Mathématiques appliquées à l'informatique

Jean-Etienne Poirrier *

15 décembre 2005

Table des matières

*Dernière version sur http ://www.poirrier.be/ jean-etienne/notes/maths.pdf. Ce texte est soumis à la licence GNU FDL. En cas d'erreur, de remarque, etc, vous pouvez me contacter à “jepoirrier chez gmail point com”

1 Matrices

1.1 Définition

Une matrice A de dimension $m \times n$ est un tableau rectangulaire à m lignes et n colonnes composé de nombres. Si a_{ij} désigne l'élément de la matrice A à l'intersection de la $i^{ième}$ ligne et de la $j^{ième}$ colonne, la matrice complète peut s'écrire sous la forme :

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Dans a_{ij}, l'indice i indique donc la ligne de l'élément (i varie de 1 à m) et l'indice j indique sa colonne (j varie de 1 à n). Ces indices donnent l'adresse de la colonne. L'élément a_{12} est prononcé "a un deux" et pas "a douze" (on ne sait jamais).

Les éléments de la **diagonale principale** sont : a_{11}, a_{12}, a_{13}, ..., a_{mn}. Les éléments de la diagonale secondaire sont : a_{1n}, $a_{2(n-1)}$, $a_{3(n-2)}$, a_{m1}.

Une matrice peut être notée de différentes manières :
- A
- $A\,(m \times n)$
- $\underset{(m \times n)}{A}$
- $[a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots m \\ j=1,\dots n}}$

1.2 Les différents types de matrices

1.2.1 Les différences de contenu

Une matrice est **réelle** si tous les éléments sont des nombres réels. On peut ainsi étendre cela aux matrices entières (que des nombres entiers), par exemple.

1.2.2 Les différences de forme

Une matrice est **carrée** si $m = n$. Exemple de matrice carrée :

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

De plus, si $a_{ij} = a_{ji} \forall i, j$, la matrice est dite symétrique. La **trace d'une matrice carrée** est la somme des éléments diagonaux de la matrice $trA = a_{11} + \ldots + a_{mm}$.

Une matrice est **rectangulaire** si $m \neq n$ (voir aussi les différences d'orientation ci-dessous). Exemple de matrice rectangulaire :

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 6 \\ 4 & 7 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

1.2.3 Les différences d'orientation

Une matrice rectangulaire est **horizontale** si $m < n$. Exemple de matrice horizontale :

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Cas particulier de la matrice horizontale : lorsque $m = 1$ (une seule ligne), la matrice se réduit à un **vecteur ligne** de dimension n que l'on note (la signification de l'"exposant T" est révélée ci-dessous) :

$$A^T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

Une matrice rectangulaire est **verticale** si $m > n\cdot$ Exemple de matrice verticale :

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \\ 4 & 5 \\ 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Cas particuliers de la matrice verticale : lorsque $n = 1$ (une seule colonne), la matrice se réduit à un **vecteur colonne** et le second indice n'est plus nécessaire. Le vecteur (dit alors "de dimension m") s'écrit ainsi plus simplement

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}$$

On peut donc dire qu'une matrice A de dimension $m \times n$ est composée de n vecteurs colonnes de dimension m ou de n vecteurs lignes de dimension m.

$$A_{m\times n} = (A_1, \dots, A_n) = \begin{pmatrix} A_1^T \\ \vdots \\ A_r^T \end{pmatrix}$$

Lorsque $m = n = 1$, la matrice se réduit à un **scalaire** a_{11}. Donc, un scalaire est une matrice de dimension 1×1.

1.3 Matrices particulières

1.3.1 Transposée d'une matrice

La **transposée d'une matrice** est une matrice où on a transposé (permuté) les lignes et les colonnes. On dira que "transposer une matrice $A_{m\times n}$" donnera une nouvelle matrice $A^T_{n\times m}$.

Exemple :

$$A_{5\times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \\ 4 & 5 \\ 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^T_{2\times 5} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Si A est carrée et symétrique, alors $A = A^T$.

Comme, par définition, un vecteur est toujours un vecteur-colonne, on dit que le vecteur ligne est transposé, d'où la notation particulière (avec un “exposant T”). On peut aussi écrire : $A' = A^T$.

1.3.2 Matrice diagonale

Une **matrice est diagonale** quand elle est carrée et que tous les $a_{ij} = 0$, sauf les a_{ii}. En d'autres termes, tous les éléments situés sur la diagonale principale sont $\neq 0$ ($a_{ij} \neq 0$, pour tout $i = j$) et tous les autres sont $= 0$ ($a_{ij} = 0$ si $i \neq j$). Exemples :

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{rr} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Pour simplifier l'écriture d'une matrice diagonale, on pourra écrire :

$$diag\begin{pmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & \dots & d_r \end{pmatrix}$$

1.3.3 Matrices triangulaires

On parlera de **matrice triangulaire supérieure** si $a_{ij} = 0$ et si $i > j$. Exemple :

$$S_m = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

A contrario, une matrice est **triangulaire inférieure** si $a_{ij} = 0$ et si $i < j$. Exemple :

$$J_m = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

1.3.4 Matrice identité

Une **matrice identité** (I_m) est une matrice diagonale dont tous les éléments de la diagonale principale sont spécifiquement des 1. Exemple :

$$I_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Notez la propriété du scalaire 1 : si on le multiplie par un nombre, on retrouve ce nombre. C'est la *généralisation du 1*, élément pivot de la multiplication. Exemple (la multiplication vient plus tard) :

$$A_{m\times c} \times I_m = I_m \times A_{m\times n} = A_{m\times m}$$

1.3.5 Matrice nulle

Une **matrice nulle** est la matrice dont tous les éléments sont nuls. Exemple :

$$O_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comme le zéro est neutre pour l'addition (voir l'addition ci-dessous), on aura :

$$A_{m\times m} + O_{m\times n} = O_{m\times r} + A_{m\times m} = A_{m\times n}$$

1.4 Opérations élémentaires sur les matrices

1.4.1 Egalité

Les matrices A et B sont égales si et seulement si elles ont les mêmes dimensions et si $a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j$ (tous les éléments sont égaux un à un). Les deux matrices suivantes sont égales :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} = B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

1.4.2 Addition

L'addition des matrices correspond à une nouvelle matrice dont chaque élément est additionné à son élément correspondant ($a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$). Les matrices doivent avoir les mêmes dimensions.

$$A_{m\times n} + B_{m\times n} = C_{m\times n}$$

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 7 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}$$

Remarque : cas de la matrice nulle ...

$$A_{m\times n} + O_{m\times n} = A_{m\times n}$$

1.4.3 Soustraction

La soustraction de matrices correspond à une nouvelle matrice dont chaque élément est soustrait à son élément correspondant ($a_{ij} - b_{ij} = c_{ij}$). Les matrices doivent avoir les mêmes dimensions.

$$A_{m\times n} - B_{m\times n} = C_{m\times n}$$

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Remarque : cas de la matrice nulle ...

$$A_{m\times n} - O_{m\times n} = A_{m\times n}$$

$$O_{m\times n} - A_{m\times n} = -A_{m\times n}$$

1.4.4 Multiplication par un scalaire

Le produit d'un scalaire par une matrice correspond à une nouvelle matrice dont chaque élément est multiplié par le scalaire. On le note $k \cdot A_{m\times n}$.

$$k \cdot A_{m\times n} = \begin{pmatrix} k\cdot a_{11} & k\cdot a_{12} & \dots & k\cdot a_{1c} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k\cdot a_{r1} & k\cdot a_{r2} & \dots & k\cdot a_{rc} \end{pmatrix}$$

Exemple :

$$2 \cdot A_{m\times n} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 4 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}$$

Notez que si $k = 0 \rightarrow 0$, alors $k \cdot A_{m\times n} = 0_{m\times n}$ (la matrice nulle).

On voit ainsi que la soustraction est un cas particuliers de l'addition (soustraction = addition et multiplication par -1) : $A - B = A + (-1) \cdot B$.

1.4.5 Produit de deux matrices

Le produit de deux matrices (A et B, par exemple) correspond à une nouvelle matrice dont chaque élément de rangée i de A est multiplié par chaque élément de colonne j de B. Cela donne :

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{ic} \cdot b_{cj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Cette égalité n'est valable que **si et seulement si** $n = n'$ (càd. le nombre de colonnes de A est égal au nombre de rangées de B).

$$A_{m\times n} \times B_{n'\times p} = C_{m\times p}$$

Exemple :

$$A_{2\times 3} \times B_{3\times 2} = C_{2\times 2}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 36 \\ 16 & 43 \end{pmatrix}$$

1.4.6 Propriétés de la multiplication

Contrairement à l'addition, **la multiplication n'est pas commutative**. Premier exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 15 & 36 \\ 16 & 43 \end{pmatrix}$$

Et $B \times A$ n'existe pas (impossible). Second exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 20 & 47 & 32 \\ 23 & 62 & 53 \\ 17 & 44 & 41 \end{pmatrix}$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} 50 & 41 & 33 \\ 37 & 40 & 24 \\ 48 & 51 & 33 \end{pmatrix}$$

On voit que dans le cas de matrices carrées et de mêmes dimensions $m \times n$, on pourra effectuer $A \times B$ et $B \times A$. Cependant, $A \times B \neq B \times A$.

D'autre part, $A \times B = 0$ **n'entraîne pas nécessairement que** $A = 0$ **ou** $B = 0$. Exemple :

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De même, $A \times B = A \times C$ **n'entraîne pas nécessairement que** $B = C$. Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} ; C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 15 & 0 & -5 \\ -3 & 15 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A \times C = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 15 & 0 & -5 \\ -3 & 15 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

La **multiplication par la matrice nulle** est commutative ($A \times O = O \times A = O$). Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La **multiplication par la matrice unité** nécessite de considérer deux cas :

1. Si la matrice est carrée : $A_{m\times m} \cdot I_m = I_m \cdot A_{m\times m} = A_{m\times m}$.
2. Si la matrice est rectangulaire (non carrée) : $A_{m\times n} \cdot I_m = B_{m\times n} \neq I_m \times A_{m\times n}$. Exemple :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}_{3\times 2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

1.4.7 Division de deux matrices

Pour rappel, la division est en fait un produit : $8/4 = \frac{8}{4} = 8 \cdot \frac{1}{4} = 8 \cdot 4^{-1}$ (sauf si le dénominateur $= 0$). Ainsi, si on généralise schématiquement, on devrait avoir :

$$\frac{A}{B} = A \times \frac{1}{B} = A \times B^{-1}$$

Il nous faut donc inverser une matrice. Pour cela, nous devons connaître son déterminant. Ces deux notions seront peut-être expliquées au cours, plus tard (voir section 1.6.2 et 1.7).

Notez que, si on ne sait pas inverser une matrice, on dira qu'elle est "singulière".

1.4.8 Exercice impliquant des opérations sur les matrices

André, Bernard et Charlotte ont acheté différents vins lors de leur voyage en Hongrie. S'ils les déclarent à la douane, en passant la frontière, ils devront payer, pour chaque bouteille, des droits d'accises (sorte de taxes). Le prix de revient de ces vins est indiqué dans le tableau suivant.

Nom du vin	Prix du vin	Droit de douane
Tokay Aszu	10.075	0.4875
Sang de taureau	3.4	0.4375
Balaton mousseux	5.5	1.475
Cidre du Danube	3.35	0.3

Leurs achats sont les suivants :

- André : 6 bouteilles de Tokay Aszu, 24 bouteilles de Sang de taureau, 24 bouteilles de Balaton mousseux et 6 bouteilles de Cidre du Danube ;
- Bernard : 10 bouteilles de Tokay Aszu, 12 bouteilles de Sang de taureau et 24 bouteilles de Balaton mousseux ;
- Charlotte : 12 bouteilles de Tokay Aszu, 6 bouteilles de Sang de taureau, 8 bouteilles de Balaton mousseux et 15 bouteilles de Cidre du Danube ;

Inscrivez la matrice des commandes :

$$\begin{pmatrix} 6 & 24 & 24 & 6 \\ 10 & 12 & 24 & 0 \\ 12 & 6 & 24 & 14 \end{pmatrix}_{3\times 4}$$

Dans la matrice des commandes, chaque ligne représente les choix de chacune des personnes (André, Bernard ou Charlotte) et chaque colonne représente la commande pour chacun des vins.

Inscrivez la matrice des prix :

$$\begin{pmatrix} 10.075 & 0.4875 \\ 3.4 & 0.4375 \\ 5.5 & 1.475 \\ 3.35 & 0.3 \end{pmatrix}_{4\times 2}$$

Dans la matrice des prix, chaque ligne représente les coûts associés à un vin et chaque colonne représente soit le prix à la bouteille et les droits de douane.

Calculons les prix totaux, pour chacune des personnes et chacun des vins, en séparant le prix réel du vin et les taxes. Pour cela, on profite du fait que les deux matrices précédentes sont bien disposées pour réaliser une multiplication :

$$PrixDetail = Commandes \cdot Prix$$

$$PrixDetail = \begin{pmatrix} 294.15 & 50.625 \\ 273.55 & 45.525 \\ 320.2 & 48.075 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

Et, pour obtenir le prix total que chacune des personnes doit payer à la douane, il suffit d'additionner, pour chaque ligne (chaque personne), la colonne 1 et la colonne 2 :

$$PrixTotal = PrixDetail^{<1>} + PrixDetail^{<2>}$$

$$PrixDetail = \begin{pmatrix} 344.775 \\ 319.075 \\ 368.275 \end{pmatrix}_{3\times 1}$$

1.5 Forme échelonnée normale d'une matrice

Dans la suite du cours, nous aurons besoin de la notion de rang d'une matrice. Le **rang d'une matrice** est le nombre de lignes ou de colonnes linéairement indépendantes après avoir enlevé les colonnes ou lignes nulles (ne contenant que des 0). Le rang des lignes est égal au rang des colonnes. Le rang de la matrice est noté $\rho(A)$.

On peut déterminer le rang d'une matrice en procédant à une élimination via la méthode de Gauss-Jordan et en examinant la forme échelonnée réduite obtenue de cette manière.

1.5.1 Méthode de Gauss-Jordan

La méthode de Gauss-Jordan sert donc à déterminer le rang d'une matrice. Elle sert aussi à résoudre un système d'équations linéaires de type $A \cdot x = b$ (avec A, x et b = matrices ; voir plus loin). Mais on va d'abord s'occuper de trouver la forme échelonnée normale d'une matrice et son rang.

Soit la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

On va maintenant appliquer à la première ligne une série d'opérations élémentaires, en prenant l'élément a_{11} comme "**pivot**" (ne pas demander pourquoi çà s'appelle comme çà : c'est ainsi). Les opérations sont :

1. diviser la première ligne par a_{11} (pivot) ; ainsi, le "nouveau a_{11}" devient 1 ;
2. soustraire de chaque élément de la seconde ligne (a_{2i}), l'élément correspondant de la première ligne multiplié par a_{21}. De cette manière, le "nouveau a_{21}" devient 0 ;

3. soustraire de chaque élément de la troisième ligne (a_{3i}), l'élément correspondant de la première ligne multiplié par a_{31}. De cette manière, le "nouveau a_{31}" devient 0 ;
4. ...
5. soustraire de chaque élément de la n^{eme} ligne (a_{ni}), l'élément correspondant de la première ligne multiplié par a_{n1}. De cette manière, le "nouveau a_{n1}" devient 0 ;

Après ces opérations, la matrice A ressemble à ceci :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} & \dots & a_{2n} - a_{1n} * a_{21} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} - a_{12} \cdot a_{n1} & \dots & a_{nn} - a_{1n} * a_{n1} \end{pmatrix}$$

Ensuite, on applique les mêmes opérations à la ligne 2. Pour plus de clarté, détaillons ces opérations :

1. diviser la seconde ligne par a_{22} (pivot) ; ainsi, le "nouveau a_{22}" devient 1 ;
2. soustraire de chaque élément de la première ligne (a_{1i}), l'élément correspondant de la seconde ligne multiplié par a_{12}. De cette manière, le "nouveau a_{12}" devient 0 ;
3. soustraire de chaque élément de la troisième ligne (a_{3i}), l'élément correspondant de la seconde ligne multiplié par a_{32}. De cette manière, le "nouveau a_{32}" devient 0 ;
4. ...
5. soustraire de chaque élément de la n^{eme} ligne (a_{ni}), l'élément correspondant de la seconde ligne multiplié par a_{n2}. De cette manière, le "nouveau a_{n2}" devient 0 ;

Après ces opérations, la matrice A ressemble à ceci :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} - a_{2n} * a_{12} \\ 0 & 1 & \dots & \frac{a_{2n} - a_{1n} * a_{21}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} - a_{1n} * a_{n1} - a_{2n} * a_{n2} \end{pmatrix}$$

Et ainsi de suite, jusqu'à arriver à la dernière ligne. Après cette dernière opération, la matrice A devrait ressemble à quelque chose comme ceci : la forme échelonnée normale de la matrice.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

1.5.2 Exemple appliquant la méthode de Gauss-Jordan

Soit la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 17 \end{pmatrix}$$

Appliquons les opérations élémentaires sur la ligne 1. Après cela, la matrice A devient :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \\ 0 & 2 & -3 & 14 \end{pmatrix}$$

Appliquons les opérations élémentaires sur la ligne 2. Après cela, la matrice A devient :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 9 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & -13 & 26 \end{pmatrix}$$

Finalement, appliquons les opérations élémentaires sur la dernière ligne. Après cela, la matrice A devient :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

1.5.3 Le rang d'une matrice

Donc, le rang d'une matrice est le **nombre de lignes ou de colonnes linéairement indépendantes après avoir enlevé les colonnes ou lignes nulles** (ne contenant que des 0). Le rang des lignes est égal au rang des colonnes. Le rang de la matrice A est noté $\rho(A)$.

On peut déterminer le rang d'une matrice en procédant à une élimination via la méthode de Gauss-Jordan et en examinant la forme échelonnée réduite obtenue de cette manière.

Ainsi, dans l'exemple de la section précédente, le rang de la matrice A est 3. En effet, 3 est le nombre de lignes ou de colonnes linéairement indépendantes (et il n'y a pas de colonnes ou lignes nulles à enlever) dans la forme échelonnée réduite. Cette nouvelle matrice a le même rang que la matrice originale

Maintenant, on peut également déterminer le rang d'une matrice de manière "intruitive" (même si c'est beaucoup plus difficile à mettre en algorithme). On jouera alors sur le caractère "linéairement indépendant" des lignes et colonnes. Par exemple, examinons cette matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

On voit que la 2^{eme} colonne est le double de la première colonne. On note également que la 4^{eme} colonne est égale à la somme de la première avec la troisième. Les colonnes 1 et 3 sont ainsi linéairement indépendantes. Le rang de cette matrice est donc égal à 2 (vérifiez-le en calculant la forme échelonnée réduite de A).

1.6 Déterminants d'une matrice

1.6.1 Notion préliminaire : le mineur

Un mineur A_{ij} de l'élément a_{ij} de la matrice A est la **sous-matrice obtenue en supprimant la ligne et la colonne de A qui se croisent en a_{ij}, multiplié par** $(-1)^{i+j}$.

Et, pour comprendre, voici un exemple. Reprenons la matrice précédente et essayons de trouver le mineur A_{11} de l'élément a_{11}.

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} 2 & 4 & 1 & 3 \\ \hline -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 5 \end{array} \right)$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot (-1)^{1+1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix} (\cdot 1)$$

1.6.2 Définition du déterminant d'une matrice

Le déterminant de la matrice A est égal à **la somme des produits des éléments d'une rangée par leur mineur**. Cette définition est récursive : le déterminant d'une matrice de taille n utilise les déterminants de matrices de taille $n-1$, etc., jusqu'à 1.

Numériquement, le déterminant est donc un scalaire et se calcule de la façon suivante :

$$det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

1.6.3 Propriétés et usages d'un déterminant

1. Le déterminant d'une matrice change de signe si l'on permute deux de ses rangées parallèles
2. Le déterminant d'un produit des matrices est égale au produit de leurs déterminants
3. Un déterminant est nul si la matrice possède deux rangées parallèles identiques
4. Un déterminant ne change pas de valeur lorsqu'on ajoute à l'une des rangées une combinaison linéaire des autres rangées parallèles
5. La somme des produits des éléments d'une rangée par les mineurs correspondants d'une autre rangée parallèle est nulle

1.6.4 Méthodes de calcul d'un déterminant

Finalement, tout est encore mieux avec quelques exemples ...

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} ; det(D) = 2 \cdot (-2) - 3 \cdot 3 = -4 - 9 = -13$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} ; det(E) = 2 \cdot E_{11} + 3 \cdot E_{12} + (-2) \cdot E_{13}$$

$$= 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot (-1)^{1+1} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot (-1)^{1+2} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot (-1)^{1+3}$$

$$= 2 \cdot (-2 \cdot 3 - 1 \cdot 2) \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (3 \cdot 3 - 1 \cdot 3) \cdot (-1)^3 + (-2) \cdot (3 \cdot 2 - -2 \cdot 3) \cdot (-1)^4$$

$$= 2 \cdot (-6 - 2) \cdot 1 + 3 \cdot (9 - 3) \cdot (-1) + (-2) \cdot (6 + 6) \cdot 1$$

$$= 2 \cdot (-8) + 3 \cdot 6 \cdot (-1) + (-2) \cdot 12 = -16 - 18 - 24 = -58$$

1.7 L'inverse d'une matrice

Une matrice *carrée* $A_{n\times n}$ admet une matrice inverse A^{-1} si leur produit est égal à la matrice identité.

$$A \cdot A^{-1} = I$$

Les conditions suivantes sont équivalentes :
- A est invertible
- Les lignes de A sont linéairement indépendantes
- Les colonnes de A sont linéairement indépendantes
- Le déterminant de A $\neq 0$ (c'est le "critère d'invertibilité")
- Le rang de A $= n$.

Si on ne sait pas inverser une matrice, on dira qu'elle est "singulière".
Soit A une matrice carrée $n \times n$ de déterminant non nul :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Alors,

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$$

où les coefficients A_{ij} sont les mineurs des positions correspondantes.

1.7.1 Exemples

Calcul de l'inverse de la matrice $F_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. D'abord, on calcule le déterminant de la matrice F (pour voir s'il n'est pas nul) ; ensuite (puisqu'il n'est pas nul), on calcule l'inverse ...

$$det(F) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 12 = -2$$

$$F^{-1} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}^T = \frac{-1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcul de l'inverse de la matrice $G_{3\times 3} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 8 & 10 \end{pmatrix}$. D'abord, on calcule le déterminant de la matrice G (pour voir s'il n'est pas nul) ; ensuite (puisqu'il n'est pas nul), on calcule l'inverse ...

$$det(G) = 32$$

$$G^{-1} = \frac{1}{32} \cdot \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T$$

$$G^{-1} = \frac{1}{32} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -16 & 12 \\ 20 & 0 & 4 \\ -4 & 8 & -4 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{32} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 20 & -4 \\ -16 & 0 & 8 \\ 12 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{5}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

2 Résolution de systèmes d'équations linéaires

Un système linéaire est tout système $m \times n$ de m équations linéaires à n inconnues (x_1, x_2, ..., x_n). Il se présente sous la forme :

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{cases}$$

où :
- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ représentent les inconnues ;
- $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$ représentent les coefficients (a_{ij} réels) ;
- $b_1, b_2, \ldots, b_m$ représentent les seconds membres ou termes indépendants (b_i réels également) ;
- $1 \leq i \leq m$;
- $1 \leq j \leq n$.

Un tel système peut s'écrire sous forme matricielle :

$$A_{(m,n)} \cdot x_{(n)} = b_n$$

où :
- $A = (a_{i,j})$ est la matrice du système,
- x est la matrice colonne des x_i,
- b la matrice colonne des b_i.

Un système d'équations linéaires peut avoir :
- autant d'équations qu'il y a d'inconnues, on le dit ici "carré" (ou le dira "rectangulaire" dans le cas contraire,
- ou plus d'équations que d'inconnues, il est alors "surdéterminé" et il n'a, en général, pas de solution exacte (mais on peut lui trouver une solution approchée par la méthode des moindres carrés),
- ou plus d'inconnues que d'équations, il est alors "sous-déterminé" et il a, en général, une infinité de solutions qui se présentent sous la forme de relations entre les inconnues. Dans ce cas, on ne peut précise les valeurs des inconnues qu'en choisissant arbitrairement les valeurs de certaines d'entre elles.

2.1 Existence et unicité de la solution d'un système "carré"

- Si le déterminant du système est différent de zéro, il y a une solution unique ;
- Si le déterminant du système est égal à zéro,

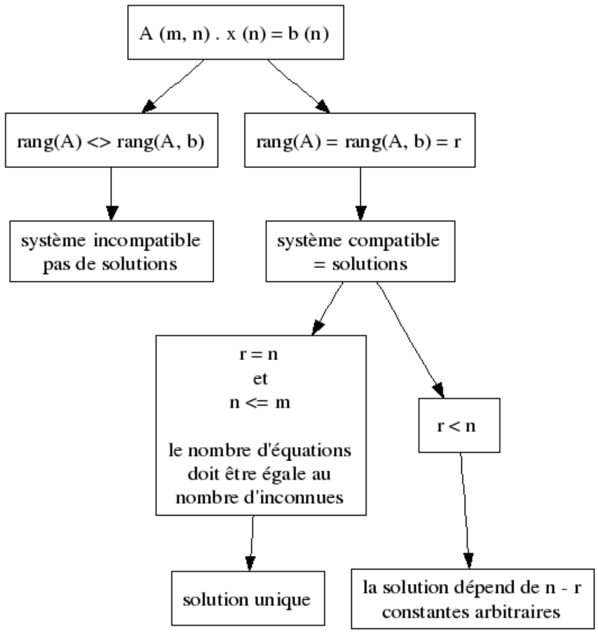

FIG. 1 – Schéma de décision du théorème de Rouché

- ou bien le second membre est dans le sous-espace sous-tendu par les colonnes de la matrice du système et il y a une infinité de solutions ;
- ou bien le second membre n'est pas dans le sous-espace sous-tendu par les colonnes de la matrice du système et il n'y a pas de solution exacte du système. On pourra lui chercher des solutions approchées en se ramenant (avec la méthode des moindres carrés) au cas précédent ; il y en aura, en général, une infinité.

2.2 Théorème de Rouché

Le système linéaire est **compatible** s'il possède au-moins une solution de x et **incompatible** s'il n'y a pas de solutions.

On dit que le système est compatible si, et seulement si, $\rho(A) = \rho(A, b) = r$. De plus,
- si $r = n$ et $n \leq m$, le nombre d'équations doit être au-moins égale au nombre d'inconnues. La solution est unique.
- si $r < n$, la solution dépend de $n - r$ solutions arbitraires.

Schématiquement, cela donne la figure 1 ...

2.3 Méthodes simples

2.3.1 Méthode de résolution rapide pour système 2x2

Le système $\left\{ \begin{array}{l} a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y = d_1 \\ a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y = d_2 \end{array} \right.$ est mis sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

La forme résolue de ces matrices est :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

Cette solution n'est possible que si le déterminant de système $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \neq 0$.

2.3.2 Méthode de Cramer

Prenons le système $\begin{cases} a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y + a_{13} \cdot z = d_1 \\ a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y + a_{23} \cdot z = d_2 \\ a_{31} \cdot x + a_{32} \cdot y + a_{33} \cdot z = d_3 \end{cases}$

On calcule les déterminants en commençant par celui du système, c'est-à-dire :

$$D = det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

On calcule ensuite les déterminants où on remplace tour à tour une colonne par le second membre, c'est-à-dire :

$$D_x = det \begin{vmatrix} d_1 & a_{12} & a_{13} \\ d_2 & a_{22} & a_{23} \\ d_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, D_y = det \begin{vmatrix} a_{11} & d_1 & a_{13} \\ a_{21} & d_2 & a_{23} \\ a_{31} & d_3 & a_{33} \end{vmatrix}, D_z = det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & d_2 \\ a_{31} & a_{32} & d_3 \end{vmatrix}$$

Si le déterminant D est non nul, il y a une solution unique donnée par :

$$x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}, z = \frac{D_z}{D}$$

2.4 Méthodes itératives

Le principe général des méthodes itératives est le suivant : à partir du système d'équations précédent (section 2),

1. on définit une solution approchée $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$
2. on remplace dans le système et on obtient une solution $x_1^1, x_2^1, \ldots, x_1^*$
3. on remplace la solution du point précédent dans le système et on obtient une solution $x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2$
4. et ainsi de suite, jusqu'à ce que x_i^j tende vers la solution du système donné.

Nous verrons ici deux méthodes itératives : les méthodes de Jacobi et Gauss-Siedel.
***** Fin provisoire *****

2.4.1 Méthode de Jacobi

2.4.2 Méthode de Gauss-Seidel

3 Théorie des ensembles

Excuse pour ne pas encore avoir fait ce chapitre : LaTeX ne fait pas facilement les diagrammes d'Euler-Venn. Conclusion : ce chapitre existera quand j'aurai le temps de m'y mettre.

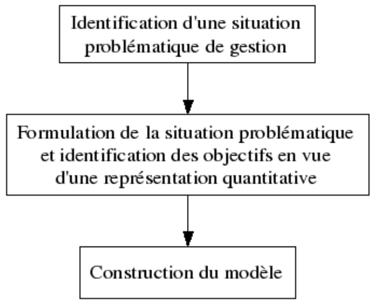

FIG. 2 – Schéma des étapes du processus de modélisation

4 Modélisation et analyse en programmation linéaire

4.1 La programmation linéaire

La programmation linéaire est l'outil mathématique qui permet d'analyser divers types de situations dans lesquelles nous retrouvons une fonction linéaire d'un certain nombre de variables que l'on désire maximiser ou minimiser.

Ces variables, appelées **variables de décision**, sont soumises à des **restrictions** par les ressources limitées de la situation que nous voulons analyser. Ces restrictions imposées prennent la forme d'équations ou d'inéquations linéaires.

Les éléments d'un modèle de programmation linéaire sont donc :

– Les **variables de décision**. Il faut se poser la question suivante : est-ce que l'identification des variables de décision va nous permettre, suite à la résolution du problème, une prise de décision adéquate, compatible à l'aspect pratique de la situation ?
– Les **contraintes linéaires**. Il faut être en mesure d'identifier tout genre de restrictions qui peuvent limiter les valeurs que peuvent prendre les variables de décision. Existe-t-il également des restrictions ou exigences minimales sur les variables de décision ?
– La **fonction économique** ou **fonction objectif**. A chaque variable de décision qui a été identifiée dans le modèle correspond un coefficient économique indiquant la contribution unitaire de la variable correspondant à l'objectif poursuivi.

Dans le domaine de la gestion, la programmation linéaire est un outil informatique qui permet d'obtenir une répartition optimale des ressources de l'entreprise pour atteindre l'objectif de maximisation des bénéfices ou de la minimisation des coûts.

Les étapes à suivre dans le processus de modélisation sont schématisées aux figures 2 et 3.

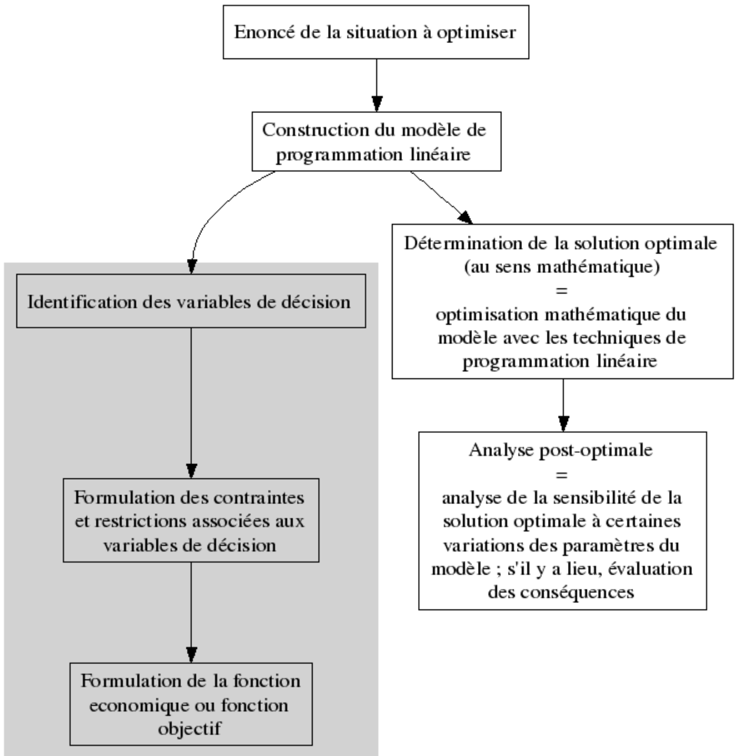

FIG. 3 – Schéma de méthodologie de modélisation