Livrable 2 : Fast & Furious

Équipe 3 :

Lou Dutertre-Thouan

Louey Guinoubi

Ethan Swica

Flavio De Barros Barbosa

Nathan Bayeul

Raphaël Linard

Sommaire :

Introduction

Owen Shaw à proposer un défi à Dom Torreto de remporter une course de voiture sur circuit.

Ce circuit est composé de différentes étapes :

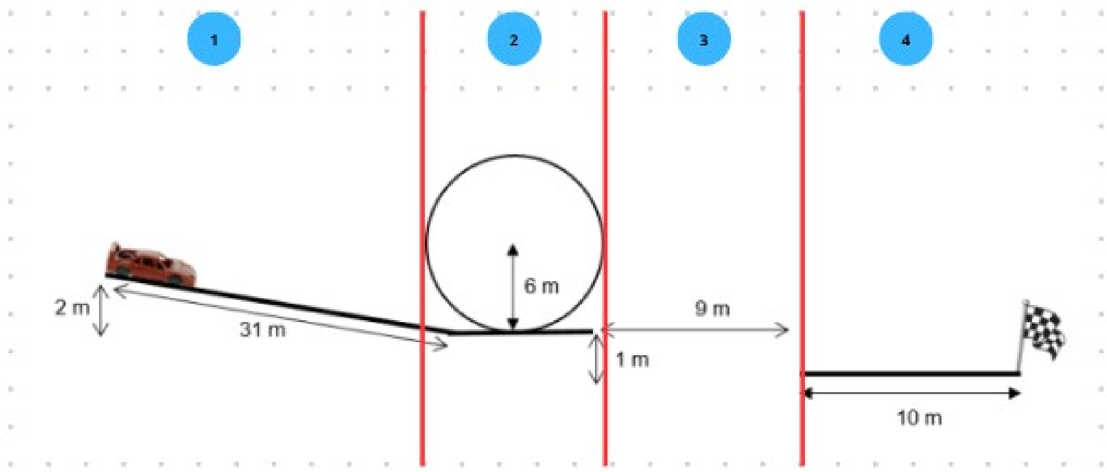
- Une piste d'élan avec une hauteur de 2m et une longueur de 31m.
- Un looping de 6 m de rayon.
- Un saut au-dessus d'un ravin de 9m de large et 1m de dénivelé négative.
- Une piste de 10m jusqu'à l'arrivée.

Un ami de Dom Torreto, Tej Parker, membre de notre équipe doit choisir la bonne voiture pour faire gagner la course à Dom.

Pour ce faire notre équipe doit procéder à une étude de circuit pour savoir quelle voiture sera la plus adaptée.

Pour ce deuxième livrable nous devons étudier les forces appliquées à chaque portion de circuit et leurs vitesses respectives.

Les différentes étapes du parcours :

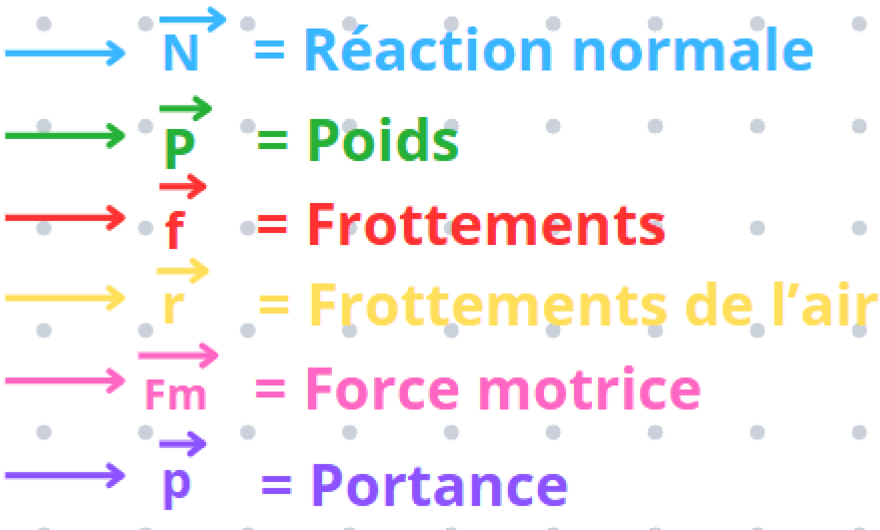


- Etape 1 : Descente de la pente
- Etape 2 : Looping

- Etape 3 : Saut en l'air
- Etape 4 : Piste d'arrivée

/!\Toutes les étapes du circuit seront étudiées sur un référentiel galiléen /!

<u>Les différentes forces appliquées à la voiture :</u>



- Le poids $\vec{P}$ se défini par la formule suivante : $P = m \cdot g$ avec P = $||\vec{P}||$
- La réaction normale $\vec{N}$: $\mathrm{N} = ||\vec{N}||$
- Le frottement $\vec{f}$ avec le sol : $N \cdot \mu$
- La force motrice $\overrightarrow{Fm}$: $a_m * m$
- La portance $\vec{p} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot C_z \cdot v^2$
- La réaction de l'air $\vec{r} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot C_x \cdot v^2$

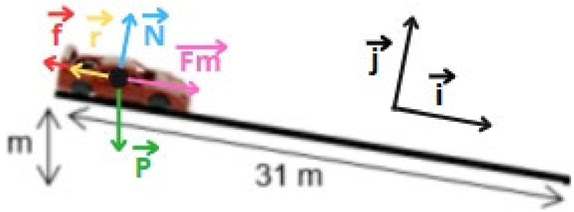
Calcul de l'accélération $\vec{a}$: $\sum \vec{F}ext = m \cdot \vec{a}$

On prendra en compte la résistance de l'air lors des futurs calculs si cela est possible.

Lexique :

- m, la masse de la voiture (en kg) .
- g, la constante gravitationnelle (≈ 9.81).
- α, l'angle de la pente (en °).
- μ, le coefficient de frottement dynamique entre la route et les pneus.
- ρ, la masse volumique du fluide, ici l'air (en kg/m^3).
- S, la surface de contact (en m).
- C_x, le coefficient de trainée en fonction de la voiture.
- C_z, le coefficient de portance en fonction de la voiture.
- v, la vitesse de la voiture moins celle de l'air, qu'on négligera (en m/s)
- a_m, l'accélération moyenne de la voiture donnée.

Etape 1 - Descente de la pente : Forces et repère



- Pourquoi ce repère ?

Il sera plus simple de calculer le travail de la force ou la force elle-même, car l'angle sera désormais de 0° et les frottements auront donc pour y, y=0 et iront dans le sens de -$\vec{\imath}$. Cela simplifiera les calculs.

Les forces qui s'exercent sur la voiture sont le poids $\vec{P}$, le réaction normale $\vec{N}$, l'accélération $\vec{a}$, les forces de frottements avec le sol $\vec{f}$, les forces de frottements avec l'air $\vec{r}$ et la portance $\vec{p}$ dans l'étape 3.

Les forces de frottements $\vec{f}$ et $\vec{r}$ sont toujours parallèles à la surface.

Nous avons la réaction normale du support noté $\vec{N}$ qui est perpendiculaire à la surface.

Le poids est une force qui est toujours dirigée vers la verticale car il dépend de la force gravitationnelle noté $\vec{g}$ qui est orientée vers le bas.

$\mathrm{P} = \mathrm{m} \cdot \mathrm{g} \cdot \mathrm{angle}(\alpha)$ (cosinus ou sinus en fonction d'où est situé l'angle)

$\mathrm{N} = \mathrm{m} \cdot \mathrm{g} \cdot \mathrm{angle}(\alpha)$ (cosinus ou sinus en fonction d'où est situé l'angle)

Si le poids est perpendiculaire au repère, alors la norme du vecteur $\vec{\mathrm{N}}$ et la même que le poids si aucune autre force entre en jeu.

Par exemple, si la voiture est suspendue dans l'air par une corde et que cette corde lâche, la voiture tombera vers le bas. Chaque objet est attiré par la force de gravité sur Terre.

De plus, la force motrice, en direction du vecteur unitaire $\vec{\imath}$ permet à la voiture, en plus des forces qui l'entoure dans la pente d'accélérer davantage.

Elle est obligatoirement à prendre en compte pour obtenir l'accélération !

Equation horaires pour l'étape n°1 :

Grâce au PFD :

$\sum \vec{F}ext = m \cdot \vec{a}$

$\vec{r} + \vec{f} + \vec{N} + \overrightarrow{Fm} + \vec{P} = m \cdot \vec{a}$

Avec $\vec{r}$ = $-\|\vec{r}\| * \vec{\imath}$ → Car uniquement sur l'axe X référentiel et négatif car s'oppose à $\vec{\imath}$

Avec $\vec{f}$ = $-\|\vec{f}\| * \vec{\imath}$ → Car uniquement sur l'axe X référentiel et négatif car s'oppose à $\vec{\imath}$

Avec $\vec{P}$ = $m * g * \sin(\mathrm{a}) * \vec{\imath} - m * g * \cos(a) * \vec{\jmath}$

Avec $\vec{N}$ = $\|\vec{N}\| * \vec{\jmath}$ → Car uniquement sur l'axe Y référentiel

Avec $\overrightarrow{Fm}$ = $a_m * m * \vec{\imath}$ → Car uniquement sur l'axe X référentiel

Projection sur l'axe X et Y :

Sur l'axe X :

$\frac{(-r-f+Fm+P*\sin(a))}{m}$

Donc:

$$a = \frac{-\left(\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot C_x \cdot v^2\right) - (N * \mu) + Fm + (m * g * \sin(a))}{m}$$

Soit sous une forme plus simple :

$$v' = \frac{-\left(\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot C_x \cdot v^2\right) + Fconstante}{m}$$

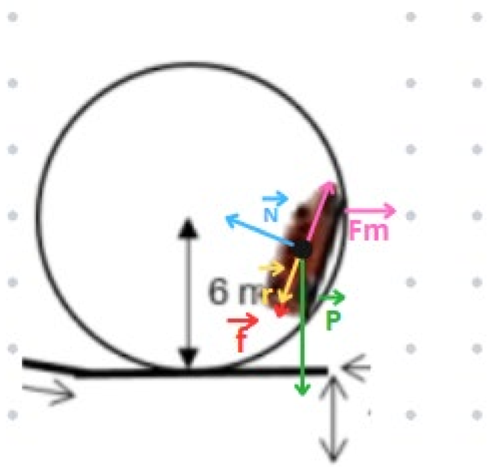
On trouve une équation différentielle de la forme v' + ay^2 = b

Sur l'axe Y :

Donc $V'_y = 0$ → Donc N = -P*cos(a) → à réutiliser dans le calcul pour les forces constantes !

Donc la vitesse de la voiture sera le résultat de l'équation différentielle de V'x

Etape 2 – Looping : Forces

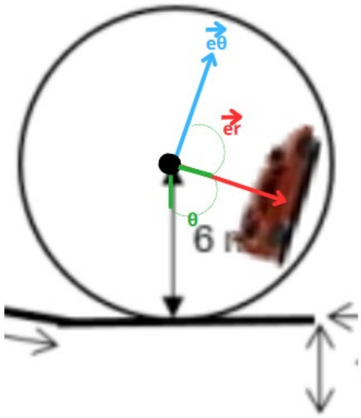


Dans tout le looping, les frottements $\vec{f}$ et $\vec{r}$ sont toujours parallèle à la surface.

La réaction normale du support est toujours perpendiculaire à la surface.
Le poids $\vec{P}$ est toujours le même au cours du looping.

La force motrice est tout de même représentée, elle permet encore à la voiture d'avancer.

Etape 2 – Looping : Repère polaire



La voiture à effectué un angle de θ

Le repère à donc tourné de ce même angle.

$\vec{er}$ est à l'état initial l'axe Y, il correspond toujours au sens et à la direction de la réaction normale $\vec{N}$.

$\vec{e\theta}$ est à l'état initial l'axe X, il correspond toujours au sens du vecteur vitesse $\vec{v}$

Equation horaires pour l'étape n°2 :

Grâce au PFD :

$$\sum \vec{F}ext = m \cdot \vec{a}$$

$$\vec{r} + \vec{f} + \vec{N} + \overrightarrow{Fm} + \vec{P} = m \cdot \vec{a}$$

Avec $\vec{r} = -\|\vec{r}\| * \overrightarrow{e\theta}$ → Car uniquement sur l'axe eθ car s'oppose au vecteur $\overrightarrow{e\theta}$

Avec $\vec{f} = -\|\vec{f}\| * \overrightarrow{e\theta}$ → Car uniquement sur l'axe eθ car s'oppose au vecteur $\overrightarrow{e\theta}$

Avec $\vec{P} = \|\vec{P}\| * \sin(\theta) * - \|\vec{P}\| * \cos(\theta) * \overrightarrow{er}$

Avec $\vec{N} = -\|\vec{N}\| * \overrightarrow{er}$→ Car uniquement sur l'axe er référentiel

Avec $\overrightarrow{Fm} = \|\overrightarrow{Fm}\| * \overrightarrow{e\theta}$ → Car uniquement sur l'axe eθ

Système n°1 : Bilan polaire

$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = L * \overrightarrow{er}$

$\vec{\mathrm{v}} = L * \dot{\theta} * \overrightarrow{e\theta}$ à En dérivant $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$, et en simplifiant on trouve ce résultat.

$\vec{\mathrm{a}} = -L * \dot{\theta}^2 * \overrightarrow{er} + \mathrm{L} * \ddot{\theta} * \overrightarrow{e\theta}$ à En dérivant $\vec{\mathrm{v}}$, et en simplifiant on trouve ce résultat.

Avec L la distance entre le centre du looping et de la voiture

Système n°2 : Bilan des forces appliquées à la voiture

$\sum \vec{F}ext = m \cdot \vec{a}$

$\vec{r} + \vec{f} + \vec{N} + \overrightarrow{Fm} + \vec{P} = m \cdot \vec{a}$

$m * \vec{a} = m * \begin{pmatrix} P*\cos(\theta)-N \\ -r-f-P*\sin(\theta)+Fm \end{pmatrix}$ → Sur l’axe er puis sur l’axe eθ

Grâce à ces deux systèmes nous pouvons obtenir ces 2 équations différentielles :

(1) $V'cen = -L * \dot{\theta}^2 = \frac{\mathrm{P}*\cos(\theta)-N}{m}$ à Projection sur er

$\dot{\theta}^2 = \frac{-\mathrm{P}*\cos(\theta)+N}{m*L}$

(2) $V'tan = \ddot{\theta} = \frac{\mathrm{Fm-r-f-P}*\sin(\theta)}{m*L}$ à Projection sur eθ à calculer pour obtenir la vitesse !

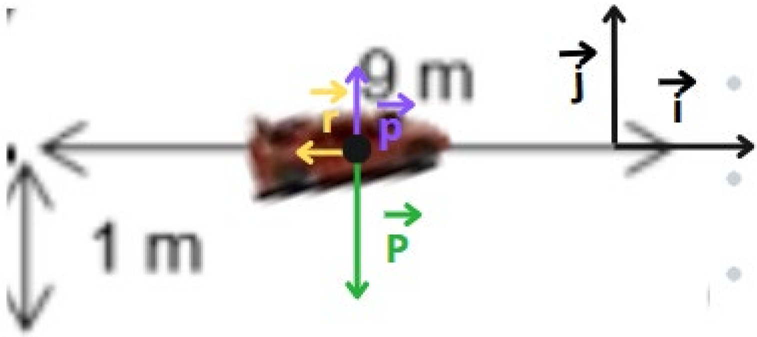
Avec r = $\left(\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot C_x \cdot v^2\right)$ à avec la vitesse v=L*$\dot{\theta}$ avec P = m*g

Pour obtenir la normale étant donné que nous ne savons pas comment l’a calculé ici, nous devons utiliser l’équation pour $\dot{\theta}^2$ et isoler N pour l’obtenir et la réinjecter dans l’autre équation.

Ainsi nous obtenons :

$$\ddot{\theta} = \frac{(m \cdot a) - [k \cdot (\dot{\theta} \cdot L)^2] - \left(u \cdot \left[P \cdot \cos(\theta) + L \cdot \dot{\theta}^2 \cdot m\right]\right) - (P \cdot \sin(\theta))}{m \cdot L}$$

Etape 3 – Vol plané :



Nous avons choisi ce repère par rapport à l'axe horizontal, la résistance de l'air oppose toujours la direction de la voiture dirigée vers la droite (car $-\vec{\imath}$).

Le vecteur accélération est ici négatif dans l'axe X et dans l'axe Y, la voiture ralentira donc lors du saut à cause du frottement de l'air et en raison de son poids, sa hauteur diminuera.

Il ne faudra pas oublier que l'objet possédera une vitesse avant le saut, la force motrice qui permet d'avancer grâce aux roues, sur un support.
La réaction normale ne peux pas être comprise en l'air !

Equation horaires pour l'étape n°3 :

Grâce au PFD :

$\sum \vec{F}ext \;\; = m \cdot \vec{a}$

$\vec{r} + \vec{P} + \vec{p} \;\; = m \cdot \vec{a}$

Avec $\vec{r}$ = $-\|\vec{r}\| \; * \vec{\imath}$ → Car uniquement sur l'axe X référentiel et négatif car s'oppose à $\vec{\imath}$

Avec $\vec{P}$ = $-\|\vec{P}\| * \vec{\jmath}$ → Car uniquement sur l'axe Y référentiel et négatif car s'oppose à $\vec{\jmath}$

Avec $\vec{p}$ = $\|\vec{p}\| * \vec{\jmath}$ → Car uniquement sur l'axe Y référentiel

Projection sur l'axe X et Y :

Sur l'axe X :

Donc $a_x = -\frac{\mathrm{r}}{m}$

$V_x' = -\frac{\mathrm{r}}{m}$

Avec $r = \left(\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot C_x \cdot v^2\right)$ → équation différentielle

Sur l'axe Y :

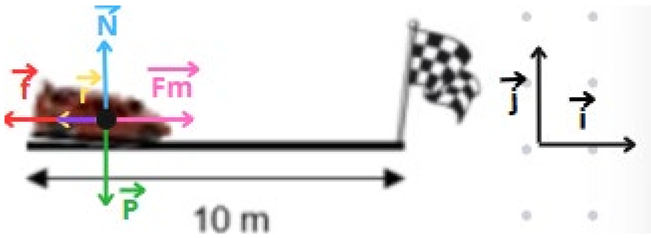
Donc $a_y = -\mathrm{g} + \frac{p}{m}$

$V_y' = (-g + p/m)$

Avec $p = \left(\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot C_z \cdot v^2\right)$ → équation différentielle

Après la résolution de la vitesse en Vx et Vy, il nous restera à faire le module pour obtenir la vitesse réelle.

Etape 4 - Descente de la pente :



Nous avons pris un repère par rapport au sol puisque $\vec{\imath}$ est parallèle au sol ce qui simplifie les calculs. Les forces qui s'exercent sur la voiture sont le poids $\vec{P}$, la réaction normale $\vec{N}$, les forces de frottements avec le sol $\vec{f}$ et les forces de frottements avec l'air $\vec{r}$.

La force motrice, qui permet à la voiture d'avancer et toujours en direction du vecteur $\vec{\imath}$

Pour conclure, tout au long du parcours, la voiture est soumise à des forces constantes tels que le poids, la réaction normale, les frottements avec le sol et ceux avec l'air.

Equation horaires pour l'étape n°4 :

Grâce au PFD :

$\sum \vec{F}ext \ = \ m \cdot \ \vec{a}$

$\vec{r} + \ \vec{f} + \vec{N} + \overrightarrow{Fm} + \vec{P} = \ m \cdot \ \vec{a}$

Avec $\vec{r}$= $-\|\vec{r}\| \ * \vec{\imath}$ → Car uniquement sur l'axe X référentiel et négatif car s'oppose à $\vec{\imath}$

Avec $\vec{f}$ = $-\|\vec{f}\| \ * \vec{\imath}$ → Car uniquement sur l'axe X référentiel et négatif car s'oppose à $\vec{\imath}$

Avec $\vec{P}$ = $-\|\vec{P}\| * \vec{\jmath}$ → Car uniquement sur l'axe Y référentiel et négatif car s'oppose à $\vec{\jmath}$

Avec $\vec{N}$ = $\|\vec{N}\| * \vec{\jmath}$ → Car uniquement sur l'axe Y référentiel

Avec $\overrightarrow{Fm}$ = $\|\overrightarrow{Fm}\| * \vec{\imath}$ → Car uniquement sur l'axe X référentiel

Projection sur l'axe X et Y :

Sur l'axe X :

Les seules forces qui s'appliquent sur l'axe X est la résistance de l'air, la résistance du frottement avec le sol et la force motrice on obtiens donc que :

$\frac{(-\mathrm{r}-\mathrm{f}+\mathrm{Fm})}{\mathrm{m}} = F_{total1}$

Donc $a_x \ = \ F_{total1}$

$V'x = \frac{-\mathrm{r}-\mathrm{f}+\mathrm{Fm}}{\mathrm{m}}$ avec $r = \left(\frac{1}{2} \cdot \rho \ \cdot S \ \cdot C_x \cdot v^2\right)$ → équation différentielle

Sur l'axe Y :

Donc $V'_y \ = \ 0$ → Donc N = -P

Donc la vitesse finale sera uniquement celle de la résolution de l’équation V’x

Conclusion

Pour conclure, tout au long du parcours, la voiture est soumise à des forces constantes. Ces forces nous permettent d’obtenir une équation différentielle différentes pour chaque portion de la piste.