Université Paris Diderot Paris 7
Licence L3 (S2)
2018-2019

UFR de Mathématiques
Analyse I
P. Perrin

Analyse I.

Projet(s).

Projet 1

On a montré, en utilisant la théorie des séries de Fourrier et Parseval-Bessel, que

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \ .$$

- Estimez le reste de la série de Riemann $1/n^2$ et en déduire le nombre de termes à calculer pour avoir, disons, n décimales de π .
- Cela vous paraît-il efficace ?
- John Machin (1706 quand même) a prouvé la formule

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right) \ .$$

  La vérifier.
- Á l'aide du développement en série de la fonction $\operatorname{Arctan}(x)$, donner la même estimation du nombre de termes à calculer pour avoir n décimales de π .
- John Machin avait trouvé les 100 premières décimales de π . Faîtes mieux que lui.

Projet 2

On considère le problème de Cauchy

$$\varphi(x_0) = y_0 \text{ et } \varphi'(x) = \sin\left(x\varphi(x)\right) \ .$$

- Mettre le problème sous forme d'équation intégrale.

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \sin\left(t\varphi(t)\right) dt$$

- Il est alors facile d'utiliser un théorème de point fixe (dans un espace adéquat) pour prouver que le problème de Cauchy a toujours une solution unique dans un voisinage convenable de (x_0, y_0) .
- Il est également assez facile de montrer que les solutions sont alors toujours définies sur $\mathbb{R}$.
- En s'inspirant des procédés d'approximation d'une intégrale (formule des trapèzes par exemple), donner une méthode de construction des solutions approchées pour cette équation différentielle.
- L'utiliser pour tracer quelques solutions à partir de leur valeur en 0 .

Projet 1.

Quelques éléments sur π .

Partie Historique.

Il y a beaucoup de références sur le nombre π disponibles. Citons en quelques unes :

(1) https ://images.math.cnrs.fr/Les-secrets-du-nombre-Pi.html

(2) https ://images.math.cnrs.fr/Les-decimales-de-pi.html

Partie mathématique.

(1) Pourquoi le nombre π est-il irrationnel ?

(2) Pourquoi le nombre π est-il transcendant ?

(3) Quelques exemples de formules donnant π (et leur démonstration).

Partie mathématiques approchées.

(1) Les erreurs dues à la méthode. Remplacer la somme d'une série par un certain nombre de termes consiste à négliger le reste. Cela suppose de pouvoir l'estimer. Principes d'estimation du reste.
https ://images.math.cnrs.fr/Sommes-de-series-de-nombres-reels.html

(2) Les erreurs de calcul. Chaque terme de la série va être approché. Comment estimer l'erreur commise en additionnant un (grand) nombre de termes ?
https ://images.math.cnrs.fr/Erreurs-en-arithmetique-des.html

Partie informatique.

(1) Calcul en grande précision sur les entiers. Une référence de base sont les ouvrages de D. Knuth.

(2) Algorithmes spécifiques pour π .
https ://en.wikipedia.org/wiki/Approximationsofπ