Hit-and-Run Algorithms for Generating Multivariate Distributions

Projet - Computational Statistics

Nils Baillie et Raphaël Razafindralambo

M2 MVA — ENS Paris-Saclay

Table des matières

1. Résumé de l'article [1]
2. Commentaires et critiques
3. Conclusion

Table des matières

1 Résumé de l'article [1]

2 Commentaires et critiques

3 Conclusion

Principe de l'algorithme

Contexte :

- S partie ouverte bornée de $\mathbb{R}^d$
- π distribution de densité f bornée, strictement positive sur S (cible)
- ν distribution sur ∂D (direction)

Algorithme :

- Point initial $x_0 \in S$
- Pour t allant de 0 à N_{iter} :
  1. Échantillonner θ_t selon ν
  2. Échantillonner λ_t dans $\Lambda_t = \{\lambda \in \mathbb{R} \,|\, x_t + \lambda\theta_t \in S\}$ de densité :

$$f_t(\lambda) = \frac{f(x_t + \lambda\theta_t)}{\int_{\Lambda_t} f(x_t + r\theta_t)dr}$$

  3. Poser $x_{t+1} = x_t + \lambda_t\theta_t$

Hypothèses et résultats

- π est invariante pour le noyau (ν, π)-Hit-and-Run P

Les deux hypothèses "ν full dimensional" et "les composantes de S communiquent par ν" impliquent que :

- P est φ-irréductible
- π est l'unique distribution invariante pour P (équivalence)
- P est apériodique
- P est Harris-récurrent

Les théorèmes précédents permettent de conclure à l'ergodicité de P.

Table des matières

1. Résumé de l'article [1]
2. Commentaires et critiques
3. Conclusion

Cas S non connexe

On considère l'ensemble non connexe $S = \mathcal{B}_d(x_1, 1) \cup \mathcal{B}_d(x_2, 1)$ où $d = 2$, $x_1 = (0, 0)^T$, $x_2 = (5, 0)^T$, et on souhaite échantillonner selon une loi π uniforme sur S.

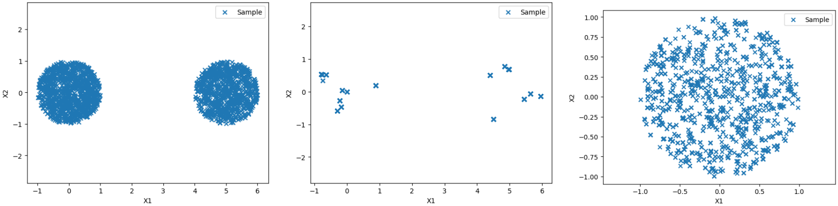

Figure 1 – Comparaison d'échantillonnage entre Hit-and-Run (ν uniforme) et Metropolis-Hastings (SRW $\sigma_{prop} = 10$ et $\sigma_{prop} = 1$) pour $N_{iter} = 2000$ iterations

On remarque que M-H échantillonne moins bien sur S. Le taux d'acceptation pour chacun des deux cas est 0.0085 et 0.3325. L'algorithme Hit-and-Run est plus robuste à la complexité (non connexité ici) de S.

Cas S non connexe

d	Avg time Hit-and-Run (s)	Avg time Hasting-Metropolis (s)
2	0.5698	1.3492
3	0.5109	1.3602
10	0.5218	1.5405
30	0.5390	2.0029
100	0.6820	17.5681

Table 1 – Effet de la dimensions d sur le temps de run moyen $(20$ runs) avec $N_{iter} = 10000$.

Vitesse de convergence

On se place dans le même cadre. On compare Hit-and-Run et H-M SRW avec $\sigma_{prop} = 10$.

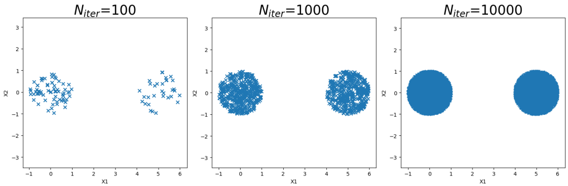

Figure 2 – Hit-and-Run

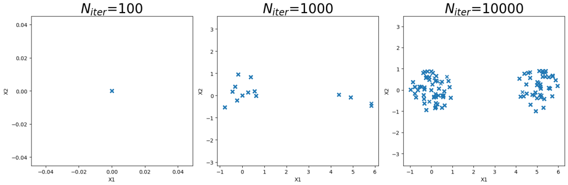

Figure 3 – Hasting Metropolis SRW

Table des matières

1 Résumé de l'article [1]

2 Commentaires et critiques

3 Conclusion

Conclusion

- Arguments théoriques avancés, pas toujours détaillés
- Méthode utile pour des distributions multimodales
- Aucune information quant à la vitesse de convergence
- Pas d'application numérique pour illustrer

Référence

[1] Claude JP Bélisle, H Edwin Romeijn et Robert L Smith. "Hit-and-run algorithms for generating multivariate distributions". In : *Mathematics of Operations Research* 18.2 (1993), p. 255-266.