1.



Fonte: elaboração própria.

Como mostra a Figura 1.1, a linha média do fluido começa a ser arrastada pelo movimento da placa, e a cada instante de tempo  $t_0$ ,  $t_1$  e  $t_2$  o movimento da placa atinge pontos cada vez mais altos da linha média do fluido. Nesse cenário, a velocidade horizontal  $u$  do fluido é uma função de duas variáveis: posição vertical  $y$  e tempo  $t$ .

A equação diferencial que modela o problema é

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1.1)$$

com as seguintes condições de contorno:

$$\begin{cases} u(0, t) = U_0, & 0 \leq t \leq T & \text{Cond. contorno 1} \\ u(H, t) = 0, & 0 \leq t \leq T & \text{Cond. contorno 2} \\ u(y, 0) = 0, & 0 < y \leq H & \text{Cond. inicial} \end{cases} \quad (1.2)$$

Veja que o problema é modelado por uma equação diferencial de segunda ordem em regime transiente, logo precisamos de duas condições de contorno e uma condição inicial. Estamos analisando apenas o que acontece com a linha média, logo temos apenas uma dimensão de análise  $y$ .

No nosso sistema de coordenadas,  $y = 0$  corresponde ao ponto do fluido em contato com a placa, e  $y = H$  é a altura máxima que iremos considerar na análise. Note que, para  $H$  su-

ficiente grande, faz sentido assumir que o movimento da placa não atinge esses pontos do fluido a uma grande distância da placa, de modo que  $u(H, t) = 0$ . O tempo total de análise é dado por  $T$ .

O problema modelado por (1.1) e (1.2) possui solução analítica dada por

$$u(y, t) = U_0 \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{y}{2\sqrt{\frac{\mu}{\rho}t}} \right) \right] \quad (1.3)$$

em que  $\operatorname{erf}$  é a função erro definida como

$$\operatorname{erf}(\beta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\beta e^{-x^2} dx \quad (1.4)$$

Usando linguagem R e a IDE RStudio, é possível obter a distribuição de velocidades do fluido a partir da equação (1.3), uma vez que a função erro  $\operatorname{erf}$  já está implementada em pacotes da linguagem. Usamos os seguintes parâmetros:

- Domínio de análise vertical:  $H = 10$  cm
- Domínio de análise no tempo:  $T = 1$  s
- Viscosidade:  $\mu = 0.29$  kg m<sup>-1</sup> s<sup>-1</sup>
- Massa específica:  $\rho = 891$  kg m<sup>-3</sup>
- Velocidade da placa:  $U_0 = 1$  m/s

A Figura 1.2 exibe os valores de  $u(y, t)$  em função do tempo e posição vertical obtidos através da equação (1.3) com os parâmetros acima.

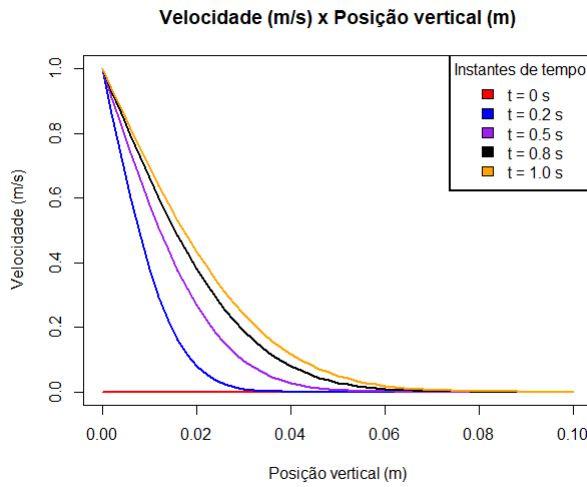
As velocidades obtidas analiticamente na Figura 1.2 são condizentes com o analisado da geometria na Figura 1.1. Conforme o tempo passa, os pontos do fluido apresentam velocidade  $u$  cada vez maior, uma vez que são arrastados pelo movimento da placa. Os pontos em  $y > 7$  cm já não sofrem nenhum efeito do movimento da placa até  $t = 1$  s.

Analisando os pontos específicos pedidos no exercício, temos

$$u(3 \text{ cm}, 0.5 \text{ s}) = 0.0963 \text{ m/s}$$

$$u(3 \text{ cm}, 1 \text{ s}) = 0.2396 \text{ m/s}$$

Figura 1.2: Velocidade  $u$  do fluido em função da posição e tempo.



Fonte: elaboração própria.

## 1.2 Análise Numérica

Uma vez entendido o que está acontecendo analiticamente, podemos fazer uma análise numérica do problema usando o método de diferenças finitas. O primeiro passo é discretizar a equação diferencial (1.1), trocando os diferenciais por diferenças.

$$\frac{u^{p+1} - u^p}{\Delta t} = \frac{\mu}{\rho} \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta y)^2} \quad (1.5)$$

Em (1.5) adotamos a seguinte simbologia:

- Sobrescrito  $p$ : indica o tempo da velocidade  $u$ .  $p$  indica o tempo atual,  $p + 1$  o próximo tempo
- Subscrito  $i$ : indica a posição vertical da velocidade  $u$ .  $i$  indica a posição atual,  $i + 1$  a próxima posição
- $\Delta t$ : intervalo de discretização no tempo
- $\Delta y$ : intervalo de discretização no espaço (vertical)

Assim, a linha média da Figura 1.1 é discretizada em  $H/\Delta y$  elementos de comprimento  $\Delta y$ , e o tempo é transcorrido a partir de  $t = 0$  até  $t = T$  em intervalos de  $\Delta t$ . Vamos reescrever (1.5) de modo a expressar a velocidade futura em função da velocidade antiga.

$$u^{p+1} = u^p + \frac{\mu}{\rho} \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2} (u_{i+1}^p - 2u_i^p + u_{i-1}^p) \quad (1.6)$$

Em (1.6), usamos o método explícito ao aplicar as diferenças finitas. Portanto, é fundamental analisar os critérios de estabilidade para que a solução converja. Em transferência de calor, vimos que a equação diferencial de condução unidimensional em regime transiente é

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (1.7)$$

onde  $\alpha$  é a difusividade térmica do material. Nesse modelo, o critério de estabilidade é, segundo Incropera (2007),

$$\frac{\alpha \Delta t}{(\Delta y)^2} \leq \frac{1}{2} \quad (1.8)$$

Comparando as equações diferenciais (1.1) e (1.7), podemos ver que as constantes  $\alpha$  e  $\mu/\rho$  possuem o mesmo papel, apesar de uma ter um significado físico de transferência de calor e outra um significado de mecânica dos fluidos. Nesse sentido, podemos inferir que o critério de estabilidade de (1.6) é

$$\frac{\mu}{\rho} \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2} \leq \frac{1}{2} \quad (1.9)$$

Concluída essa análise, podemos jogar (1.6) no computador para obter a solução numérica do problema. Novamente usando R e a IDE RStudio, o pseudocódigo abaixo mostra o procedimento para resolver o problema numericamente.

```
listaSoluções ← Lista()
i ← 0
for Δt em T do
  soluçãoAntiga ← listaSoluções[i]
  for Δy em H do
    calcule novasVelocidades
  end for
  i ← i + 1
  listaSoluções[i] ← novasVelocidades
end for
return listaSoluções
```

O pseudocódigo acima está bastante simplificado, mas ele mostra a ideia principal: percorremos dois loops, um para o tempo e um para a posição vertical. Percorremos todos os intervalos verticais, calculando a velocidade em cada nó, para cada intervalo de tempo. Ao final de cada loop do tempo, salva o novo vetor de velocidades calculado na lista de soluções. No final da execução, a lista de soluções tem  $T/\Delta t$  elementos, e cada elemento é um vetor de tamanho  $H/\Delta y$ .

O código completo desenvolvido em R, que implementa o pseudocódigo acima, pode ser visto no ANEXO A. A Figura 1.3 mostra a distribuição de velocidades obtida com o código do ANEXO A para  $\Delta t = 0.05$  s e  $\Delta y = 1$  cm.

Figura 1.3: Distribuição de velocidades obtida com a solução numérica.

Posição y (cm)	Velocidade (m/s)				
	0 s	0.25 s	0.5 s	0.75 s	1 s
0	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
1	0.00	0.46	0.59	0.66	0.70
2	0.00	0.14	0.28	0.37	0.44
3	0.00	0.03	0.10	0.18	0.25
4	0.00	0.00	0.03	0.08	0.12
5	0.00	0.00	0.01	0.03	0.05
6	0.00	0.00	0.00	0.01	0.02
7	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01
8	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
9	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
10	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Fonte: elaboração própria.

Note que os valores escolhidos de  $\Delta t$  e  $\Delta y$  atendem ao critério de estabilidade:

$$\frac{\mu}{\rho} \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2} = 0.1627 \leq 0.5$$

A tabela da Figura 1.3 foi construída com o pacote `flectable` da linguagem, que formata a lista de soluções na forma de uma tabela.

Os dados obtidos na Figura 1.3 são condizentes tanto com o esperado da geometria quanto com o resultado analítico da Figura (1.2). Com o passar no tempo, as velocidades mais distantes da placa aumentam, e pontos muito distantes não sofrem efeito algum.

Em particular, na Figura 1.3, obtemos

$$u(3 \text{ cm}, 0.5 \text{ s}) = 0.1049 \text{ m/s}$$

$$u(3 \text{ cm}, 1 \text{ s}) = 0.2455 \text{ m/s}$$

através da solução numérica. É importante destacar que na Figura 1.3 os valores foram arredondados para a segunda casa decimal para facilitar a leitura. O erro percentual com a solução analítica é dado por

$$E\% = \frac{V_{\text{numerico}} - V_{\text{analitico}}}{V_{\text{analitico}}} 100\% \quad (1.10)$$

Assim, para  $y = 3$  cm em  $t = 0.5$  s temos erro

$$E\% = \frac{0.1049 - 0.0963}{0.0963} 100\% = 8.9\%$$

e para  $y = 3$  cm em  $t = 1$  s,

$$E\% = \frac{0.2455 - 0.2396}{0.2396} 100\% = 2.5\%$$

com ambos erros inferiores a 10% em relação ao resultado analítico. Podemos recalculer esses valores para diferentes malhas, isto é, para diferentes valores de  $\Delta t$  e  $\Delta y$ . No software, basta alterar as variáveis no início do código e refazer a simulação. A Figura 1.4 mostra o resultado desse teste de malhas.

Figura 1.4: Erros percentuais com a solução analítica para diferentes malhas.

$\Delta t$ (s)	$\Delta y$ (cm)	$\frac{\mu}{\rho} \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2}$	Erro (%) $u(3 \text{ cm}, 0.5 \text{ s})$	Erro (%) $u(0.3 \text{ cm}, 1.0 \text{ s})$
0.05	1	0.167	8.9	2.5
0.1	1	0.325	10.8	4.5
0.1	0.5	1.301	-98.96	314340
0.5	0.5	0.6509	705.81	32333.2
0.25	0.5	0.325	2.54	1.12
0.05	0.25	0.260	0.622	0.2921

Fonte: elaboração própria.

Na Figura 1.4, os erros percentuais nas duas últimas colunas foram calculados com (1.10). A terceira coluna se refere ao critério de estabilidade da inequação (1.9). É interessante ver, nas linhas 3 e 4 da tabela, que quando esse valor ultrapassa 0.5 a solução diverge, apresentando erros percentuais muito grandes.

Por outro lado, como mostram as duas últimas linhas da tabela, o refinamento da malha (de modo que a estabilidade continue menor que 0.5) resultou em uma grande redução dos erros em relação à solução analítica, obtendo erros inferiores a 1% na última linha. Por fim, o melhor resultado obtido com o modelo numérico, como mostra a última linha da tabela, foi com  $\Delta y = 25$  mm e  $\Delta t = 50$  ms, obtendo

$$u(3 \text{ cm}, 0.5 \text{ s}) = 0.0969 \text{ m/s}$$

$$u(3 \text{ cm}, 1 \text{ s}) = 0.2403 \text{ m/s}$$

## 2 Segunda Questão (9 pts)

### 2.1 Análise Analítica

O escoamento de um fluido de viscosidade  $\mu$  e massa específica  $\rho$ , plenamente desenvolvido em regime permanente, em coordenadas cilíndricas, é modelado pela equação diferencial

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} + \frac{\mu}{\rho} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) = 0$$

note que podemos cancelar a massa específica  $\rho$ , obtendo

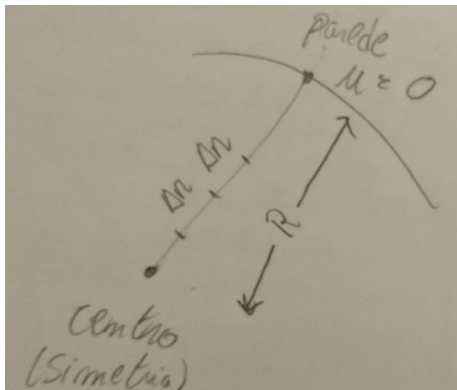
$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) = \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu} \quad (2.1)$$

Com um gradiente de pressão constante, temos que a velocidade axial  $u$  é uma função de apenas uma variável  $r$ . Assim, temos as condições de contorno:

$$\begin{cases} u(0) = \text{simetria} & \Rightarrow \frac{du}{dr} = 0, \\ u(R) = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

onde  $R$  é o raio da tubulação por onde o fluido está escoando. Quando  $r = R$  estamos em contato com as paredes da tubulação, que naturalmente têm velocidade nula. A primeira condição de contorno (simetria) é consequência do sistema de coordenadas cilíndricas adotado. A Figura 2.1 exibe a geometria do problema analisado.

Figura 2.1: Geometria da questão 2.



Fonte: elaboração própria.

Note, na Figura 2.1, que estamos analisando o problema em apenas uma dimensão. Como o escoamento é simétrico em todas as linhas radiais do centro à parede, basta analisar o que acontece em uma delas para modelar o escoamento inteiro.

Como (2.1) é uma EDO de primeira ordem, podemos tentar obter uma solução analítica por integração direta.

$$\int \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) dr = \int r \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu} dr$$

$$r \frac{du}{dr} = \frac{r^2}{2} \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu} + C_1$$

$$\int \frac{du}{dr} dr = \int \frac{r}{2} \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu} + \frac{C_1}{r} dr$$

$$u(r) = \frac{r^2}{4} \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu} + C_1 \ln(r) + C_2 \quad (2.3)$$

A equação (2.3) é a solução geral para a EDO (2.1). Para que ela atenda às condições de contorno de (2.2), de imediato temos  $C_1 = 0$ , pois o logaritmo natural não está definido para  $r = 0$ , sendo que fisicamente já sabemos que há uma velocidade no centro da tubulação. Assim, (2.3) se reduz a

$$u(r) = \frac{r^2}{4} \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu} + C_2$$

A constante  $C_2$  pode ser identificada usando a condição de contorno  $u(R) = 0$ :

$$0 = \frac{R^2}{4} \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu} + C_2$$

$$C_2 = -\frac{R^2}{4} \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu}$$

Assim, a solução analítica do problema é

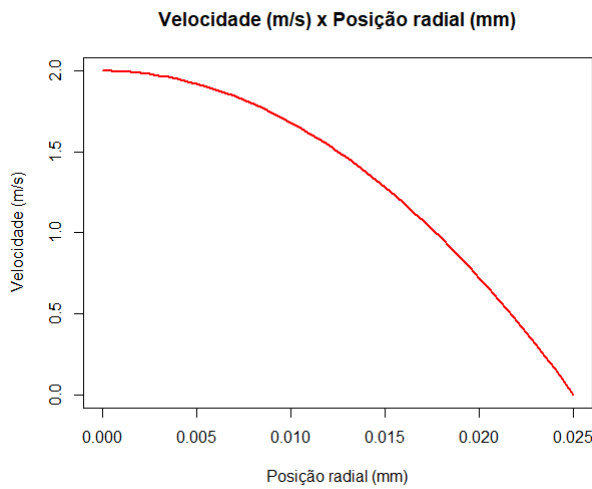
$$u(r) = \frac{r^2}{4} \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu} - \frac{R^2}{4} \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu}$$

$$u(r) = \frac{1}{4} \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu} (r^2 - R^2) \quad (2.4)$$

No problema temos os seguintes parâmetros:

- Raio do tubo:  $R = 25 \text{ mm}$
- Viscosidade:  $\mu = 1.01 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$
- Gradiente de pressão:  $\frac{dp}{dz} = -12.928 \text{ N/m}$
- Massa específica:  $\rho = 998 \text{ kg m}^{-3}$

Figura 2.2: Solução analítica da questão 2.



Fonte: elaboração própria.

Com esses parâmetros, a Figura 2.2 mostra o perfil de velocidade em função da posição radial  $r$  dentro da tubulação conforme a solução analítica em (2.4).

O perfil de velocidade da Figura 2.2 é condizente com o esperado fisicamente: a velocidade é máxima no centro do tubo, e zero nas paredes na tubulação, atendendo também às condições de contorno de (2.2). Além disso, igual visto durante as aulas da disciplina, temos um perfil parabólico para o escoamento plenamente desenvolvido na tubulação.

## 2.2 Análise Numérica

Concluída a análise analítica, podemos realizar uma análise numérica do problema. De modo semelhante ao feito na Questão 1, o primeiro passo é discretizar a equação diferencial (2.1) via diferenças finitas.

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) = r \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu}$$

aplicando a regra do produto no primeiro membro da equação,

$$\frac{du}{dr} + r \frac{d^2u}{dr^2} = r \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu}$$

agora substituímos os diferenciais por diferenças finitas:

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta r} + r \left( \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta r)^2} \right) = r \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu}$$

$$u_{i+1} - u_i + r \left( \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta r} \right) = (\Delta r) r \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu}$$

agrupando as velocidades,

$$u_{i+1} \left( 1 + \frac{r}{\Delta r} \right) + u_i \left( -1 - 2\frac{r}{\Delta r} \right) + u_{i-1} \left( \frac{1}{\Delta r} \right) = (\Delta r) r \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu} \quad (2.5)$$

Note que (2.5) é a forma implícita de diferenças finitas para os nós internos do domínio. Os termos ligados às velocidades são os coeficientes do sistema linear, e o segundo membro de (2.5) tem os coeficientes independentes do sistema linear.

Antes de tentar montar o sistema linear em software, precisamos identificar as equações dos nós do contorno da geometria. Na parede, temos condição de contorno  $u(R) = 0$ , logo a equação para  $i = R$  é

$$u_i = 0 \quad (2.6)$$

Além disso, na linha de centro temos simetria, dada matematicamente por

$$\frac{du}{dr} = 0$$

Durante a análise analítica, vimos que

$$\frac{du}{dr} = \frac{r}{2} \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu} + \frac{C_1}{r}$$

com  $C_1 = 0$ ,

$$\frac{du}{dr} = \frac{r}{2} \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu}$$

Discretizando a expressão acima, e usando  $r = \Delta r/2$  para analisarmos o que está acontecendo no nó central, temos

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta r} = \frac{\Delta r/2}{2} \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu}$$

$$u_{i+1} - u_i = \frac{(\Delta r)^2}{4} \frac{dp}{dz} \frac{1}{\mu} \quad (2.7)$$

Assim, quando estivermos percorrendo cada  $\Delta r$  no domínio, identificamos se ele é um nó interno, nó central ou nó em contato com as paredes. Em seguida usamos a seguinte metodologia:

- Se estamos em um nó interno, calcula os coeficientes através de (2.5)

- Se estamos na parede, calcula os coeficientes através de (2.6)
- Se estamos no nó central, calcula os coeficientes através de (2.7)

Uma vez calculados todos os coeficientes, teremos uma matriz de coeficientes  $A$  de dimensão  $N \times N$ , onde  $N = R/\Delta r$ , e um vetor de coeficientes independentes  $B$  de dimensão  $N \times 1$ . O vetor solução  $X$ , que contém as velocidades  $u$  de cada nó, tem dimensão  $N \times 1$  e é calculado através da equação matricial

$$X = A^{-1}B \quad (2.8)$$

O pseudocódigo abaixo mostra a ideia principal do software desenvolvido em R que implementa essa solução numérica. O software completo pode ser visto no ANEXO B.

```

N ← R/Δr
A ← Matriz(N × N)
B ← Vetor(N × 1)
i ← 0
for cada Δr em R do
  if Δr atual é nó interno then
    A[linha i] ← equação (2.5)
    B[i] ← equação (2.5)
  end if
  if Δr atual é parede then
    A[linha i] ← equação (2.6)
    B[i] ← equação (2.6)
  end if
  if Δr atual é nó central then
    A[linha i] ← equação (2.7)
    B[i] ← equação (2.7)
  end if
  i ← i + 1
end for
X ← inversa(A) * B
return X

```

Ao contrário do problema 1, temos apenas um loop no código. Não temos marcha no tempo uma vez que o regime de escoamento é permanente. Nesse caso, basta percorrer cada intervalo  $\Delta r$  em  $R$ , identificar a natureza nesse nó, calcular os coeficientes, jogar nas matrizes  $A$  e  $B$  e resolver a equação matricial.

A Figura 2.3 mostra uma comparação entre os valores numéricos obtidos no código com a solução analítica da Figura 2.2 para diversas malhas.

Na Figura 2.3 (a) temos apenas 5 nós, e a solução obtida está longe da analítica. Além disso,

é possível ver as retas das diferenças finitas na curva azul, uma vez que  $N$  é baixo, e assim não temos uma curva suave como a analítica. Conforme  $N$  aumenta nas Figuras 2.3 (b), (c) e (d), a solução numérica vai ser aproximando da analítica, ficando cada vez mais suave, até ficar praticamente idêntica à analítica para  $N = 100$ .

Com base nos gráficos da Figura 2.3, temos que modelo numérico desenvolvido é satisfatório para  $N \geq 50$ . Note que usamos o método implícito, e portanto não precisamos nos preocupar com critérios de estabilidade como na Problema 1. Nesse sentido, não temos restrições teóricas para o valor máximo de  $N$ . Contudo, o uso de  $N$  muito elevando aumenta o custo computacional do software, principalmente da matriz de coeficientes que possui  $N^2$  elementos. Assim, não é necessário, com base nos dados obtidos, usar  $N$  muito maior que 100 para esse modelo.

## 3 Terceira Questão (9 pts)

### 3.1 Análise Analítica

Para modelar o problema dado, temos que partir das equações de Navier-Stokes e da equação de conservação da massa. Assumindo escoamento incompressível (massa específica constante), temos

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (3.1)$$

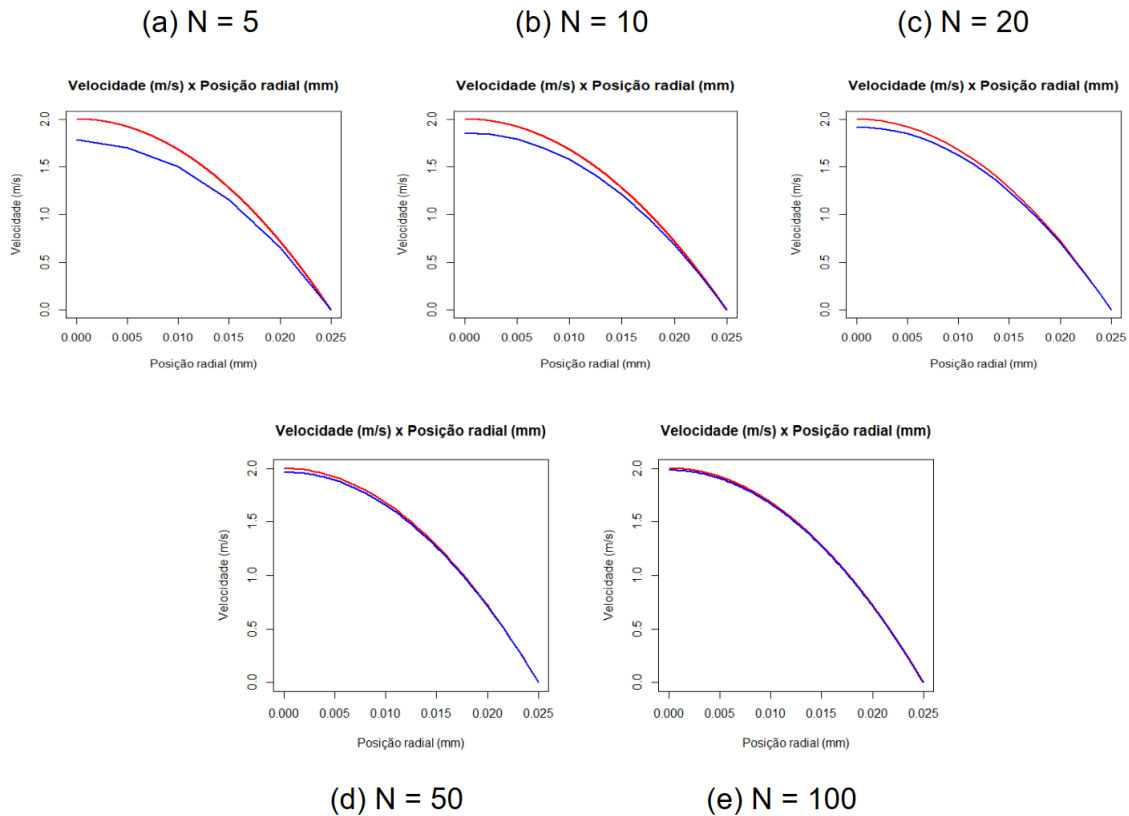
$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (3.2)$$

$$\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (3.3)$$

$$\nabla \cdot V = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.4)$$

As equações (3.1), (3.2) e (3.3) são as três equações de Navier-Stokes, e a equação (3.4) é a equação de conservação da massa.



Figura 2.3: Solução numérica (azul) e solução analítica (vermelha) para vários valores de  $N$ .

Fonte: elaboração própria.

Com base nos dados do problema, podemos fazer várias simplificações nas equações acima:

- Escoamento unidimensional apenas na direção  $x$ :  $v = w = 0$
- Escoamento em regime permanente:  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$
- Gravidade atua apenas na componente  $y$ :  $g_x = g_z = 0$
- Escoamento plenamente desenvolvido:  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$
- Na geometria analisada, o sistema de coordenadas possui apenas eixos  $x$  e  $y$ :  $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$

Com todas essas simplificações, as equações acima se reduzem a

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{dp}{dx} = 0 \quad (3.5)$$

em que  $u$  é função de apenas uma variável  $y$ . Assim, temos as seguintes condições de contorno para (3.5):

$$\begin{cases} u(-h) = 0, \\ u(h) = U \end{cases} \quad (3.6)$$

A Figura 3.1 exibe a geometria do Problema 3, para melhor visualizar as condições de contorno e o sistema de coordenadas adotado. Veja que, novamente por simetria, precisamos analisar apenas o que acontece em uma linha vertical da placa inferior até a placa superior para modelar o escoamento inteiro.

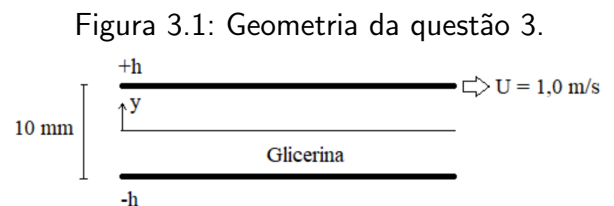


Figura 1

Fonte: elaboração própria.

De modo semelhante ao feito na Questão 2, podemos tentar obter uma solução analítica para o



modelo através de integração direta, assumindo que o gradiente de pressão na direção do escoamento  $\frac{dp}{dx}$  é constante.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{dp}{dx} \frac{1}{\mu}$$

$$\int \frac{\partial u}{\partial y} dy = \int y \frac{dp}{dx} \frac{1}{\mu} + C_1 dy$$

$$u(y) = \frac{y^2}{2} \frac{dp}{dx} \frac{1}{\mu} + yC_1 + C_2 \quad (3.7)$$

(3.7) é a solução geral da EDP (3.5). Com as condições de contorno, temos

$$\begin{cases} 0 = \frac{(-h)^2}{2} \frac{dp}{dx} \frac{1}{\mu} - hC_1 + C_2, \\ U = \frac{h^2}{2} \frac{dp}{dx} \frac{1}{\mu} + hC_1 + C_2 \end{cases}$$

somando as duas equações, temos

$$U = h^2 \frac{dp}{dx} \frac{1}{\mu} + 2C_2$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \left( U - h^2 \frac{dp}{dx} \frac{1}{\mu} \right)$$

Agora substituímos esse  $C_2$  calculado de volta, para achar o  $C_1$ :

$$0 = \frac{h^2}{2} \frac{dp}{dx} \frac{1}{\mu} - hC_1 + \frac{1}{2} \left( U - h^2 \frac{dp}{dx} \frac{1}{\mu} \right)$$

$$0 = \frac{h^2}{2} \frac{dp}{dx} \frac{1}{\mu} - hC_1 + \frac{1}{2}U - \frac{1}{2}h^2 \frac{dp}{dx} \frac{1}{\mu}$$

$$-\frac{1}{2}U = -hC_1 \Rightarrow C_1 = \frac{U}{2h}$$

Finalmente, a solução analítica de (3.5) com as condições de contorno de (3.6) é

$$u(y) = \frac{y^2}{2} \frac{dp}{dx} \frac{1}{\mu} + y \frac{U}{2h} + \frac{1}{2} \left( U - h^2 \frac{dp}{dx} \frac{1}{\mu} \right)$$

$$u(y) = \frac{y^2}{2} \frac{dp}{dx} \frac{1}{\mu} + y \frac{U}{2h} + \frac{1}{2}U - \frac{1}{2}h^2 \frac{dp}{dx} \frac{1}{\mu}$$

$$\frac{u(y)}{U} = \frac{y^2}{2U} \frac{dp}{dx} \frac{1}{\mu} + \frac{y}{2h} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2U} h^2 \frac{dp}{dx} \frac{1}{\mu}$$

$$\frac{u(y)}{U} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{y}{h} \right) - \frac{dp}{dx} \frac{h^2}{2\mu U} \left( 1 - \frac{y^2}{h^2} \right)$$

definimos  $P$  tal que

$$P = -\frac{dp}{dx} \frac{h^2}{2\mu U}$$

e assim podemos reescrever a expressão como

$$\frac{u(y)}{U} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{y}{h} \right) + P \left( 1 - \frac{y^2}{h^2} \right) \quad (3.8)$$

Usamos os seguintes parâmetros:

- Domínio de análise vertical:  $-h \leq y \leq h$ , com  $h = 5 \text{ mm}$
- Viscosidade:  $\mu = 1.49 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$
- Velocidade de deslocamento da placa superior:  $U = 1 \text{ m/s}$
- Gradiente de pressão:  $\frac{dp}{dx} = -178800 \text{ Pa}$

Com (3.8) e os parâmetros, podemos obter a distribuição de velocidades do fluido analiticamente. A Figura (3.2) exibe a solução obtida.

Na Figura (3.2) temos um perfil parabólico para um escoamento plenamente desenvolvido, conforme visto nas aulas da disciplina. Note que a velocidade máxima está quase no centro, deslocada devido ao movimento da placa superior.

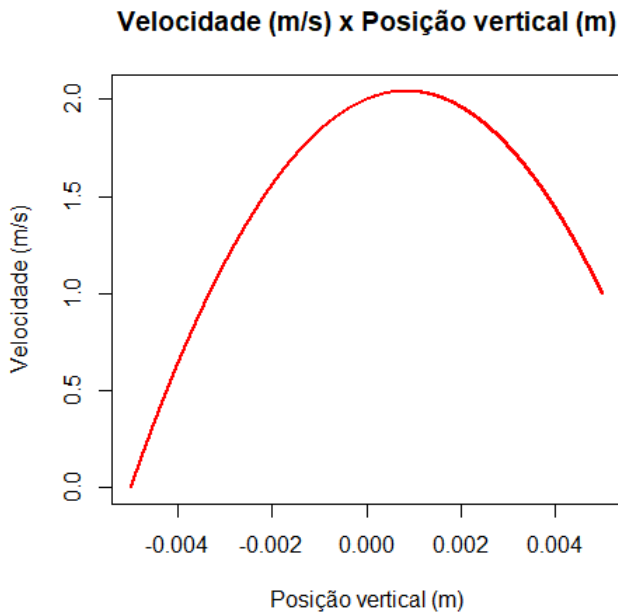
## 3.2 Análise Numérica

Vamos discretizar (3.5) com o método das diferenças finitas. Note que usamos o diferencial de pressão como constante, logo ele não precisa ser discretizado. Além disso, como o regime é permanente, usamos o método implícito.

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta y)^2} = \frac{dp}{dx} \frac{1}{\mu}$$

$$u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} = (\Delta y)^2 \frac{dp}{dx} \frac{1}{\mu} \quad (3.9)$$

Figura 3.2: Solução analítica da questão 3.



Fonte: elaboração própria.

A equação (3.9) é a equação para todos os nós internos no domínio. Nos contornos, de modo bem parecido como feito no Problema 2, temos, para  $i = -h$ ,

$$u_i = 0 \quad (3.10)$$

que corresponde ao ponto de contato do fluido com a placa inferior, em repouso. Similarmente, quando  $i = h$ , temos

$$u_i = U \quad (3.11)$$

que corresponde ao ponto de contato do fluido com a placa superior, com velocidade igual a  $U$ .

O algoritmo usado na solução é precisamente o mesmo da questão 2, apenas trocando as equações e os parâmetros físicos. Continuamos percorrendo cada  $\Delta y$ , identificando se ele é um nó interno, borda inferior ou de borda superior, e salvando os coeficientes nas matrizes. No final, resolvemos o sistema linear e obtemos o vetor solução.

O código completo feito em R nessa questão está disponível no ANEXO C. Repare que sua estrutura é a mesma que o código no ANEXO B. A Figura 3.3 exibe uma comparação entre as curvas obtidas analiticamente e numericamente para vários valores de  $N$ , onde  $N = 2h/\Delta y$ .

De modo bastante semelhante ao visto no Problema 2, na Figura 3.3 (a) vemos que o baixo de valor  $N$  resulta em um modelo de pouca exa-

tidão, com o baixo número de pontos discretizados tornando as aproximações lineares insuficientes para modelar a solução analítica, que é quadrática.

Conforme o valor de  $N$  aumenta, temos que as aproximações ficam cada vez melhores, e a partir  $N \geq 10$  o modelo numérico já está bastante parecido com a solução analítica, como mostram as Figuras 3.3 (c) e (d).

## 4 Quarta Questão (9 pts)

### 4.1 Análise Analítica

A Figura 4.1 exibe a geometria do Problema 4.

De modo parecido à modelagem do Problema 3, temos que partir das equações de Navier-Stokes e da equação de conservação da massa, assumindo escoamento incompressível. Podemos fazer as seguintes simplificações:

- Estamos modelando a geometria apenas em duas dimensões  $x$  e  $y$ :  $w = 0$  e derivadas em relação a  $z$  nulas.
- Gravidade atua apenas na componente  $y$ :  $g_x = g_z = 0$
- Regime permanente: derivadas em relação a  $t$  nulas

Com essas simplificações, temos três equações que modelam o problema

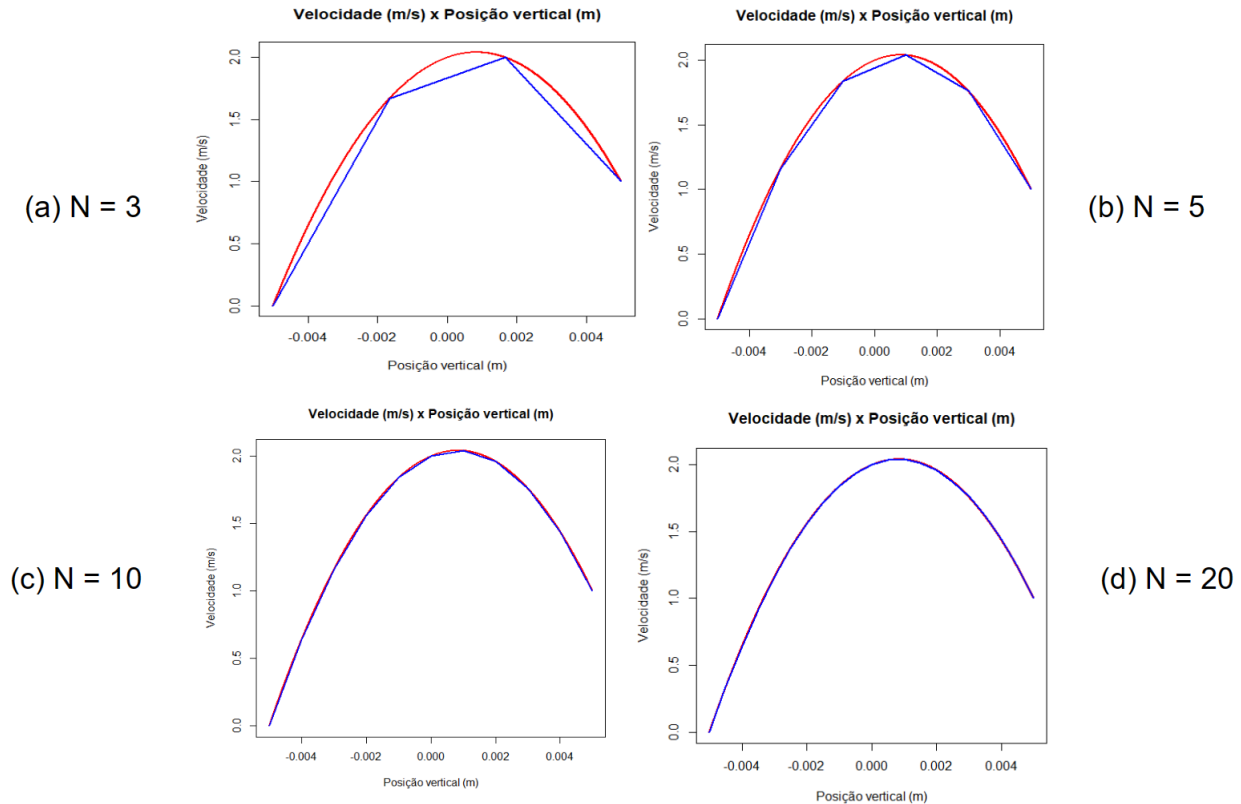
$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (4.1)$$

$$\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.3)$$

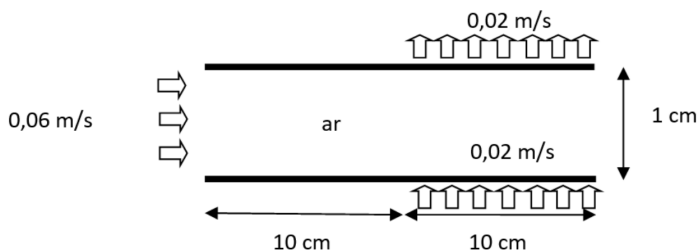
Conforme as equações (4.1), (4.2) e (4.3), temos que as velocidades horizontal  $u$  e vertical  $v$  são funções de duas variáveis:  $x$  e  $y$ . A injeção de ar pela face sul é de baixo para cima, logo temos efeito da gravidade no fluido, representada pelo termo  $\rho g_y$  em (4.2).

Os gradientes de pressão na direção  $x$  e  $y$  não foram informados no enunciado do problema, mas

Figura 3.3: Solução numérica (azul) e solução analítica (vermelha) para vários valores de  $N$ .

Fonte: elaboração própria.

Figura 4.1: Geometria da questão 4.



Fonte: elaboração própria.

espaiais nulas.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0, & x = 20 \text{ cm}, 0 \leq y \leq 1 \text{ cm} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0, & x = 20 \text{ cm}, 0 \leq y \leq 1 \text{ cm} \end{cases} \quad (4.5)$$

Na face sul temos uma região da parede que é fixa, e outra que é porosa com injeção de ar de baixo para cima. Assim, temos

$$\begin{cases} u(x, 0) = 0 \text{ m/s}, & 0 \leq x \leq 20 \text{ cm} \\ v(x, 0) = 0 \text{ m/s}, & 0 \leq x \leq 10 \text{ cm} \\ v(x, 0) = 0.02 \text{ m/s}, & 10 \leq x \leq 20 \text{ cm} \end{cases} \quad (4.6)$$

Na face norte temos condições de contorno simétricas à face sul. Note que na face sul é injeção de ar, e na face norte é sucção de ar, de modo que a direção e sentido de  $v$  em ambas faces é a mesma.

$$\begin{cases} u(0, y) = 0.06 \text{ m/s}, & 0 \leq y \leq 1 \text{ cm} \\ v(0, y) = 0 \text{ m/s}, & 0 \leq y \leq 1 \text{ cm} \end{cases} \quad (4.4)$$

Na face leste temos saída, que significa escoamento plenamente desenvolvido, ou seja, derivadas

$$\begin{cases} u(x, 1 \text{ cm}) = 0 \text{ m/s}, & 0 \leq x \leq 20 \text{ cm} \\ v(x, 1 \text{ cm}) = 0 \text{ m/s}, & 0 \leq x \leq 10 \text{ cm} \\ v(x, 1 \text{ cm}) = 0.02 \text{ m/s}, & 10 \leq x \leq 20 \text{ cm} \end{cases} \quad (4.7)$$

Finalmente, o problema é modelado matematicamente pelas equações diferenciais parciais (4.1), (4.2) e (4.3), com as condições de contorno especificadas em (4.4), (4.5), (4.6) e (4.7).

## 4.2 Análise Numérica

Ao contrário dos Problemas 1, 2 e 3, discretizar as equações diferenciais (4.1), (4.2) e (4.3) e desenvolver um programa para analisar numericamente seria bastante trabalhoso. Assim, usamos o software gratuito CFD Studio para obter a distribuição de velocidades.

As configurações usadas no software foram as seguintes:

- Tipo de malha utilizado: malha cartesiana, com 10 divisões na vertical e 20 na horizontal
- Esquema de interpolação: UDS
- Algoritmo de acoplamento pressão velocidade (P-V): simplec
- Coeficiente de sub-relaxação da pressão: 1.00
- Pressão de referência: 0 N/m
- Local de imposição de pressão de referência: Malha  $i = 19, j = 0$ , no canto inferior da face leste
- Número de iterações necessárias até convergir: 5000
- Solver utilizado: Gauss Seidel

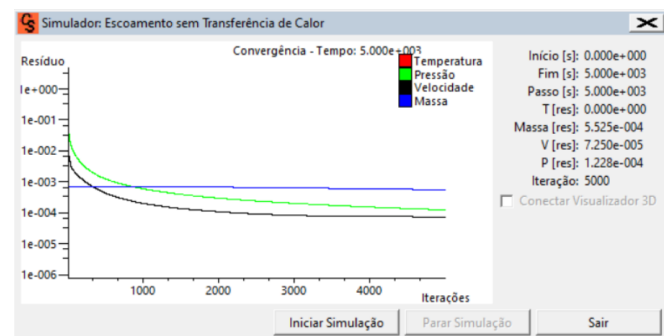
As demais configurações do software foram as padrões para escoamento sem transferência de calor, seguindo os passos do Assistente de Problema CFD.

As condições iniciais são  $u = v = 0$  em todo o domínio pois o regime de escoamento é permanente. O material selecionado foi ar, com propriedades de viscosidade  $\mu = 1.85 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$  e massa específica  $\rho = 1.161 \text{ kg m}^{-3}$ .

As condições de contorno (4.4), (4.5), (4.6) e (4.7) podem facilmente ser inseridas no software através da interface gráfica.

Uma vez inseridos todas essas condições de contorno e configurações, a Figura 4.2 exibe a convergência da simulação realizada.

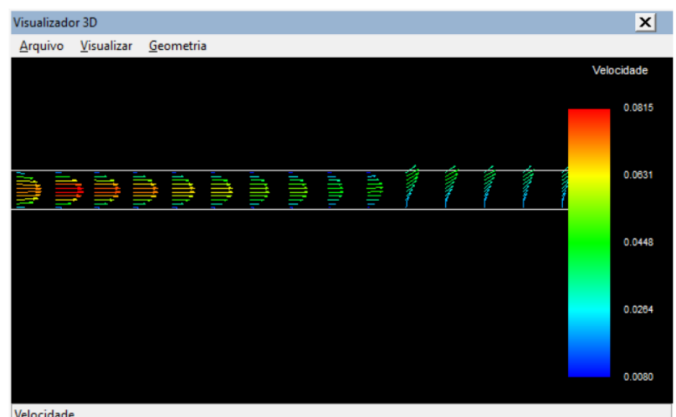
Figura 4.2: Convergência da simulação no CFD Studio.



Fonte: elaboração própria.

Como visto na Figura 4.2, a configuração selecionada atingiu uma boa convergência de velocidade, pressão e massa. A Figura 4.3 exibe a distribuição do campo de velocidades simulado. Os vetores da imagem foram escalados por um fator 3 para melhorar a visualização.

Figura 4.3: Distribuição de velocidades no problema, obtida com o CFD Studio.



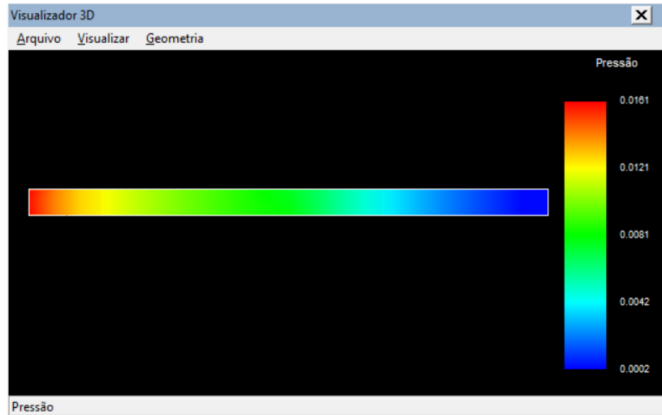
Fonte: elaboração própria.

A distribuição na Figura 4.3 é condizente com o esperado fisicamente. Quando o fluido de alta velocidade entra no espaço entre as placas, o escoamento apresenta um perfil parabólico, e conforme o fluido avança no espaço entre as placas na direção  $x$  a velocidade vai reduzindo. Ao atingir o centro do tubo ( $x = 10 \text{ cm}$ ), a injeção vertical de ar através da face sul porosa deforma o perfil até então parabólico do escoamento. De fato, para  $x \geq 10 \text{ cm}$ , temos uma distribuição de velocidades como uma parábola deslocada para cima, resultado da força para cima exercida pelo ar injetado.

A Figura 4.4 exibe a distribuição de pressão ao longo do tubo. Note que fixamos a pressão de referência em zero no canto inferior direito da geometria na configuração da pressão de referência. Além

disso, temos que a pressão é máxima no ponto de entrada do fluido de alta velocidade, o que também é conforme o esperado fisicamente.

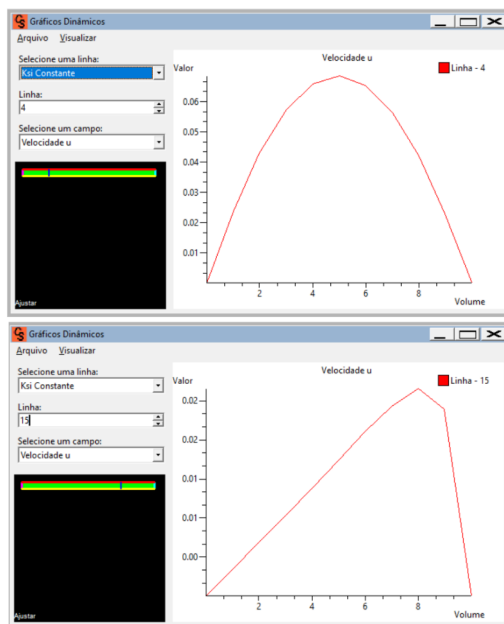
Figura 4.4: Distribuição de pressão no problema, obtida com o CFD Studio.



Fonte: elaboração própria.

A Figura 4.5 mostra o perfil de velocidades ao longo de duas retas verticais no tubo, a primeira na linha  $i = 4$  (quinta divisão horizontal), antes da injeção de ar, e a segunda na linha em  $i = 15$  (décima sexta divisão horizontal), que é depois da injeção de ar.

Figura 4.5: Perfil de velocidades ao longo linhas verticais  $i = 4$  e  $i = 15$  no tubo.

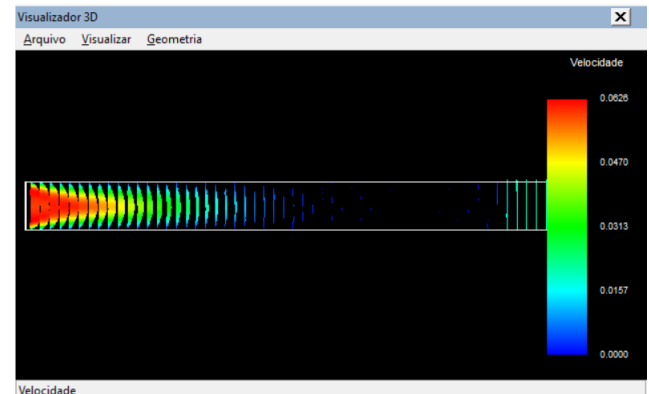


Fonte: elaboração própria.

Os gráficos da Figura 4.5 reforçam a análise feita com o campo vetorial da velocidade na Figura 4.3. Após a injeção de ar, o perfil parabólico do escoamento é deformado para cima.

A última análise que podemos fazer com o CFD Studio é o teste de malhas. Os resultados acima foram obtidos com uma malha  $20 \times 10$ , totalizando 200 nós. Vamos refazer a simulação com uma malha  $100 \times 50$ , com 5000 nós, para verificar o impacto do refinamento da malha nos resultados. A distribuição de velocidades obtida com essa malha foi está exibida na

Figura 4.6: Perfil de velocidades obtido com a malha  $100 \times 50$ .



Fonte: elaboração própria.

Comparando as Figuras 4.3 e 4.6, temos que as velocidades calculadas na entrada e no início da região porosa são similares. A principal diferença observada é que, na malha  $100 \times 50$ , o escoamento praticamente se encerrou em  $x = 5$  cm, sendo retomado apenas quando ocorre a injeção de ar a partir de  $x \geq 10$  cm. Por outro lado, na entrada do tubo, temos um perfil muito mais detalhado da distribuição de velocidades quando o ar inicialmente entra no espaço entre as placas.

É importante destacar que a simulação feita na Figura 4.6 foi com apenas 1000 iterações, ao passo que a iteração da Figura 4.3 teve 5000. Isso foi feito pois, com o aumento no número de nós, o tempo gasto por iteração aumentou consideravelmente. Para executar as 1000 iterações na nova malha, foi gasto quase 2 minutos.

## 5 Referências

INCROPERA, Frank, et. al. Fundamentals of Heat and Mass Transfer. 6 ed. John Wiley & Sons Inc. 2007.

PRITCHARD, Philip J. Fox and McDonald's Introduction to Fluid Mechanics. 8 ed. John Wiley & Sons Inc. 2011.

## Anexo A

Aqui está o código completo desenvolvido em R na questão 1. O código de formatação dos dados com o pacote flextable não está exibido.

```
U0 <- 1
mu <- 0.29
rho <- 891

H <- 10 * 10^-2 # tamanho vertical do dominio, em metros
T <- 1 # periodo total de analise, em segundos
N <- 40 # numero de malhas (intervalos) da direcao y, unidimensional
M <- 200 # numeros de pontos no tempo
dy <- H / N # metros por divisao
dt <- T / M # segundos por divisao
K = (mu / rho) * dt / (dy^2) # deve ser que menor que 0.5

N <- N + 1 # ajuste para incluir a posicao zero

y <- c()

# configura a malha
for (yi in 1:N) {
  y[yi] <- (yi - 1) * dy
}

solutionsList <- list()

boundaryVelBottom <- 1
boundaryVelTop <- 0
initialVel <- 0 # inicialmente em repouso

initialMesh <- c()

# associa condicao inicial a malha
for (yi in 1:N) {
  if (yi == 1) {
    # se esta na base
    initialMesh <- append(initialMesh, boundaryVelBottom)
  } else if (yi == N) {
    # se esta no topo
    initialMesh <- append(initialMesh, boundaryVelTop)
  } else {
    # se nao, eh malha interna
    initialMesh <- append(initialMesh, initialVel)
  }
}

solutionsList[[1]] <- initialMesh

for (t in 1:M) {
  prevU <- solutionsList[[t]]

  newU <- c()
  for (yi in 1:N) {
```

```

# se esta na base ou no topo, temos condicao de contorno
if (yi == 1) {
  # se esta na base
  newU <- append(newU, boundaryVelBottom)
} else if (yi == N) {
  # se esta no topo
  newU <- append(newU, boundaryVelTop)
} else {
  # se nao, eh malha interna e usa a expressao deduzida
  newU <- append(newU, prevU[yi] + K * (prevU[yi + 1] - 2 * prevU[yi] + prevU[yi -
    1] ))
}
}

solutionsList[[t + 1]] <- newU
}

```

## Anexo B

Neste anexo está o código completo desenvolvido em R na questão 2. O código usado para gerar os gráficos não está exibido.

```

dpdz <- -12.928
mu <- 1.01 * 10^-3
R <- 25 * 10^-3
N <- 50 # numero de pontos analisados
dr <- R/N # passo no espaco

r_seq <- seq(from = 0.0, to = R, by = dr)

N <- N + 1 # ajuste posicao zero

A <- matrix(0, ncol = N, nrow = N)
line <- 0

# matriz coluna (vetor vertical) que representa os termos independentes
b <- rep(0, N)

for (ri in r_seq) {
  line <- line + 1

  if (ri == 0) {
    # condicao de simetria
    A[line, line + 1] <- 1
    A[line, line] <- -1

    b[line] <- (dpdz / mu) * (1/4) * dr^2
  } else if (ri == R) {
    # na borda do cano, velocidade nula (cond de contorno)
    # assim temos 1 * u_R = 0 ==> u_R = 0

    A[line, line] <- 1
    b[line] <- 0
  } else {

```



```

    # no interno
    A[line, line + 1] <- 1 + ri / dr
    A[line, line] <- -1 - 2 * ri / dr
    A[line, line - 1] <- ri / dr

    b[line] <- (dpdz / mu) * ri * dr
  }
}

u_numerical <- solve(A) %*% b

```

## Anexo C

Neste anexo está o código completo desenvolvido em R na questão 3. O código usado para gerar os gráficos não está exibido.

```

dpdx <- -178800
mu <- 1.49
h <- 5 * 10^-3
U <- 1
N <- 20 # numero de pontos analisados
dy <- 2 * h/N # passo no espaco

N <- N + 1 # ajuste posicao incial

y_seq <- seq(from = -h, to = h, by = dy)

A <- matrix(0, ncol = N, nrow = N)
b <- rep(0, N)

line <- 0

for (yi in y_seq) {
  line <- line + 1

  if (yi == -h) {
    # condicao de contorno placa de baixo
    # u0 = 0 ==> 1 * u0 = 0

    A[line, line] <- 1
    b[line] <- 0
  } else if (yi == h) {
    # condicao de contorno placa de cima
    # uN = U ==> 1 * uN = U

    A[line, line] <- 1
    b[line] <- U
  } else {
    # no interno, usa a equacao de diferencas finitas deduzida
    A[line, line + 1] <- 1
    A[line, line] <- -2
    A[line, line - 1] <- 1

    b[line] <- (dpdx / mu) * dy^2
  }
}

```

```
}  
}  
  
u_numerical <- solve(A) %*% b
```