

# Отчет о выполненной лабораторной работе 2.2.1

Котляров Михаил, Б01-402

## 1 Введение

**Цель работы:** Определение коэффициента диффузии гелия в воздухе

**Оборудование:** форвакуумный насос; баллон с гелием; манометр; источник питания; магазин сопротивления; мультиметр; установка

## 2 Теоретические сведения

*Диффузией* называют самопроизвольное взаимное проникновение веществ друг в друга, происходящее вследствие хаотичного теплового движения молекул. При перемешивании молекул разного сорта говорят о взаимной (или концентрационной) диффузии.

В системе, состоящей из двух компонентов, плотность потока вещества в результате взаимной диффузии описывается законом Фика:

$$j_a = -D \frac{\partial n_a}{\partial x}, \quad j_b = -D \frac{\partial n_b}{\partial x},$$

где  $D$  – коэффициент взаимной диффузии компонентов,  $j_{ab}$  – плотности потока частиц соответствующего сорта (количество частиц, пересекающих единичную площадку в единицу времени).

В данной работе исследуется взаимная диффузия гелия и воздуха. Давление  $P$  и температура  $T$  в условиях опыта предполагаются неизменными:  $P = (n_{He} + n_B)k_B T = const$ , где  $n_{He}$  и  $n_B$  – концентрации (объёмные плотности) диффундирующих газов. Поэтому для любых изменений концентраций справедливо  $\Delta n_B = -\Delta n_{He}$ . Следовательно, достаточно ограничиться описанием диффузии одного из компонентов, например гелия  $n_{He}$ :

$$j_{He} = -D \frac{\partial n_{He}}{\partial x} \quad (1)$$

Проведём теоретическую оценку величины коэффициента взаимной диффузии. В работах малой концентрации гелия, более того, масса атомов гелия много меньше массы молекул, составляющих воздух. При таких условиях перемешивание газов в эксперименте можно рассматривать как диффузию гелия на стационарном фоне воздуха. Тогда коэффициент диффузии приблизительно равен

$$D = \frac{1}{3} \lambda \bar{v}, \quad (2)$$

где  $\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$  – средняя тепловая скорость частиц примеси,  $\lambda = \frac{1}{n_0 \sigma}$  – длина свободного пробега частиц,  $n_0$  – концентрация рассеивающих центров (фона),  $\sigma$  – сечение столкновения частиц примеси с частицами фона. В общем случае необходимо считать  $\lambda = \frac{1}{n_\Sigma \sigma}$ , где  $n_\Sigma = n_{He} + n_B = \frac{P_\Sigma}{kT}$  – полная концентрация частиц. Также  $\bar{v}$  – средняя относительная скорость частиц разных сортов. Таким образом, теоретическая оценка предполагает, что коэффициент диффузии не зависит от пропорции элементов, а обратно пропорционален давлению  $D \propto \frac{1}{P_\Sigma}$ .

## 3 Экспериментальная установка и метод измерения

Рассмотрим подзадачу о диффузии в соединительной трубке. Предположим сперва, что концентрации примеси (гелия) на её торцах поддерживаются постоянными и равными  $n_1$  и  $n_2$  соответственно. Тогда через некоторое время в трубке установится стационарный поток частиц, одинаковый в каждом сечении трубки (в противном случае, если бы поток зависел от  $x$ , частицы бы накапливались в трубке, и процесс перестал бы быть стационарным). Применяя закон Фика в трубке, получим

$$j = -D \frac{\partial n}{\partial x} = const.$$

Следовательно, распределение концентрации в трубке  $n(x)$  – линейная функция:

$$n(x) = \frac{\Delta n}{L}x, \quad (3)$$

и плотность потока частиц всюду постоянна и равна

$$j = -D \frac{\Delta n}{L}, \quad (4)$$

где  $\Delta n = n_2 - n_1$  – разность концентраций гелия на концах трубки.

Тогда полное число частиц примеси в сосудах равно соответственно  $N_1 = n_1 V$  и  $N_2 = n_2 V$ . Произведение плотности потока на площадь сечения трубки  $S$  дает количество частиц, пересекающих в единицу времени любое поперечное сечение трубки. Поэтому

$$\frac{dN_1}{dt} = jS, \quad \frac{dN_2}{dt} = -jS.$$

Выразим отсюда скорость изменения  $\Delta n$ . Вычитая из второго равенства первое и деля результат на объём сосуда  $V$ , с учетом (4) получим

$$\frac{d(\Delta n)}{dt} = -\frac{\Delta n}{\tau} \quad (5)$$

Интегрируя (5), получаем, что разность концентраций будет убывать по экспоненциальному закону

$$\Delta n = \Delta n_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (6)$$

где  $\tau = \frac{VL}{2DS}$  – характерное время выравнивания концентраций между сосудами,  $\Delta n_0$  – разность концентраций примеси в сосудах в начальный момент времени.

Для измерения разности концентраций в установке применяются датчики теплопроводности. Тонкая платиновая проволока, протянутая вдоль оси стеклянного цилиндра, нагревается током. Тепло от проволоки к стенке цилиндра передаётся главным образом за счёт теплопроводности газа, находящегося внутри цилиндра. При заданной мощности нагрева приращение температуры проволоки и, следовательно, приращение её сопротивления пропорциональны теплопроводности газа. При малой разности  $\Delta n$  концентраций в сосудах можно ожидать, что разность теплопроводностей будет изменяться прямо пропорционально  $\Delta n$ :

$$\Delta \kappa = \kappa(n_2) - \kappa(n_1) \approx \text{const} \cdot \Delta n.$$

При незначительном различии в составах смесей показания вольтметра, подсоединённого к диагонали моста, будут пропорциональны разности концентраций примеси:  $U \propto \Delta \kappa \propto \Delta n$ . В процессе диффузии разность концентраций убывает по закону (8), и значит по тому же закону изменяется напряжение:

$$U = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (7)$$

где  $U_0$  — показание гальванометра в начальный момент времени.

## Схема установки

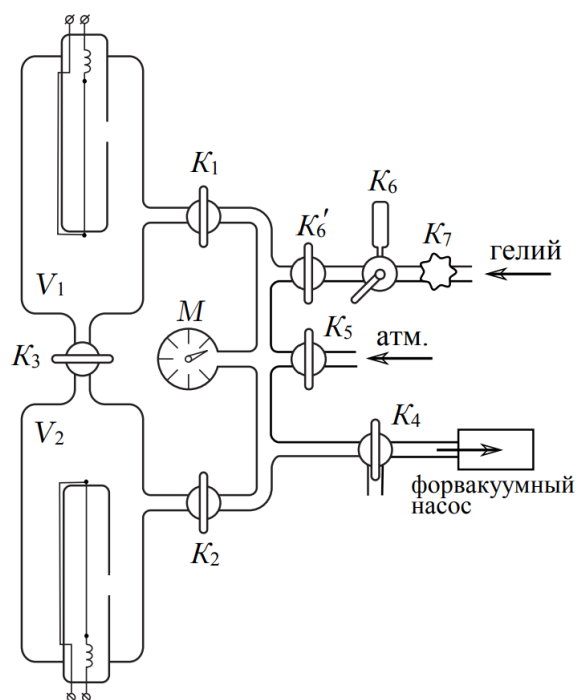


Рис. 1. Экспериментальная установка

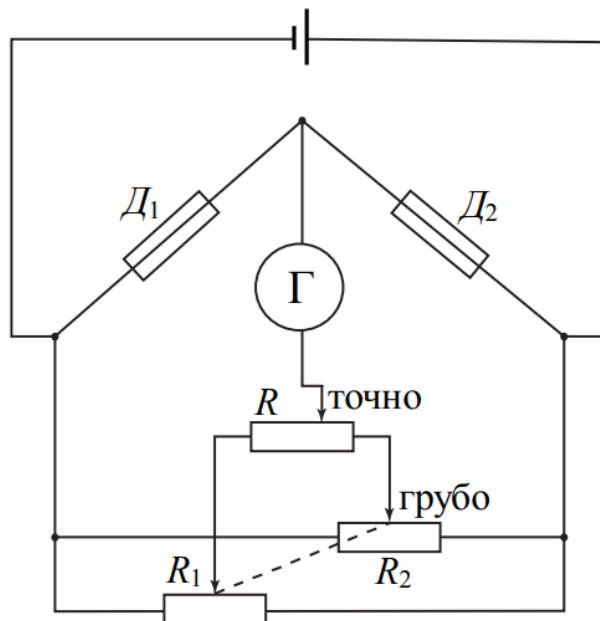


Рис. 2. Электрическая схема установки

## 4 Приборы и данные

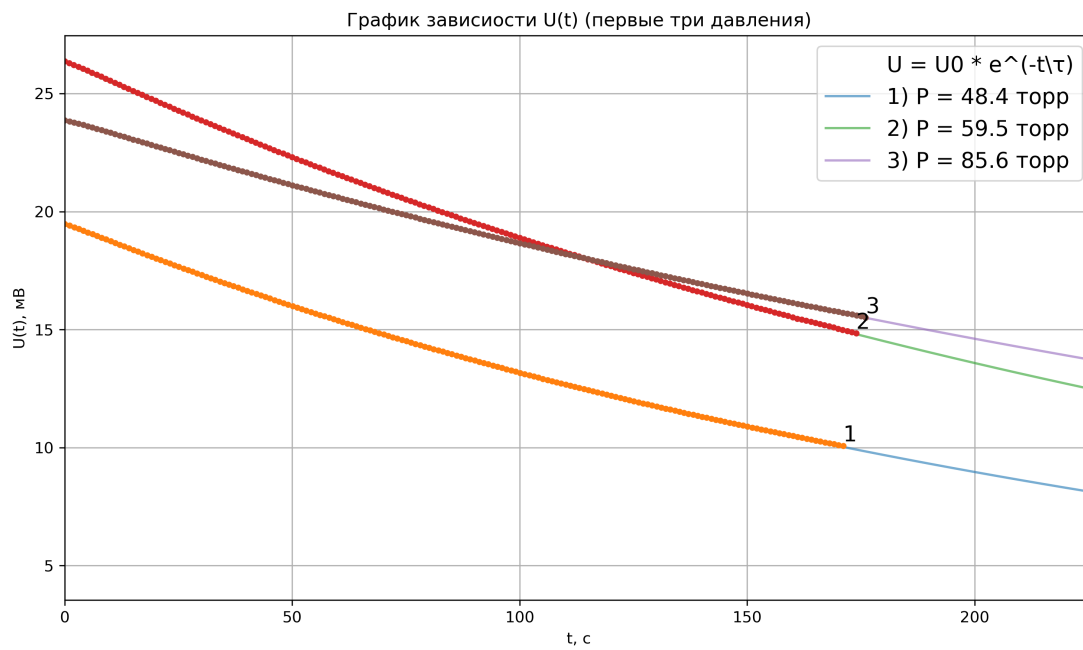
- Вакуумметр образцовый ГОСТ 6521-60, класс точности 0,4.
- Форвакуумный насос Адвавак 2, скорость откачки  $2 \text{ м}^3/\text{час}$
- Источник постоянного напряжения GW Instek GPS-2303, погрешность  $0,5\% + 10 \text{ мВ}$
- Цифровой мультиметр Вольтметр универсальный В7-78, погрешность измерения постоянного напряжения  $0,0035\% + 0,0005\%$  диапазона мВ.

## 5 Выполнение

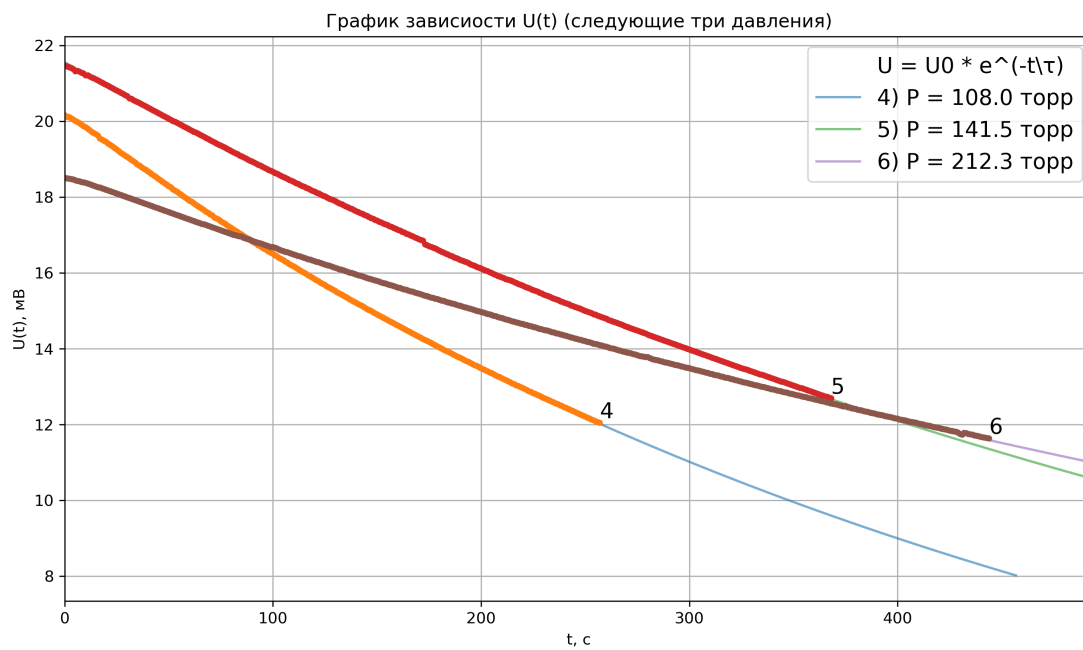
### 1. Ход выполнения каждого эксперимента

Вначале откачаем до предела воздух из всей установки. Значение на манометре 101,5 делений. Давление в комнате 756 торр. По этим данным получаем 1 деление  $\approx 7,45$  торр. Запустим в установку воздух до давления  $P_1 = 50$  торр. С помощью магазина сопротивлений установим на нити напряжение не более 0,1 мВ. Откачаем весь воздух. Наполним первый сосуд гелием до  $0,2P_1$ . Откачаем оставшийся в трубках гелий. Накачаем воздух во второй сосуд до давления  $1,7P_1$ . После этого откроем краны K1 и K2, чтоб давление и температура выровнялись. Закроем краны, зафиксируем получившееся давление в системе, откроем кран K3 и запустим программу, фиксирующую показания вольтметра. Будем ждать, пока напряжение упадет на 30-50%. Проведем этот опыт еще 5 раз для разных давлений.

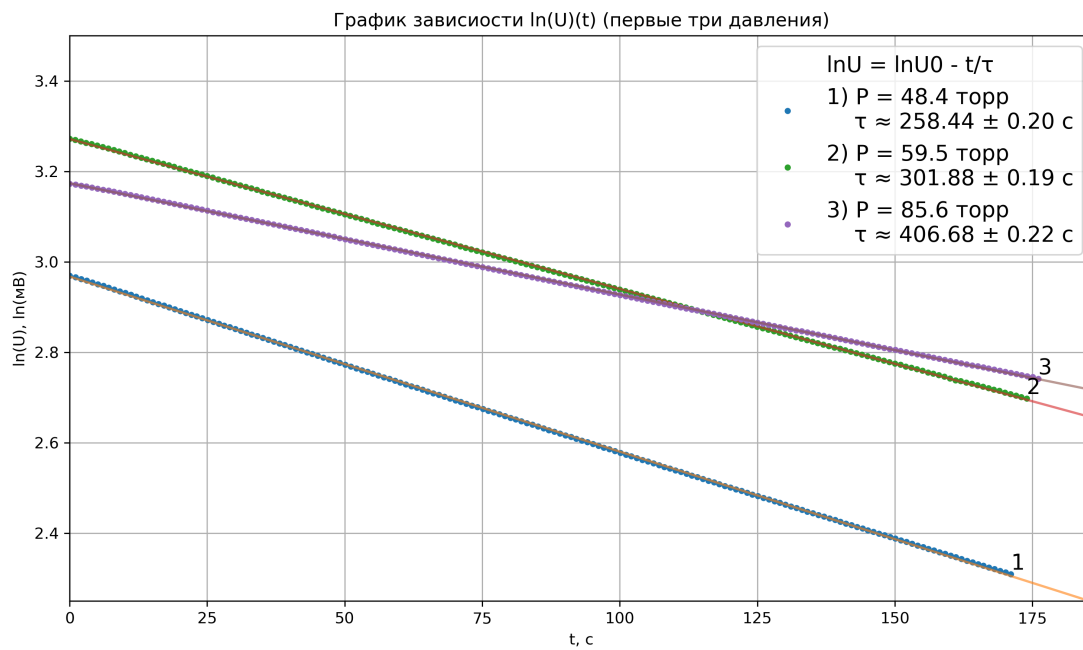
По полученным данным построим графики зависимости напряжения от времени  $U(t)$ , а также эту же зависимость в логарифмическом масштабе по оси ординат.



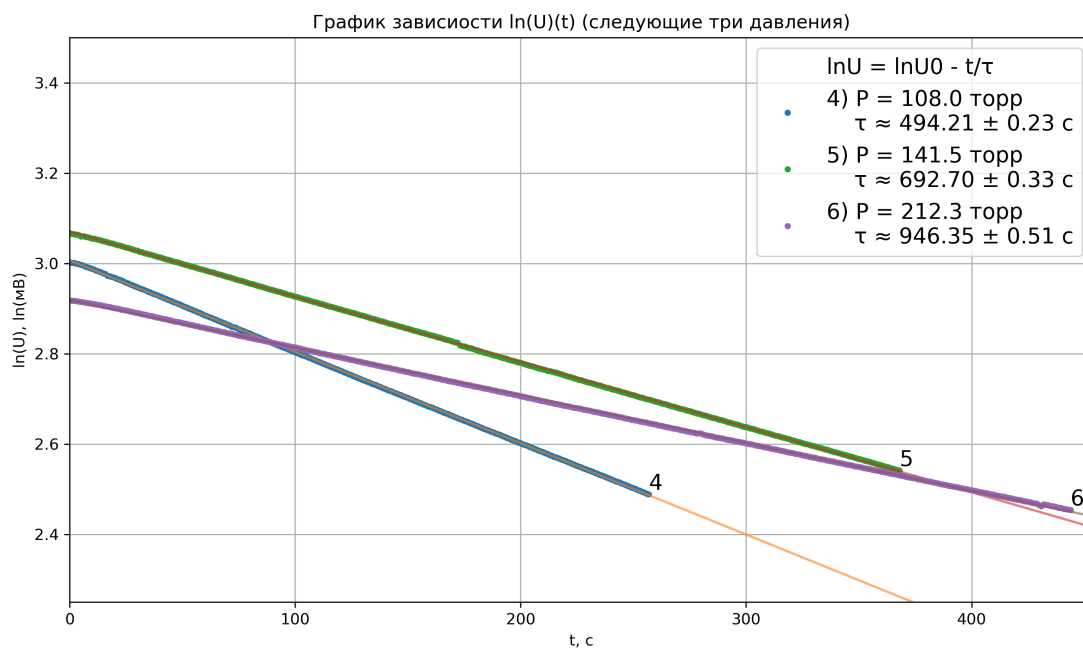
Экспоненциальная зависимость напряжения от времени для  $P_1, P_2, P_3$



Экспоненциальная зависимость напряжения от времени для  $P_4, P_5, P_6$



Зависимость логарифма напряжения от времени для  $P_1, P_2, P_3$



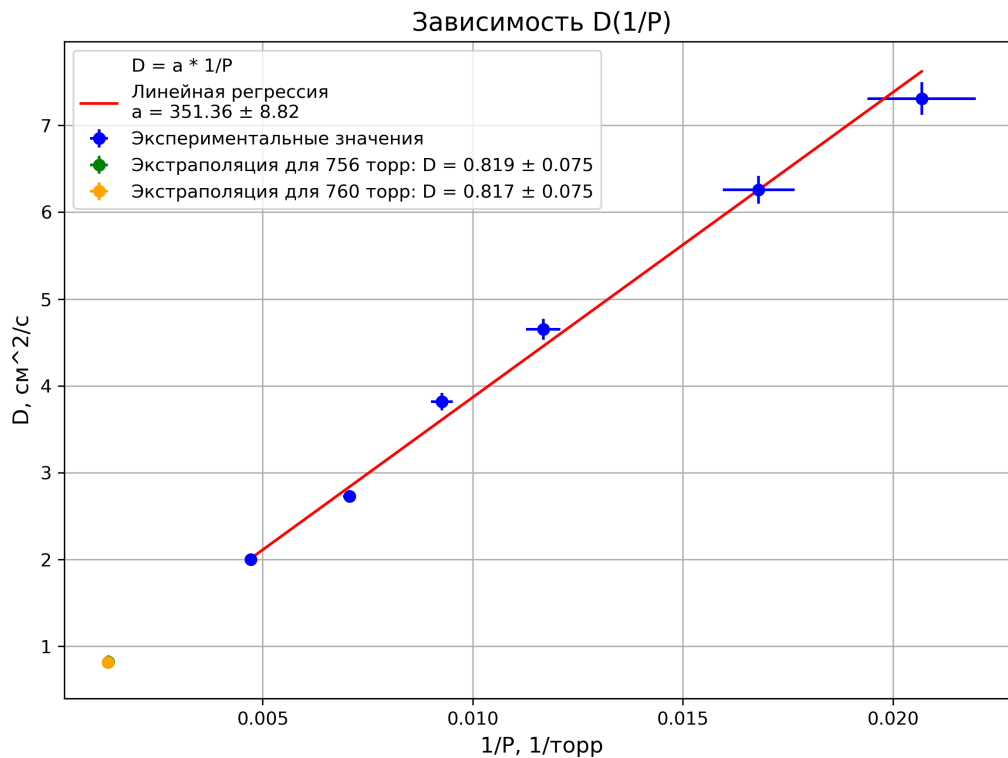
Зависимость логарифма напряжения от времени для  $P_4, P_5, P_6$

2. По полученным значениям  $\tau$  определим коэффициент диффузии для данного давления.

$P$ , дел	$P$ , торр	$\tau$ , с	$D$ , $\frac{\text{см}^2}{\text{с}}$	$\sigma_D$ , $\frac{\text{см}^2}{\text{с}}$	$\varepsilon_D$ , %
$6.5 \pm 0.4$	$48.4 \pm 3.0$	$258.44 \pm 0.20$	7.31	0.19	2.63
$8.0 \pm 0.4$	$59.5 \pm 3.0$	$301.88 \pm 0.19$	6.26	0.16	2.63
$11.5 \pm 0.4$	$85.6 \pm 3.0$	$406.68 \pm 0.22$	4.65	0.12	2.63
$14.5 \pm 0.4$	$108.0 \pm 3.0$	$494.21 \pm 0.23$	3.82	0.10	2.63
$19.0 \pm 0.4$	$141.5 \pm 3.0$	$692.70 \pm 0.33$	2.73	0.07	2.63
$28.5 \pm 0.4$	$212.3 \pm 3.0$	$946.35 \pm 0.51$	2.00	0.05	2.63

Таблица 1. Зависимость времени релаксации  $\tau$  и диаметра пятна  $D$  от давления  $P$

3. По полученным коэффициентам диффузии построим по методу  $\chi^2$  зависимость  $D(\frac{1}{P})$ . Экстраполируя график к атмосферному давлению, оценим соответствующий коэффициент диффузии.



Зависимость коэффициента диффузии от обратного давления  $D(\frac{1}{P})$

Параметры графика: коэффициент наклона  $a = 351,36 \pm 8,82$ ,  $\chi^2 = 12.08$ , степень свободы  $i = 4$ , параметр  $p = 0.0167$ . Коэффициент диффузии для нашего давления в комнате  $D_{756} = 0,820 \pm 0,075 \frac{\text{см}^2}{\text{с}}$  ( $\varepsilon_{D_{756}} = 9,2\%$ ), для нормального атмосферного давления  $D_{760} = 0,817 \pm 0,075 \frac{\text{см}^2}{\text{с}}$  ( $\varepsilon_{D_{756}} = 9,2\%$ ).

4. По полученным значениям оценим длину свободного пробега атомов гелия в воздухе  $\lambda_{He}$ , а также эффективное сечение столкновений атомов гелия с молекулами воздуха  $\sigma_{He-возд.}$ .

Для этого рассчитаем концентрацию молекул  $n_0 = \frac{P}{kT}$ ,  $\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$  – среднюю тепловую скорость частиц примеси.

$$n_0 = \frac{P_1}{kT_0} = \frac{48,4 \cdot 133,322}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 298} \approx 1,57 \cdot 10^{24} \text{ м}^{-3}$$

$$\sigma_{n_0} = n_0 \frac{\sigma_{P_1}}{P_1} = 1,57 \cdot 10^{24} \frac{3}{48,4} = 9,8 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3}$$

$$\varepsilon_{n_0} = 6,3\%$$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 8,31 \cdot 298}{3,1415 \cdot 4 \cdot 10^{-3}}} = 1255,6 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$\lambda_1 = \frac{3D}{\bar{v}} = \frac{3 \cdot 7,31 \cdot 10^{-4}}{1255,6} \approx 1747,3 \text{ нм}$$

$$\sigma_{\lambda_1} = \lambda_1 \varepsilon_{D_1} = 45,9 \text{ нм}$$

$$\sigma_{He}^1 = \frac{1}{n_0^1 \lambda_1} = \frac{1}{1,57 \cdot 10^{24} \cdot 1747,3 \cdot 10^{-9}} \approx 3,65 \cdot 10^{-19} \text{ м}^2$$

$$\Delta \sigma_{He}^1 = \sigma_{He}^1 \sqrt{\left(\frac{\sigma_{n_0}^1}{n_0^1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\lambda_1}}{\lambda_1}\right)^2} = 1747,3 \sqrt{(6,25 \cdot 10^{-2})^2 + (2,63 \cdot 10^{-2})^2} = 2,48 \cdot 10^{-20} \text{ м}^2$$

$$\varepsilon_{\sigma_{He}^1} = 6,78\%$$

$P$ , торр	$n_0$ , $10^{24} \text{ м}^{-3}$	$\sigma_{n_0}$ , $10^{24} \text{ м}^{-3}$	$\lambda$ , нм	$\sigma_{\lambda}$ , нм	$\sigma_{He}$ , $10^{-19} \text{ м}^2$	$\Delta \sigma_{He}$ , $10^{-19} \text{ м}^2$	$\varepsilon_{\sigma_{He}}$ , %
$48.4 \pm 3.0$	1.57	0.10	1747.3	45.9	3.65	0.25	6.8
$59.5 \pm 3.0$	1.93	0.10	1495.9	39.3	3.47	0.20	5.7
$85.6 \pm 3.0$	2.78	0.10	1110.4	29.2	3.24	0.14	4.4
$108.0 \pm 3.0$	3.50	0.10	913.7	24.0	3.13	0.12	3.8
$141.5 \pm 3.0$	4.59	0.10	651.9	17.1	3.34	0.11	3.4
$212.3 \pm 3.0$	6.88	0.10	477.2	12.5	3.04	0.09	3.0
$756.0 \pm 3.0$	24.51	0.10	195.8	18.0	2.08	0.19	9.2
$760.0 \pm 3.0$	24.64	0.10	195.2	18.0	2.08	0.19	9.2

Таблица 2. Результаты расчёта концентрации  $n_0$ , длины свободного пробега  $\lambda$  и эффективного сечения столкновений  $\sigma_{He}$  при различных давлениях  $P$

Рассчитаем по формулам из теории и табличному значению коэффициента диффузии при атмосферном давлении и температуре  $20^\circ\text{C}$  эти значения.  $D_{\text{табл}} = 0,697 \frac{\text{см}^2}{\text{с}}^*$

$$\lambda_{\text{табл}} = 166,5 \text{ нм}$$

$$\sigma_{\text{табл}} = \frac{1}{n_0^{760} \lambda_{\text{табл}}} = 2,44 \cdot 10^{-19} \text{ м}^2$$

Теперь найдем эффективное сечение столкновений  $\sigma_{He}^a$  по коэффициенту наклона прямой  $D(\frac{1}{P})$ , поскольку по теории  $D = \frac{kT^{\frac{3}{2}}}{3\sigma_{He}} \sqrt{\frac{8R}{\pi\mu} \frac{1}{P}}$ . Отсюда  $\sigma_{He} = \frac{kT^{\frac{3}{2}}}{3a} \sqrt{\frac{8R}{\pi\mu}}$ .

$$\sigma_{He}^a = \frac{1}{n_0^{760} \lambda_{\text{табл}}} = 3,68 \cdot 10^{-19} \text{ м}^2$$

$$\Delta \sigma_{He}^a = \sigma_{He}^a \frac{\sigma_a}{a} = 3,68 \frac{8,82}{351,36} = 0,09 \cdot 10^{-19} \text{ м}^2$$

## 6 Результаты и обсуждения

1. По графикам 1-4 отчетливо видно, что процесс диффузии подчиняется закону (6).
2. Из графика 5 видно, что коэффициент диффузии обратно пропорционален давлению. Об этом говорят значения величин  $\frac{\chi_i^2}{i}$  и  $p$ .
3. Сравним полученный коэффициент диффузии для атмосферного давления при  $25^\circ\text{C}$  с табличным для  $20^\circ\text{C}$ . С учетом грубых теоретических приближений, а также погрешностей, результат можно считать

Величина	Эксп. зн.	Табл. зн.
$D$ , $\frac{\text{см}^2}{\text{с}}$	0,817	0,697
$\sigma_D$ , $\frac{\text{см}^2}{\text{с}}$	0,075	0,120
$\varepsilon_D$ , %	9,2	17,2

Таблица 3. Сравнение экспериментального и табличного значений коэффициента диффузии

приемлимым.

4. Сравним экспериментальное и высчитанное на основе табличных данных значения эффективного сечения столкновений атомов гелия с молекулами воздуха.

Полученное экспериментальное значение довольно близко к табличному.

\*Значение данного коэффициента диффузии взято с сайта [https://www.engineeringtoolbox.com/air-diffusion-coefficient-gas-mixture-temperature-d\\_2010.html](https://www.engineeringtoolbox.com/air-diffusion-coefficient-gas-mixture-temperature-d_2010.html)

Величина	Эксп. зн.	Табл. зн.
$\sigma, 10^{-19} \text{ м}^2$	2,079	2,437
$\Delta\sigma, 10^{-19} \text{ м}^2$	0,192	0,358
$\varepsilon_\sigma, \%$	9,2	14,7

Таблица 4. Сравнение экспериментального и табличного значений эффективного сечения  $\sigma$

## 7 Выводы

Были проведены 6 серий измерений напряжения от времени для разных давлений. Были построены графики зависимостей  $U(t)$ ,  $\ln U(t)$ . По ним определили коэффициенты диффузии. По полученным данным построили график зависимости  $D(\frac{1}{P})$ . Экстраполируя график к атмосферному давлению, оценили соответствующий коэффициент диффузии (см таблицу 3). Вычислили длину свободного пробега, эффективное сечение столкновений атомов гелия с молекулами воздуха для каждого давления. Сравнили со значениями, вычисленными на основе табличного значения коэффициента диффузии.