Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG
Curso de Graduação em Engenharia de Sistemas

EMA255 - Fluidos e Termodinâmica Computacional

Lista de Exercícios de Dinâmica dos Fluidos

Aluno: Raphael Henrique Braga Leivas

Matrícula: 2020028101

Belo Horizonte

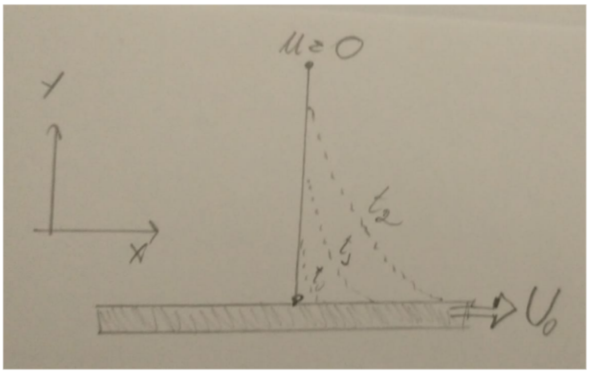
Semestre 2023/1

1 Primeira Questão (6 pts)

1.1 Análise Analítica

Um fluido de viscosidade μ e massa específica ρ está em repouso sobre uma placa horizontal quando ela começa a se mover com velocidade constante U_0. A Figura 1.1 exibe a geometria do problema.

Figura 1.1: Geometria da questão 1.



Fonte: elaboração própria.

Como mostra a Figura 1.1, a linha média do fluido começa a ser arrastada pelo movimento da placa, e a cada instante de tempo t_0, t_1 e t_2 o movimento da placa atinge pontos cada vez mais altos da linha média do fluido. Nesse cenário, a velocidade horizontal u do fluido é uma função de duas variáveis: posição vertical y e tempo t.

A equação diferencial que modela o problema é

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{1.1}$$

com as seguintes condições de contorno:

$$\begin{cases} u(0,t) = U_0, & \text{Condição de contorno 1} \\ u(H,t) = 0, & \text{Condição de contorno 2} \\ u(y,0) = 0, & \text{Condição inicial} \end{cases} \tag{1.2}$$

Veja que o problema é modelado por uma equação diferencial de segunda ordem em regime transiente, logo precisamos de duas condições de contorno e uma condição inicial.

No nosso sistema de coordenadas, $y = 0$ corresponde ao ponto do fluido em contato com a placa, e $y = H$ é a altura máxima que iremos considerar na análise. Note que, para H suficiente grande, faz sentido assumir que o movimento da placa não atinge esses pontos do fluido a uma grande distância da placa, de modo que $u(H,t) = 0$.

O problema dado por (1.1) e (1.2) possui solução analítica dada por

$$u(y,t) = U_0\left[1 - erf\left(\frac{y}{2\sqrt{\frac{\mu}{\rho}t}}\right)\right] \tag{1.3}$$

em que erf é a função erro dada por

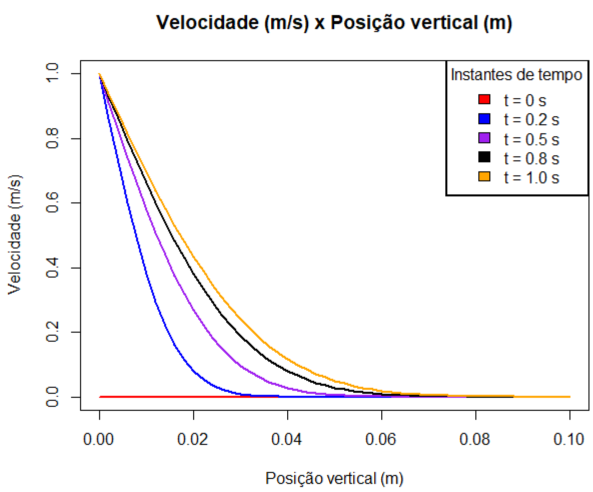
$$erf(\beta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\beta e^{-x^2}\,dx \tag{1.4}$$

Usando linguagem R e a IDE RStudio, é possível obter a distribuição de velocidades do fluido a partir da equação (1.3), uma vez que a função erro erf já está implementada em pacotes da linguagem. Usamos os seguintes parâmetros:

- Domínio de análise vertical: $H = 10$ cm
- Domínio de análise no tempo: $T = 1$ s
- Viscosidade: $\mu = 0.29\ \text{kg m}^{-1}\ \text{s}^{-1}$
- Massa específica: $\rho = 891\ \text{kg m}^{-3}$
- Velocidade da placa: $U_0 = 1$ m/s

A Figura 1.2 exibe os valores de $u(y,t)$ em função do tempo e posição vertical obtidos através da equação (1.3) com os parâmetros acima.

Figura 1.2: Velocidade u do fluido em função da posição e tempo.



Fonte: elaboração própria.

As velocidades obtidas analiticamente na Figura 1.2 são condizentes com o analisado da geometria na Figura 1.1. Conforme o tempo passa, os pontos do fluido apresentam velocidade u cada vez maior, uma vez que são arrastados pelo movimento da placa. Os pontos em $y > 7$ cm já não sofrem nenhum efeito do movimento da placa até $t = 1$ s.

Analisando os pontos específicos pedidos no exercício, temos

$$u(3\ \mathrm{cm}, 0.5\ \mathrm{s}) = 0.096\ \mathrm{m/s}$$
$$u(3\ \mathrm{cm}, 1\ \mathrm{s}) = 0.24\ \mathrm{m/s}$$

1.2 Análise Numérica

Uma vez entendido o que está acontecendo analiticamente, podemos fazer uma análise numérica do problema usando o método de diferenças finitas. O primeiro passo é discretizar a equação diferencial (1.1), trocando os diferenciais por diferenças.

$$\frac{u^{p+1} - u^p}{\Delta t} = \frac{\mu}{\rho} \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta y)^2} \tag{1.5}$$

Em (1.5) adotamos a seguinte simbologia:

- Sobrescrito p: indica o tempo da velocidade u. p indica o tempo atual, $p+1$ o próximo tempo
- Subscrito i: indica a posição vertical da velocidade u. i indica a posição atual, $i+1$ a próxima posição
- Δt: intervalo de discretização no tempo
- Δy: intervalo de discretização no espaço (vertical)

Assim, a linha média da Figura 1.1 é discretizada em $H/\Delta y$ elementos de comprimento Δy, e o tempo é transcorrido a partir de $t = 0$ até $t = T$ em intervalos de Δt. Vamos reescrever (1.5) de modo a expressar a velocidade futura em função da velocidade antiga.

$$u^{p+1} = u^p + \frac{\mu}{\rho} \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2} \left(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}\right) \tag{1.6}$$

Em (1.6), usamos o método explícito ao aplicar as difenças finitas. Portanto, é fundamental analisar os critérios de estabilidade para que a solução converja. Em transferência de calor, vimos que a equação diferencial de condução unidimensional em regime transiente é

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{1.7}$$

onde α é a difusivade térmica do material. Nesse modelo, o critério de estabilidade é, segundo Incropera (2007),

$$\frac{\alpha \Delta t}{(\Delta y)^2} \leq \frac{1}{2} \tag{1.8}$$

Comparando as equações diferenciais (1.1) e (1.7), podemos ver que as constantes α e μ/ρ possuem o mesmo papel, apesar de uma ter um significado físico de transferência de calor e outra um significado de mecânica dos fluidos. Nesse sentido, podemos inferir que o critério de estabilidade de (1.6) é

$$\frac{\mu}{\rho} \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2} \leq \frac{1}{2} \tag{1.9}$$

Concluída essa análise, podemos jogar (1.6) no computador para obter a solução numérica do problema. Novamente usando R e a IDE RStudio, o pseudocódigo abaixo mostra o procedimento para resolver o problema numericamente.

listaSoluções ← Lista()
$i \leftarrow 0$
for Δt em T **do**
    $i \leftarrow i + 1$
    soluçãoAntiga ← listaSoluções[i]
    for Δy em H **do**
        calcule novaVelocidade
    end for
    listaSoluções[$i+1$] ← novaVelocidade
end for
    return listaSoluções

O pseudocódigo acima está bastante simplificado, mas ele mostra a ideia principal: percorremos dois loops, um para o tempo e um para a posição vertical. Percorremos todos os intervalos verticais, calculando as velocidade, para cada intervalo de tempo. Ao final de cada loop do tempo, salva o novo vetor de velocidades calculado na lista de soluções. No final da execução, a lista de soluções tem $T/\Delta t$ elementos, e cada elemento é um vetor de tamanho $H/\Delta y$.

O código completo desenvolvido em R, que implementa o pseudocódigo acima, pode ser visto no ANEXO A. A Figura 1.3 mostra a distribuição de velocidades obtida com o código do ANEXO A para $\Delta t = 0.05$ s e $\Delta y = 1$ cm.

Figura 1.3: Distribuição de velocidades obtida com a solução numérica.

Posição y (cm)	Velocidade (m/s)				
	0 s	0.25 s	0.5 s	0.75 s	1 s
0	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
1	0.00	0.46	0.59	0.66	0.70
2	0.00	0.14	0.28	0.37	0.44
3	0.00	0.03	0.10	0.18	0.25
4	0.00	0.00	0.03	0.08	0.12
5	0.00	0.00	0.01	0.03	0.05
6	0.00	0.00	0.00	0.01	0.02
7	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01
8	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
9	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
10	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Fonte: elaboração própria.

Note que os valores escolhidos de Δt e Δy atendem ao critério de estabilidade:

$$\frac{\mu}{\rho}\frac{\Delta t}{(\Delta y)^2} = 0.1627 \leq 0.5$$

A tabela da Figura 1.3 foi construída com o pacote `flextable` da linguagem, que formata a lista de soluções na forma de uma tabela.

Os dados obtidos na Figura 1.3 são condizentes tanto com o esperado da geometria quanto do resultado analítico da Figura (1.2). Com o passar no tempo, as velocidades mais distantes da placa aumentam, e pontos muito distantes não sofrem efeito algum.

Em particular, na Figura 1.3, obtemos

$$u(3\text{ cm}, 0.5\text{ s}) = 0.10\text{ m/s}$$
$$u(3\text{ cm}, 1\text{ s}) = 0.25\text{ m/s}$$

através da solução numérica. O erro percentual com a solução analítica é dado por

$$E_{\%} = \frac{V_{\text{numerico}} - V_{\text{analitico}}}{V_{\text{analitico}}} 100\% \tag{1.10}$$

Assim, para $y = 3$ cm em $t = 0.5$ s temos erro

$$E_{\%} = \frac{0.10 - 0.096}{0.096} 100\% = 4.2\%$$

e para $y = 3$ cm em $t = 1$ s,

$$E_{\%} = \frac{0.25 - 0.24}{0.24} 100\% = 4.2\%$$

com ambos erros inferiores a 5% em relação ao resultado analítico. Assim, podemos concluir que o modelo numérico é satisfatório.

2 Segunda Questão (9 pts)

2.1 Análise Analítica

O escoamento de um fluido de viscosidade μ e massa específica ρ, plenamente desenvolvido em regime permanente, em coordenadas cilíndricas, é modelado pela equação diferencial

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} + \frac{\mu}{\rho}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right) = 0$$

note que podemos cancelar a massa específica ρ, obtendo

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right) = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\frac{1}{\mu} \tag{2.1}$$

Com um gradiente de pressão constante, temos que a velocidade axial u é uma função de apenas uma variável r. Assim, temos as condições de contorno:

$$\begin{cases} u(0) = \text{ simetria} & \Rightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} = 0, \\ u(R) = 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

onde R é o raio da tubulação por onde o fluido está escoando. Quando $r = R$ estamos em contato com as paredes da tubulação, que naturalmente têm velocidade nula. A primeira condição de contorno (simetria) é consequência do sistema de coordenadas cilíndricas adotado.

Como (2.1) é uma EDO de primeira ordem, podemos tentar obter uma solução analítica por integração direta.

$$\int \frac{d}{dr}\left(r\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right) dr = \int r\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\frac{1}{\mu} dr$$

$$r\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} = \frac{r^2}{2}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\frac{1}{\mu} + C_1$$

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\,dr = \int \frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\frac{1}{\mu} + \frac{C_1}{r}\,dr$$

$$u(r) = \frac{r^2}{4}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\frac{1}{\mu} + C_1 ln(r) + C_2 \tag{2.3}$$

A equação (2.3) é a solução geral para a EDO (2.1). Para que ela atenda às condições de contorno de (2.2), de imediato temos $C_1 = 0$, pois o logaritmo natural não está definido para $r = 0$, sendo que fisicamente já sabemos que há uma velocidade no centro da tubulação. Assim, (2.3) se reduz a

$$u(r) = \frac{r^2}{4}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\frac{1}{\mu} + C_2$$

A constante C_2 pode ser identificada usando a condição de contorno $u(R) = 0$:

$$0 = \frac{R^2}{4}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\frac{1}{\mu} + C_2$$

$$C_2 = -\frac{R^2}{4}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\frac{1}{\mu}$$

Assim, a solução analítica do problema é

$$u(r) = \frac{r^2}{4}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\frac{1}{\mu} - \frac{R^2}{4}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\frac{1}{\mu}$$

$$u(r) = \frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\frac{1}{\mu}\left(r^2 - R^2\right) \tag{2.4}$$

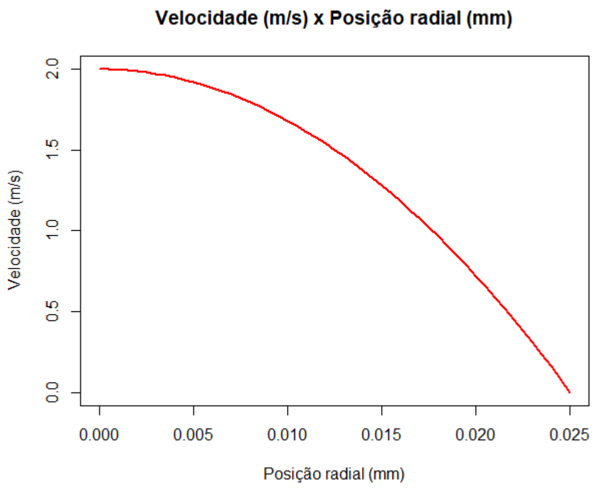
No problema temos os seguintes parâmetros:

- Raio do tubo: $R = 25$ mm
- Viscosidade: $\mu = 1.01 \cdot 10^{-3}\ \ \mathrm{kg\ m^{-1}\ s^{-1}}$
- Gradiente de pressão: $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -12.928\ \mathrm{N/m}$
- Massa específica: $\rho = 998\ \mathrm{kg\ m^{-3}}$

Com esses parâmetros, a Figura 2.1 mostra o perfil de velocidade dentro da tubulação conforme a solução analítica em (2.4).

O perfil de velocidade da Figura 2.1 é condizente com o esperado fisicamente: a velocidade é máxima no centro do tubo, e zero nas paredes na tubulação, atendendo também às condições de contorno de (2.2). Além disso, igual visto durante as aulas da disciplina, temos um perfil parabólico para o escoamento plenamente desenvolvido na tubulação.

Figura 2.1: Solução analítica da questão 2.



Fonte: elaboração própria.

2.2 Análise Numérica

Concluída a análise analítica, podemos realizar uma análise numérica do problema. De modo semelhante ao feito na Questão 1, o primeiro passo é discretizar a equação diferencial (2.1) via diferenças finitas.

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right) = r\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\frac{1}{\mu}$$

aplicando a regra do produto no primeiro membro da equação,

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} + r\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2} = r\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\frac{1}{\mu}$$

agora substituimos os diferenciais por diferenças finitas:

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta r} + r\left(\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta r)^2}\right) = r\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\frac{1}{\mu}$$

$$u_{i+1} - u_i + r\left(\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta r}\right) = (\Delta r) r\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\frac{1}{\mu}$$

agrupando as velocidades,

$$\begin{aligned} u_{i+1}\left(1 + \frac{r}{\Delta r}\right) + u_i\left(-1 - 2\frac{r}{\Delta r}\right) \\ + u_{i-1}\left(\frac{1}{\Delta r}\right) = (\Delta r) r\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\frac{1}{\mu} \end{aligned} \tag{2.5}$$

Note que (2.5) é a forma implícita de diferenças finitas para os nós internos do domínio. Os termos ligados às velocidades são os coeficientes do sistema linear, e o segundo membro de (2.5) tem os coeficientes independentes do sistema linear.

Antes de tentar montar o sistema linear em software, precisamos identificar as equações dos nós do contorno da geometria. Na parede, temos condição de contorno $u(R) = 0$, logo a equação para $i = R$ é

$$u_i = 0 \tag{2.6}$$

Além disso, na linha de centro temos simetria, dada matematicamente por

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} = 0$$

Durante a análise analítica, vimos que

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} = \frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\frac{1}{\mu} + \frac{C_1}{r}$$

com $C_1 = 0$,

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} = \frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\frac{1}{\mu}$$

Discretizando a expressão acima, e usando $r = \Delta r/2$ para analisarmos o que está acontecendo no nó central, temos

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta r} = \frac{\Delta r/2}{2}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\frac{1}{\mu}$$

$$u_{i+1} - u_i = \frac{(\Delta r)^2}{4}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\frac{1}{\mu} \tag{2.7}$$

Assim, quando estivermos percorrendo cada Δr no domínio, identificamos se ele é um nó interno, nó central ou nó em contato com as paredes. Em seguida usamos a seguinte metodologia:

- Se estamos em um nó interno, calcula os coeficientes através de (2.5)
- Se estamos na parede, calcula os coeficientes através de (2.6)
- Se estamos no nó central, calcula os coeficientes através de (2.7)

Uma vez calculados todos os coeficientes, teremos uma matriz de coeficientes A de dimensão $N \times N$, onde $N = R/\Delta y$, e um vetor de coeficientes independentes B de dimensão $N \times 1$. O vetor solução X, que contém as velocidades u de cada nó, tem dimensão $N \times 1$ e é calculado através da equação matricial

$$X = A^{-1}B \tag{2.8}$$

O pseudocódigo abaixo mostra a ideia principal do software desenvolvido em R que implementa essa solução numérica. O software completo pode ser visto no ANEXO B.

```
N ← R/Δy
A ← Matriz(N × N)
B ← Vetor(N × 1)
i ← 0
for cada Δy em R do
    if Δy atual é nó interno then
        A[linha i] ← equação (2.5)
        B[i] ← equação (2.5)
    end if
    if Δy atual é parede then
        A[linha i] ← equação (2.6)
        B[i] ← equação (2.6)
    end if
    if Δy atual é nó central then
        A[linha i] ← equação (2.7)
        B[i] ← equação (2.7)
    end if
    i ← i + 1
end for
X ← inversa(A) * B
    return X
```

Ao contrário do problema 1, temos apenas um loop no código. Não temos marcha no tempo uma vez que o regime de escoamento é permanente. Nesse caso, basta percorrer cada intervalo Δy em R, identificar a natureza nesse nó, calcular os coeficientes, jogar nas matrizes A e B e resolver a equação matricial.

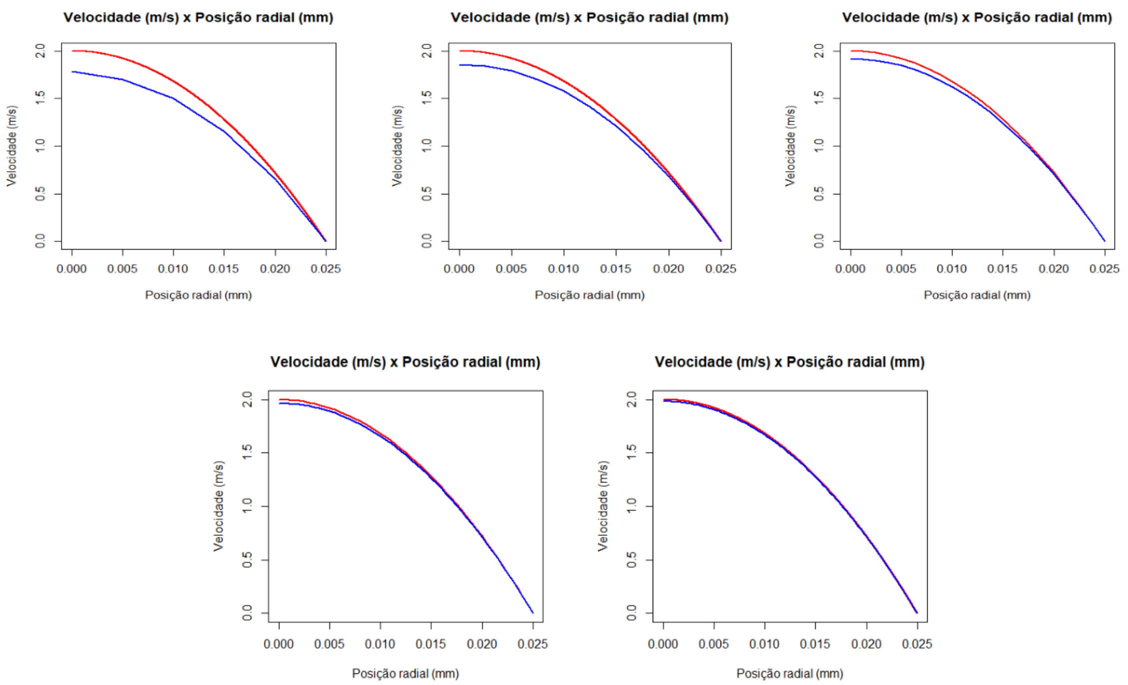
A Figura 2.2 mostra uma comparação entre os valores numéricos obtidos no código com a solução analítica da Figura 2.1 para diversas malhas.

Na Figura 2.2 (a) temos apenas 5 nós, e a solução obtida está longe da analítica. Além disso, é possível ver as retas das diferenças finitas na curva azul, uma vez que N é baixo, e assim não temos uma curva suave como a analítica. Conforme N aumenta nas Figuras 2.2 (b), (c) e (d), a solução numérica vai ser aproximando da analítica, ficando cada vez mais suave, até ficar praticamente idêntica à analítica para $N = 100$.

Com base nos gráficos da Figura 2.2, temos que modelo numérico desenvolvido é satisfatório para $N \geq 50$. Note que usamos o método implícito, e portanto não precisamos nos preocupar com critérios de estabilidade como na Problema 1. Nesse sentido,

Figura 2.2: Solução numérica (azul) e solução analítica (vermelha) para vários valores de N.

(a) N = 5 (b) N = 10 (c) N = 20



(d) N = 50 (e) N = 100

Fonte: elaboração própria.

não temos restrições teóricas para o valor máximo de N. Contudo, o uso de N muito elevando aumenta o custo computacional do software, principalmente da matriz de coeficientes que possui N^2 elementos. Assim, não é necessário, com base nos dados obtidos, usar N muito maior que 100 para esse modelo.

3 Terceira Questão (9 pts)

3.1 Análise Analítica

Para modelar o problema dado, temos que partir das equações de Navier-Stokes e da equação de conservação da massa. Assumindo escoamento incompressível (massa específica constante), temos

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \rho g_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{3.1}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = \rho g_y-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \tag{3.2}$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = \rho g_z-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \tag{3.3}$$

$$\nabla\cdot V=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{3.4}$$

As equações (3.1), (3.2) e (3.3) são as três equações de Navier-Stokes, e a equação (3.4) é a equação de conservação da massa.

Com base nos dados do problema, podemos fazer várias simplificações nas equações acima:

- Escoamento unidimensional apenas na direção x: $v = w = 0$
- Escoamento em regime permanente: $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$

- Gravidade atua apenas na componente y: $g_x = g_z = 0$
- Escoamento plenamente desenvolvido: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$
- Na geometria analisada, o sistema de coordenadas possui apenas eixos x e y: $\dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$

Com todas essas simplificações, as equações acima se reduzem a

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0 \tag{3.5}$$

em que u é função de apenas uma variável y. Assim, temos as seguintes condições de contorno para (3.5):

$$\begin{cases} u(-h) = 0, \\ u(h) = U \end{cases} \tag{3.6}$$

De modo semelhante ao feito na Questão 3, podemos tentar obter uma solução analítica para o modelo através de integração direta, assumindo que o gradiente de pressão na direção do escoamento $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$ é constante.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\frac{1}{\mu}$$

$$\int \frac{\partial u}{\partial y}\, dy = \int y \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\frac{1}{\mu} + C_1 \, dy$$

$$u(y) = \frac{y^2}{2}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\frac{1}{\mu} + yC_1 + C_2 \tag{3.7}$$

(3.7) é a solução geral da EDP (3.5). Com as condições de contorno, temos

$$\begin{cases} 0 = \frac{(-h)^2}{2}\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\dfrac{1}{\mu} - hC_1 + C_2, \\ U = \frac{h^2}{2}\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\dfrac{1}{\mu} + hC_1 + C_2 \end{cases}$$

somando as duas equações, temos

$$U = h^2 \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\frac{1}{\mu} + 2C_2$$

$$C_2 = \frac{1}{2}\left(U - h^2 \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\frac{1}{\mu}\right)$$

Agora substituimos esse C_2 calculado de volta, para achar o C_1:

$$0 = \frac{h^2}{2}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\frac{1}{\mu} - hC_1 + \frac{1}{2}\left(U - h^2 \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\frac{1}{\mu}\right)$$

$$0 = \frac{h^2}{2}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\frac{1}{\mu} - hC_1 + \frac{1}{2}U - \frac{1}{2}h^2 \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\frac{1}{\mu}$$

$$-\frac{1}{2}U = -hC_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{U}{2h}$$

Finalmente, a solução analítica de (3.5) com as condições de contorno de (3.6) é

$$u(y) = \frac{y^2}{2}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\frac{1}{\mu} + y\frac{U}{2h} + \frac{1}{2}\left(U - h^2 \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\frac{1}{\mu}\right)$$

$$u(y) = \frac{y^2}{2}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\frac{1}{\mu} + y\frac{U}{2h} + \frac{1}{2}U - \frac{1}{2}h^2 \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\frac{1}{\mu}$$

$$\frac{u(y)}{U} = \frac{y^2}{2U}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\frac{1}{\mu} + \frac{y}{2h} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2U}h^2 \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\frac{1}{\mu}$$

$$\frac{u(y)}{U} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{y}{h}\right) - \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\frac{h^2}{2\mu U}\left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right)$$

definimos P tal que

$$P = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\frac{h^2}{2\mu U}$$

e assim podemos reescrever a expressão como

$$\frac{u(y)}{U} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{y}{h}\right) + P\left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right) \tag{3.8}$$

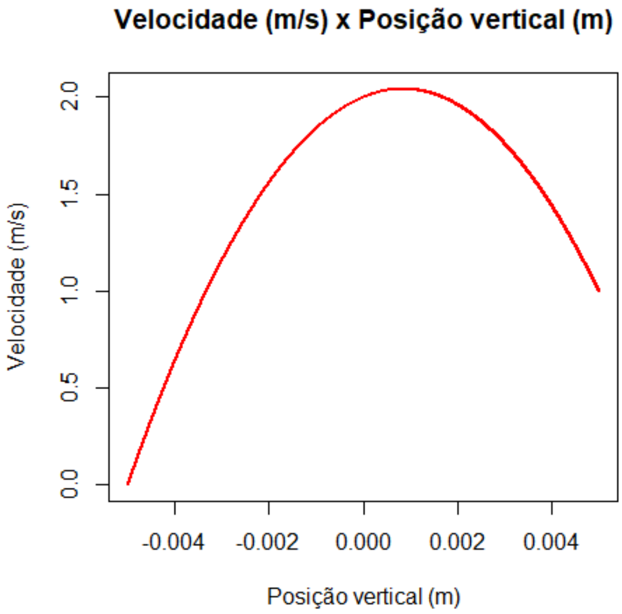
Usamos os seguintes parâmetros:

- Domínio de análise vertical: $-h \le y \le h$, com $h = 5$ mm
- Viscosidade: $\mu = 1.49 \;\; \mathrm{kg \; m^{-1} \; s^{-1}}$
- Velocidade de deslocamento da placa superior: $U = 1$ m/s
- Gradiente de pressão: $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = -178800$ Pa

Com (3.8) e os parâmetros, podemos obter a distribuição de velocidades do fluido analiticamete. A Figura (3.1) exibe a solução obtida.

Na Figura (3.1) temos um perfil parabólico para um escoamento plenamente desenvolvido, conforme visto nas aulas da disciplina. Note que a velocidade máxima está quase no centro, deslocada devido ao movimento da placa superior.

Figura 3.1: Solução analítica da questão 3.



Fonte: elaboração própria.

3.2 Análise Numérica

Vamos discretizar (3.5) com o método das difenças finitas. Note que usamos o diferencial de pressão como constante, logo ele não precisa ser discretizado. Além disso, como o regime é permanente, usamos o método implícito.

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta y)^2} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$$

$$u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} = (\Delta y)^2 \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \tag{3.9}$$

A equação (3.9) é a equação para todos os nós internos no domínio. Nos contornos, de modo bem parecido como feito no Problema 2, temos, para $i = -h$,

$$u_i = 0 \tag{3.10}$$

que corresponde ao ponto de contato do fluido com a placa inferior, em repouso. Similarmente, quando $i = h$, temos

$$u_i = U \tag{3.11}$$

que corresponde ao ponto de contato do fluido com a placa superior, com velocidade igual a U.

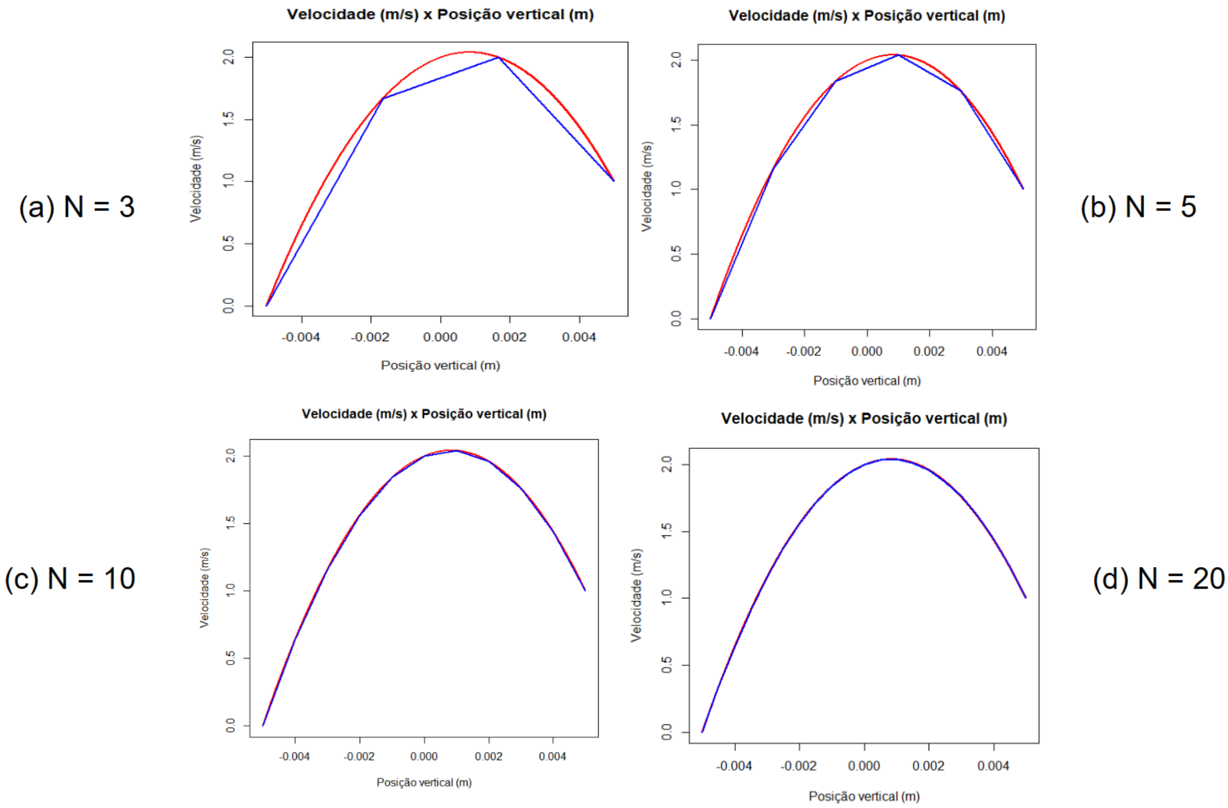
O algoritmo usado na solução é precisamente o mesmo da questão 2, apenas trocando as equações e os parâmetros físicos. Continuamos percorrendo cada Δy, identificando se ele é um nó interno, borda inferior ou de borda superior, e salvando os coeficientes nas matrizes. No final, resolvemos o sistema linear e obtemos o vetor solução.

O código completo feito em R nessa questão está disponível no ANEXO C. Repare que sua estrutura é a mesma que o código no ANEXO B. A Figura 3.2 exibe uma comparação entre as curvas obtidas analiticamente e numericamente para vários valores de N, onde $N = 2h/\Delta y$.

De modo bastante semelhante ao visto no Problema 2, na Figura 3.2 (a) vemos que o baixo de valor N resulta em um modelo de baixa exatidão, com o baixo número de pontos discretizados tornando as aproximações lineares insuficientes para modelar a solução analítica, que é quadrática.

Conforme o valor de N aumenta, temos que as aproximações ficam cada vez melhores, e a partir $N \geq 10$ o modelo numérico já está bastante parecido com a solução analítica, como mostram as Figuras 3.2 (c) e (d).

Figura 3.2: Solução numérica (azul) e solução analítica (vermelha) para vários valores de N.



Fonte: elaboração própria.