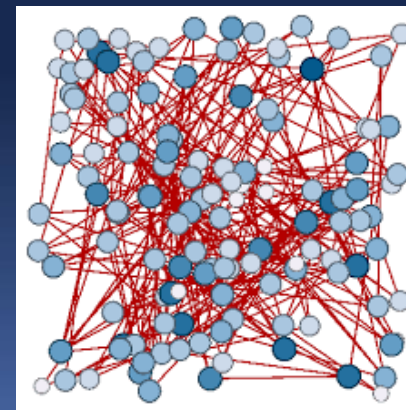
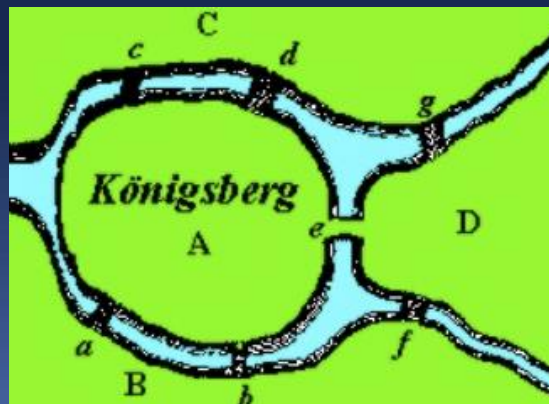
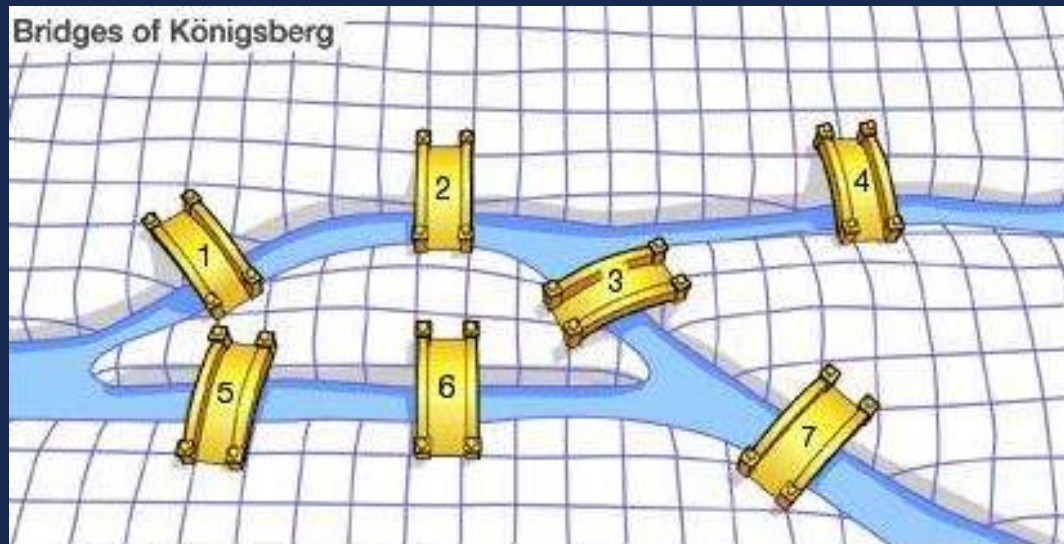


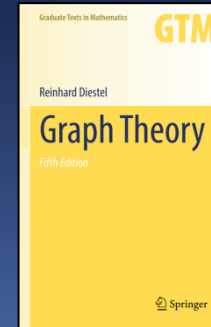
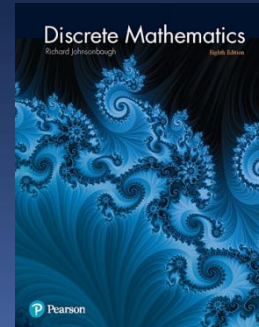
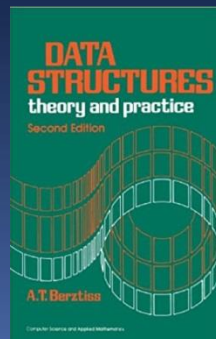
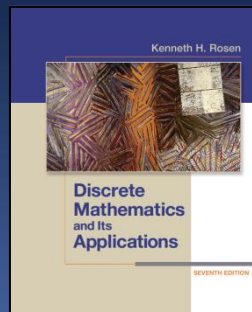
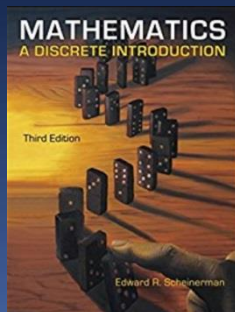
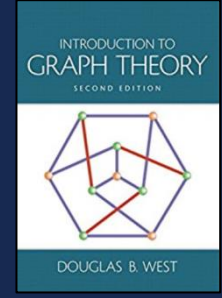
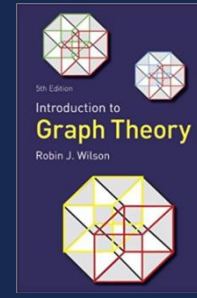
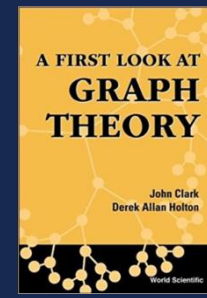
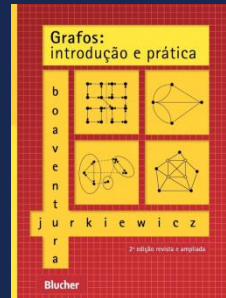
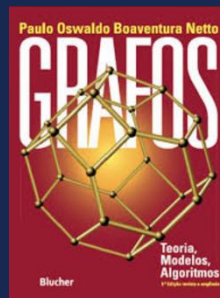


Unidade 17 – Grafos Eulerianos



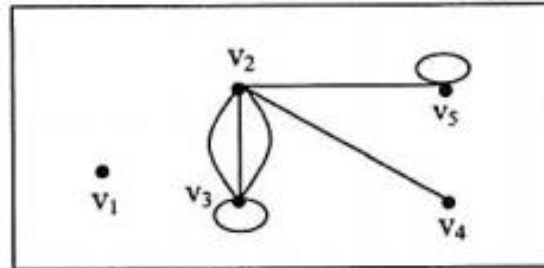
Bibliografia

- Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição - LTC
- Grafos – Teoria, Modelos, Algoritmos – Paulo Oswaldo Boaventura Netto, 5ª edição
- Grafos – Conceitos, Algoritmos e Aplicações – Marco Goldbarg, Elizabetj Goldbarg, Editora Campus
- A first look at Graph Theory – John Clark, Derek Allan Holton – 1998, World Cientific
- Introduction to Graph Teory – Robin J. Wilson – 4th Edition – Prentice Hall – 1996
- Introduction to Graph Theory – Douglas West – Second Edition 2001 – Pearson Edition
- Mathematics – A discrete Introduction – Third Edition – Edward R. Scheinerman – 2012
- Discrete Mathematics and its Applications – Kenneth H. Rosen – 7th edition – McGraw Hill – 2012
- Data Structures – Theory and Practice – A. T. Berztiss - New York – Academic Press – 1975 – Second Edition
- Discrete Mathematics – R. Johnsonbaugh – Pearson – 2018 – Eighth Edition
- Graoy Theory – R. Diestel – Springer – 5th Edition – 2017
- Teoria Computacional de Grafos – Jayme Luiz Szwarcfiter – Elsevier - 2018



Lembrando...

- ✓ Um grafo G pode ser informalmente definido como um conjunto de objetos chamados **vértices** e um conjunto de **arestas** que unem pares desses objetos;
- ✓ A maneira mais comum de se representar um grafo é por meio de um **diagrama**;
- ✓ Frequentemente, o próprio diagrama é referenciado como um **grafo**.
- ✓ Generalizando o conceito, em um grafo é possível que mais de uma aresta conecte o mesmo par de vértices (arestas paralelas), bem como uma aresta pode conectar um vértice a si próprio (aresta chamada loop).



Grafo com vértices $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e sete arestas, sendo três delas paralelas e duas são *loops*.



Formalmente...

- Um grafo $G = (V(G), E(G))$ ou $G = (V, E)$ consiste de **dois** conjuntos finitos:
 - ❖ $V(G)$, (ou V), que é o conjunto de **vértices** do grafo, o qual é um **conjunto não vazio** de elementos chamados vértices e
 - ❖ $E(G)$, (ou E), que é o conjunto de **arestas** do grafo, o qual é um conjunto (**que pode ser vazio**) de elementos chamados **arestas**;
- À cada aresta e em E atribui-se um **par não ordenado** de vértices (u, v) chamados **vértices-extremidade** de e ;
- Vértices** também são referenciados como pontos ou **nós**.



Exemplo

Seja o grafo $G = (V, E)$, tal que

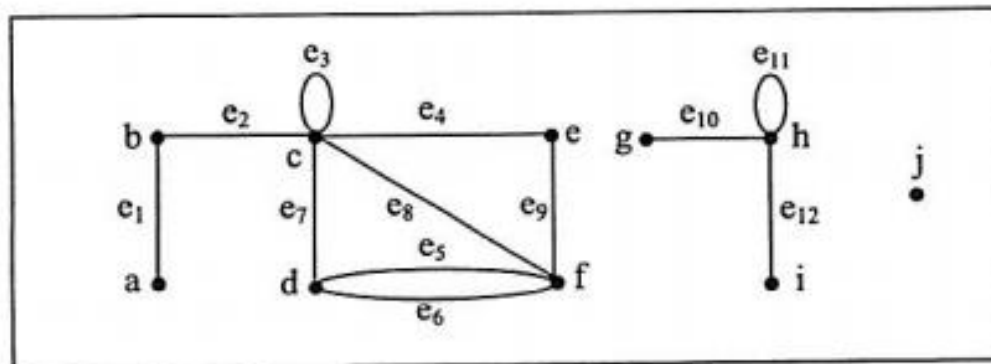
$$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\} \text{ e}$$

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}$$

e as extremidades das arestas expressas por:

$$\begin{array}{llllll} e_1 \leftrightarrow (a, b) & e_2 \leftrightarrow (b, c) & e_3 \leftrightarrow (c, c) & e_4 \leftrightarrow (c, e) & e_5 \leftrightarrow (d, f) & e_6 \leftrightarrow (d, f) \\ e_7 \leftrightarrow (c, d) & e_8 \leftrightarrow (c, f) & e_9 \leftrightarrow (e, f) & e_{10} \leftrightarrow (g, h) & e_{11} \leftrightarrow (h, h) & e_{12} \leftrightarrow (h, i) \end{array}$$

A Figura mostra a representação em diagrama do grafo G .



Grafo G com dez vértices e 12 arestas.



Passeio em um Grafo

- ✓ Muitos problemas em **Teoria dos Grafos** estão relacionados à possibilidade de se chegar a um **vértice** do grafo a partir de **outro**, seguindo-se uma **sequência** de **arestas**;
- ✓ Um **passeio** em um **grafo** é uma sequência **finita**

$$w = v_o e_1 v_1 e_2 v_2 \dots v_{k-1} e_k v_k$$

cujos elementos são, alternativamente, **vértices** e **arestas** tal que, para $1 \leq i \leq k$, a aresta e_i tem vértices-extremidades v_{i-1} e v_i ;





Passeio em um Grafo

$$w = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots v_{k-1} e_k v_k$$

- ✓ Assim, cada aresta e_i é imediatamente precedida e sucedida pelos vértices aos quais é incidente;
- ✓ Diz-se que o passeio w é um passeio $v_0 - v_k$ ou um passeio de v_0 até v_k
- ✓ O vértice v_0 é chamado origem do passeio w e o vértice v_k é chamado término de w ;
- ✓ Os vértices v_0 e v_k não precisam ser distintos;
- ✓ Os vértices v_1, \dots, v_{k-1} são chamados vértices internos.



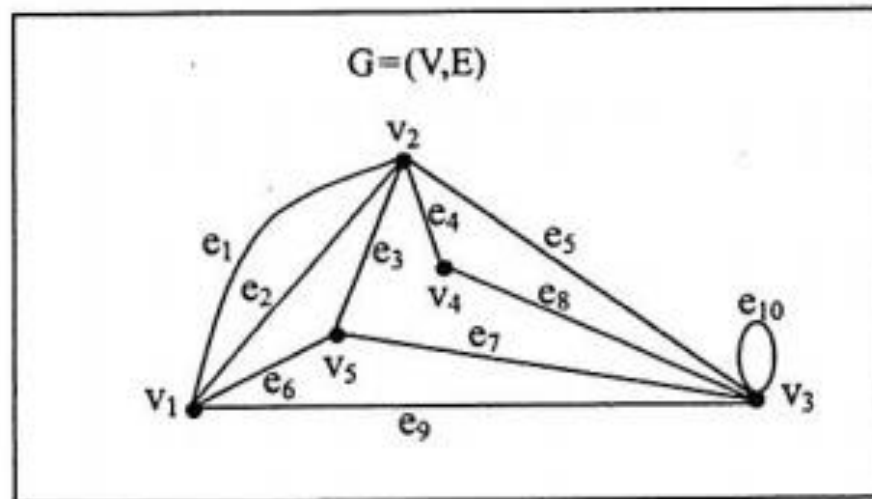
Comprimento de um Passeio em um Grafo

- ✓ Considere o grafo $G = (V, E)$ e uma passeio em G dado pela sequência $W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots v_{k-1} e_k v_k$.
- ✓ O inteiro k , que é o número de arestas do passeio, é chamado **Comprimento de W** ;
- ✓ Em um passeio **pode** haver repetições de **vértices** e **arestas**;
- ✓ No grafo $G = (V, E)$, dados dois vértices $u \in V$ e $v \in V$ em G , um passeio $u - v$ é **fechado** se $u = v$ e **aberto** se $u \neq v$;



Exemplo

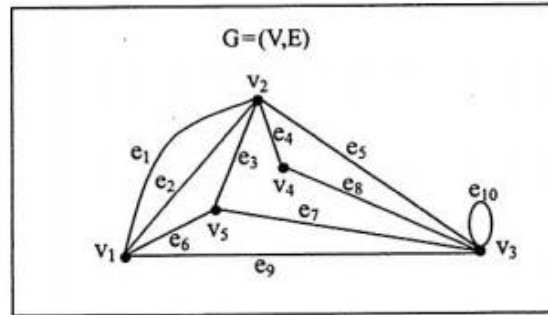
Considere o grafo $G = (V, E)$ mostrado na Figura



Grafo $G = (V, E)$, em que $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$.

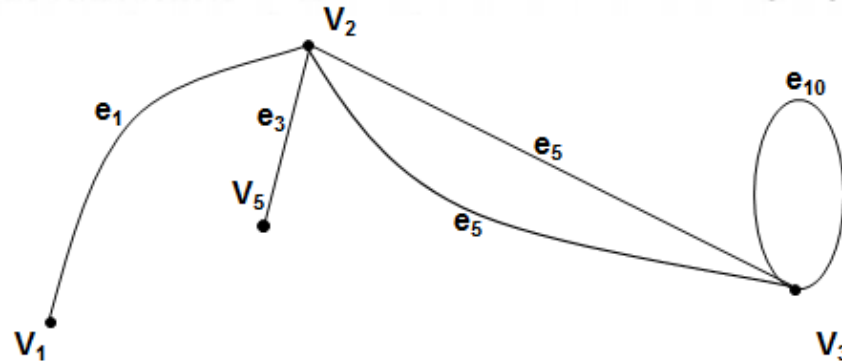
Exemplo

Considere o grafo $G = (V, E)$ mostrado na Figura



Grafo $G = (V, E)$, em que $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$.

$W_1 = v_1 e_1 v_2 e_5 v_3 e_{10} v_3 e_5 v_2 e_3 v_5$ é um passeio aberto de tamanho 5 de v_1 a v_5 .

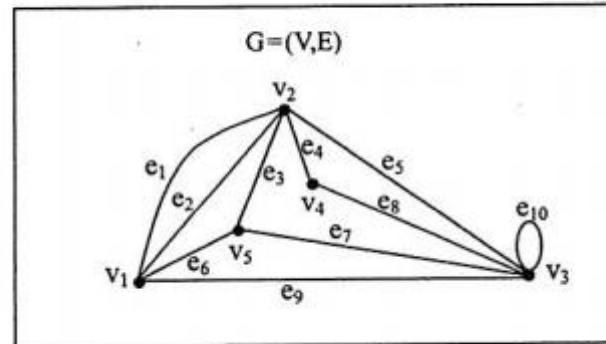


✓ Observação: A aresta e_5 está sendo **repetida** no passeio W_1



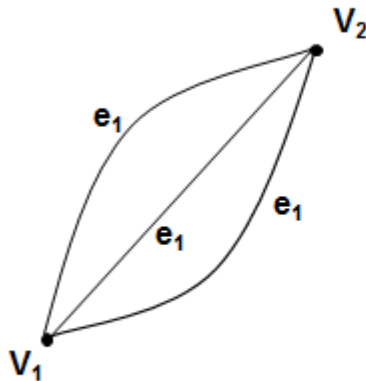
Exemplo

Considere o grafo $G = (V, E)$ mostrado na Figura



Grafo $G = (V, E)$, em que $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$.

$W_2 = v_1 e_1 v_2 e_1 v_1$ é um passeio aberto de tamanho 3 de v_1 a v_2 .

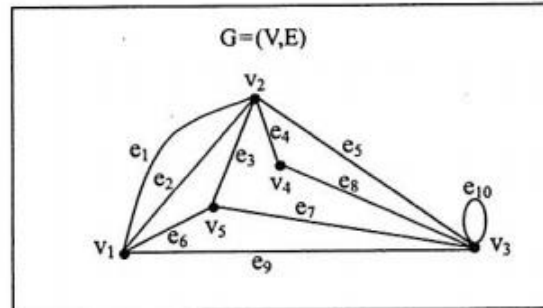


✓ Observação: A aresta e_1 está sendo **repetida** no passeio W_2



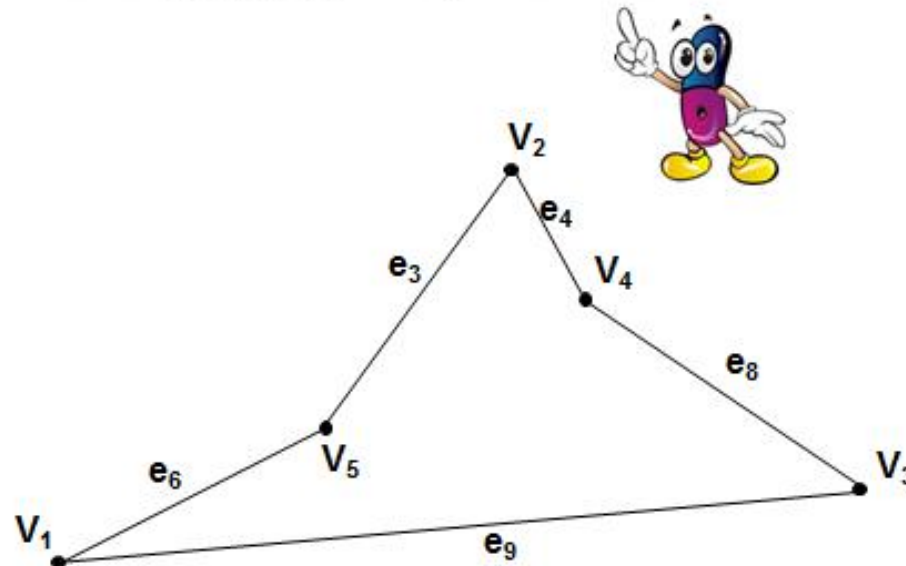
Exemplo

Considere o grafo $G = (V, E)$ mostrado na Figura



Grafo $G = (V, E)$, em que $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$.

$W3 = v_1 v_5 v_2 v_4 v_3 v_1$ é um passeio fechado de tamanho 5.



Trilha em um Grafo

- ✓ Seja $G = (V, E)$ um grafo e considere o **passeio**:

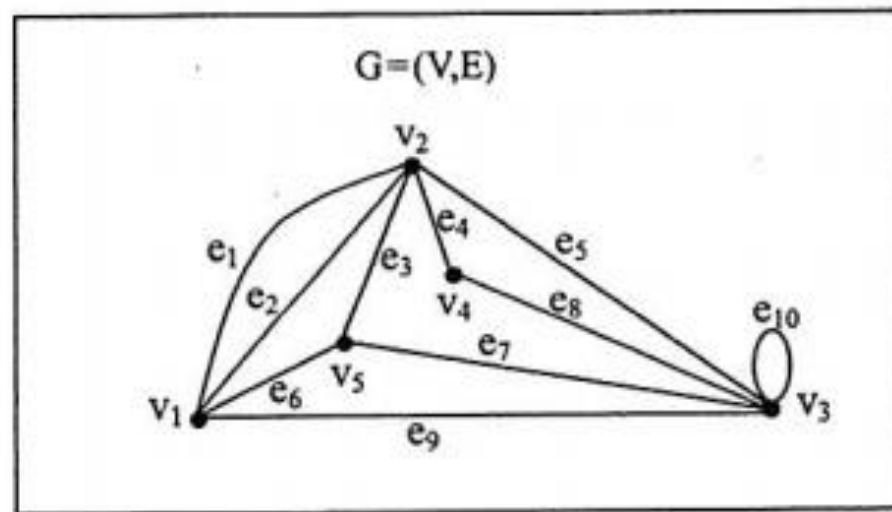
$$w = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots v_{k-1} e_k v_k$$

- ✓ Se as **arestas** e_1, e_2, \dots, e_k de w forem **distintas**, então w é chamado **Trilha**;
- ✓ Uma **trilha** que começa e termina no mesmo vértice v é chamada **Trilha Fechada** ou **CIRCUITO**;
- ✓ Caso contrário é uma **Trilha aberta**;
- ✓ Pode-se dizer, portanto, que uma **Trilha** é um **passeio** no qual **nenhuma aresta** é repetida.



Exemplo

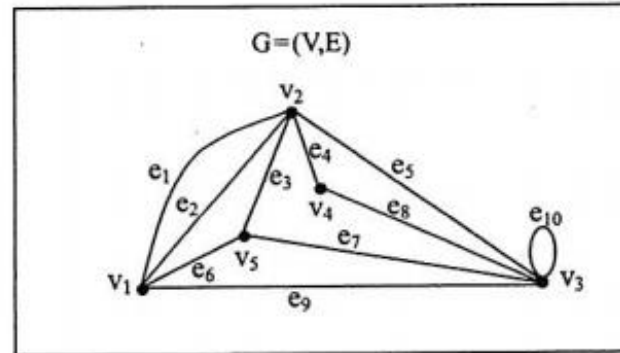
Considere o grafo $G = (V, E)$ mostrado na Figura



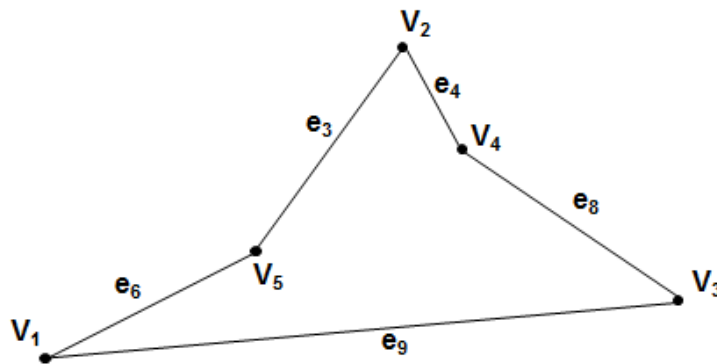
Grafo $G = (V, E)$, em que $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$.

Exemplo

Considere o grafo $G = (V, E)$ mostrado na Figura



Grafo $G = (V, E)$, em que $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$.



$$W_3 = v_1 e_6 v_5 e_3 v_2 e_4 v_4 e_8 v_3 e_9 v_1$$

W_3 é uma trilha fechada.

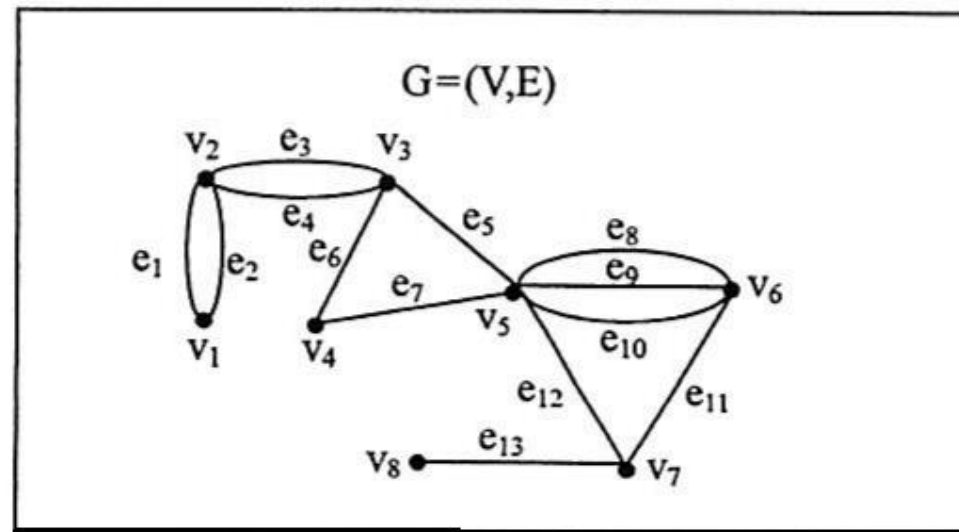


- ✓ Observação: W_3 é uma **trilha fechada**, pois inicia e termina no mesmo vértice e todas as **arestas** são **distintas**!



Exemplo

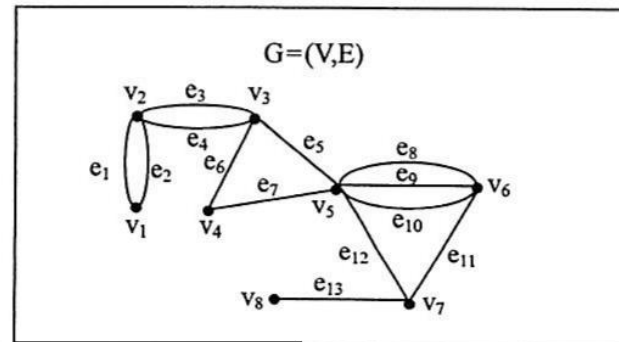
Considere o grafo $G = (V, E)$ mostrado na Figura



Grafo simples $G = (V, E)$, em que $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ e $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}\}$.

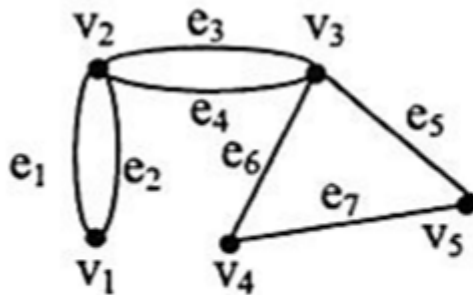
Exemplo

Considere o grafo $G = (V, E)$ mostrado na Figura



Grafo simples $G = (V, E)$, em que $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ e $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}\}$.

$W_2 = v_1 e_1 v_2 e_3 v_3 e_5 v_5 e_7 v_4 e_6 v_3 e_4 v_2 e_2 v_1$ é uma trilha fechada de tamanho 7 de v_1 a v_1 .

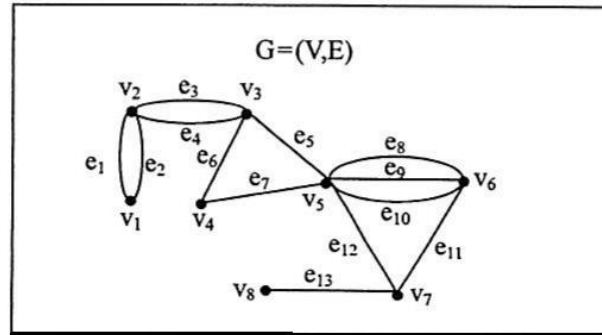


- ✓ Todas as **arestas** de W_2 são **distintas**!
- ✓ W_2 inicia em v_1 e termina em v_1 ;
- ✓ Portanto, W_2 é uma **trilha fechada** ou um **circuito**;
- ✓ W_2 tem 7 arestas, portanto o **tamanho** de W_2 é 7.



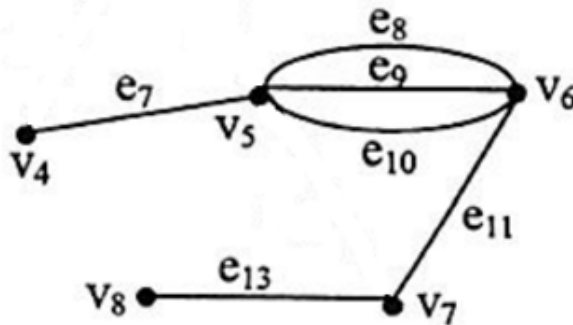
Exemplo

Considere o grafo $G = (V, E)$ mostrado na Figura



Grafo simples $G = (V, E)$, em que $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ e $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}\}$.

$W_3 = v_4 e_7 v_5 e_8 v_6 e_9 v_7 e_{13} v_8$ é uma trilha aberta de tamanho 6 de v_4 a v_8 .



- ✓ Todas as **arestas** de W_3 são **distintas**!
- ✓ W_3 inicia em v_4 e termina em v_8 ;
- ✓ Portanto, W_2 é uma **trilha aberta**;
- ✓ W_3 tem 6 arestas, portanto o **tamanho** de W_3 é 6.



Passeio e Trilha



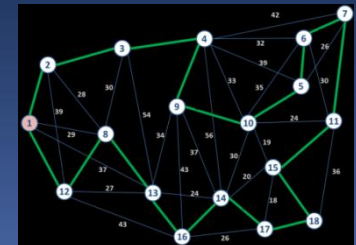
Vértice inicial u Vértice final v	$u \neq v$	$u = v$
PASSEIO Nenhuma restrição quanto ao número de vezes que um vértice ou aresta pode aparecer	PASSEIO ABERTO	PASSEIO FECHADO
Trilha Nenhuma aresta pode aparecer mais de uma vez	TRILHA ABERTA	TRILHA FECHADA ou CIRCUITO

Caminho

- ✓ Seja $G = (V, E)$ um grafo e considere a **trilha**:

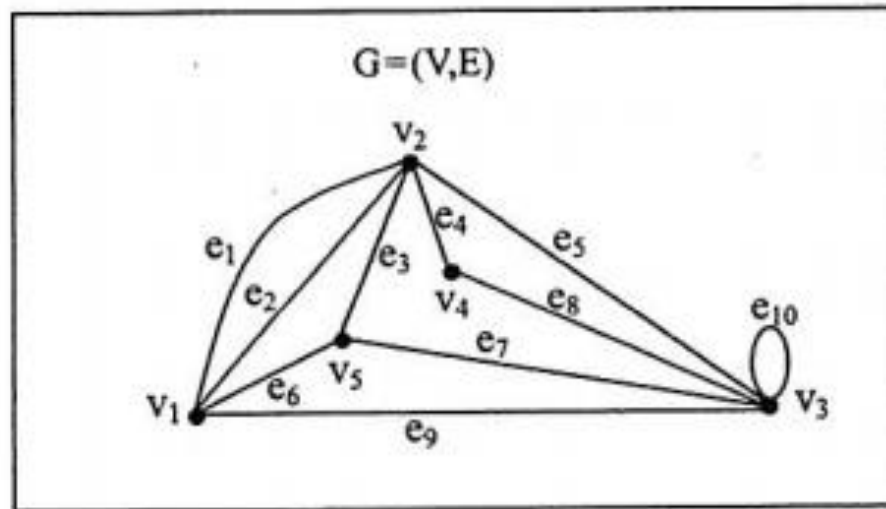
$$W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots v_{k-1} e_k v_k$$

- ✓ Se os vértices v_0, v_1, \dots, v_k de W forem **distintas**, então W é chamado **Caminho**;
- ✓ Em um **caminho**, entretanto, é permitido que seus **primeiro** e **últimos** vértices possam ser os mesmos;
- ✓ Um caminho que **começa** e **termina** no mesmo vértice v é chamada **Caminho Fechado** ou **CICLO**;
- ✓ Todo **caminho** é uma **trilha**, mas nem sempre uma **trilha** é um **caminho**.



Exemplo

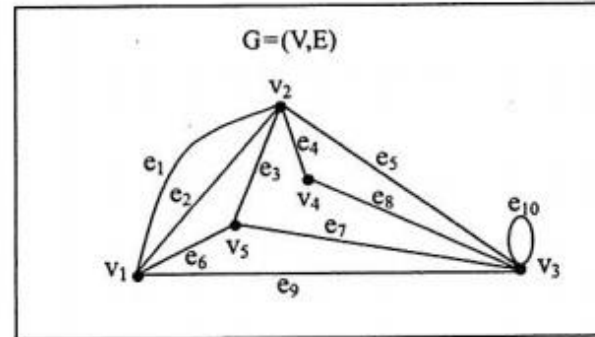
Considere o grafo $G = (V, E)$ mostrado na Figura



Grafo $G = (V, E)$, em que $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$.

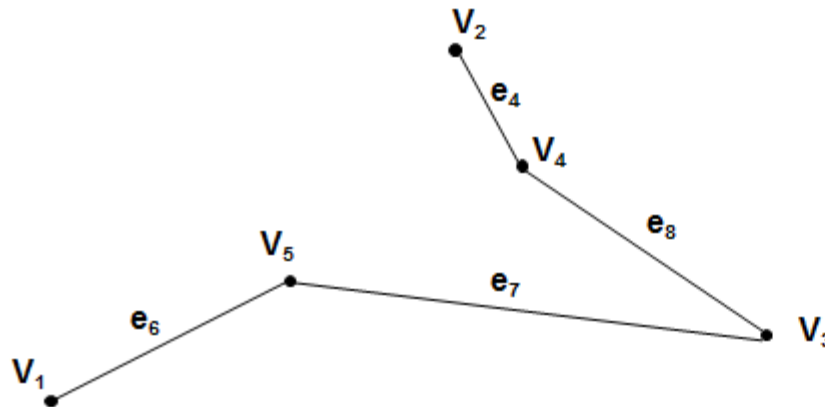
Exemplo

Considere o grafo $G = (V, E)$ mostrado na Figura



Grafo $G = (V, E)$, em que $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$.

$W_4 = v_2 v_4 v_3 v_5 v_1$ é um caminho de comprimento 4.



- ✓ Em W_4 não há repetição de vértices;
- ✓ Vértice inicial é diferente do vértice final;
- ✓ Portanto, W_4 é um **caminho** de tamanho 4.



Passeio, Trilha e Caminho

- ✓ Vértice inicial **u**
- ✓ Vértice final **v**



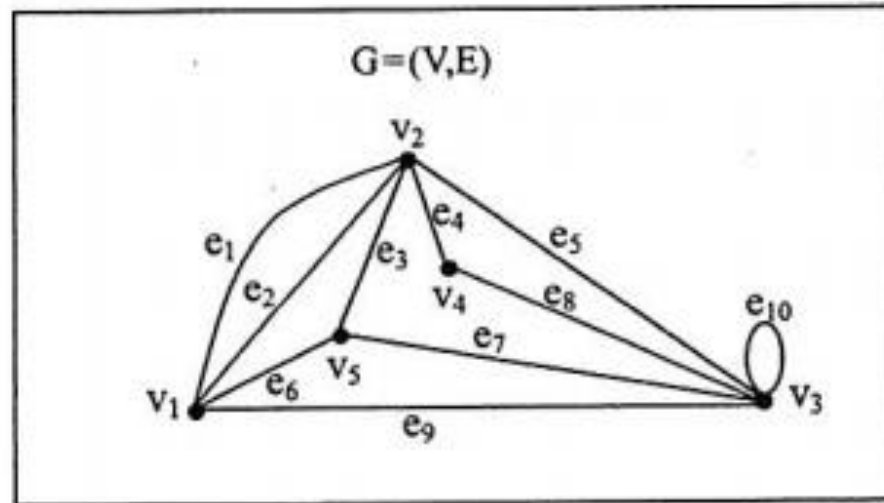
Vértice inicial u Vértice final v	$u \neq v$	$u = v$
PASSEIO Nenhuma restrição quanto ao número de vezes que um vértice ou aresta pode aparecer	PASSEIO ABERTO	PASSEIO FECHADO
Trilha Nenhuma aresta pode aparecer mais de uma vez	TRILHA ABERTA	TRILHA FECHADA ou CIRCUITO
CAMINHO Nenhum vértice pode aparecer mais de uma vez, com a possível exceção de que u e v podem ser o mesmo vértice	CAMINHO ABERTO	CAMINHO FECHADO OU CICLO

Passeio, Trilha e Caminho

- ✓ Uma trilha é um passeio no qual nenhuma **aresta** é repetida;
- ✓ Um caminho é uma trilha no qual nenhum **vértice** é repetido;
- ✓ Nem sempre toda trilha é um caminho;
- ✓ Todo caminho é uma trilha;
- ✓ Todo caminho é um passeio;
- ✓ Toda trilha é um passeio;
- ✓ Nem sempre todo passeio é uma trilha;
- ✓ Nem sempre todo passeio é um caminho.

Exemplo

Considere o grafo $G = (V, E)$ mostrado na Figura



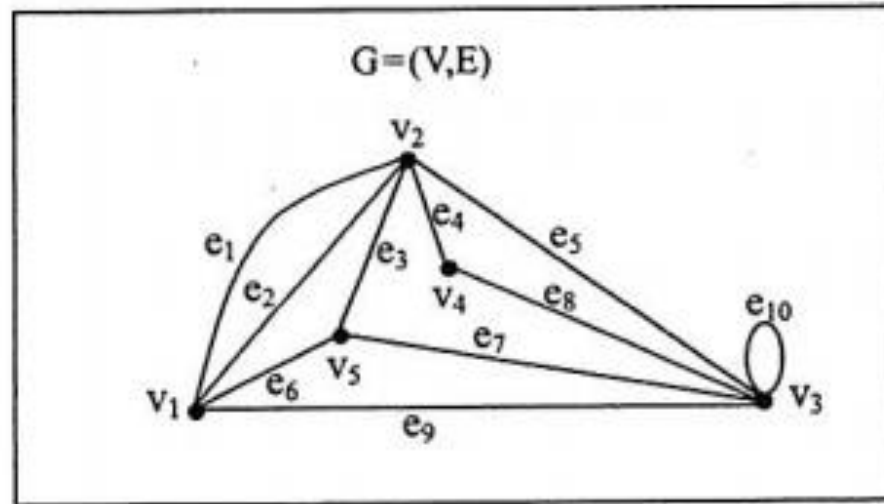
Grafo $G = (V, E)$, em que $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$.

- $W1 = v_1 e_1 v_2 e_5 v_3 e_{10} v_3 e_5 v_2 e_3 v_5$ é um passeio aberto de tamanho 5 de v_1 a v_5 .

W1 é trilha? W1 é caminho ?

Exemplo

Considere o grafo $G = (V, E)$ mostrado na Figura



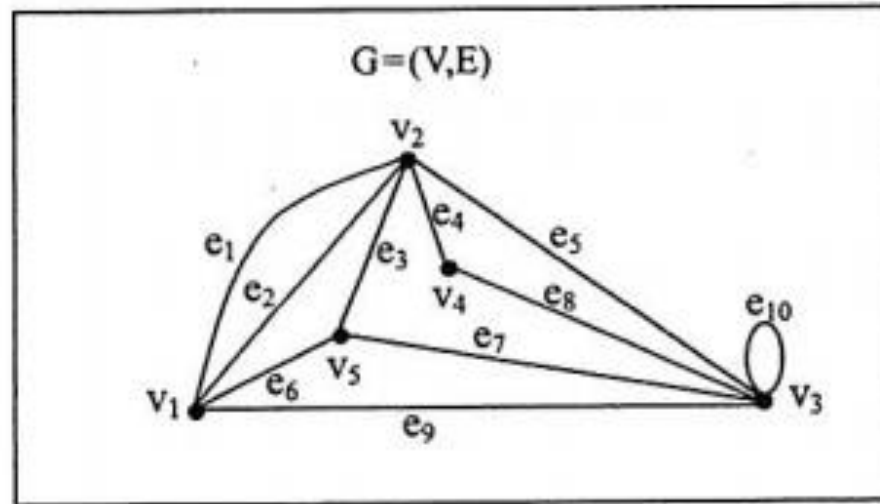
Grafo $G = (V, E)$, em que $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$.

- $W2 = v_1 e_1 v_2 e_1 v_1 e_1 v_2$ é um passeio aberto de tamanho 3 de v_1 a v_2 .

W2 é trilha? W2 é caminho ?

Exemplo

Considere o grafo $G = (V, E)$ mostrado na Figura



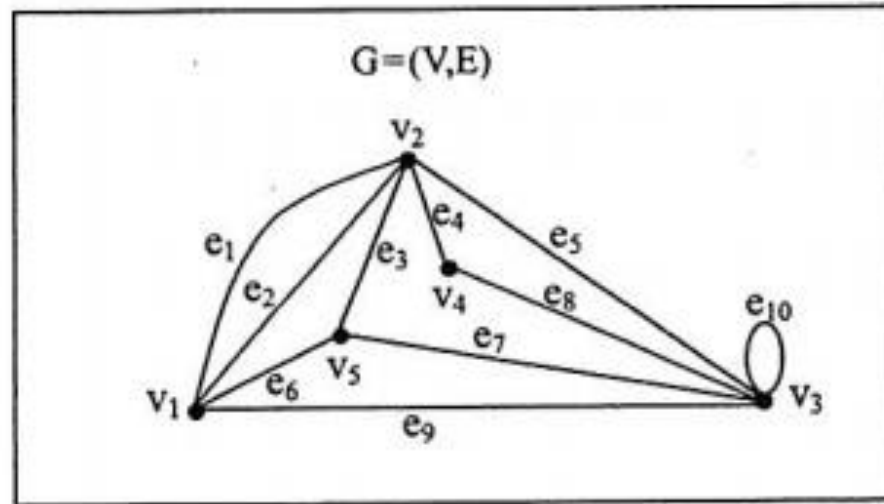
Grafo $G = (V, E)$, em que $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$.

- $W3 = v_1 v_5 v_2 v_4 v_3 v_1$ é um passeio fechado de tamanho 5.

W2 é trilha? W2 é caminho ?

Exemplo

Considere o grafo $G = (V, E)$ mostrado na Figura



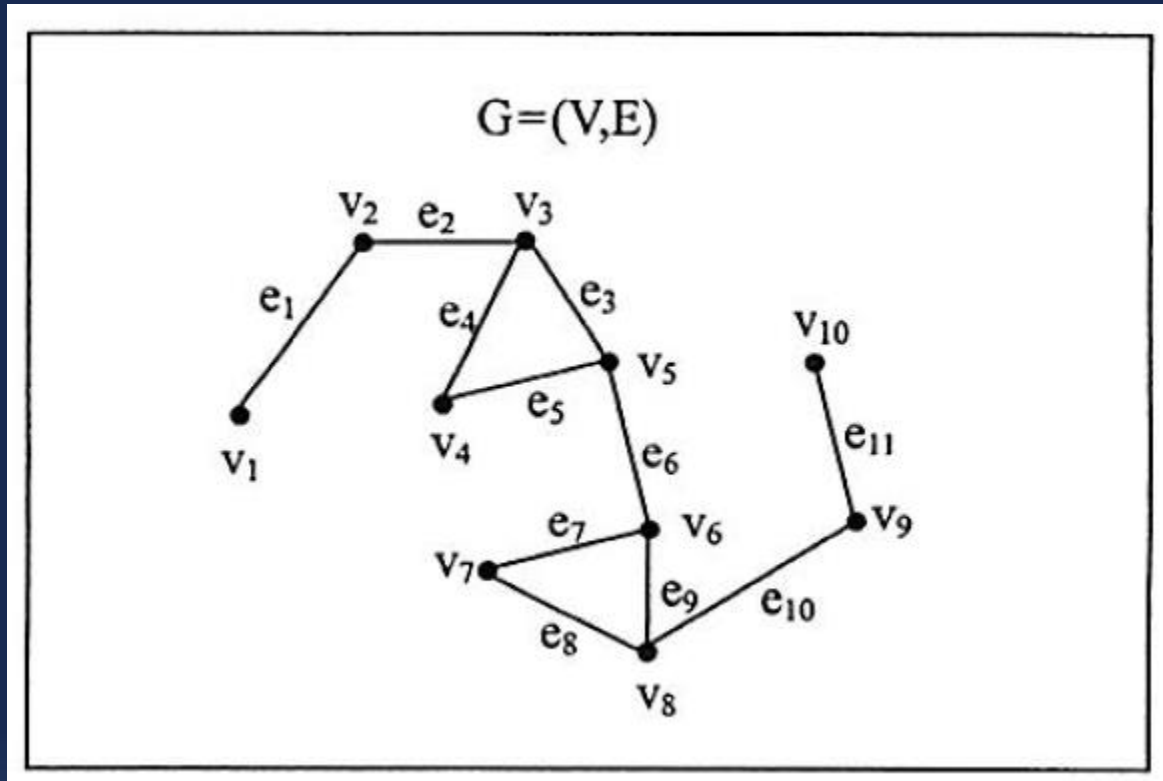
Grafo $G = (V, E)$, em que $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$.

- $W_4 = v_2 v_4 v_3 v_5 v_1$ é um caminho de comprimento 4.

W2 é trilha? W2 é caminho ?

Exercício

- ✓ Considere o grafo simples $G = (V, E)$, mostrado abaixo:



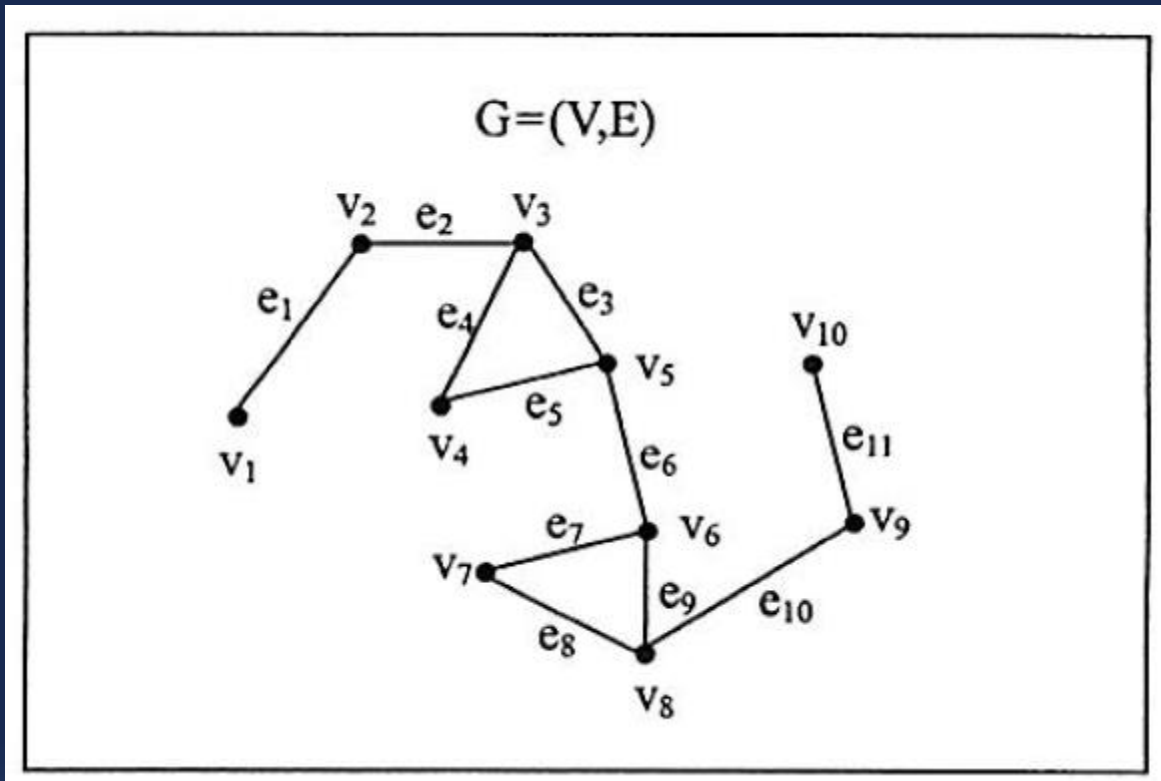
✓ $W_1 = v_1 e_1 v_2 e_2 v_3 e_3 v_5 e_5 v_4 e_4 v_3 e_3 v_5 e_6 v_6 e_7 v_7 e_8 v_8 e_{10} v_9 e_{10} v_9 e_7 v_7 e_8 v_8 e_{10} v_9 e_{11} v_{10}$

✓ É um passeio aberto de tamanho 14 ?



Exercício

- ✓ Considere o grafo simples $G = (V, E)$, mostrado abaixo:



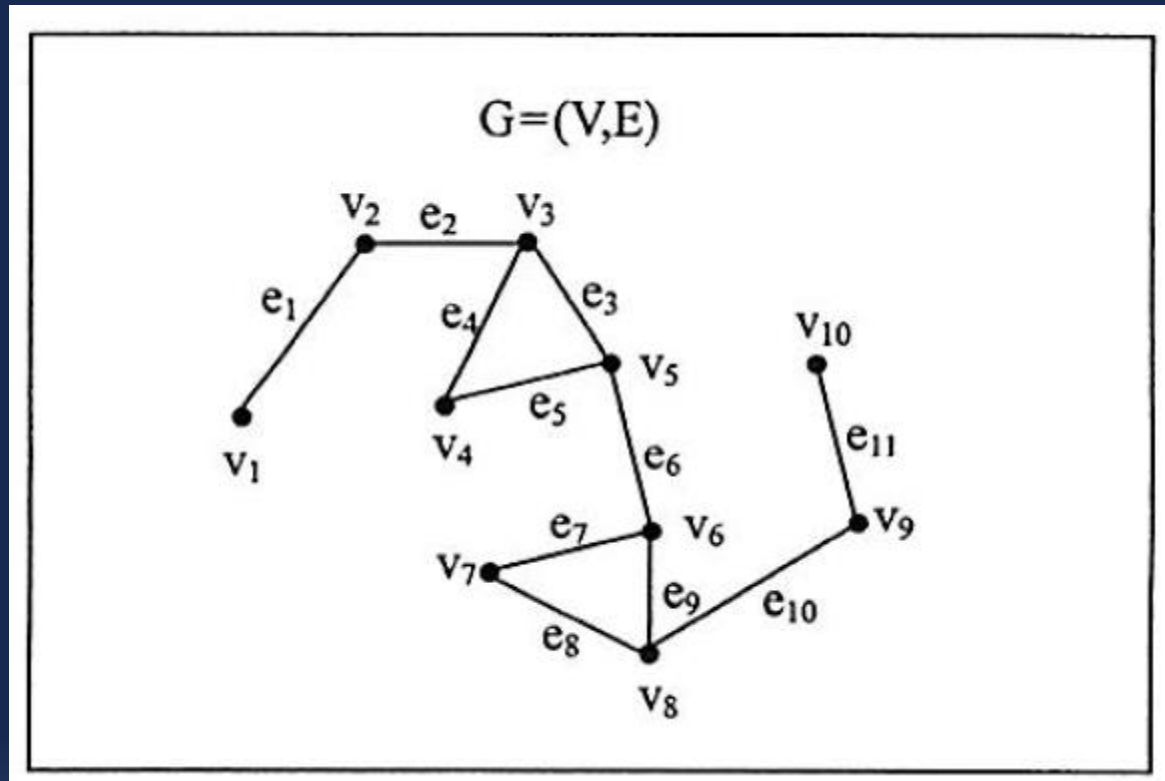
- ✓ $W_1 = v_1 e_1 v_2 e_2 v_3 e_3 v_5 e_5 v_4 e_4 v_3 e_3 v_5 e_6 v_6 e_7 v_7 e_8 v_8 e_{10} v_9 e_{11} v_{10}$
- ✓ W_1 é passeio fechado ? W_1 é trilha ? W_1 é caminho ?





Exercício

- ✓ Considere o grafo simples $G = (V, E)$, mostrado abaixo:



✓ $W_2 = v_3 e_4 v_4 e_4 v_3 e_4 v_4 e_5 v_5 e_3 v_3.$

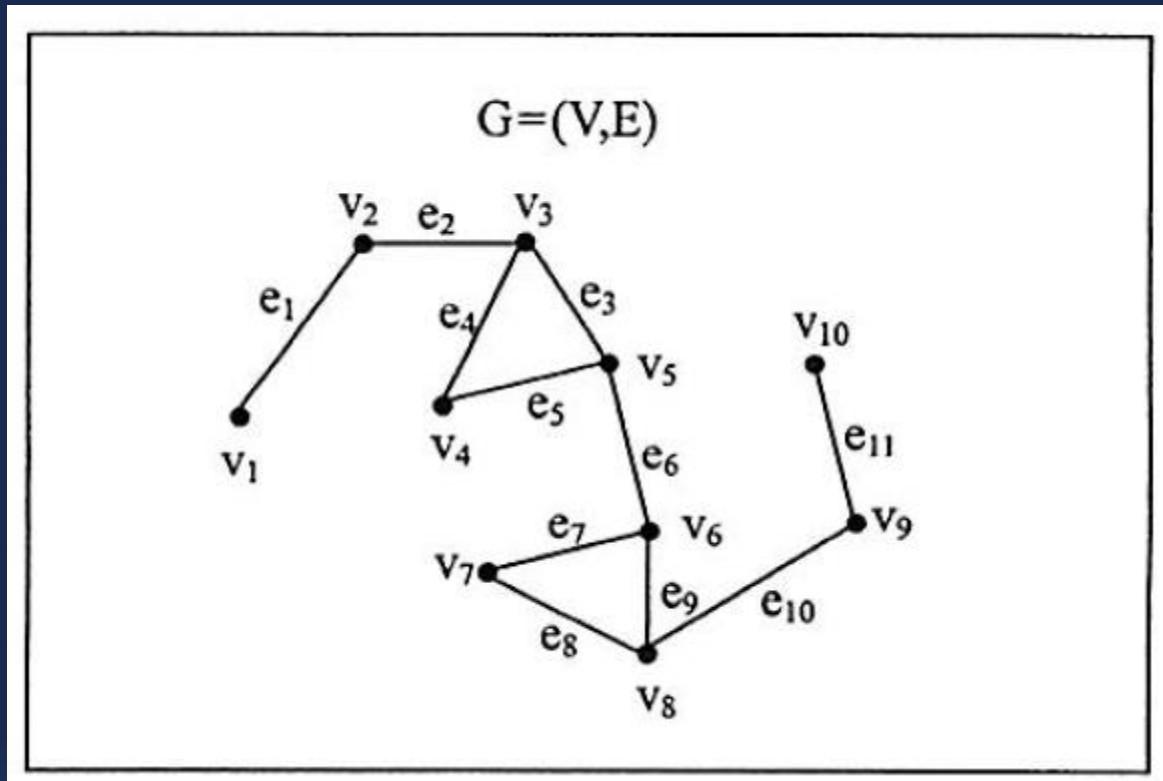
- ✓ W_2 é passeio fechado ? W_2 é ciclo? W_2 é caminho fechado?





Exercício

- ✓ Considere o grafo simples $G = (V, E)$, mostrado abaixo:



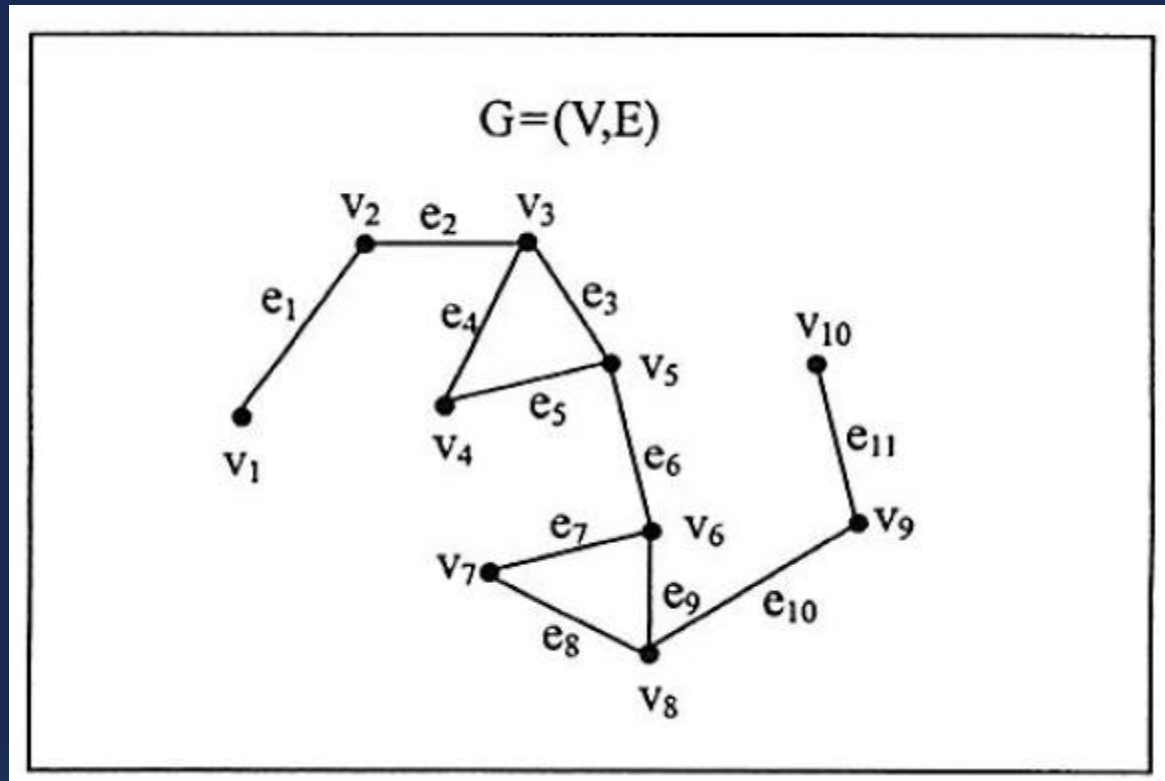
✓ $W_3 = v_1 e_1 v_2 e_2 v_3 e_3 v_5 e_5 v_4 e_4 v_3$

- ✓ W_3 é passeio aberto? W_3 é trilha aberta? W_3 é circuito? W_3 é ciclo ?



Exercício

- ✓ Considere o grafo simples $G = (V, E)$, mostrado abaixo:



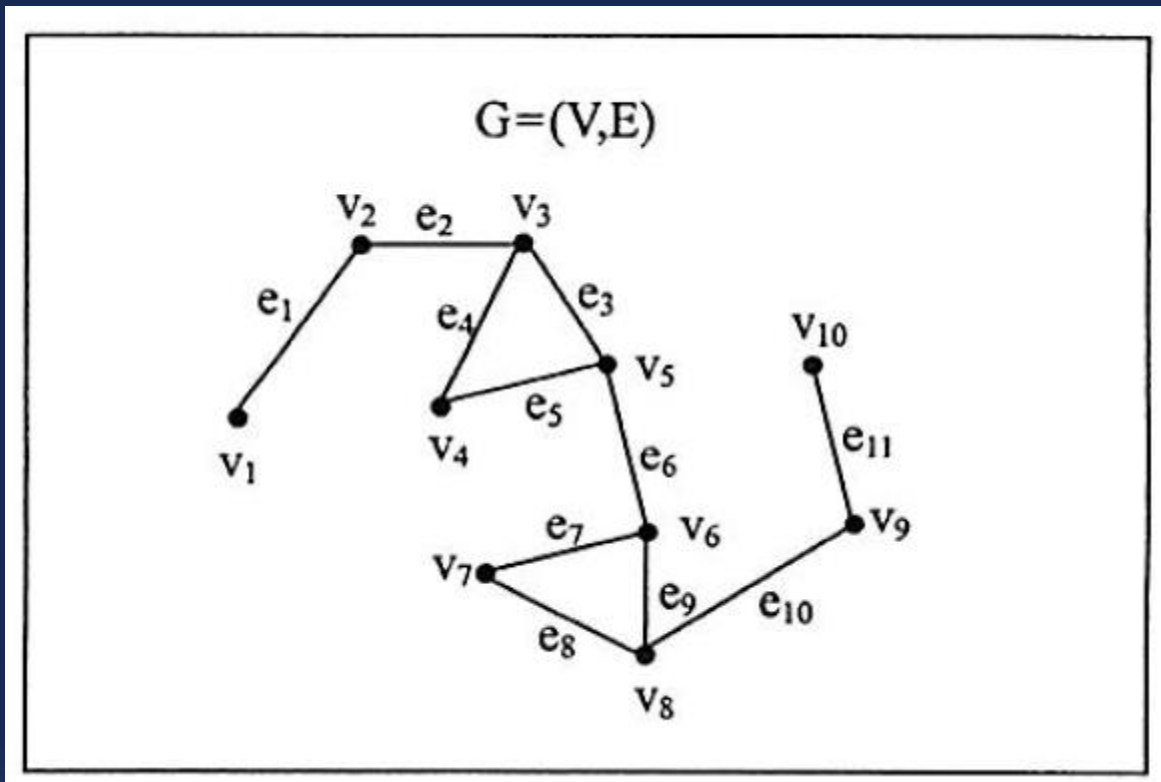
- ✓ No grafo existe algum **ciclo** de comprimento 4 ?





Exercício

- ✓ Considere o grafo simples $G = (V, E)$, mostrado abaixo:

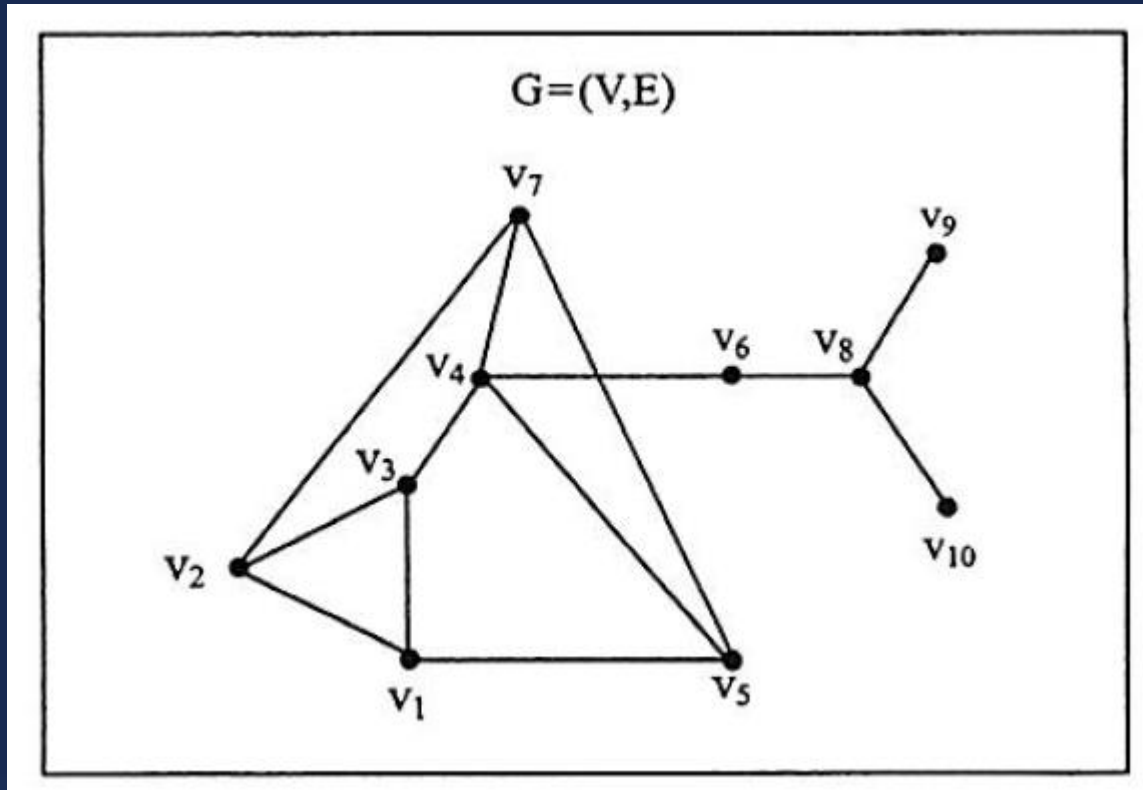


- ✓ No grafo existe algum **ciclo** de comprimento 3 ?



Exercício

- ✓ Considere o grafo simples $G = (V, E)$, mostrado abaixo:



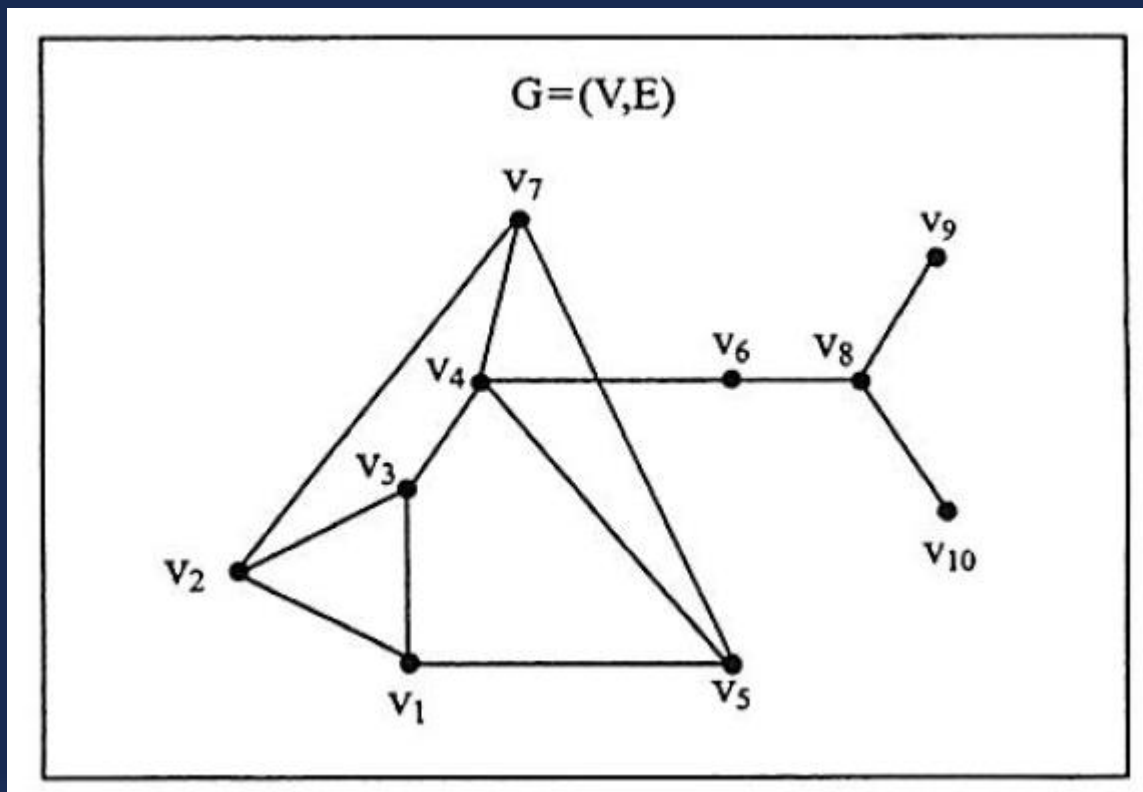
- ✓ Defina um passeio de tamanho 5

$W = v_2 v_3 v_4 v_5 v_7 v_2$



Exercício

- ✓ Considere o grafo simples $G = (V, E)$, mostrado abaixo:

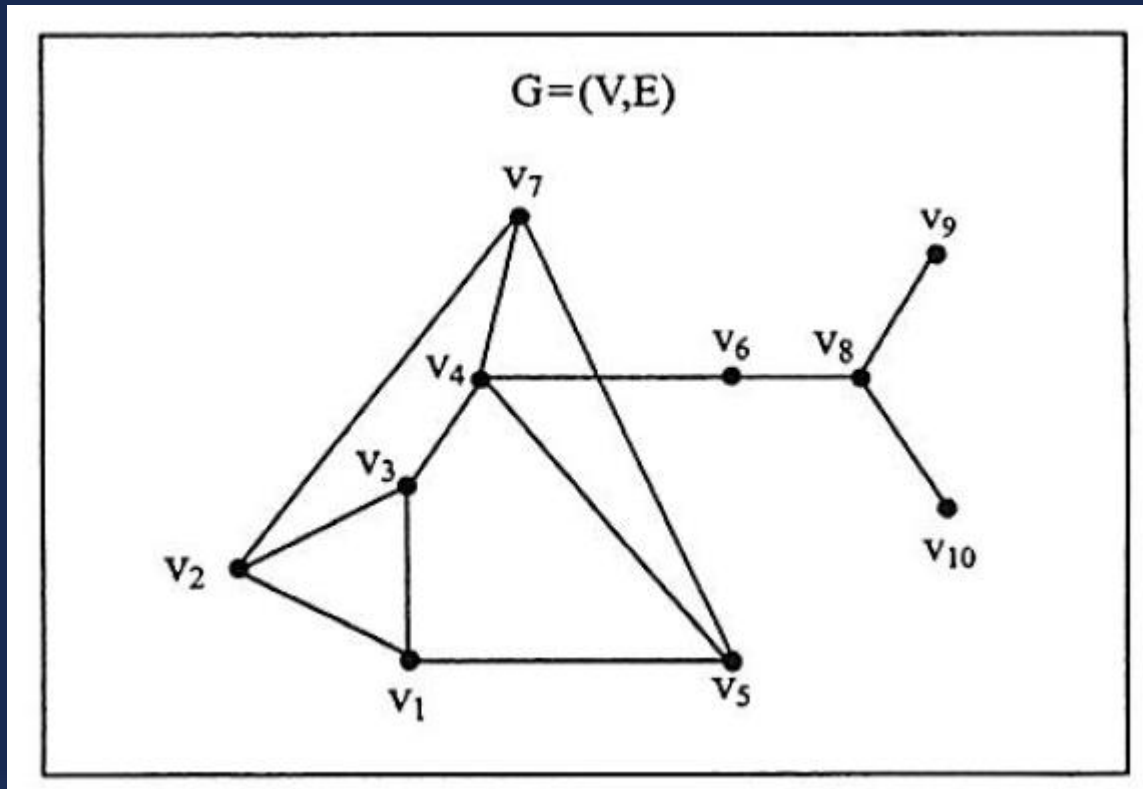


- ✓ Defina uma trilha de tamanho 6



Exercício

- ✓ Considere o grafo simples $G = (V, E)$, mostrado abaixo:



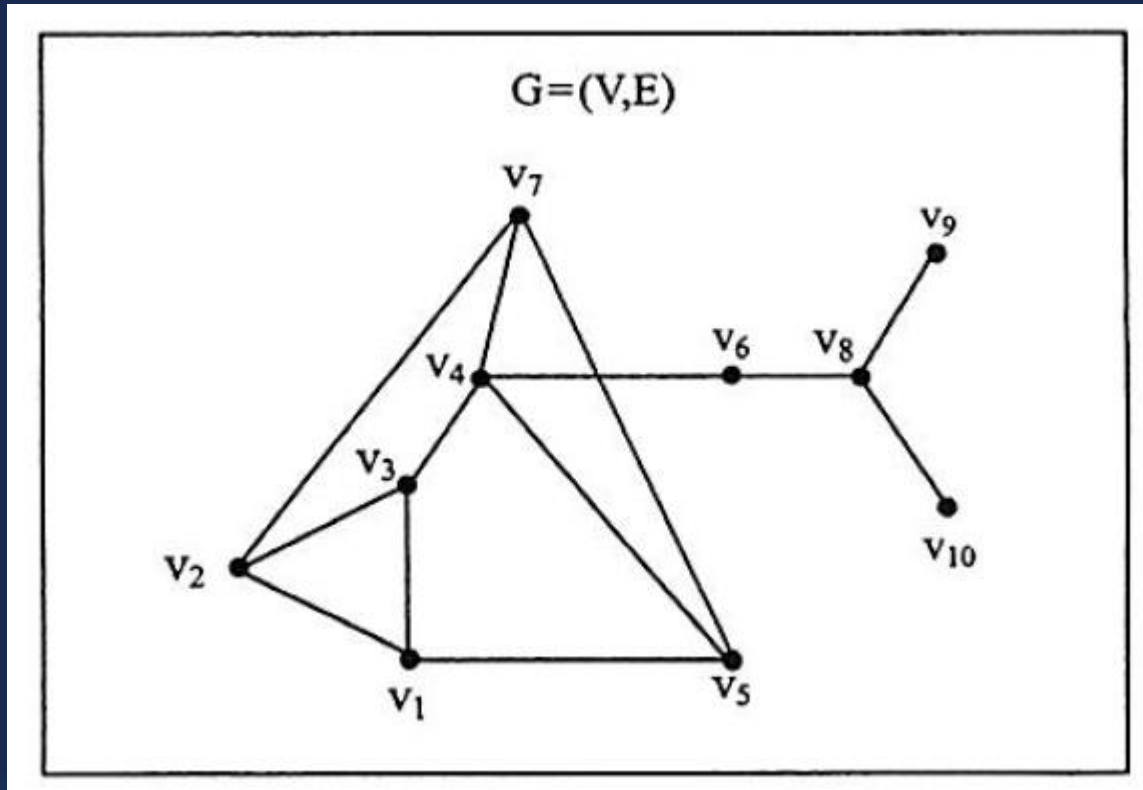
- ✓ Existe algum **ciclo** no grafo com tamanho 5 ?
- ✓ Se sim, defina-o.





Exercício

- ✓ Considere o grafo simples $G = (V, E)$, mostrado abaixo:



- ✓ Existe algum **circuito** no grafo com tamanho 6 ?
- ✓ Se sim, defina-o. $v_2v_7v_5v_4v_3v_1v_2$ é circuito e também ciclo!!!!



Teorema

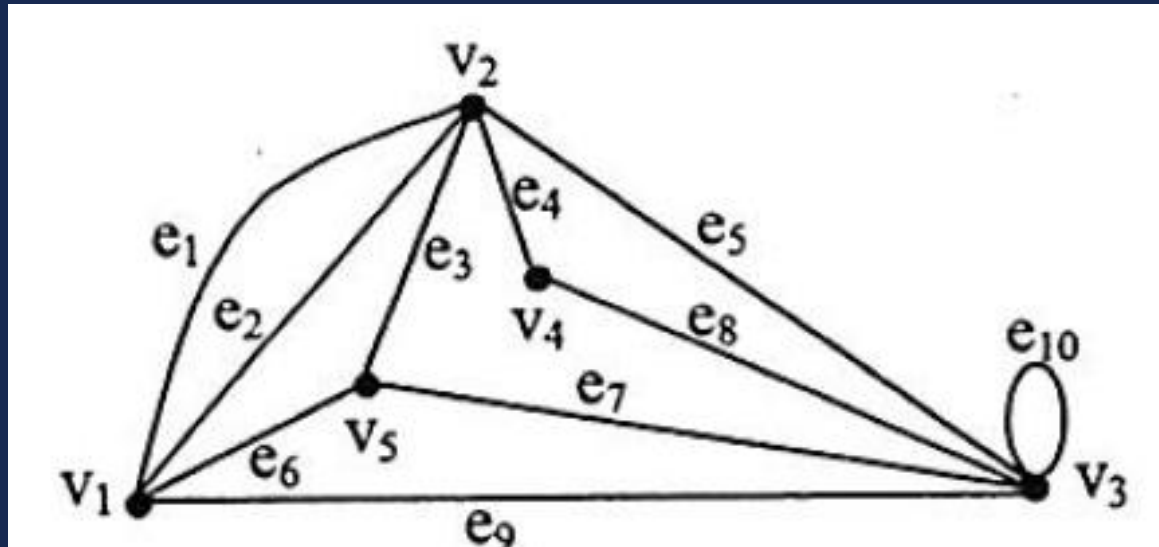
- ✓ Dados dois vértices **u** e **v** de um grafo **G**, todo passeio **u-v** contém um **caminho u-v**, ou seja, dado qualquer passeio

$$W = u \ e_1 \ v_1 \ e_2 \ v_2 \ \cdot \cdot \cdot \ v_{k-1} \ e_k \ v$$

Após algumas **eliminações** de **vértices** e **arestas**, se necessário, pode-se encontrar uma subsequência **P** de **W**, a qual é um **caminho u-v**.

Teorema

✓ Dado o grafo $G=(V,E)$

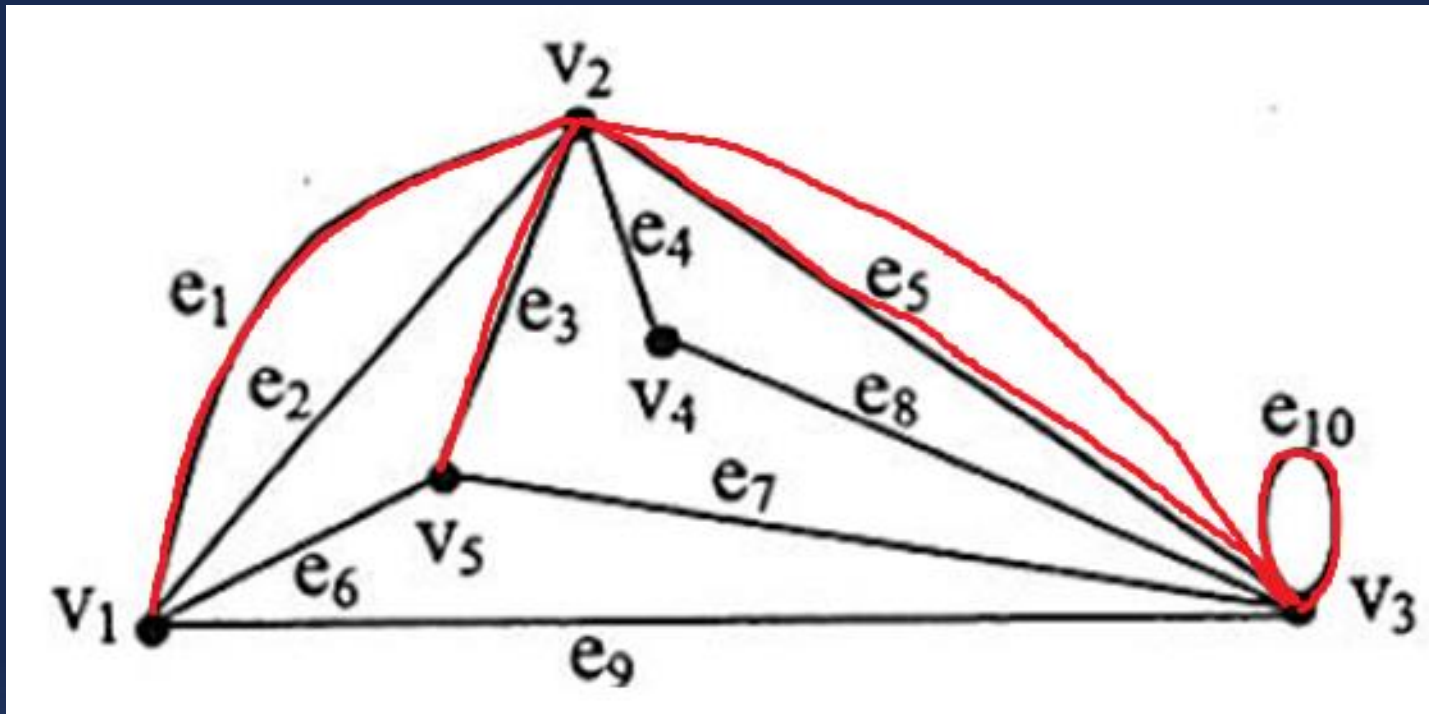


✓ Considere o passeio: $W = v_1 e_1 v_2 e_5 v_3 e_{10} v_3 e_5 v_2 e_3 v_5$



Teorema

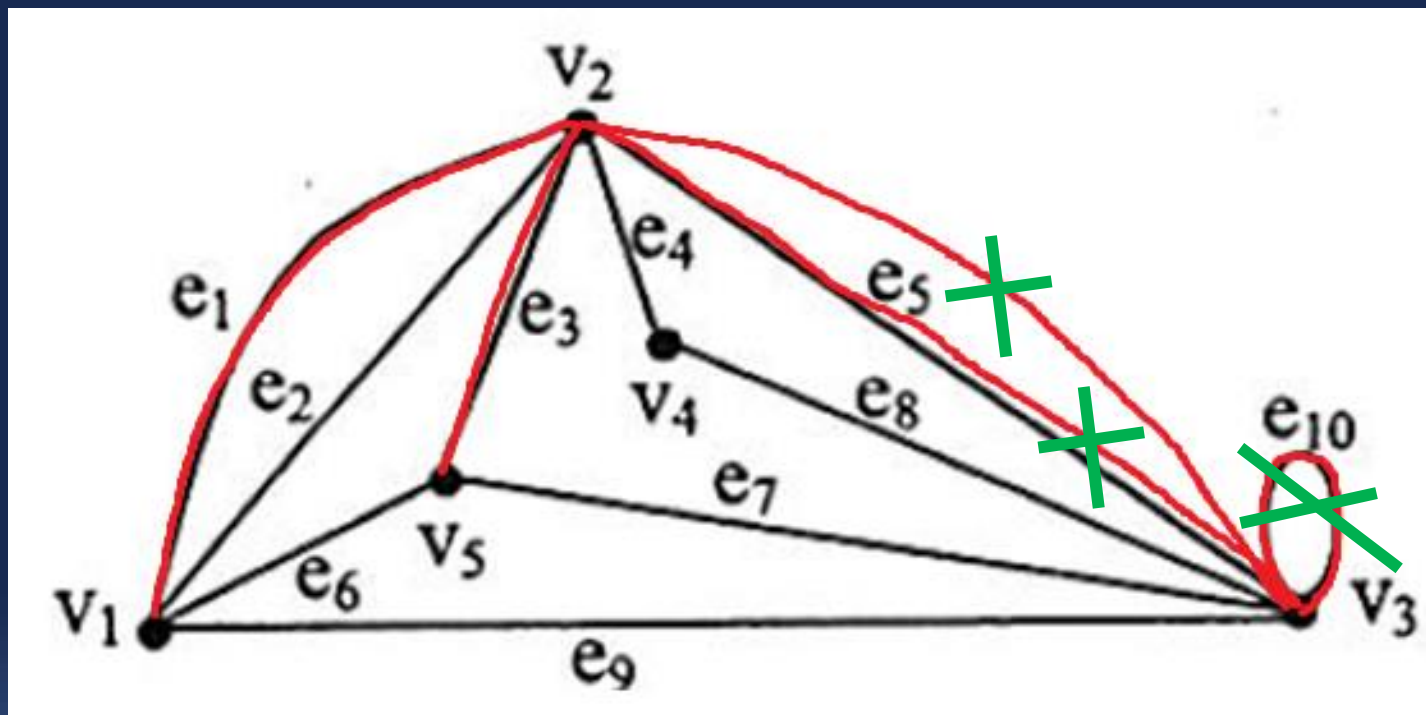
✓ Dado o grafo $G=(V,E)$



✓ Considere o passeio: $W = v_1 e_1 v_2 e_5 v_3 e_{10} v_3 e_5 v_2 e_3 v_5$

Teorema

- ✓ Eliminando-se algumas arestas do passeio, pode-se chegar à subsequência: $P = v_1 e_1 v_2 e_3 v_5$



- ✓ $P = v_1 e_1 v_2 e_3 v_5$ é um caminho obtido a partir de W



Trilha Euleriana

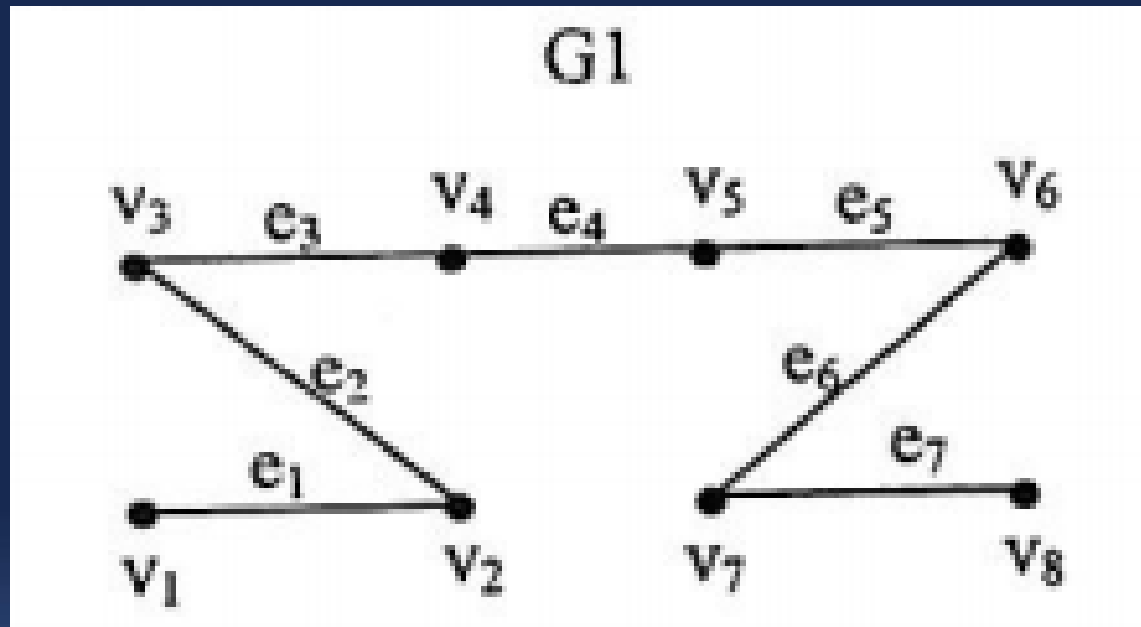
- ✓ Uma trilha em um grafo **G** é chamada **Trilha Euleriana** se incluir **toda aresta** de **G**.





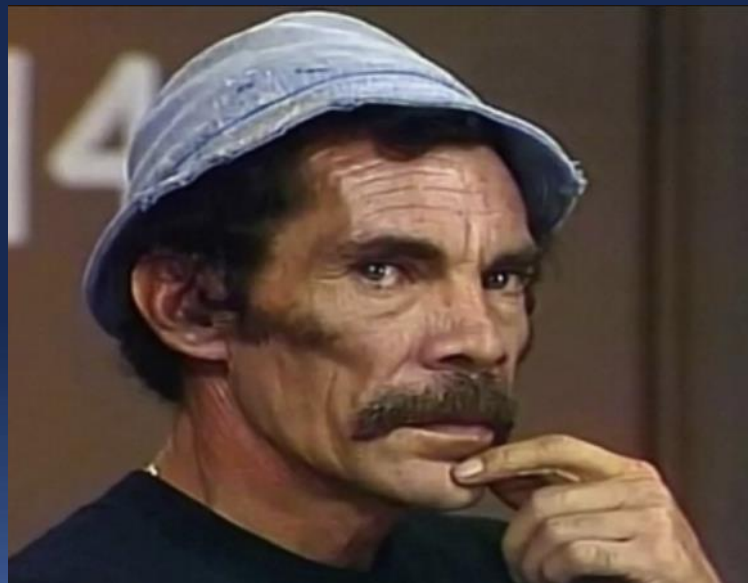
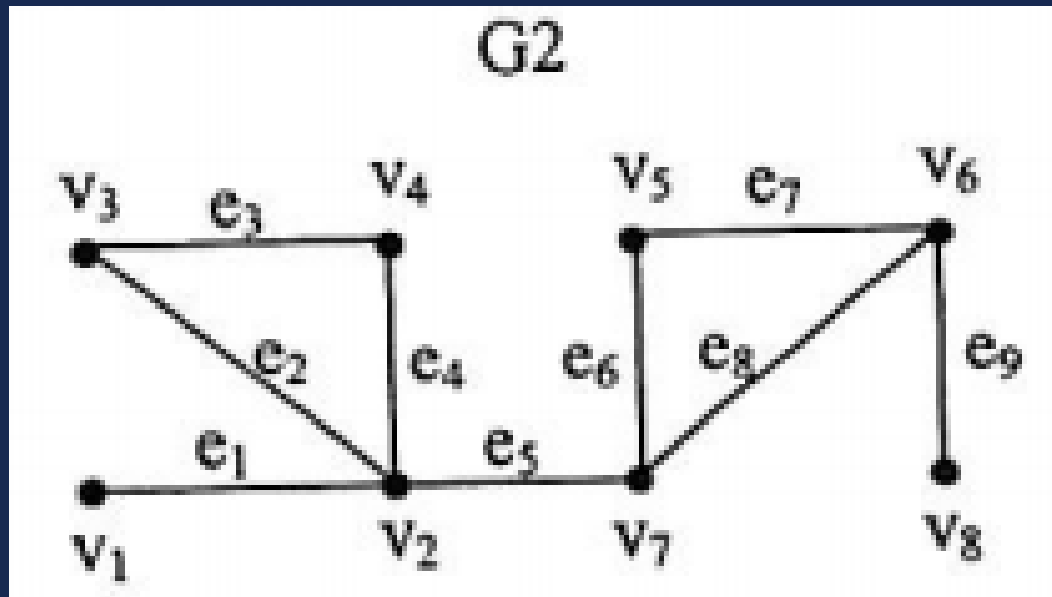
Trilha Euleriana

- ✓ Uma trilha em um grafo **G** é chamada **Trilha Euleriana** se incluir toda aresta de **G**.



- ✓ Exemplo: A trilha $V_1V_2V_3V_4V_5V_6V_7V_8$ do grafo **G1** é uma **trilha** de **Euler**.

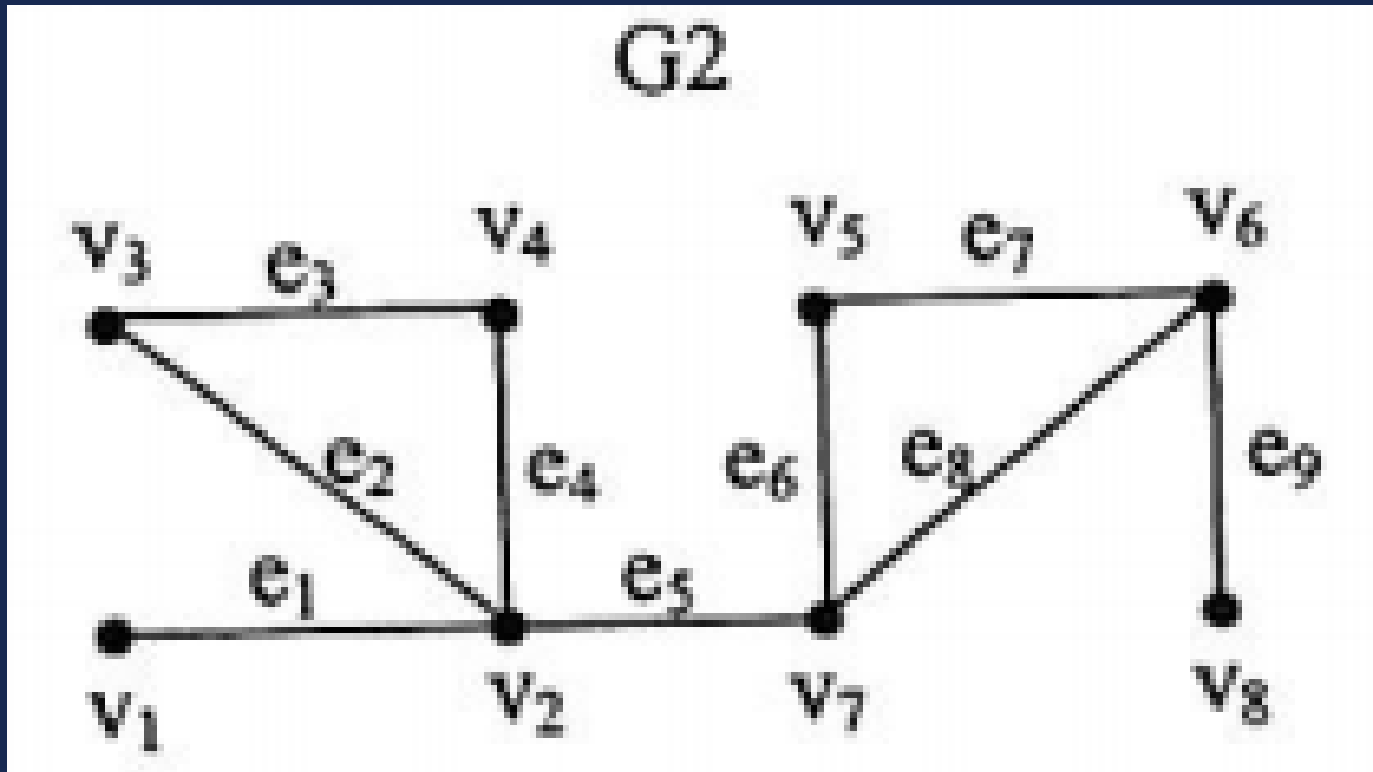




O grafo **G2** acima tem uma trilha de Euler ?

Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

Tópicos Avançados de Estrutura de Dados – Unidade 17 – Grafos Eulerianos



O grafo **G2** acima **NÃO** tem uma trilha de Euler !





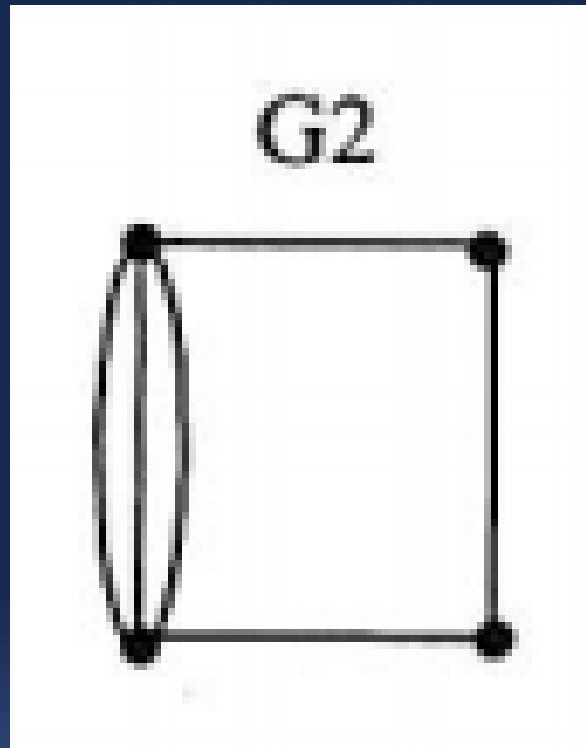
Grafos Eulerianos

- ✓ Um grafo G é chamado **Grafo de Euler** ou **Grafo Euleriano** se tiver uma **trilha fechada** (**circuito**) que inclui **todas** as arestas de G ;



Grafos Eulerianos

- ✓ Um grafo **G** é chamado **Grafo de Euler** ou **Grafo Euleriano** se tiver um **trilha de Euler** fechada.

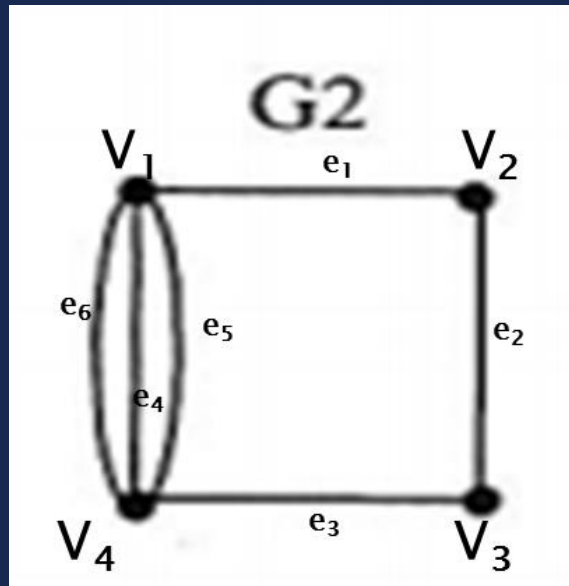


- ✓ O grafo **G2** é Euleriano?



Grafos Eulerianos

- ✓ Um grafo **G** é chamado **Grafo de Euler** ou **Grafo Euleriano** se tiver um **trilha de Euler** fechada.



- ✓ O grafo **G2** é Euleriano?

- ✓ Precisa-se descobrir se há uma trilha de **Euler** fechada no grafo **G2**;
- ✓ A trilha **$V_1 e_1 V_2 e_2 V_3 e_3 V_4 e_4 V_1 e_5 V_3 e_6 V_2$** é uma **trilha Euleriana fechada**;
- ✓ Logo, **G2** é um **Grafo Euleriano**.

Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

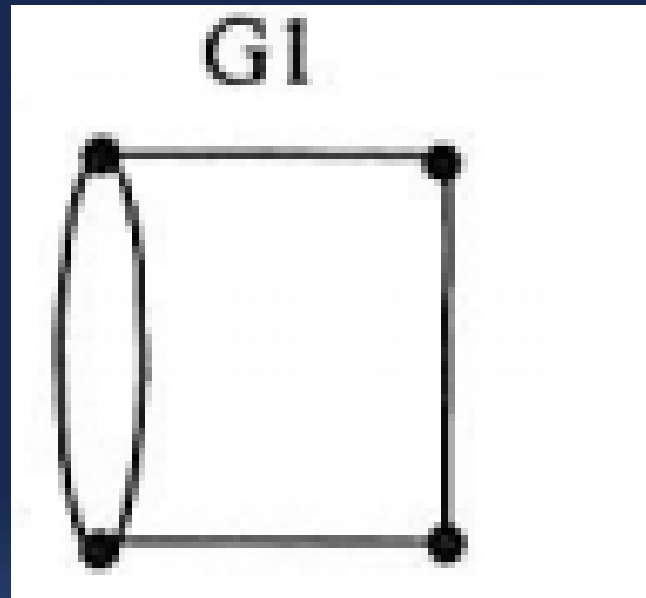
Tópicos Avançados de Estrutura de Dados – Unidade 17 – Grafos Eulerianos





Grafos Eulerianos

- ✓ Um grafo **G** é chamado **Grafo de Euler** ou **Grafo Euleriano** se tiver um **trilha de Euler** fechada.



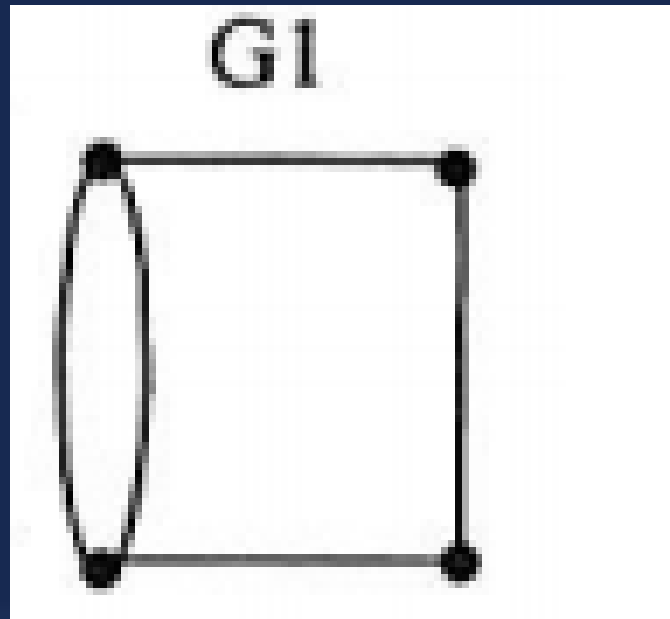
- ✓ O grafo **G1** é Euleriano?





Grafos Eulerianos

- ✓ Um grafo **G** é chamado **Grafo de Euler** ou **Grafo Euleriano** se tiver um **trilha de Euler** fechada.

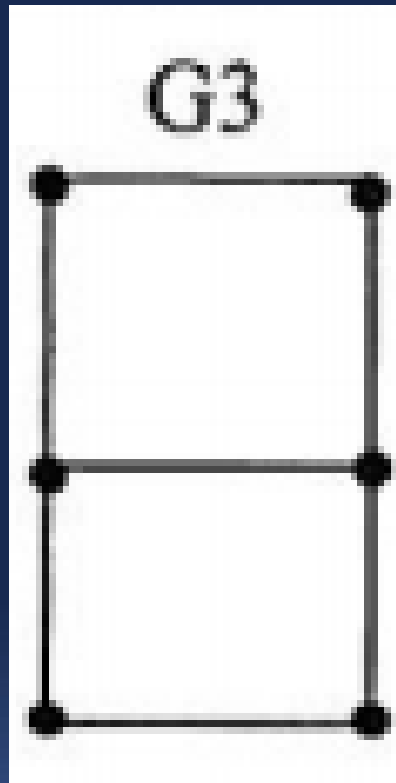


- ✓ O grafo **G1** é Euleriano?
- ✓ Resposta: **Não**, pois não se consegue construir em **G1** uma **trilha Euleriana Fechada**.



Grafos Eulerianos

- ✓ Um grafo G é chamado **Grafo de Euler** ou **Grafo Euleriano** se tiver um **trilha de Euler** fechada.

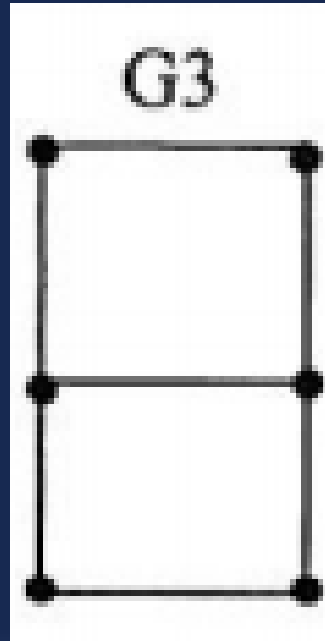


✓ O grafo $G3$ é Euleriano?



Grafos Eulerianos

- ✓ Um grafo **G** é chamado **Grafo de Euler** ou **Grafo Euleriano** se tiver um **trilha de Euler** fechada.



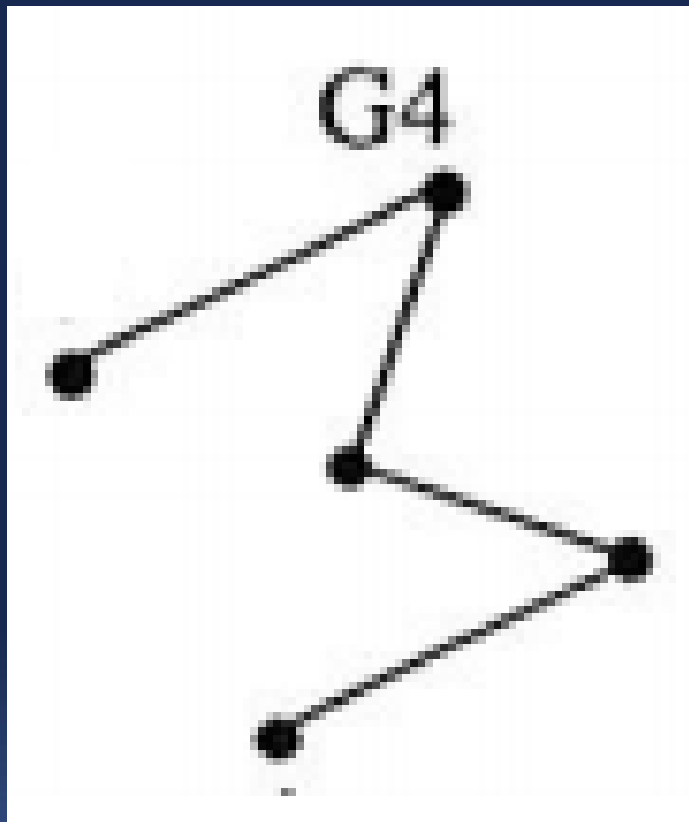
- ✓ O grafo **G3** é Euleriano?

- ✓ Resposta: **Não**, pois não se consegue construir em **G3** uma **trilha Euleriana Fechada**.



Grafos Eulerianos

- ✓ Um grafo **G** é chamado **Grafo de Euler** ou **Grafo Euleriano** se tiver um **trilha de Euler** fechada.



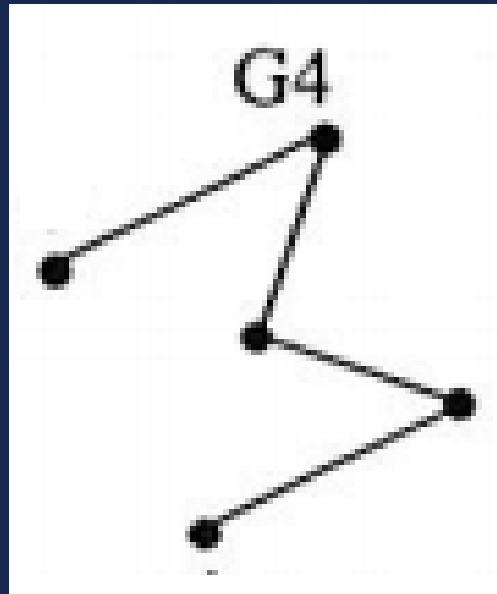
✓ O grafo G4 é Euleriano?





Grafos Eulerianos

- ✓ Um grafo **G** é chamado **Grafo de Euler** ou **Grafo Euleriano** se tiver um **trilha de Euler** fechada.

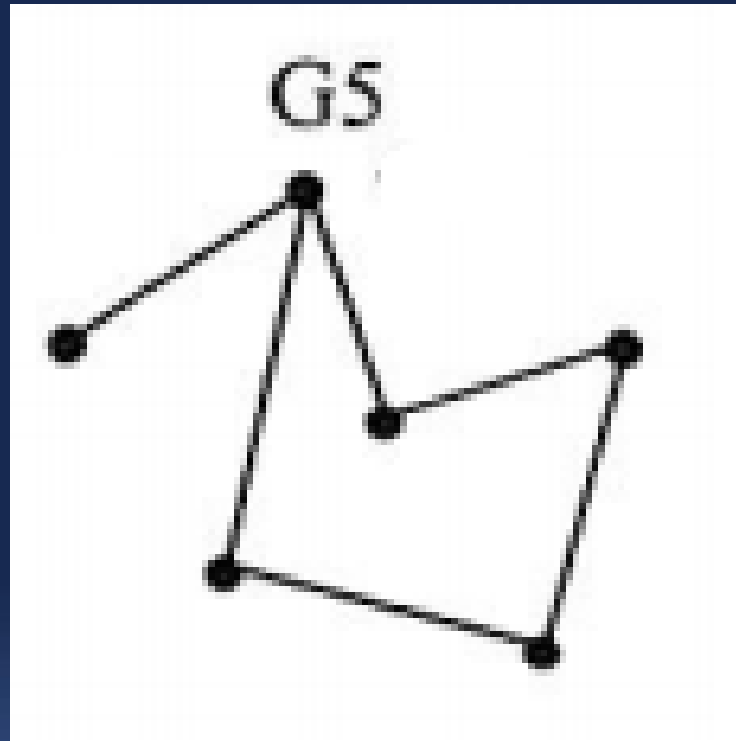


- ✓ O grafo **G4** é Euleriano?
- ✓ Resposta: **Não**, pois não se consegue construir em **G4** uma **trilha Euleriana Fechada**.



Grafos Eulerianos

- ✓ Um grafo **G** é chamado **Grafo de Euler** ou **Grafo Euleriano** se tiver um **trilha de Euler** fechada.

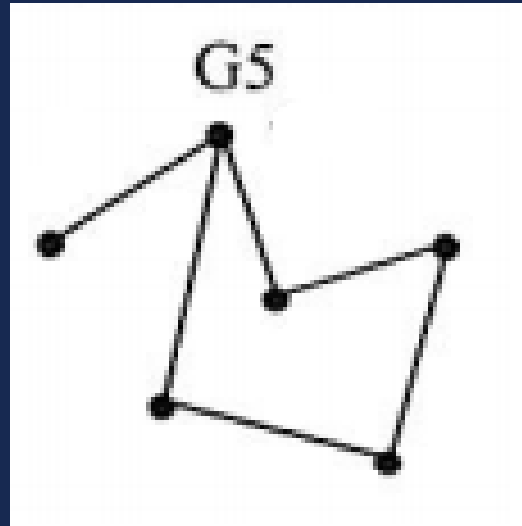


- ✓ O grafo **G5** é Euleriano?



Grafos Eulerianos

- ✓ Um grafo **G** é chamado **Grafo de Euler** ou **Grafo Euleriano** se tiver um **trilha de Euler** fechada.



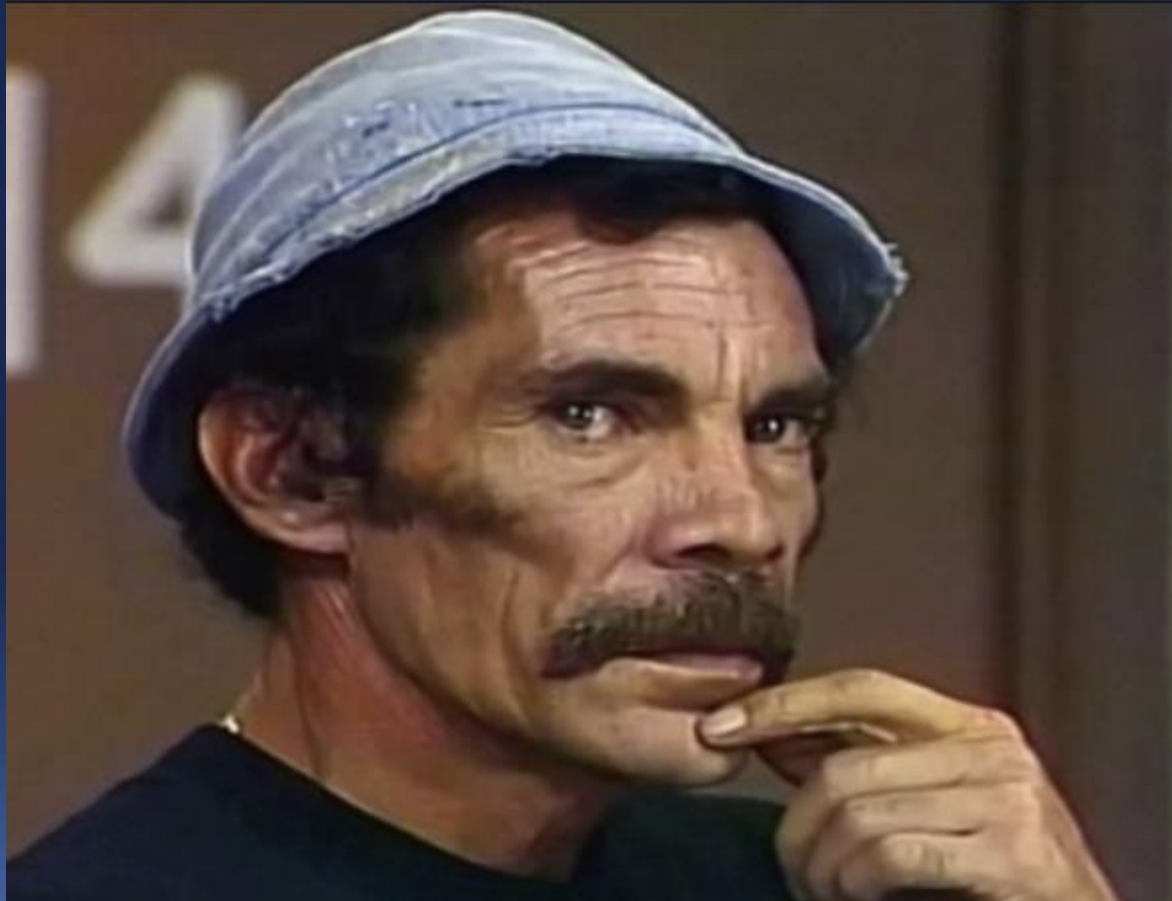
✓ O grafo **G5** é Euleriano?

- ✓ Resposta: **Não**, pois não se consegue construir em **G5** uma **trilha Euleriana Fechada**.





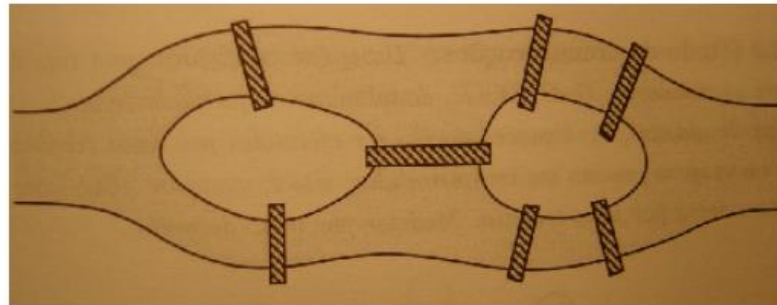
Como determinar se um grafo é Euleriano?





Grafo Euleriano?

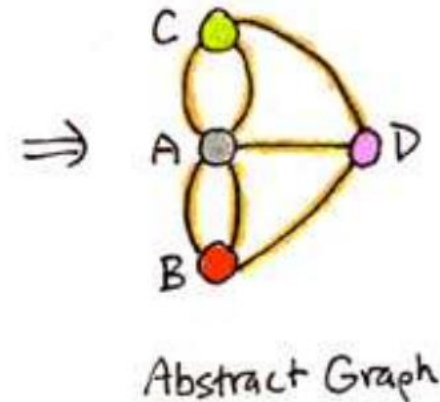
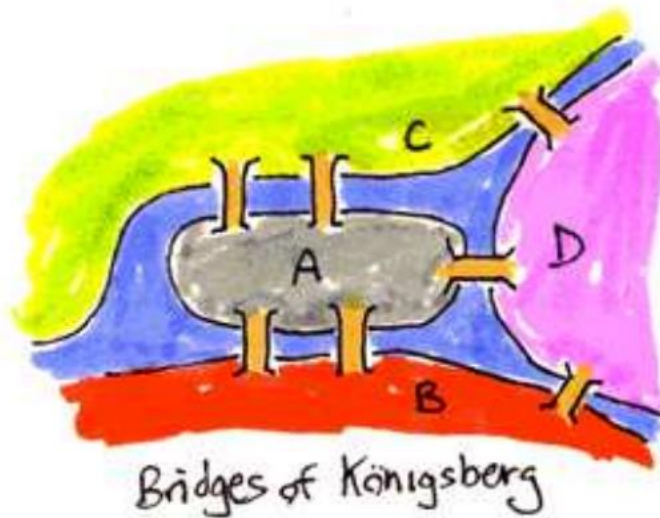
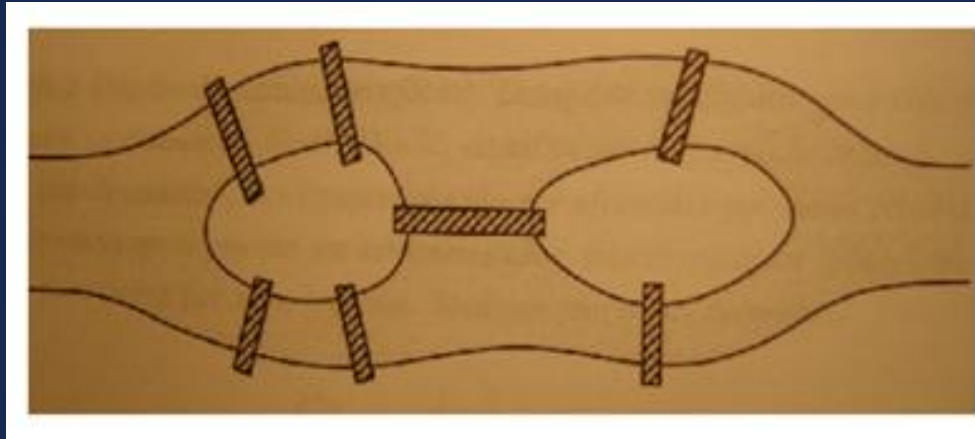
O problema das pontes de Königsberg é o primeiro e mais famoso problema em teoria dos grafos resolvido por Euler em 1736. Na cidade de Königsberg existiam sete pontes que cruzavam o rio Pregel estabelecendo ligações entre duas ilhas e entre as ilhas e as margens opostas do rio.



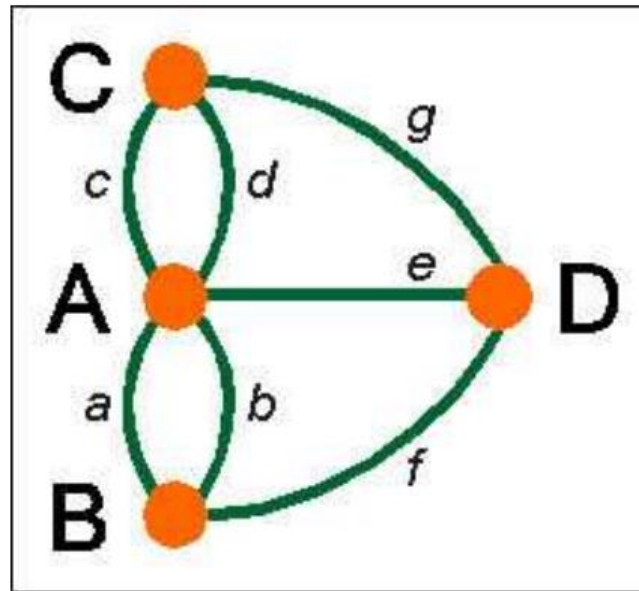
O problema consiste em determinar se é possível ou não fazer um passeio pela cidade começando e terminando no mesmo lugar, cruzando cada ponte exatamente uma única vez. Se isto for possível o grafo é chamado grafo Euleriano .



Grafo Euleriano?



Grafo Euleriano?



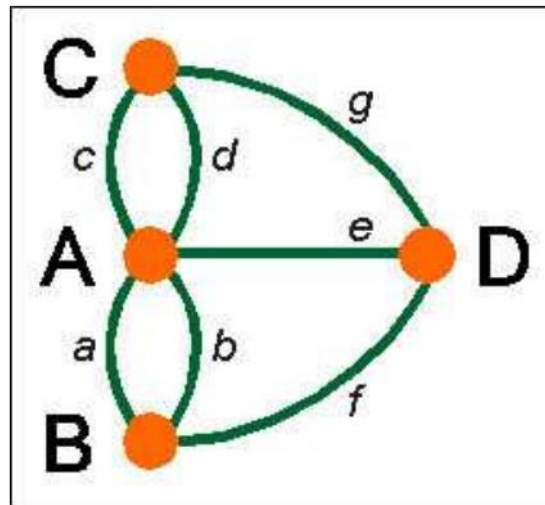
Grafo $G = (V, A)$

$V =$ **conjunto de vértices** $= \{A, B, C, D\}$

$A =$ **conjunto de arestas** $= \{a, b, c, d, e, f, g\}$



Grafo Euleriano?



Grafo $G = (V, A)$
 $V =$ **conjunto de vértices** $= \{A, B, C, D\}$
 $A =$ **conjunto de arestas** $= \{a, b, c, d, e, f, g\}$

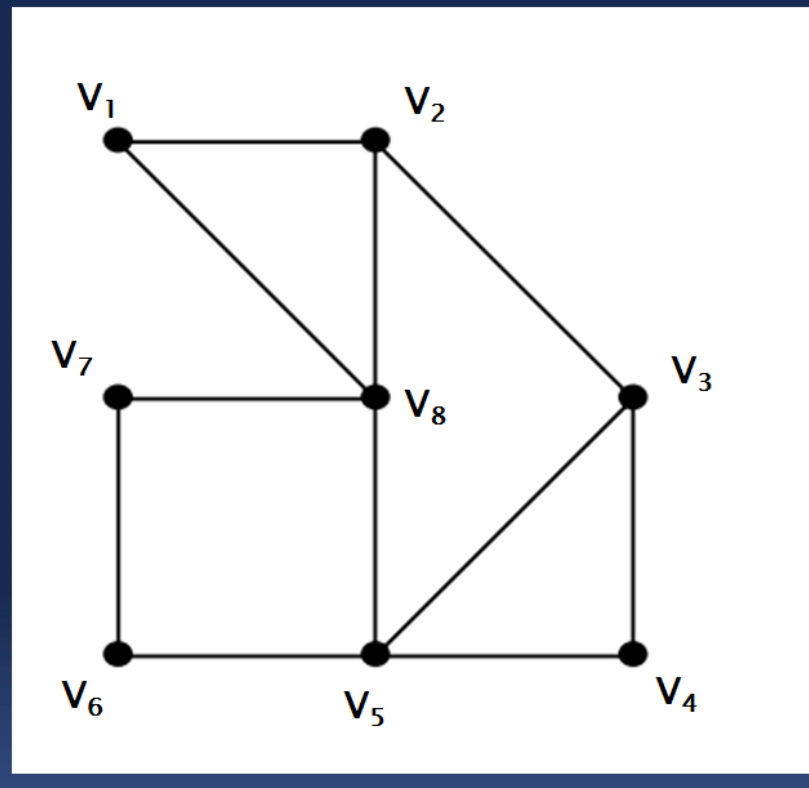
✓ Euler **provou** que o problema **não** tem solução !





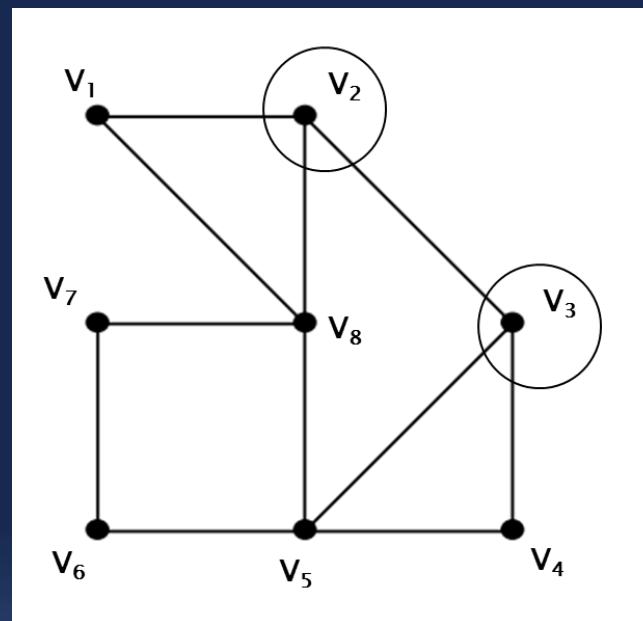
Teorema de Euler

- ✓ Um grafo conexo **G** é um **Grafo Euleriano** se e somente se o **grau** de todo o vértice de **G** for **par**.
- ✓ Exemplo: O grafo **G1** abaixo é **Euleriano**?



Teorema de Euler

- ✓ Um grafo conexo **G** é um **Grafo Euleriano** se e somente se o grau de todo o vértice de **G** for par.
- ✓ Exemplo: O grafo **G1** abaixo é **Euleriano**?

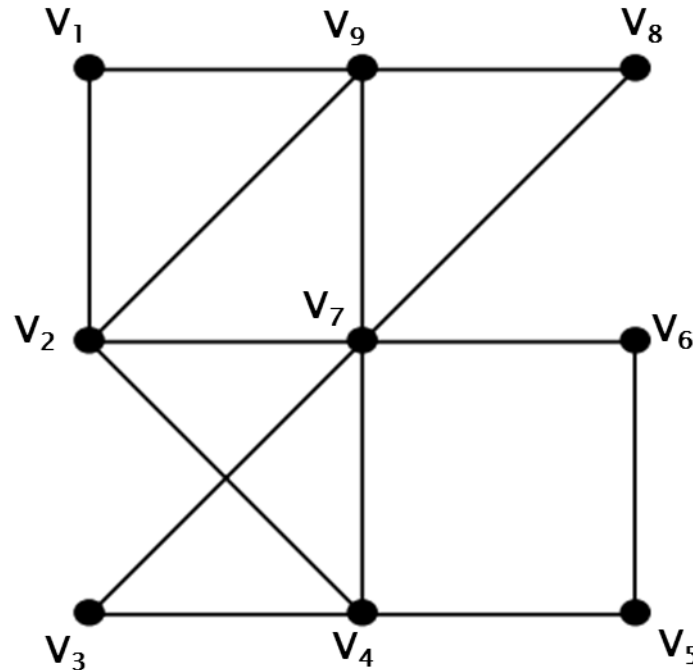


- ✓ O grafo **G1** acima tem vértices V_2 e V_3 com grau **ímpar**;
- ✓ Portanto, o Grafo **G1 não** é Euleriano!




Teorema de Euler

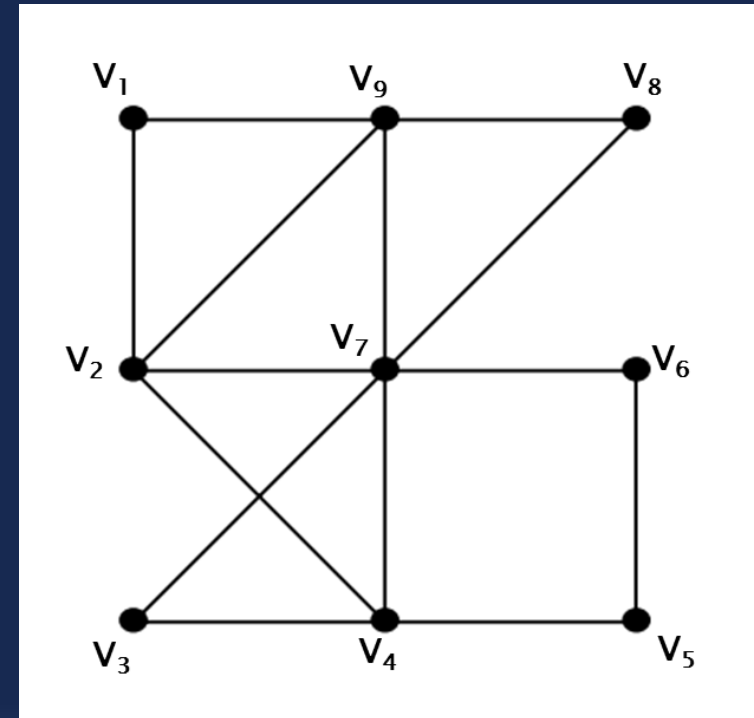
- ✓ Um grafo conexo **G** é um **Grafo Euleriano** se e somente se o grau de todo o vértice de **G** for **par**.
- ✓ Exemplo: O grafo **G2** abaixo é **Euleriano**?





Teorema de Euler

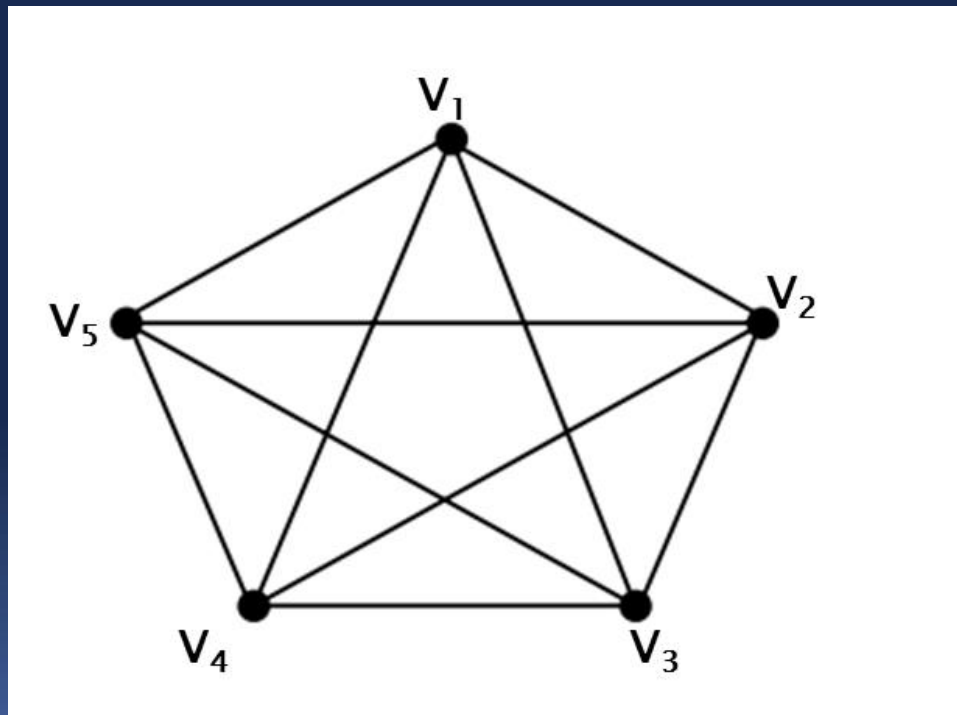
- ✓ Um grafo conexo G é um **Grafo Euleriano** se e somente se o grau de todo o vértice de G for par.
 - ✓ Exemplo: O grafo **G2** abaixo é **Euleriano**?
- 
- The diagram shows a graph with two vertices, labeled v_1 and v_9 , connected by a single edge. This is a simple graph with two vertices and one edge.



- ✓ **Todos** os vértices do grafo **G2** acima possuem graus pares;
- ✓ Portanto, o Grafo **G2 é Euleriano!**
- ✓ **Circuito de Euler:** $v_1 - v_9 - v_2 - v_4 - v_3 - v_7 - v_9 - v_8 - v_7 - v_6 - v_5 - v_4 - v_7 - v_2 - v_1$

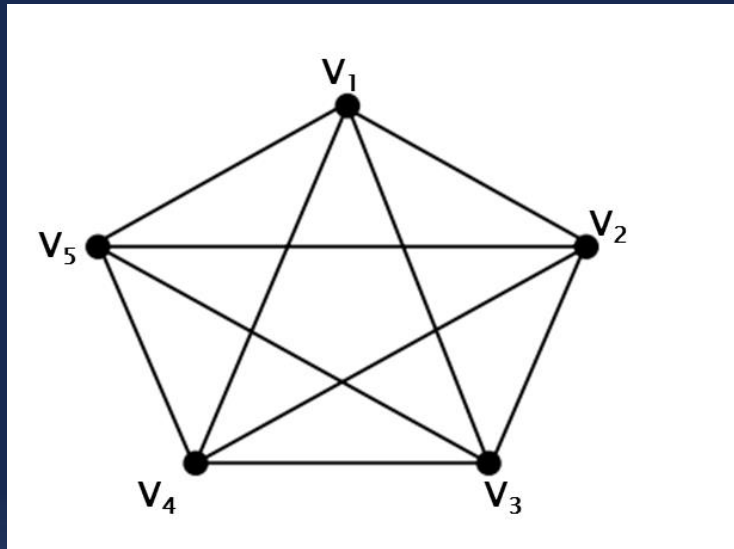
Teorema de Euler

- ✓ Um grafo conexo **G** é um **Grafo Euleriano** se e somente se o grau de todo o vértice de **G** for par.
- ✓ Exemplo: O grafo **G3** abaixo é Euleriano?



Teorema de Euler

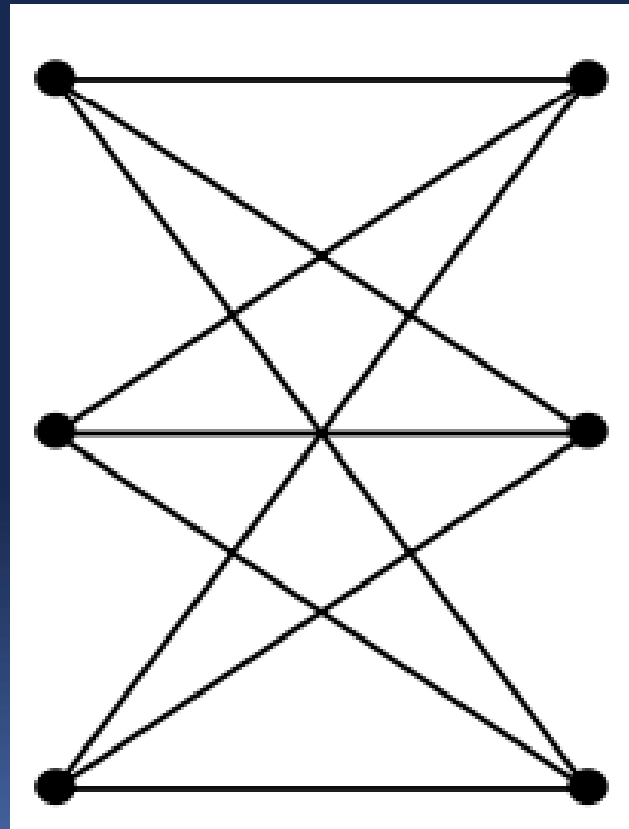
- ✓ Um grafo conexo **G** é um **Grafo Euleriano** se e somente se o grau de todo o vértice de **G** for par.
- ✓ Exemplo: O grafo **G3** abaixo é Euleriano?



- ✓ Todos os vértices do grafo **G3** acima possuem graus **pares**;
- ✓ Portanto, o Grafo **G3** é Euleriano!
- ✓ **Circuito de Euler:** $V_1 - V_2 - V_3 - V_1 - V_4 - V_2 - V_5 - V_3 - V_4 - V_5 - V_1$

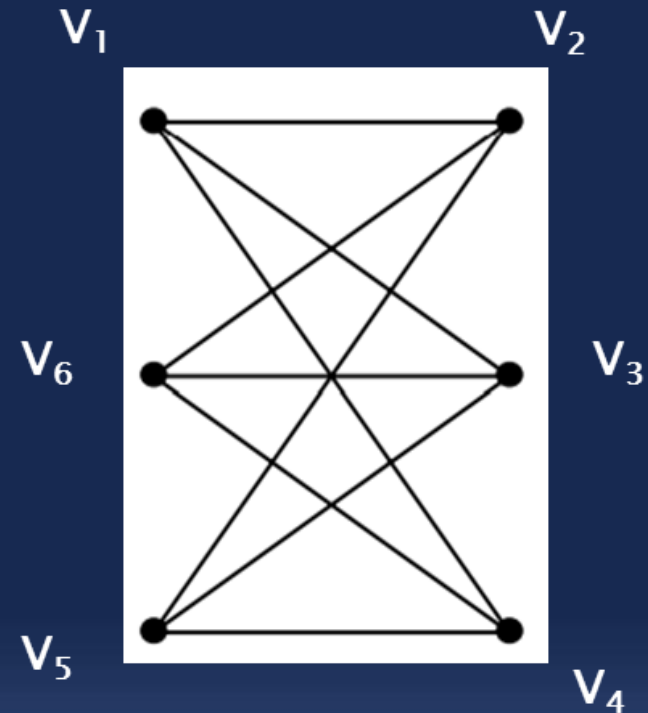
Teorema de Euler

- ✓ Um grafo conexo **G** é um **Grafo Euleriano** se e somente se o grau de todo o vértice de **G** for par.
- ✓ Exemplo: O grafo **G4** abaixo é Euleriano?



Teorema de Euler

- ✓ Um grafo conexo **G** é um **Grafo Euleriano** se e somente se o grau de todo o vértice de **G** for par.
- ✓ Exemplo: O grafo **G4** abaixo é Euleriano?



- ✓ O grafo **G4** acima tem todos os vértices com grau ímpar;
- ✓ Portanto, o Grafo **G4** **não** é Euleriano!



FIM

