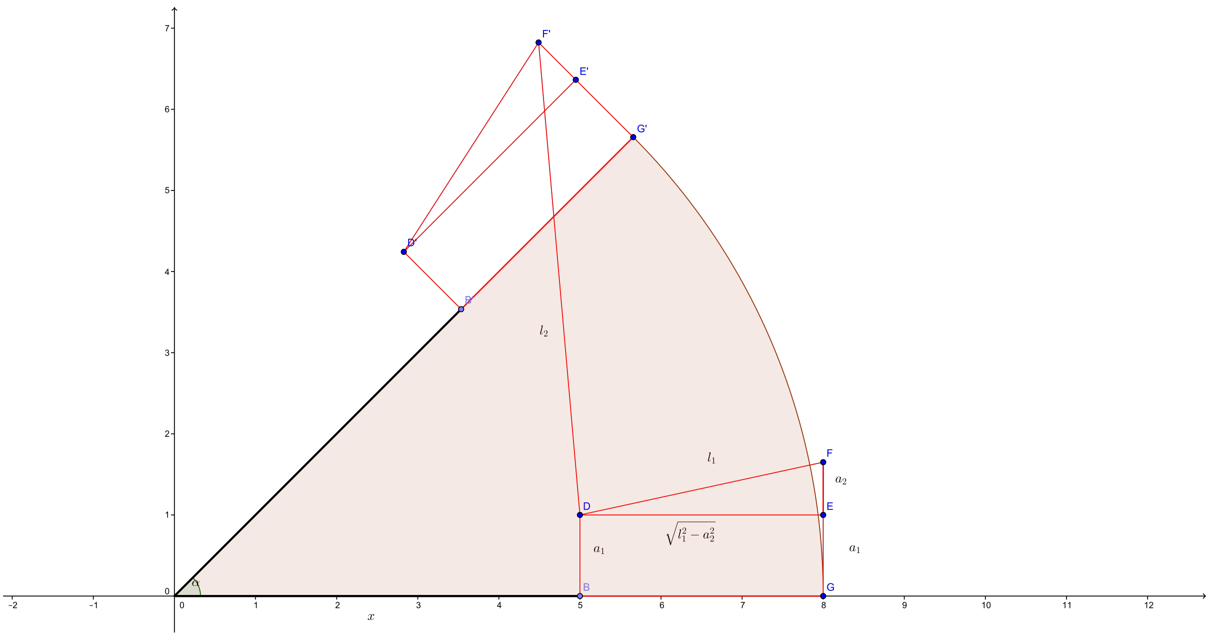
Fenster-Problem



In obiger Skizze ist $D = \begin{pmatrix} x \\ a_1 \end{pmatrix}$ und also $F = \begin{pmatrix} x + \sqrt{l_1^2 - a_2^2} \\ a_1 + a_2 \end{pmatrix}$.

Mit der Drehmatrix $F = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ gilt nun $F' = M \cdot F$, also

$$F' = \begin{pmatrix} \cos\alpha \cdot \left(x + \sqrt{l_1^2 - a_2^2}\right) - \sin\alpha \cdot (a_1 + a_2) \\ \sin\alpha \cdot \left(x + \sqrt{l_1^2 - a_2^2}\right) + \cos\alpha \cdot (a_1 + a_2) \end{pmatrix}.$$

Nun muss $|D - F'| = l_2$ bzw. $|D - F'|^2 = l_2^2$ sein.

Letzteres ist nun äquivalent zu

$$\left(x - \cos\alpha \cdot \left(x + \sqrt{l_1^2 - a_2^2}\right) + \sin\alpha \cdot (a_1 + a_2)\right)^2 + \left(a_1 - \sin\alpha \cdot \left(x + \sqrt{l_1^2 - a_2^2}\right) - \cos\alpha \cdot (a_1 + a_2)\right)^2 = l_2^2.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung in x, sie kann mit

- $a = 1 - \cos\alpha$
- $b = -\sin\alpha$
- $M_1 = -\cos\alpha \cdot \sqrt{l_1^2 - a_2^2} + \sin\alpha \cdot (a_1 + a_2)$
- $M_2 = a_1 - \sin\alpha \cdot \sqrt{l_1^2 - a_2^2} - \cos\alpha \cdot (a_1 + a_2)$

zu

$$x^2 + \frac{2aM_1 + 2bM_2}{a^2 + b^2} \cdot x + \frac{M_1^2 + M_2^2 - l_2^2}{a^2 + b^2} = 0$$

umgeformt werden, und dafür existiert die bekannte Lösungsformel. Man erhält

$$x_{1,2} = -\frac{aM_1 + bM_2}{a^2 + b^2} \pm \sqrt{\left(\frac{aM_1 + bM_2}{a^2 + b^2}\right)^2 - \frac{M_1^2 + M_2^2 - l_2^2}{a^2 + b^2}}$$

Für vernünftige Wert sollte es genau eine positive Lösung geben.