Projet Tetris

Sergiu-Ciprian M., Clara C., Raphael A., Jean-Baptiste V.

Année 2023-2024 (LDDIM S2)

1 Introduction

Le jeu de Tetris est un jeu-vidéo de puzzle créé entre autres par Alekseï Pajitnov, ingénieur en informatique soviétique, en 1984. Il met le joueur au défi de constituer des lignes complètes d'une grille rectangulaire à l'aide du déplacement de formes géométriques appelées polyominos (ou tetrominos). Ces polygones particuliers sont des figures formées à partir de la juxtaposition de carrés. Cette description correspond peu ou prou à la définition mathématique de cette figure dont l'article est l'objet. L'étude du jeu de Tetris constitue un projet intéressant pour le projet mathématiques-informatique dans la mesure où les objets manipulés à priori simples et apparaissant dans un cadre ludique font en réalité l'objet de plusieurs problèmes mathématiques dans des domaines à l'interface entre les mathématiques et l'informatique : la combinatoire (dénombrement) et les pavages.

1.0.1 Définitions 1.1

Un ***polyomino*** est une figure plane composée de carrés unitaires ayant au moins un côté commun ou plus formellement il s'agit d'une réunion ***connexe*** de carrés unitaires. On définit également la notion de ***taille*** de polyomino : il s'agit du nombre de carrés unitaires constituant le polyomino.

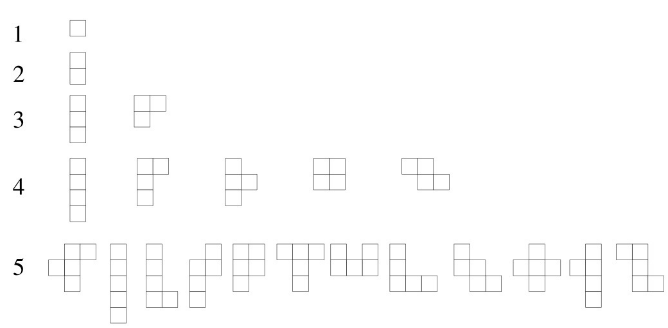


Figure 1: Polyominos de taille 1 à 5

Conventions

Il y a plusieurs conventions pour décider si deux polyominos sont égaux :

- Polyominos à forme fixée : deux polyominos sont considérés égaux s'ils ont la même forme et tels que les rotations et retournements ne sont pas permis.
- Polyominos à forme unilatérale : deux polyominos sont considérés égaux s'ils ont la même forme à rotation près dans le plan.
- Polyominos à forme libre : deux polyominos sont considérés égaux s'ils ont la même forme à rotation et réfléxion (ou symétrie axiale) près dans le plan.

Nous travaillons avec la convention la plus simple celle des polyominos à forme fixée. Ainsi, les 3 polyominos suivant seront considérés comme différent pour notre convention :

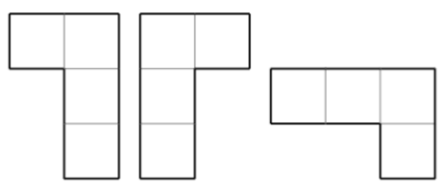
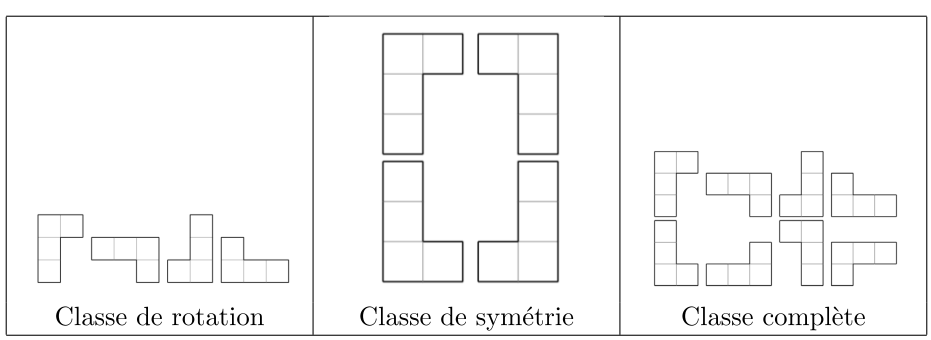


Figure 2: 3 polyominos considérés comme égaux au sens de la convention choisie

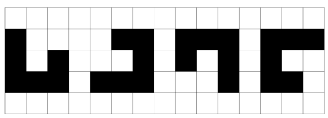
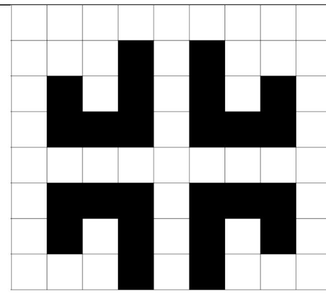
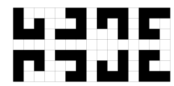
1.0.2 Définition 1.2

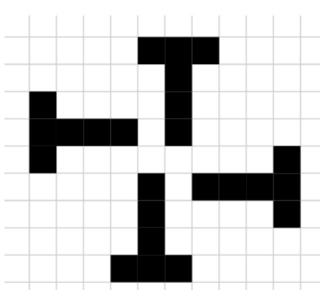
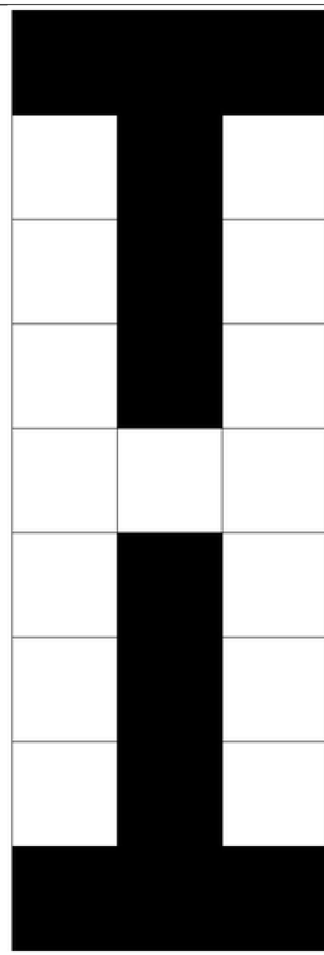
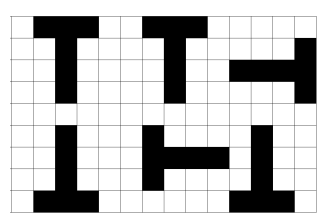
La classe de rotation d'un polyomino P est l'ensemble des polyominos que l'on obtient par rotations successives de 90 degrés de P . Sa classe de symétrie est l'ensemble des polyominos que l'on obtient par symétries successives de P . Enfin, on appellera l'ensemble des polyominos obtenus par rotations ou symétries successive de P la classe complète de P.



1.1 Questions

(1) : Pour les 2 polyominos on a :

		
Classe de rotation	Classe de symétrie	Classe complète

		
Classe de rotation	Classe de symétrie	Classe complète

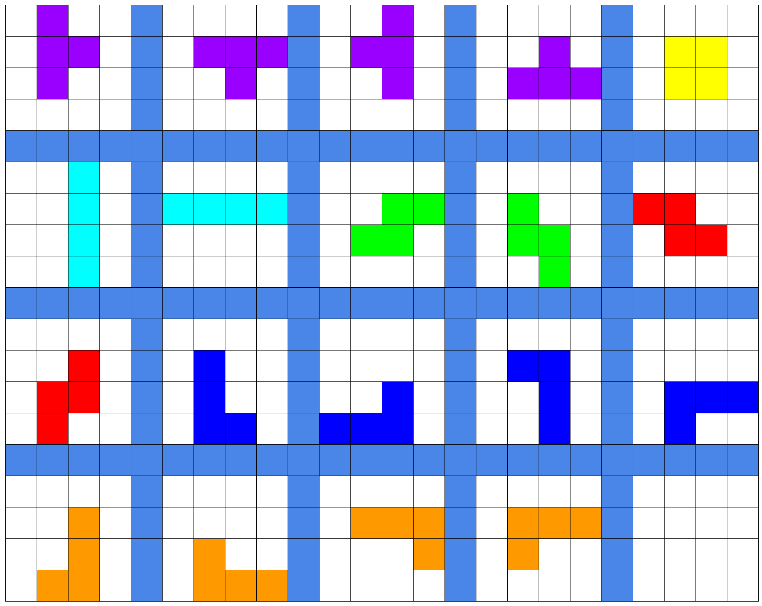
(2) : Informellement, une classe de rotations contient au maximum 4 éléments puisque 4 rotations de 90° correspond à une unique rotation de 360° (4x90 = 360). Plus formellement, en se plaçant dans un réseau plan $\mathbf{Z}^2$ rapporté à un repére orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) (points du plan à coordonnées entières) une rotation de 90° dans le plan de centre O correspond à une application $f : \mathbf{Z}^2 \rightarrow \mathbf{Z}^2$, (x,y) $\mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ Cette application vérifie $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{Z}^2,\ f^4(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ au sens où l'itérée 4-ième de la fonction est l'identité sur $\mathbf{Z}^2$.On peut ainsi définir une relation d'équivalence sur $\mathbf{Z}^2$: $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{Z}^2, \forall \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in \mathbf{Z}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ ssi il existe un entier naturel n tel que : $f^n(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. La classe d'équivalence d'un élément de $\mathbf{Z}^2$ pour cette relation sont ainsi ses rotations dans le plan. Le cardinal d'une classe d'équivalence est donc au maximum de 4 éléments puisque l'itérée de la fonction est "4-périodique". Un exemple où le maximum n'est pas atteint est le polyomino carré de taille 4

(3) : Considérons pour chaque élément de la classe de rotation (dont on supposera qu'elle contient 4 éléments au maximum puisqu'on cherche le maximum) la classe de symétrie associée. On a la table suivante qui résume l'ensemble des transformations possibles (table de rotations et de symétries d'un carré) :

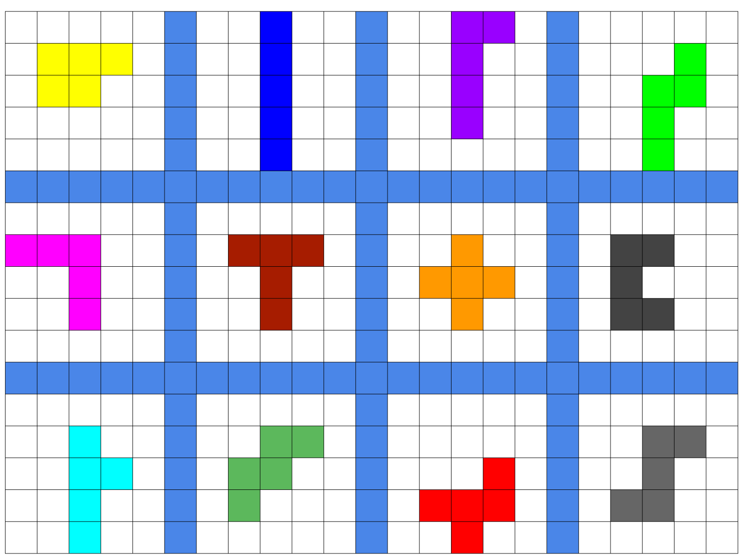
⇩ puis ⇨	I	m	m²	m³	p	mp	m²p	m³p
I	I	m	m²	m³	p	mp	m²p	m³p
m	m	m²	m³	I	mp	m²p	m³p	p
m²	m²	m³	I	m	m²p	m³p	p	mp
m³p	m³	I	m	m²	m³p	p	mp	m²p
p	p	m³p	m²p	mp	I	m³	m²	m
mp	mp	p	m³p	m²p	m	I	m³	m²
m²p	m²p	mp	p	m³p	m²	m	I	m³
m³p	m³p	m²p	mp	p	m³	m²	m	I

où m représente une rotation de 90° et p une réflexion verticale (par rapport à l'axe des abscisses) On remarque que dans les résultats seules les 8 opérations sont présentes et donc il n'y a au maximum que 8 éléments dans une classe complète dans la mesure où l'on peut toujours inscrire les polyominos dans un carré "plus" grand.

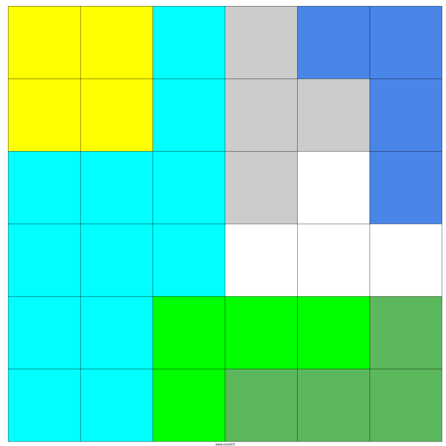
(4) : Polyominos de taille 4



(5) : Polyominos de taille 5 (Un représentant par classe complète ou de manière équivalente les polyominos de taille 5 selon la convention des polyominos à forme libre)



(6) : Exemple d'un pavage 6x6 avec des polyominos de taille 4,



(7) :

Définissons la notion de dimension associé un polyomino P : Soit P un polyomino. On appelle dimension du polyomino le couples d'entiers (m,n) définis de la manière suivante : Considérons le plus petit rectangle contenant le polyomino P. Il s'agit du rectangle dont la dimension horizontale m est définie comme le maximum du nombre de carrés unitaires composant horizontalement le polyomino P et la dimension verticale n est définie comme le maximum du nombres de carrés unitaires composant verticalement le polyomino P.

Soit un rectangle de dimensions n x m. Raisonnons par disjonction de cas. Si n $\leq$ 2 ou m $\leq$ 2 : puisque la dimension du polyomino 'croix' est égal à (3,3) : le plus petit rectangle contenant la croix est donc de dimensions 3x3. Tout rectangle dont l'une des dimensions est plus petite ou égale à 2 ne peut contenir le polyomino 'croix'.

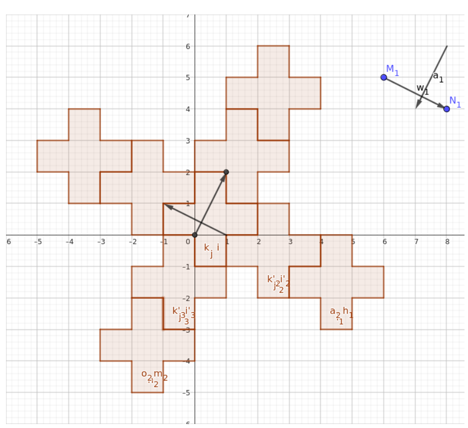
Si n = 3 et m = 3 : Il y a une unique manière de placer le polyomino à l'intérieur d'un rectangle 3x3 mais il ne pave pas complètement le rectangle (les coins ne sont pas recouverts).

Si n $\geq$ 3 et m $\geq$ 3 Considérons le sous-rectangle 3x3 du coin en haut à gauche du rectangle. D'après le cas précédent, il est impossible de le paver.

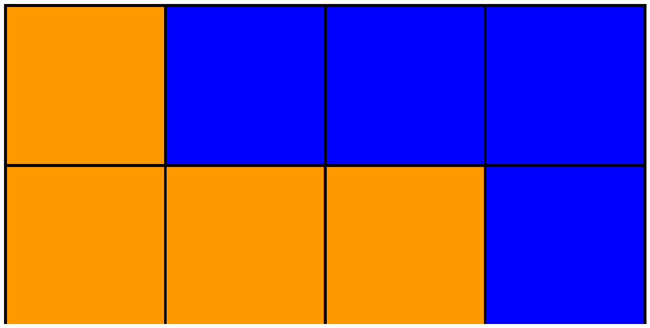
Ainsi, puisque la disjonction de cas est exhaustive, il est impossible de paver un rectangle avec le polyomino 'croix'.

Concernant le pavage du plan, à priori 2 approches sont possibles :
- La première consiste à remarquer l'émergence d'un motif en forme de couches. On pourrait donc effectuer un raisonnement par récurrence sur le nombre de couches illustré par l'animation suivante.

- La deuxième repose sur des méthodes d'algèbre linéaire : Remarquons que si l'on se place dans le réseau plan $\mathbf{Z}^2$ rapporté à la base orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) on peut générer l'ensemble du plan comme combinaisons linéaires à coefficients entiers des vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} c \\ 2c \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2c \\ c \end{pmatrix}$ où c est la longueur entière du coté d'un carré composant la croix. Le polyomino 'croix' translaté par le vecteur $\vec{u}$ forme une partie connexe du plan au sens où les deux polyominos ne se chevauchent pas et l'union des deux est "en un seul morceau", c'est-à-dire que 2 points dans l'union peuvent toujours être reliés par un "chemin".Idem pour la translation par le vecteur $\vec{v}$. Ainsi, l'union de l'ensemble des translatés du polyomino 'croix' engendré par la famille ($\vec{u}$, $\vec{v}$) pave l'ensemble du plan au sens de la connexité ci-dessus (il n'y a aucun trous)

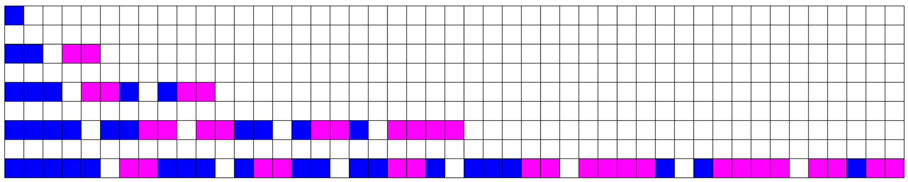


(8) : Considérons le polyomino suivant construit à partir des polyominos de la Figure à droite du tableau en page 2, il est de dimension (2,4).



L'ensemble créé par juxtaposition verticale de n copies du polyomino répété m fois en les juxtaposant horizontalement est exactement l'ensemble des rectangles $2n \times 4m$ où m et n sont deux entiers relatifs non nuls.

(9) : Figure représentant les pavages possible pour n = 1, 2, 3, 4, 5 :



On a respectivement, 1, 2, 3, 5 et 8 pavages possibles. Ces nombres constituent les premiers termes de la suite de Fibonacci. Ils sont simplement décalés de 1, $F_0 = 1$ *et* $F_1 = 2$. On peut le démontrer de la manière suivante :
Soit $n \in \mathbf{N}^*$, considérons l'ensemble $S_n = \{(\alpha_1, \cdots, \alpha_k) \in (\mathbf{N}^*)^k \mid \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = n \; et \; (\forall i \in \{1, \cdots, k\} \; \alpha_i \in \{1, 2\}\}$. L'origine du choix de cet ensemble provient du fait que l'on peut voir le problème du pavage d'une manière combinatoire. Paver un polyomino de dimension (1,n) à l'aide du carré unitaire et du polyomino de dimension (2,1) revient à déterminer un k-uplet avec $1 \leq k \leq n$ composé uniquement des valeurs 1 et 2 dont la somme des éléments vaut n. Dénombrons alors les éléments de S_n et notons $(P_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ la suite des cardinaux associés à $(S_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$.Considérons S_{n+2} pour $n \geq 1$. Tout pavage du rectangle commence nécessairement soit par le carré unitaire soit par le rectangle de longueur 2 et de hauteur 1. De manière analogue, chaque k-uplet commence soit par 1, soit par 2.
S'il commence par 1 : il reste donc l'ensemble des k-1 uplets dont la somme des éléments vaut n + 1, son cardinal est P_{n+1} S'il commence par 2 : il reste donc l'ensemble des k-1 uplets dont la somme des éléments vaut n, son cardinal est P_n Ainsi, notre ensemble S_{n+2} est partitionné en 2 ensembles de cardinaux respectifs P_{n+1} et P_n de telle sorte que $P_{n+2} = P_{n+1} + P_n$. La suite $(P_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est ainsi définie explicitement par :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \; P_n = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 1 \\ 2 \text{ si } n = 2 \\ P_{n+2} = P_{n+1} + P_n \text{ sinon} \end{cases}$$