Calcul de décimales de π à l'aide de la formule de Machin

Raphaëlle Gauchée Olivier Malaingre

1 Introduction

1.1 π dans l'histoire

La constante d'Archimède, mais surtout, π. Une constante connue de la majorité des néophytes et qui fascine les mathématiciens confirmés depuis des millénaires. On distingue trois périodes majeures dans l'histoire de π : L'antiquité, l'ère classique et le monde moderne.

1.1.1 Antiquité

La première apparition connue de π remonte à des tablettes Babyloniennes datant de 2000 ans avant J-C. A l'époque, et jusqu'à la fin de la période "antique", en 1600 après J-C, π était connu notamment pour ses propriétés géométriques.

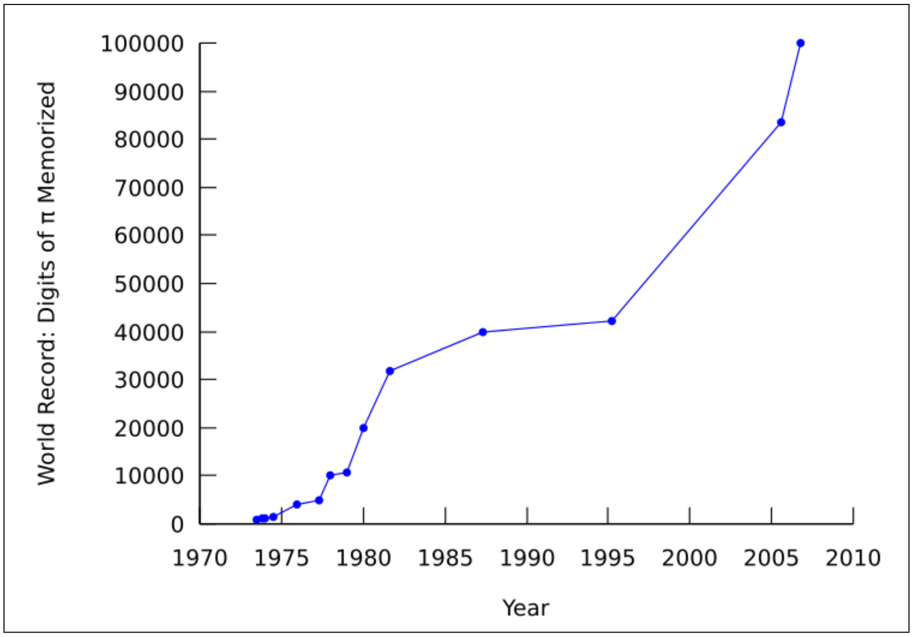
Archimède démontra dans son *Traité d'Archimède* *(287 à 212 avant J-C)* qu'une meilleure approximation de cette constante permettait d'avoir de meilleurs résultats à l'issue d'un calcul. Ce fût le début de la recherche des décimales de π. Malgré cela, la meilleure approximation de ce nombre avant 1700 n'a pas excédé les 11 premières décimales correctes. Jusqu'alors la valeur de π était décrite à l'aide d'un encadrement de rationnels.

1.1.2 L'ère classique

La recherche de π a fait un bond en avant après la découverte de la formule de Leibniz et le développement de la fonction arctan. Ce développement permet à John Machin d'être le premier à dépasser les 100 décimales en 1706. La formule qu'il utilise inspire de nombreux mathématiciens et notamment William Shanks qui trouve 527 décimales correctes à la main en quinze ans de calculs vers la fin du XIX^{ieme} siècle.

1.1.3 Le monde moderne

L'arrivée des ordinateurs et de leur puissance de calcul a relancé de plus bel la compétition au calcul des décimales de π. Pourtant, même si un calcul nécessite l'intervention de π, une dizaine de décimales suffisent amplement à avoir un calcul exact. Aujourd'hui, le calcul d'un maximum de décimales est surtout un challenge, et de temps en temps un test de capacité pour les nouveaux ordinateurs.



Même si ce graphique n'est plus d'actualité, il représente bien l'évolution récente de π. Des humains font des concours pour savoir qui personne retiendra le maximum de décimales. Par ailleurs, le record actuel de décimales calculées est de 31 milles milliards de chiffres après la virgule. Il a été atteint le 14 mars dernier, le jour du π *day* (le 3/14 selon le système anglais).

1.2 Les propriétés de π

Durant l'ère classique, avec les nouvelles possibilités de calcul, de nombreux mathématiciens se sont de nouveau penchés sur π et surtout sur sa nature.

C'est ainsi que l'irrationalité de π a été prouvé pour la première fois en 1761 par Lambert puis celle de π^2 rapidement après par Legendre. Pour rappel, on dit que k est un nombre irrationnel si $k \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.

Ensuite, Lindemann a démontré en 1882 que π était un nombre transcendant. On dit qu'un nombre $k \in \mathbb{R}$ est transcendant s'il n'est racine d'aucun polynôme à coefficients entiers dans $\mathbb{R}$.

Cette constante est également présente dans de nombreuses équations de géométrie, de probabilité, de physique, etc.

Mais malgré toutes les découvertes mathématiques, de nombreuses questions restent ouvertes à propos de π. Notamment, il n'est pas prouvé que π soit un nombre univers en base 10 ou un nombre normal, même si de nombreux mathématiciens le soupçonne.

On dit qu'un nombre réel est (absolument) normal si quelle que soit la base de numération choisie, on a autant de chance de trouver une séquence finie de chiffres dans son développement sur n'importe quelle séquence de même longueur.

Mathématiquement, notons $A = \{0, \ldots, b-1\}$ l'ensemble des chiffres dans une base b. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit s une suite finie d'éléments de A. Notons $N(s,n)$ le nombre d'apparition de s parmi les n premiers chiffres après la virgule du développement de x dans la base b. On distingue alors 3 cas. On dit que x est :

- *simplement normal* en base b si

$$\forall a \in A, \ \lim_{n\to\infty} \frac{N(a,n)}{n} = \frac{1}{b} \ ,$$

- *normal en base* b s'il est simplement normal en base b^k pour tout entier $k > 0$. On peut le noter :

$$\forall k \geqslant 1, \ \forall s \in A^k, \ \lim_{n\to\infty} \frac{N(a,n)}{n} = \frac{1}{b} \ ,$$

- *normal (ou absolument normal)* s'il est simplement normal dans toute base (et donc normal dans toute base).

On dit par ailleurs qu'un réel est un nombre univers dans une base donnée si l'on peut trouver n'importe qu'elle succession de chiffres de longueur finie dans son développement décimal.

Ainsi, un nombre univers indique que n'importe quelle séquence est présente au moins une fois dans le développement du nombre alors qu'un nombre normal ajoute un notion de probabilité d'apparition dans le développement.

Tout nombre normal est un nombre univers. En revanche, la réciproque est fausse.

Il reste donc des choses à prouver sur π. Même si la recherche de décimales est devenu un simple challenge, le nombre lui-même nous cache encore des choses.

1.3 Les séries et leur reste

Dans ce document, nous nous proposons de redémontrer des formules donnant π et de comparer leur efficacité à calculer les 100 premières décimales de π. Pour cela, nous utiliserons principalement des séries alternées.

On dit qu'une série est alternée si elle est de de terme général $(-1)^n u_n$ où u_n est nécessairement positif, décroît et tend vers 0. Pour calculer la vitesse de convergence d'une telle série, nous aurons besoin de calculer le reste de la série. On peut donc appliquer le critère des séries alternées qui nous donne le reste :

$$|R_N| = |S - S_N| \leqslant |u_{N+1}|$$

avec R_N le reste de la série à l'ordre N, S la somme de la série et S_N la somme partielle de la série à l'ordre N

2 Les formules donnant π

2.1 La formule des petits angles

$$\lim_{x\to+\infty} x\sin(\frac{\pi}{x}) = \pi$$

Cette formule est intéressante puisqu'elle est trouvable par des lycéens un petit peu curieux. En effet, même sur une calculatrice basique, on peut facilement voir que la limite de cette fonction est π. Démontrons cette formule à présent :

On sait que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \text{ ou } \sin(x)_{x\to 0} \sim x$$

donc

$$\lim_{x\to+\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \ .$$

On rappelle maintenant la règle de L'Hôpital :

Si f et g sont des fonctions définies sur $[a,b[$, dérivables en a, où a peut-être $\pm\infty$, et telles que $f(a) = g(a) = 0$ et $g\prime(a) \neq 0$, alors $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f\prime(a)}{g\prime(a)}$

En utilisant toutes ces informations, on obtient :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}[x\cdot\sin(\frac{\pi}{x})] &= \lim_{x\to+\infty}[\frac{\sin(\frac{\pi}{x})}{x^{-1}}] \\
&= \lim_{x\to+\infty}[\frac{\cos\frac{\pi}{x}\cdot\frac{-\pi}{x^2}}{-x^{-2}}] \\
&= \lim_{x\to+\infty}[\pi\cdot\cos(\frac{\pi}{x})] \ .
\end{aligned}$$

Ayant ce résultat, comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi}{x} = 0$ et $\cos(0) = 1$, on a :

$$\lim_{x\to+\infty}[\pi\cdot\cos(\frac{\pi}{x})] = \pi\cdot 1 = \pi \ .$$

2.2 Formule liée à arctan

$$\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

La fonction arctan est développable en série entière :

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\cdot x^{2k+1}}{2k+1} \ .$$

On a donc : $\arctan(1) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

2.3 Série de Riemann

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Il existe de nombreuses façons de démontrer cette formule. Nous allons en étudier deux : la démonstration grâce aux suites de polynômes de Tchebychev et la démonstration grâce aux séries de Fourier.

2.3.1 Démonstration par polynômes de Tchebychev

Considérons la suite de polynôme de Tchebychev $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$T_0(X) = 1,\ T_1(X) = X \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} : T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X)\ .$$

Une application directe à partir de cette suite de polynôme permet de calculer la série de Riemann. Mais commençons par énoncer quelques propriétés sur cette suite :

- T_n est de degré n et son terme dominant est $2^{n-1}X^n$,
- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R} : T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$,
- $T_n(1) = 1$ et $T_n'(1) = n^2$,
- Le polynôme T_n possède exactement n racines simples distinctes contenus dans l'intervalle $[-1, 1]$ de la forme $x_k = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}$ pour $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Maintenant, T_n étant de coefficient dominant 2^{n-1} et de racines $x_1, \ldots, x_n$, on peut écrire :

$$T_n = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n}(X - x_k) \text{ et } T_n' = 2^{n-1}\sum_{k=1}^{n}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}(X - x_i)\ .$$

Cela nous donne le résultat

$$\frac{T_n'}{T_n} = \frac{2^{n-1}\sum_{k=1}^{n}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}(X - x_i)}{2^{n-1}\prod_{k=1}^{n}(X - x_k)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{X - x_k}\ .$$

Si on évalue $\frac{T_n'}{T_n}$ en 1, on obtient rapidement

$$\frac{T_n'}{T_n}(1) = \frac{n^2}{1} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{X - x_k}(1) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1 - \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}}\ .$$

De plus, comme $1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$, on a directement

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\frac{(2k-1)\pi}{4n}} = 2n^2\ .$$

Bien sûr, cela donne encore $\sum\limits_{k=1}^{n} 1 + \frac{\cos^2 \frac{(2k-1)\pi}{4n}}{\sin^2 \frac{(2k-1)\pi}{4n}} = 2n^2$ et donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tan^2 \frac{(2k-1)\pi}{4n}} = 2n^2 - n$$

Puisque sinus est concave sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et tangente est convexe sur le même intervalle, on a $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[,\ \sin x \leqslant x \leqslant \tan x$.

On a $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[,\ \frac{1}{\tan^2 x} \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant \frac{1}{\sin^2 x}$ et pour $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, $x = \frac{(2k-1)\pi}{4n} \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

Donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tan^2 \frac{(2k-1)\pi}{4n}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{16n^2}{(2k-1)^2\pi^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2 \frac{(2k-1)\pi}{4n}}$$

$$\Longrightarrow \frac{\pi^2}{16n^2} \times (2n^2 - n) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2} \leqslant \frac{\pi^2}{16n^2} \times 2n^2$$

$$\Longrightarrow \frac{(2n^2 - n)\pi^2}{16n^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2} \leqslant \frac{\pi^2}{8} .$$

Nous avons par ailleurs $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n^2-n)\pi^2}{16n^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Par conséquent, par théorème des gendarmes, nous savons que $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2}$, qui correspond à la somme impaire de Riemann, converge vers $\frac{\pi^2}{8}$.

On sait que

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{3}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} .$$

Nous avons prouvé que la partie impaire de Riemann convergeait vers $\frac{\pi^2}{8}$. Par conséquent, la série de Riemann converge et nous avons le résultat

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{4}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6} .$$

2.3.2 Démonstration par série de Fourier

Dans cette partie, on se sert de la formule des séries de Fourier pour montrer cette formule. Pour rappel, une série de Fourier s'évalue sur une fonction $T-$périodique de la forme

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\, \mathrm{e}^{i2\pi \frac{n}{T} x}$$

où les coefficients $c_n(f)$, appelés coefficients de Fourier de f, sont définis par

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\mathrm{e}^{-i2\pi\frac{n}{T}t}\,dt\ .$$

Ici, on considère la fonction

$$f(t) = t \text{ si } -\pi < t < \pi \quad \text{et } f(-\pi) = f(\pi) = 0$$

et on prolonge f par périodicité. Alors f est continue par morceaux sur les intervalles $](2n-1)\pi, (2n+1)\pi[$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Elle admet une limite à droite et à gauche en les points $(2n+1)\pi$. Elle est également dérivable sur tous les intervalles $](2n-1)\pi, (2n+1)\pi[$.

Étudions ses coefficients de Fourier. Si $n \neq 0$, on a

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s\,\mathrm{e}^{-nis}\,ds$$

On fait une intégration par partie ce qui donne

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{t\,\mathrm{e}^{-nit}}{-ni}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{-nis}}{-ni}ds \\ &= \frac{1}{2\pi}\,\frac{\pi\,\mathrm{e}^{-ni\pi} + \pi\,\mathrm{e}^{ni\pi}}{-ni} = \frac{(-1)^{ni}}{n}\ . \end{aligned}$$

Cela signifie bien sûr que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\ .$$

On a aussi

$$c_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} sds = 0$$

et également que

$$||f||^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s^2\,ds = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} s^2\,ds = \frac{\pi^2}{3}\ .$$

On utilise maintenant l'égalité de Parseval-Bessel qui affirme dans ces conditions :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2\,\mathrm{e}^{-i2\pi\frac{n}{T}t}\,dt = ||f||^2\ .$$

Une application directe de cette égalité donne donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2 = \frac{1}{2}\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2 = \frac{1}{2}\times||f||^2 = \frac{\pi^2}{6}\ .$$

2.4 Série de Riemann alternée

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

On a :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - 2 \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2}$$

$$= \frac{\pi^2}{6} - 2 \times \frac{1}{4} \times \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}$$

2.5 Formule de Machin

Rappels :

- Formule d'addition de tan :

$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)}{\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)}$$

  De plus

$$\frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)} = \frac{\frac{\sin(a)}{\cos(a)} + \frac{\sin(b)}{\cos(b)}}{1 - \frac{\sin(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)}}$$

$$= \frac{\sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b)} \frac{\cos(a)\cos(b)}{\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)}$$

$$= \frac{\cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)}{\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)} = \tan(a+b)$$

  Donc

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$$

- Arctan

  Si $a + b \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, alors

$$\arctan(\tan(a+b)) = a + b$$

  Dans les mêmes conditions, on a également

$$\arctan(\frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}) = a + b$$

  On pose :

$$A = \tan(a),\ a = \arctan(A) \text{ si } a \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$$

$$B = \tan(b),\ b = \arctan(B) \text{ si } \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$$

donc

$$\arctan(\frac{A+B}{1-AB}) = \arctan(A) + \arctan(B)$$

<u>Démonstration :</u>

- Première partie de la formule :

  On a bien $0 < \frac{1}{5} < 1$ donc $0 < \arctan\left(\frac{1}{5}\right) < \frac{\pi}{4}$
  et $0 < 2\arctan\left(\frac{1}{5}\right) < \frac{\pi}{2}$

  $$4 \cdot \arctan(\frac{1}{5}) = 2 \cdot (\arctan(\frac{1}{5}) + \arctan(\frac{1}{5}))$$

  $$= 2 \cdot \arctan(\frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{25}}) = 2 \cdot \arctan(\frac{5}{12})$$

  $$= \arctan(\frac{5}{12}) + \arctan(\frac{5}{12})$$

  $$= \arctan(\frac{\frac{5}{12}+\frac{5}{12}}{1-\frac{25}{144}})$$

  $$= \arctan(\frac{120}{119})$$

  Donc

  $$4\arctan(\frac{1}{5}) = \arctan(\frac{120}{119})$$

- Seconde partie de la formule :

  On a $1 < \frac{120}{119}$ donc $\frac{\pi}{4} < \arctan\left(\frac{120}{119}\right) < \frac{\pi}{2}$
  et $0 < \arctan\left(\frac{120}{119}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) < \frac{\pi}{2}$

  $$\arctan(\frac{120}{119}) - \arctan(\frac{1}{239})$$

  $$= \arctan(\frac{1+\frac{1}{119}-\frac{1}{239}}{1+\frac{120}{119\times 239}})$$

  $$= \arctan(\frac{1+\frac{239-119}{119\times 239}}{1+\frac{120}{119\times 239}})$$

  $$= \arctan(\frac{1+\frac{120}{119\times 239}}{1+\frac{120}{119\times 239}})$$

  $$= \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

Donc on a bien :

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan(\frac{1}{5}) - \arctan(\frac{1}{239})$$

2.6 La formule de Ramanujan *(1910)* et la formule de David et Gregory Chudnovsky *(1987)*

Cette formule a été trouvé par le mathématicien Indien Ramanujan en 1910 mais n'a été démontré qu'en 1987 par les frères Jonathan et Peter Borwein :

$$\frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(4n)!(1103+26390n)}{(n!)^4(4\cdot 99)^{4n}}\right)=\frac{1}{\pi}$$

En s'inspirant de la première formule, les frères Chudnovsky trouvent la formule :

$$12\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot(6k)!\cdot(13591409+545140134k)}{(3k)!\cdot(k!)^3\cdot 640320^{3k+\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\pi}$$

Ces formules font encore aujourd'hui parties des algorithmes les plus efficaces pour calculer π. Nous n'allons cependant pas aborder leur démonstration dans ce document, ces dernières utilisant des techniques trop poussées pour notre propre compréhension.

3 Mathématiques appliquées

3.1 Calcul du nombre de terme nécessaire pour obtenir au moins 100 décimales par formule

On considère la suite des S_N, les sommes partielles d'une série alternée, qui tend vers S. On cherche le nombre de chiffre significatifs corrects, σ_N.

On sait que $\sigma_N = -\log_{10}(\delta_N)$

avec $\delta_N = \frac{|S_N - S|}{|S|}$

donc $\delta_N = \frac{|R_N|}{|S|}$
Or on sait que $R_N \leqslant |u_{n+1}|$
Donc $\delta_N \leqslant \frac{|u_{n+1}|}{|S|}$
Il reste donc a trouver N tel que $\delta_N \leqslant 10^{-100}$ pour chaque formule.

3.2 Formule liée à arctan

On rappelle :

$$\arctan(1) = \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)}$$

Donc on a bien une série alternée de terme général $u_n = \frac{1}{(2n+1)}$.
On cherche N tel que $\delta_N \leqslant u_{N+1} \times \frac{4}{\pi}$.
Donc $\frac{4}{(2N+3)\times\pi} \leqslant 10^{-100}$
Et ainsi $(2N+3) \geqslant \frac{4\times10^{100}}{\pi}$
On remarque que $\frac{4}{\pi} \simeq \frac{4}{3}$ ce qui signifie que $\frac{4\times10^{100}}{\pi} \simeq \frac{4\times10^{100}}{3} \simeq 13\times10^{99}$
On peut considérer $2N+3 \geqslant 13\times10^{99}$.
On peut négliger le 3 ce qui donne $2N \geqslant 13\times10^{99}$.
On a de plus $10^{99} = (5\times2)^{99} = 5\times2\times10^{98}$.
Donc $N \geqslant 13\times5\times10^{98} = 65\times10^{98}$
Il faut donc calculer au moins les 65×10^{98} premiers termes de la série pour obtenir au moins 100 décimales.

3.3 Série de Riemann

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Pour la série de Riemann, considérons la série de Riemann alternée :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

On a bien une série alternée, de terme général : $u_n = \frac{1}{n^2}$

Donc on cherche N tel que $\delta_N \leqslant u_{N+1} \times \frac{6}{\pi^2}$
Donc $\frac{12}{\pi^2(N+1)^2} \leqslant 10^{-100}$
Donc $(N+1)^2 \geqslant \frac{12\times 10^{100}}{\pi^2}$
Donc on a $(N+1)^2 \geqslant 10^{100}$. Ce qui donne $N+1 = 10^{50}$.
Il faut donc calculer 10^{50} termes pour obtenir au moins 100 décimales.

3.4 Formule de Machin

Une série alternée :

Pour $x \in [-1; 1]$ on a le développement limité :

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)}$$

Donc on a

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan(\frac{1}{5}) - \arctan(\frac{1}{239})$$

$$= 4\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{5^{2k+1}(2k+1)} - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{239^{2k+1}(2k+1)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{4\times 239^{2k+1} - 5^{2k+1}}{(5\times 239)^{2k+1}(2k+1)}$$

On a donc une série alternée de terme général $u_n = \frac{4\times 239^{2n+1} - 5^{2n+1}}{(5\times 239)^{2n+1}(2n+1)}$

Une approximation :

On cherche N tel que $\frac{4}{\pi} \times \frac{4\times 239^{2N+3} - 5^{2N+3}}{(5\times 239)^{2N+3}(2N+3)} \leqslant 10^{-100}$.
On a :

$$\frac{4\times 239^{2N+3} - 5^{2N+3}}{(5\times 239)^{2N+3}(2N+3)}$$

$$\geqslant \frac{4\times 235^{2N+3} - 5^{2N+3}}{(5\times 235)^{2N+3}(2N+3)}$$

$$\geqslant \frac{5^{2N+3}(4\times 47^{2N+3} - 1)}{(5\times 235)^{2N+3}(2N+3)}$$

$$\geqslant \frac{4\times 47^{2N+3} - 1}{(235)^{2N+3}(2N+3)}$$

$$\simeq \frac{4\times 47^{2N+3}}{(235)^{2N+3}(2N+3)}$$

$$\simeq \frac{4}{(5)^{2N+3}(2N+3)}$$

On remarque maintenant que $5 \geqslant 4 = 2^2$ et de plus, $10 = 5 \times 2$. Par conséquent, $(10)^N = 5^N \times 2^N \leqslant 5^{\frac{3}{2}N}$. On remarque par ailleurs que $\frac{16}{\pi} \geqslant \frac{5}{1}$.

On a donc :

$$10^{-100} \geqslant \frac{16}{\pi} \times \frac{1}{(5)^{2N+3} \cdot (2N+3)} \geqslant \frac{5}{1} \times \frac{1}{(5)^{2N+3} \cdot (2N+3)}$$
$$\geqslant \frac{1}{(5)^{2N+2} \cdot (2N+3)} \geqslant \frac{1}{(10)^{\frac{4}{3}N+\frac{4}{3}} \cdot (2N+3)}$$

Comme $\frac{4}{3} \cdot 73 \simeq 98,6$ et $2 \times 73 + 3 = 149 \geqslant 1 \times 10^2$, pour N = 73, on a

$$10^{-100} \geqslant \frac{1}{(10)^{\frac{4}{3}\times 73+\frac{4}{3}} \cdot (2 \times 73 + 3)}$$

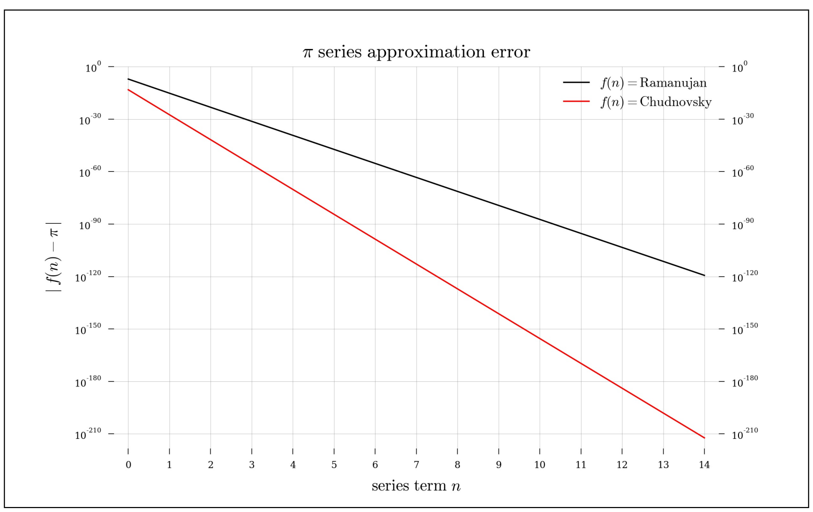
On en conclut qu'il faut calculer les 73 premiers termes de la série pour trouver les cents premières décimales de π. Informatiquement, on trouve qu'il faut 70[1] termes pour obtenir au moins 100 décimales. L'erreur de calcul provient des approximations mais l'ordre de grandeur reste correct.

3.5 Les formules de Ramanujan et des frères Chudnovsky

Pour la même raison que lorsque nous n'avons pas abordées les démonstrations de ces formules, nous n'allons pas démontrer leur vitesse de convergence.

Néanmoins, en se servant de données trouvées sur internet[2], on se rend compte que le calcul pour trouver les 100 premières décimales est extrêmement rapide puisque la formule de Ramanujan atteint les 100 décimales en 13 termes et celle de Chudnovsky l'atteint 7 termes.

On constate que la formule des frères Chudnovsky converge nettement plus rapidement que celle de Ramanujan comme le montre le graphique suivant :



[1] Voir partie 4.2 pour les détails de calculs

[2] Voir référence en annexe 6.1.

4 Informatique : Calcul

4.1 Python, la bibliothèque *Decimal* et ses limites

Pour faire nos calculs, nous nous sommes servis de **Python** et de sa bibliothèque *Decimal* qui permet de choisir la précision souhaitée sur des flottants. Pour cela, il suffit de fixer ladite précision qui nous intéresse et nos calculs sont effectué en conséquence. Néanmoins, cette bibliothèque fait des arrondis plutôt sévère sur les dernières décimales des nombres considérés. Pour notre calcul de π, cela signifie que si l'on demande par exemple 100 décimales, on en obtient seulement 98 correctes. Pour compenser en partie ce problème, on demande un peu plus de précision. Mais cela ne signifie pas que tous les calculs seront exacts pour autant. Pour de grands nombres, une marge d'erreur plus grande est souvent requise.

4.2 Calcul du plus de décimales possibles

Sur un ordinateur récent, le calcul des 100 premières décimales se fait "très" rapidement. Nous avons donc essayé d'aller le plus loin possible en se servant uniquement de la formule de Machin. Comme précisé en introduction, π peut servir à mesurer la puissance d'un ordinateur, ici on voit bien que cette puissance est très importante sur la vitesse de calcul du plus de décimales possibles. Voici un récapitulatif des résultats :

nombre de décimales	temps ordi Raphaëlle	temps ordi Olivier
100	0,06 s	0,003 s
500	0,23 s	0,111 s
1000	1,22 s	0,734 s
5000	2 min 3 s	1 min 18,251 s
10000	17 min	9 min 59 s
50000	-	8 h 37 min

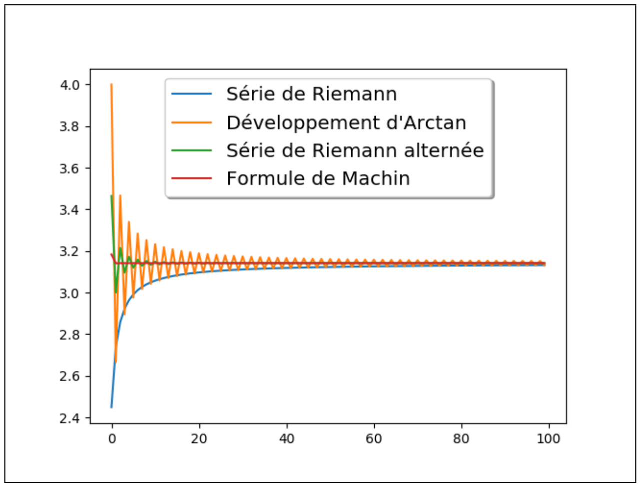
Pour calculer n décimales, nous avons un programme qui va d'abord trouver le nombre de termes nécessaires. Pour résoudre ce problème, le programme va dans un premier temps faire une recherche dichotomique logarithmique pour déterminer l'ordre de grandeur du nombre de termes. Et dans un second temps, une autre recherche dichotomique va déterminer le nombre de terme qu'il faut. Le nombre de terme trouvé correspond à l'entier qui vérifie l'inéquation[3] : $\frac{4}{\pi} \times \frac{4\times 239^{2N+3} - 5^{2N+3}}{(5\times 239)^{2N+3}(2N+3)} \leqslant 10^{-n}$.

4.3 Calcul selon les formules

On ne peut pas calculer les 100 décimales avec les formules autre que celle de Machin. En effet, elles demandent beaucoup trop de termes à calculer pour un tel résultat. On peut néanmoins comparer la vitesse de convergence des différentes séries en regardant le résultat des sommes pour un même nombre

[3] Cette inéquation a été démontré dans la section 3.4.

de terme calculé. Nous avons donc comparé les résultats obtenus et les avons réunis dans un graphique.



Ce graphique représente la somme des termes calculés en fonction du nombre de terme. On retrouve bien les différences de vitesse de convergence calculées plus haut. On remarque également que la formule de Machin est la plus efficace (parmi celles considérées) pour avoir le maximum de décimales le plus rapidement.[4]

5 Conclusion

π est un challenge aujourd'hui. Durant l'antiquité, les mathématiciens se sont acharnés à le calculer afin d'améliorer leurs résultats géométriques. De nos jours, la recherche des décimales est un phénomène social. Chaque avancé dans ce domaine est relayé par la presse et π est sans doute la seule constante connue par la majorité du public.

Ce challenge permet également aux apprentis de s'entraîner, de redécouvrir des démonstrations piochant dans tous les domaines. En mathématiques, les formules (et surtout celle de Riemann) sont démontrables de multiples façons. En informatique, le calcul engendre énormément de problème notamment par rapport à la capacité de stockage et à la vitesse de calcul.

Et même si le calcul de décimale est plus un défi qu'autre chose aujourd'hui, la constante elle-même laisse des problèmes ouverts dans tous les domaines qui sont encore aujourd'hui des sujets de recherche.

[4] Un deuxième graphique plus précis se trouve en annexe. Il permet de mieux voir les différences locales.

6 Annexes

6.1 Convergence de Ramanujan et Chudnovsky

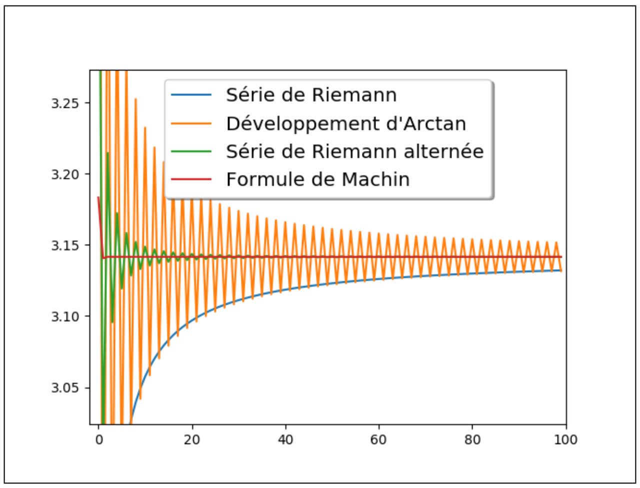
Durant nos recherches, nous avons trouvé ce site qui nous à donné le graphique représentant la convergence des formules de Ramanujan et de Chudnovsky :

`http://alpheratz.net/category/math/`

6.2 Decimal

Voici le lien de la bibliothèque que nous avons utilisé pour faire nos calculs : `https://docs.python.org/fr/3/library/decimal.html`

6.3 Graphique supplémentaire



Il s'agit du même graphique que celui de la partie 4.3, zoomé sur la différence de vitesse de convergence.

6.4 Décimales de pi

Voici un site qui nous a permis de vérifier si les 100 premières décimales que nous avons calculé étaient correctes :

`http://gecif.net/articles/mathematiques/pi/pi_decimales.html`