Théorie des groupes
Cours par Frédéric Touzet

Leothaud Dylan

Chapitre 1

Notion de base.

1.1 Groupes

Définition 1.1.1 (Loi de composition interne.)**.** *Soit E un ensemble.*
Une loi de composition interne est une application $\star : \begin{array}{ccc} E\times E & \to & E \\ (x,y) & \mapsto & x\star y \end{array}$.
On dit de plus que $\star$ est associative si :

$$\forall (x,y,z)\in E^3, (x\star y)\star z = x\star (y\star z).$$

Remarque 1.1.2. *Si la loi $\star$ est associative, l'usage des parenthèses est facultative. En effet, pour $(x,y,z)\in E^3$, $x\star y\star z = (x\star y)\star z = x\star(y\star z)$ est définie sans ambiguité.*
De plus, pour $n\in\mathbb{N}^*$, on définie $x^n = \left\{ \begin{array}{cc} x & si\ n=1 \\ x\star x^{n-1} & sinon \end{array} \right.$.

Définition 1.1.3 (Groupe)**.** *Soit G un ensemble et $\star$ une loi de composition interne associative sur G telle que :*

- $\exists e\in G, \forall x\in G, x\star e = e\star x = x$
- $\forall x\in G, \exists y\in G, x\star y = y\star x = e$

On dit alors que $(G,\star)$ est un groupe.
Si de plus $\forall (x,y)\in G^2, x\star y = y\star x$, on dit alors que $(G,\star)$ est un groupe abélien (ou commutatif).
On dit que l'élément e est le neutre pour $\star$ et pour tout $x\in G$, l'élément $y\in G$ tel que $x\star y = y\star x = e$ est appelé inverse de x.

Remarque 1.1.4. *L'élément neutre et l'inverse des éléments sont définis de manière unique.*

Proposition 1.1.5. *Dans un groupe $(G,\star)$, tous les éléments sont simplifiable à gauche (resp. à droite), c'est-à-dire :*

$$\forall (x,y,z)\in G^3, \left\{ \begin{array}{l} x\star y = x\star z \Rightarrow y = z \\ y\star x = z\star x \Rightarrow y = z \end{array} \right.$$

1.2 Morphisme

Définition 1.2.1. *Soit* $(G, \cdot)$ *et* $(H, \star)$ *deux groupes et* $\varphi : G \to H$.
On dit que φ *est un morphisme (de groupe) si :*

$$\forall (x, y) \in G^2, \varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \star \varphi(y)$$

Proposition 1.2.2. *Soit* $(G, \cdot)$ *et* $(H, \star)$ *des groupes et* $\varphi : G \to H$ *un morphisme.*
Alors :

1. $\varphi(1_G) = 1_H$.
2. *si* φ *est bijective, alors* $\varphi^{-1} : H \to G$ *est un morphisme.*

Définition 1.2.3. *Soit* $(G, \cdot)$ *et* $(H, \star)$ *deux groupes et* $\varphi : G \to H$.
On dit que φ *est un isomorphisme si* φ *est un morphisme de groupe bijectif.*
De plus, si $G = H$, *on dit que* φ *est un automorphisme.*
On note, $Aut(G)$ *l'ensemble des isomorphismes de* G.

Proposition 1.2.4. *Soit* $(G, \star)$ *un groupe.*
Alors $(Aut(G), \circ)$ *est un groupe de neutre* $I_d : \begin{array}{ccc} & \rightarrow & \\ & \mapsto & \end{array}$.