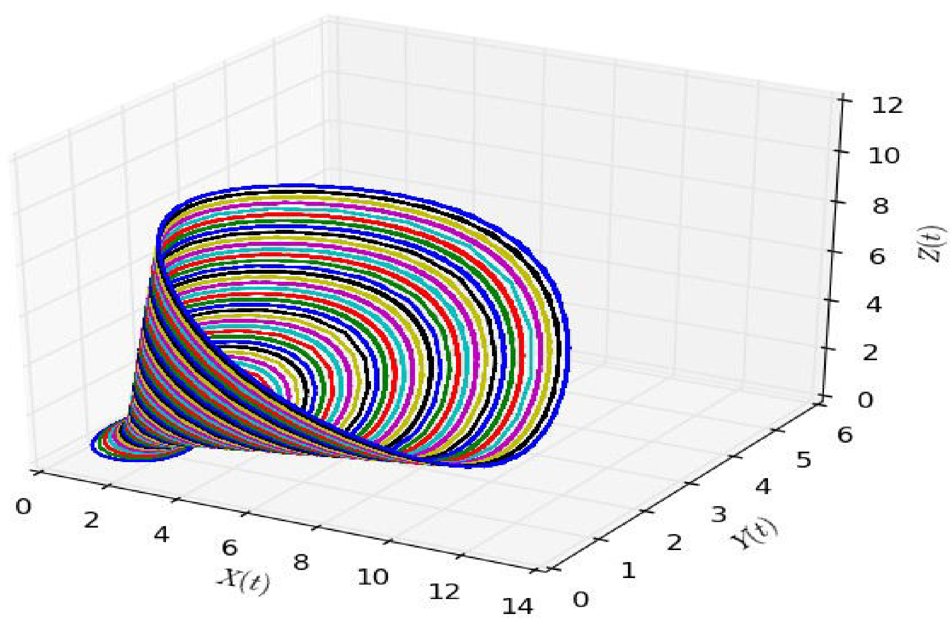
Temas Selectos de Física Computacional

Proyecto Final

Tema: Simulación de modelos tipo depredador-presa (Lotka-Volterra)



Integrantes:
Raquel Aguilar Márquez
Raúl Álvarez Mendoza

Introducción

El objetivo de este modelo es describir la dinámica poblacional de dos especies (o más) que interactúan, en un ecosistema cerrado(no se permite la inmigración/emigración en él).

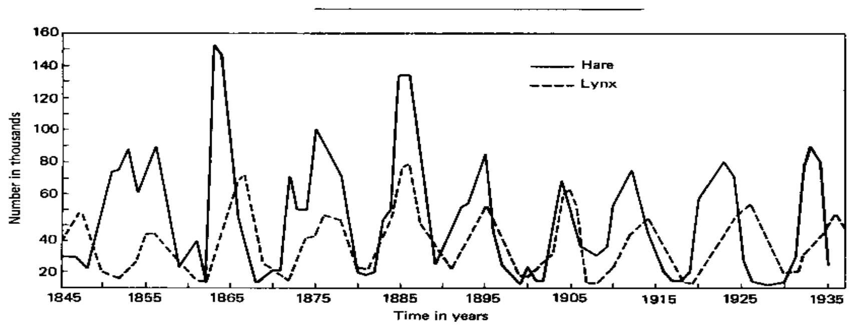


Figure 9-3. Changes in the abundance of the lynx and the snowshoe hare, as indicated by the number of pelts received by the Hudson's Bay Company. This is a classic case of cyclic oscillation in population density. (Redrawn from MacLulich 1937.)

Dos especies: un depredador, una presa
El modelo Lotka-Volterra consiste en el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dx}{dt} = ay - bxy$$
$$\frac{dy}{dt} = -cx + dxy$$

donde $y(t)$ representa a población del depredador y $x(t)$ la población de la presa, ambas en función del tiempo.
Las constantes a, b, c, d > 0 son interpretadas de la siguiente manera:

- a representa la tasa de crecimiento natural de la presa en la ausencia de depredadores
- b representa el efecto de la depredación en la presa
- c representa la tasa de mortalidad natural de los depredadores en la ausencia de presas
- d representa la eficiencia y la tasa propagación del depredador en presencia de presas

Las condiciones iniciales estarán en el conjunto

$$S = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 || a \geq 0, b \geq 0\}$$

Ya que estas son las condiciones iniciales en las que nos interesa el comportamiento de la ecuación inicial, ya que densidades negativas de población no cuentan con sentido biológico.

N especies:
Para el caso en que existan n especies interactuando, las ecuaciones toman la forma:

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i \sum_{j=1}^{n} A_{ji}(1 - x_1)$$

Donde x_i representa la i-ésima especie y A_{ji} representa el efecto que tiene la especie j sobre la especie i.

Dos especies. Una presa y un depredador

Podemos pensar en casos como liebres y linces, ratones y serpientes, etc.
Tomando las ecuaciones:

$$\dot{x} = ax - bxy$$
$$\dot{y} = -cy + dyx$$

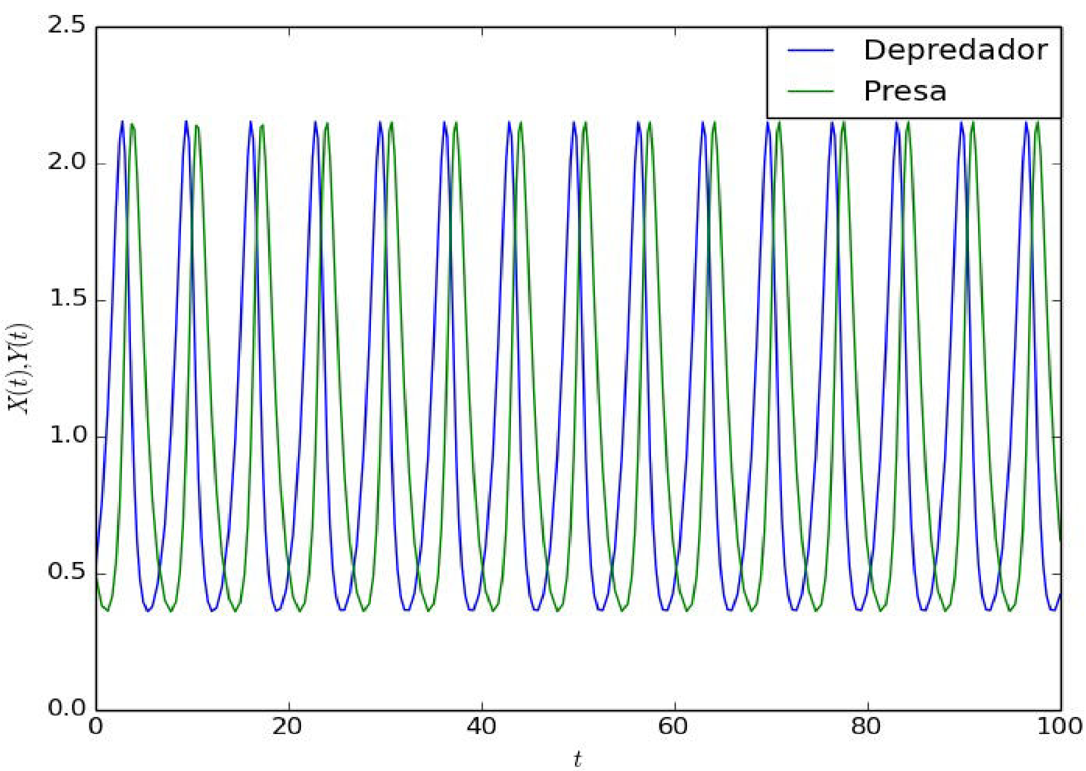
Dimos como valores para las constantes:
$a=1 \quad b=1 \quad c=1 \quad d=1$

Dandon las condiciones iniciales:

$x_0=0.5 \ , \ y_0=0.5$
$x_0=0.6 \ , \ y_0=0.6$
$x_0=0.7 \ , \ y_0=0.7$

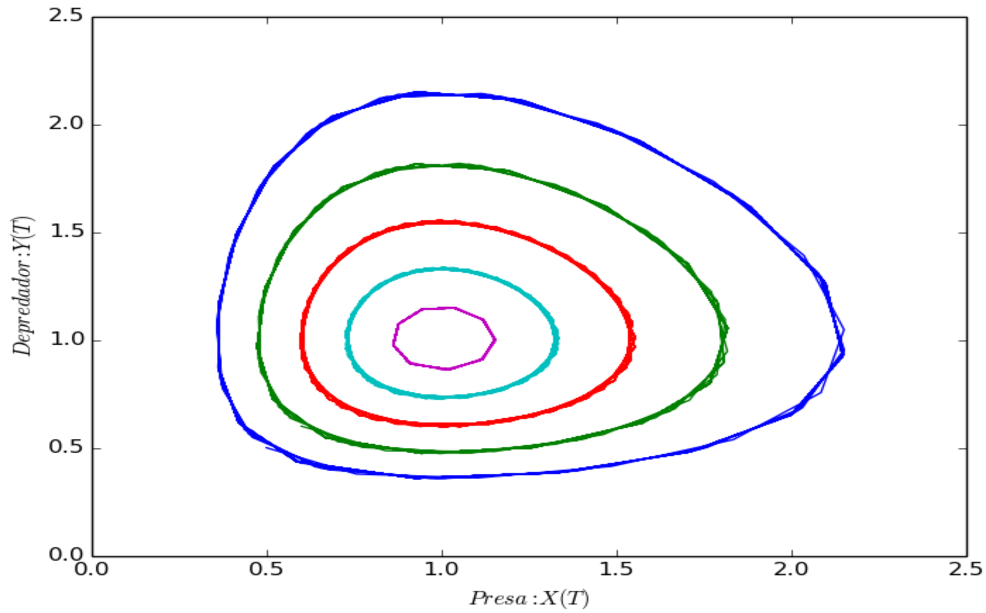
$x_0=0.8 \ , \ y_0=0.8$
$x_0=0.9 \ , \ y_0=0.9$
$x_0=1 \ , \ y_0=1$

Comportamiento en el tiempo:



Gráfica 2. Presa, Depredador vs. tiempo. Condiciones iniciales x0=0.5 y0=0.5

Comportamiento entre especies:



Gráfica 1. Presa vs. Depredador. En esta gráfica se muestran el comportamiento de x, y dadas diferentes condiciones iniciales.

Los puntos críticos del sistema, donde $\dot{x},\dot{y}=0$ se observa que estos son el origen y el punto $(\frac{c}{d},\frac{a}{b})$.

Obtenemos la matriz Jacobiana del sistema:

$$J=\begin{bmatrix} a-by & -bx \\ dy & -c+dx \end{bmatrix}$$

Y por lo tanto, observamos que en el origen hay un punto silla, y en el punto $(\frac{c}{d},\frac{a}{b})$ el sistema linealizado tiene la matriz de coeficientes:

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{-bc}{d} \\ \frac{ad}{b} & 0 \end{bmatrix}$$

Cuyos eigenvalores son $\pm\sqrt{aci}$, que al menos en el sistema linealizado es un centro estable (aunque el espacio fase graficado nos dice que probablemente también es un centro estable de nuestro sistema, ya que $(\frac{c}{d},\frac{a}{b})=(1,1)$ en el caso a,b,c,d=1 y si observamos lo graficado, todas las orbitas giran alrededor de ese punto en dirección contraria a las manecillas del reloj).

Crecimiento logístico de la presa:

Un problema obvio de este modelo básico es que la población de la presa crecería sin límites, exponencialmente, en la ausencia de depredadores.
Hay una solución sencilla a este comportamiento no realista. Tan solo reemplazaremos el término de crecimiento exponencial en la primera ecuación por dos términos que darán el crecimiento logístico de la población de la presa:

$$\dot{x}=(ax-ex^2)-bxy \quad \text{...(Eq. 1)}$$
$$\dot{y}=-cy+dyx \quad \text{...(Eq. 2)}$$

Por lo tanto, en la ausencia de depredadores, la primera ecuación indica que la población de la presa se estabilizaría según la capacidad de carga del ecosistema dada por la ecuación logística (Eq. 1).

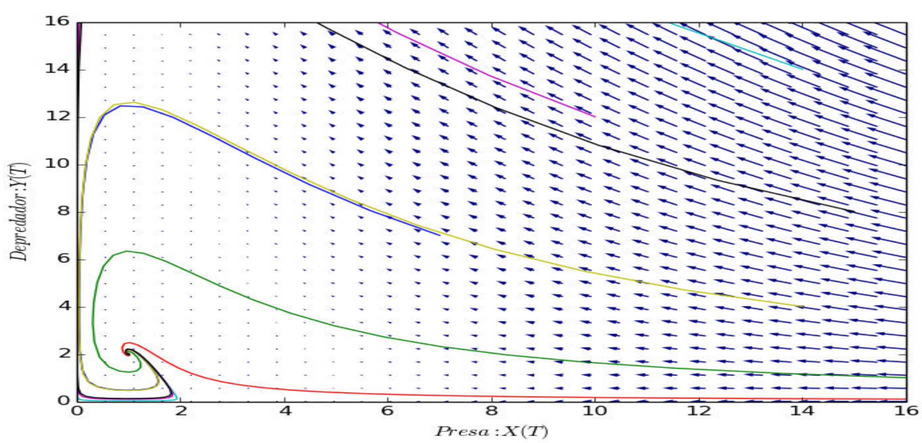
En este sistema se tendrán 3 puntos críticos: el origen, otro en interior de nuestro conjunto S y otro en el eje x positivo. Este último esta en la capacidad de carga de la presa $x(t)$, cuando $y(t)=0$. Este punto se encontrará entonces en (e,0), donde e es la capacidad de carga del ecosistema para la presa.

Si asignamos a las constantes los siguientes valores:
$a=4 \quad b=-1 \quad c=-2 \quad d=2 \quad e=-2$

Con ciertas condiciones iniciales que ejemplifiquen el comportamiento de las soluciones:

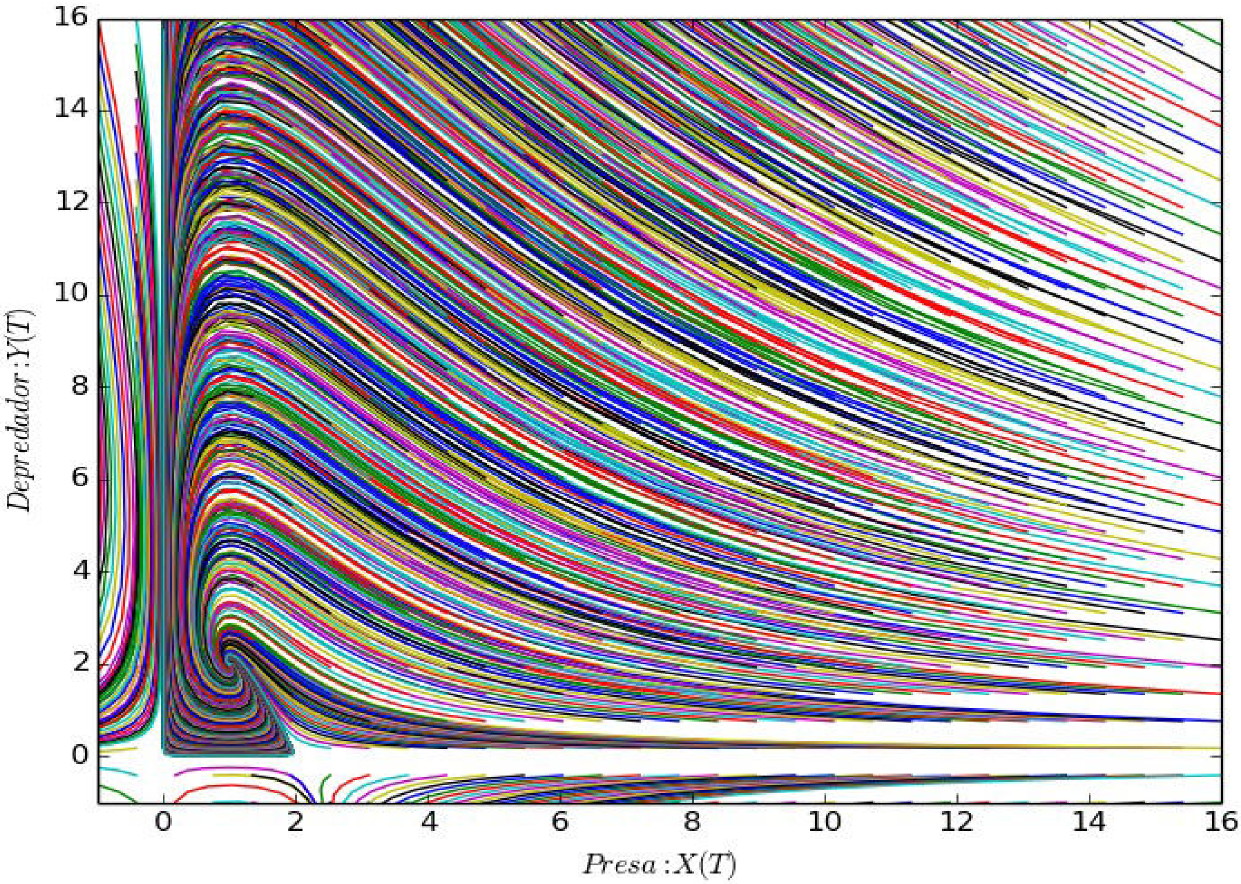
$x_0=7.0$, $y_0=7.0$
$x_0=16.0$, $y_0=1.0$
$x_0=16.0$, $y_0=0.1$
$x_0=14.0$, $y_0=14.0$
$x_0=10.0$, $y_0=12.0$
$x_0=14.0$, $y_0=4$
$x_0=15.0$, $y_0=8.0$

Comportamiento entre especies:



Gráfica 3. Presa vs. Depredador. Junto con el campo pendiente

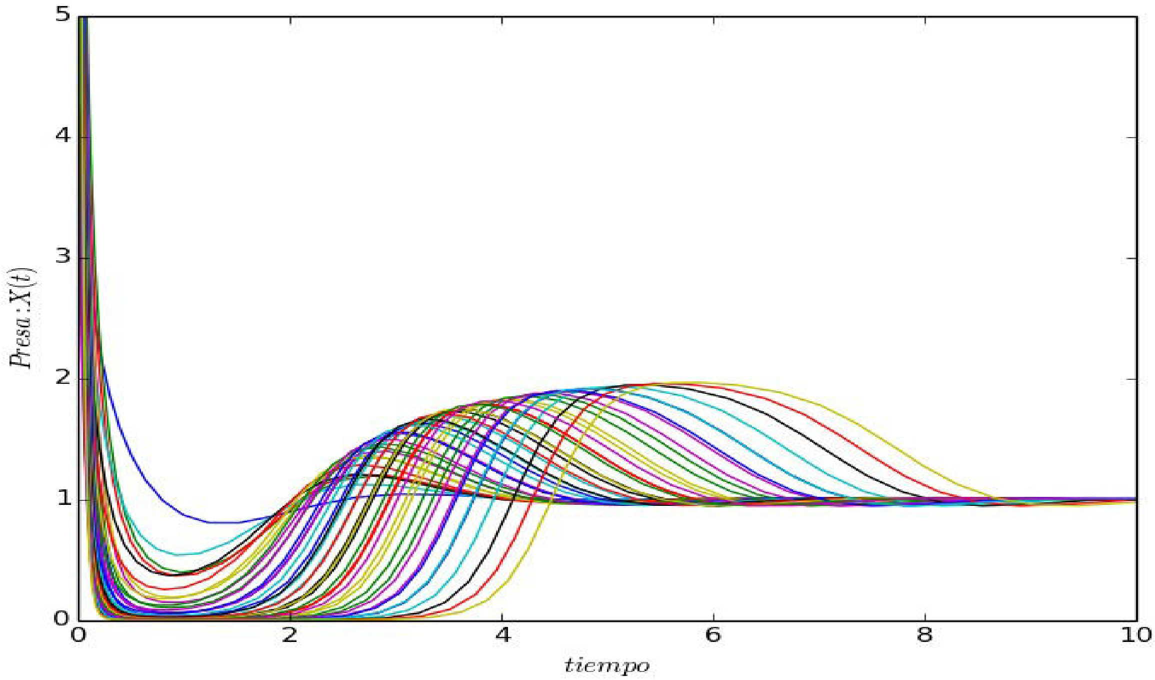
Ahora, si lo graficamos para muchas más soluciones podemos identificar los puntos críticos.



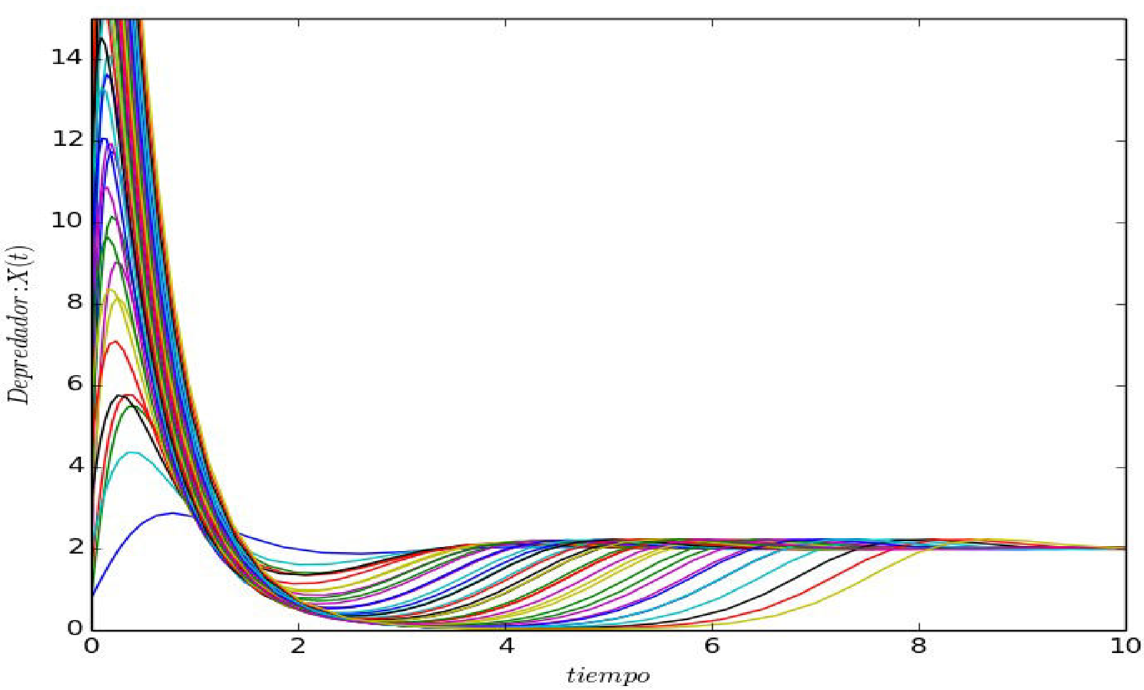
Gráfica 4. Presa vs. Depredador

En este plano fase se observa que hay un punto espiral asintóticamente estable en (1,2), y dos puntos silla en el (0,0) y (2,0), tal y como habíamos predicho.

Comportamiento en el tiempo:

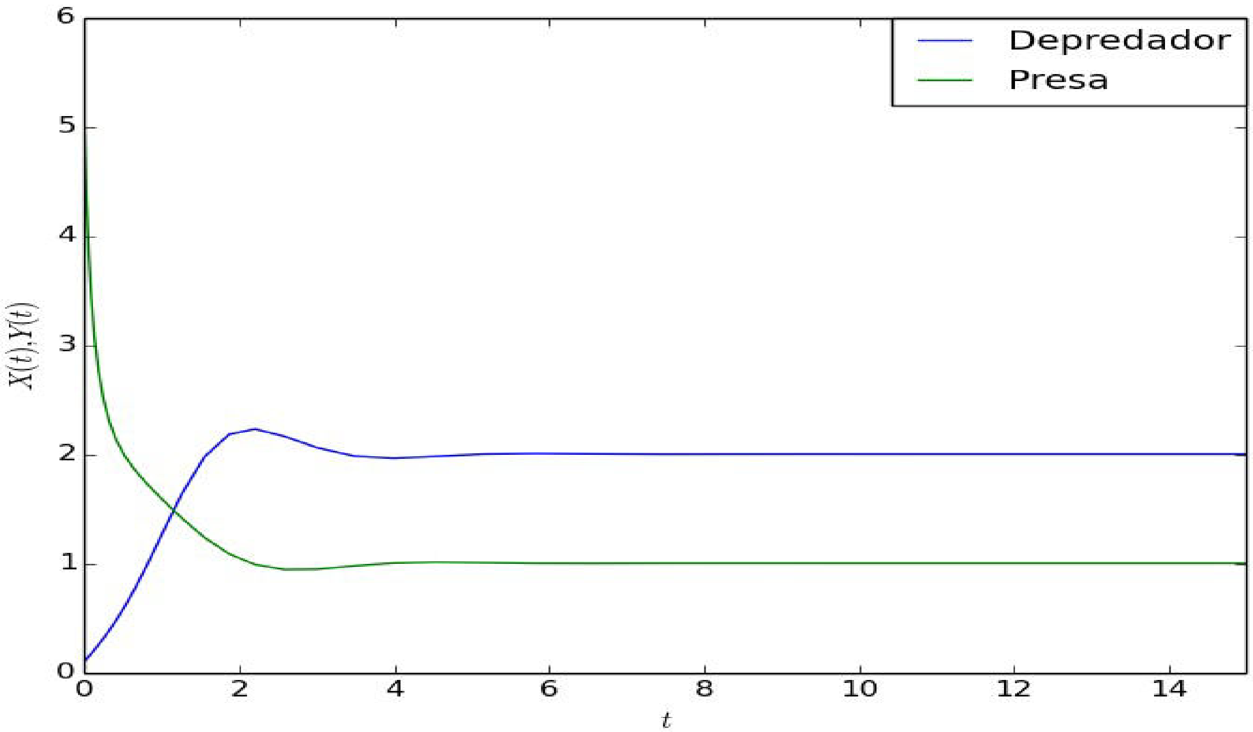


Gráfica 5. Presa vs. Tiempo



Gráfica 6. Depredador vs. Tiempo

Para ver el comportamiento simultaneo de la presa y el depredador a través del tiempo, los graficamos con las condiciones iniciales (0.1, 5)



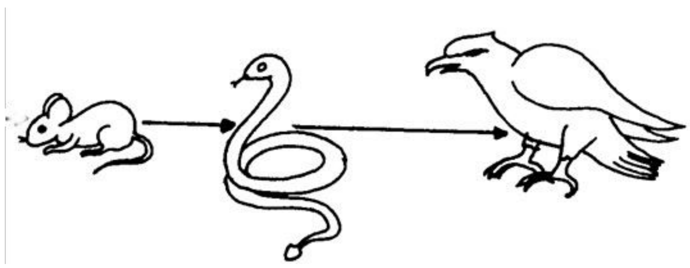
Gráfica 7. Presa y Depredador vs. Tiempo. Con condicion inicial x0=0.1, y0=5

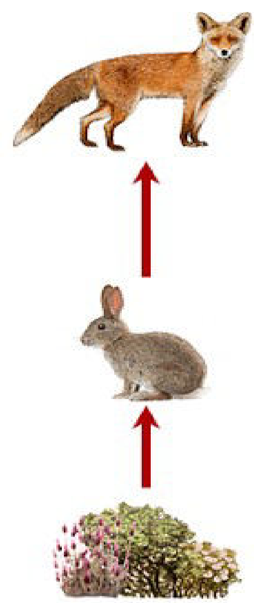
 Raquel Aguilar Márquez
Raúl Álvarez Mendoza

Tres especies

En este caso, queremos analizar una cadena alimenticia lineal con tres especies, siendo x la especie de nivel más bajo que es presa de la especie y de nivel medio, que, a su vez, es presa de la especie z, que es el depredador de mayor nivel.

Podemos pensar en casos como ratón - serpiente – búho, vegetación – liebre - lince, etc.





Tomando las ecuaciones:

$$\dot{x} = ax - bxy$$
$$\dot{y} = -cy + dyx - eyx$$
$$\dot{z} = -fz + gzy$$

Donde a,b,c,d,e,f,g>0 y donde solo nos interesan las soluciones en el conjunto

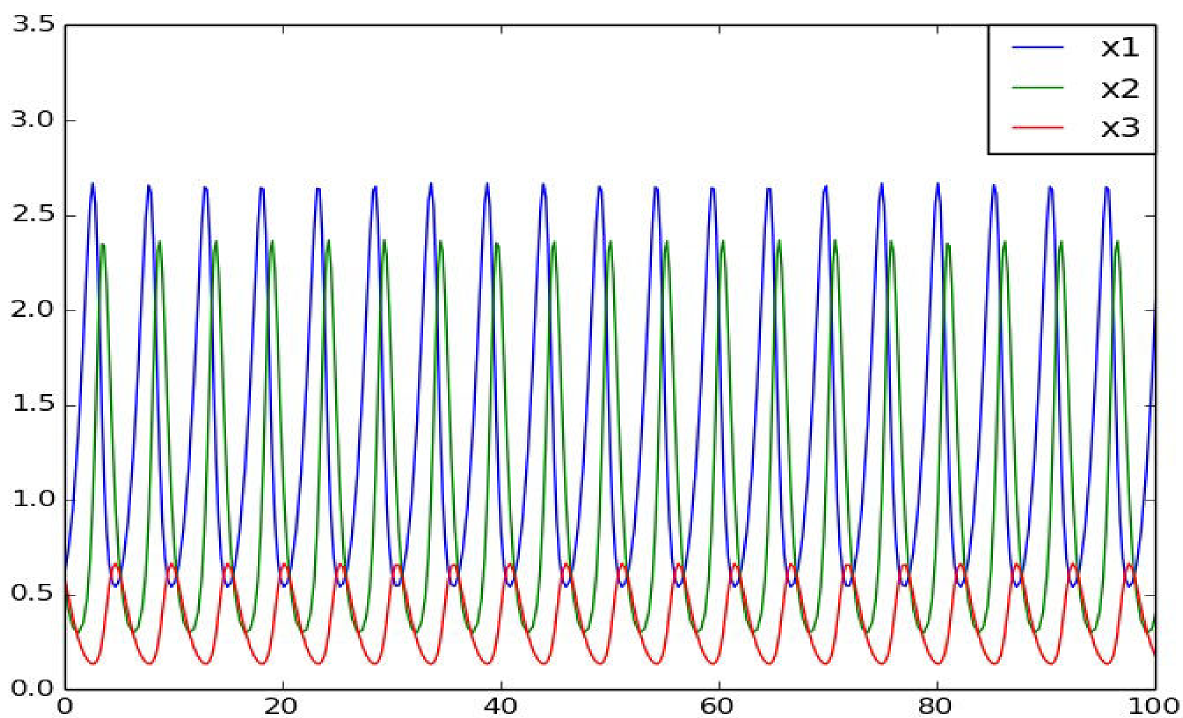
$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \| x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

Raquel Aguilar Márquez
Raúl Álvarez Mendoza

Dimos como valores para las constantes:
$a=1 \quad b=1 \quad c=1 \quad d=1 \quad e=1 \quad f=1 \quad g=1$

Dandon las condiciones iniciales:
$x_0=0.6$, $y_0=0.6$, $z_0=0.6$

Si se grafica el comportamiento de $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ en función del tiempo obtenemos:

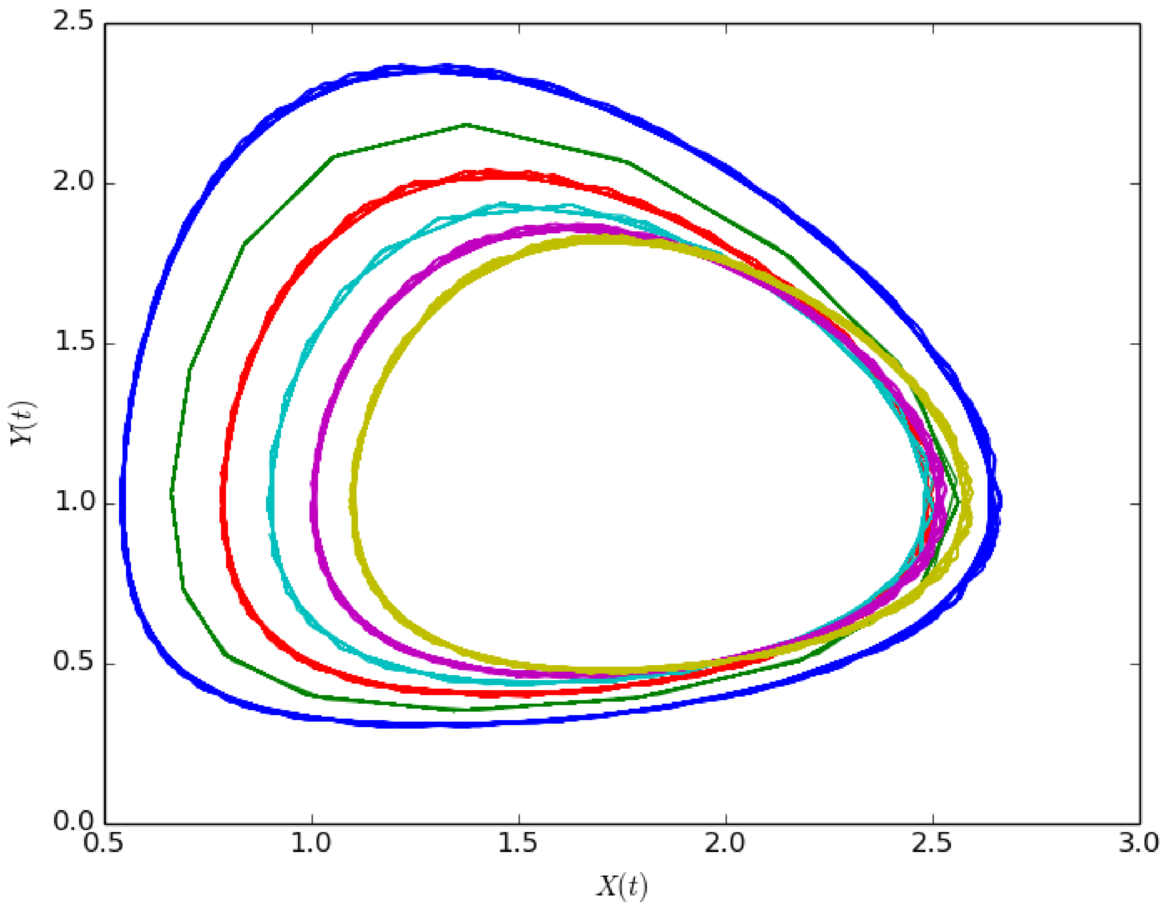


Gráfica 8. Especies vs. Tiempo. Con condiciones iniciales x0, y0, z0 = 0.6

Comportamiento entre especies:

Plano XY, con las siguientes condiciones iniciales:

$x_0 = 0.6 \quad , \quad y_0 = 0.6$
$x_0 = 0.7 \quad , \quad y_0 = 0.7$
$x_0 = 0.8 \quad , \quad y_0 = 0.8$
$x_0 = 0.9 \quad , \quad y_0 = 0.9$
$x_0 = 1 \quad , \quad y_0 = 1$
$x_0 = 1.1 \quad , \quad y_0 = 1.1$



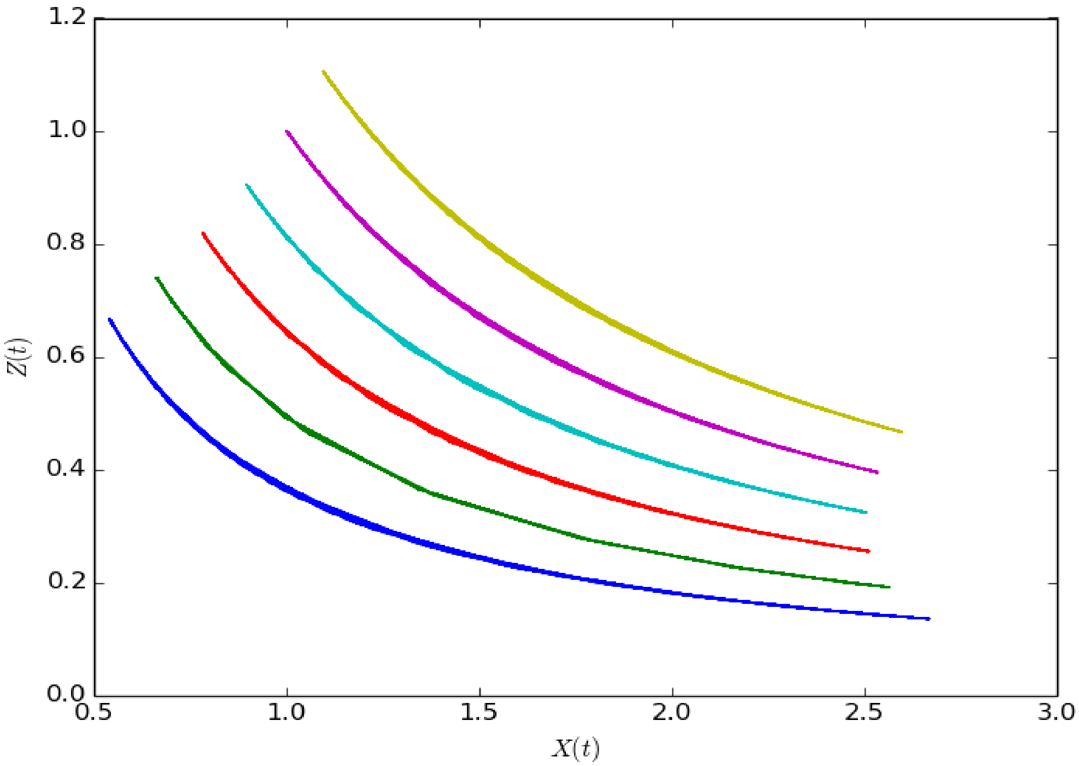
Gráfica 9. Presa x vs. Depredador y. Con 6 condiciones iniciales distintas.

Se puede observar que el comportamiento es similar al de dos especies.

Plano XZ, con las siguientes condiciones iniciales:

$x_0=0.6$, $z_0=0.6$
$x_0=0.7$, $z_0=0.7$
$x_0=0.8$, $z_0=0.8$

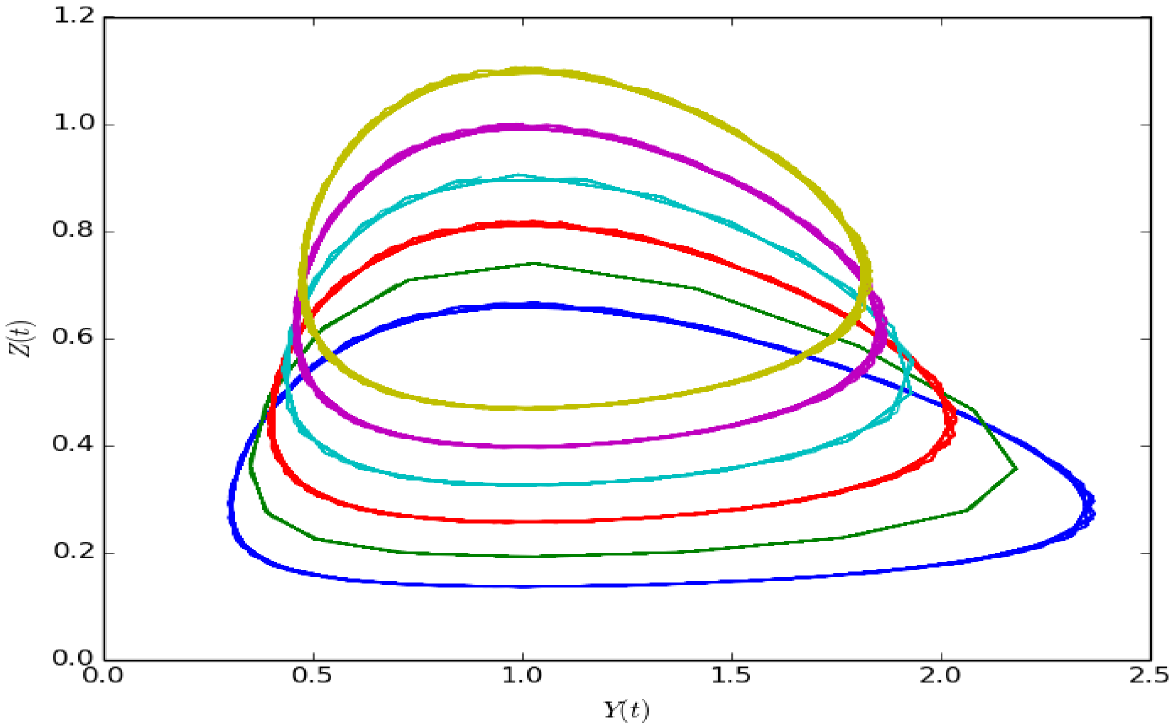
$x_0=0.9$, $z_0=0.9$
$x_0=1$, $z_0=1$
$x_0=1.1$, $z_0=1.1$



Gráfica 10. Presa x vs. Depredador z. Con 6 condiciones iniciales distintas.

Plano YZ, con las siguientes condiciones iniciales:

$y_0=0.6$, $z_0=0.6$
$y_0=0.7$, $z_0=0.7$
$y_0=0.8$, $z_0=0.8$
$y_0=0.9$, $z_0=0.9$
$y_0=1$, $z_0=1$
$y_0=1.1$, $z_0=1.1$



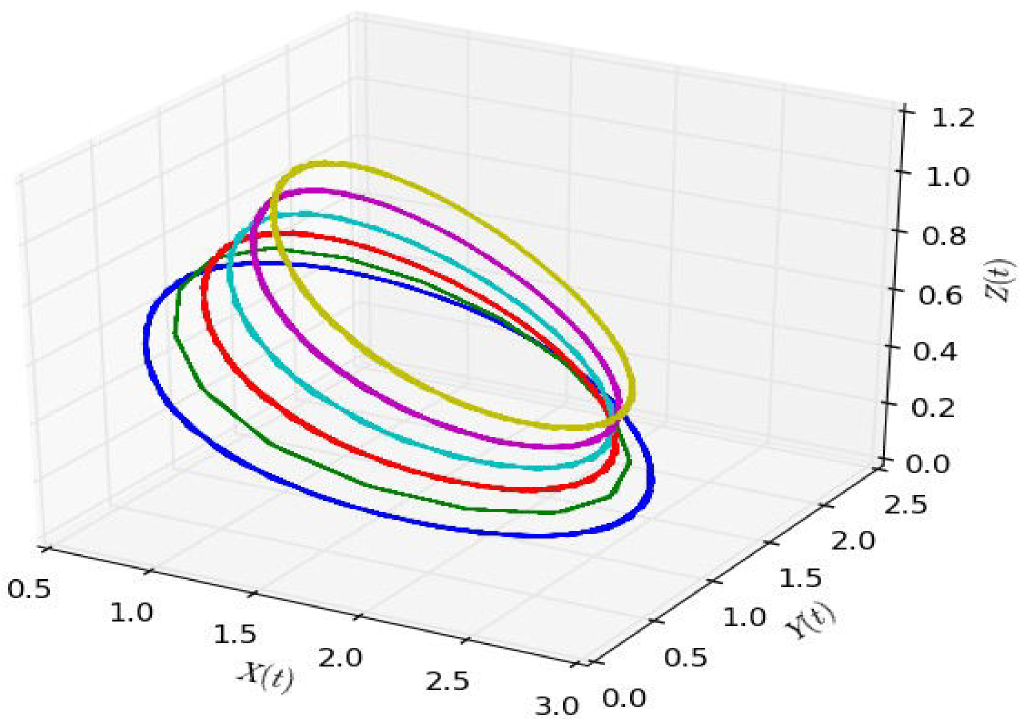
Gráfica 11. Depredador de alto nivel z vs. Depredador de medio nivel y. Con las mismas 6 condiciones iniciales.

Raquel Aguilar Márquez
Raúl Álvarez Mendoza

Dinámica de las tres especies.

Condiciones iniciales:

$$x_0=0.6 \quad , \quad y_0=0.6 \quad , \quad z_0=0.6$$
$$x_0=0.7 \quad , \quad y_0=0.7 \quad , \quad z_0=0.7$$
$$x_0=0.8 \quad , \quad y_0=0.8 \quad , \quad z_0=0.8$$
$$x_0=0.9 \quad , \quad y_0=0.9 \quad , \quad z_0=0.9$$
$$x_0=1 \quad , \quad y_0=1 \quad , \quad z_0=1$$
$$x_0=1.1 \quad , \quad y_0=1.1 \quad , \quad z_0=1.1$$



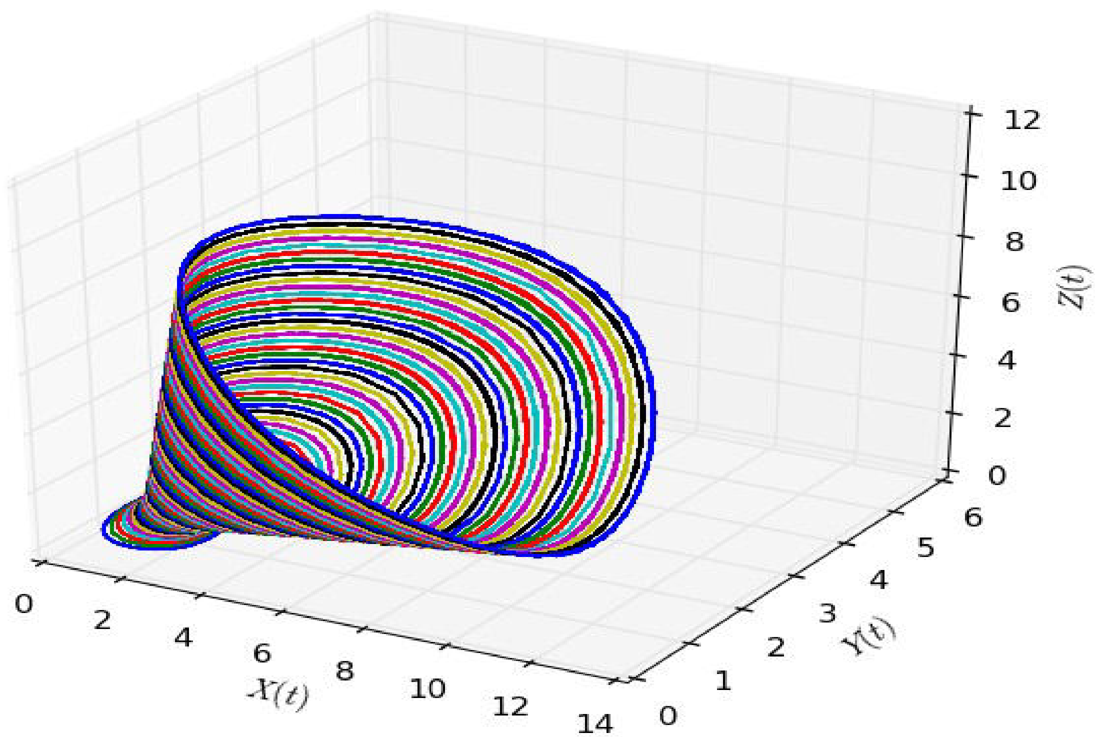
Gráfica 11. Dinámica de las tres especies

Se observa pues comportamiento periódico y orbitas cerradas, que nos recuerdan un poco al caso 2-D con las mismas constantes a,b,c,d,e=1,1,1,1,1, pero en esta ocasión también tenemos nuevas constantes f,g=1,1

Biológicamente, las tres especies persisten y tienen poblaciones que varían periódicamente con el tiempo con un período común.

Raquel Aguilar Márquez
Raúl Álvarez Mendoza

Para observar un comportamiento un poco más general, graficamos en varios puntos de la línea (0.5t,0.5t,0.5t) con t=1,...,50:



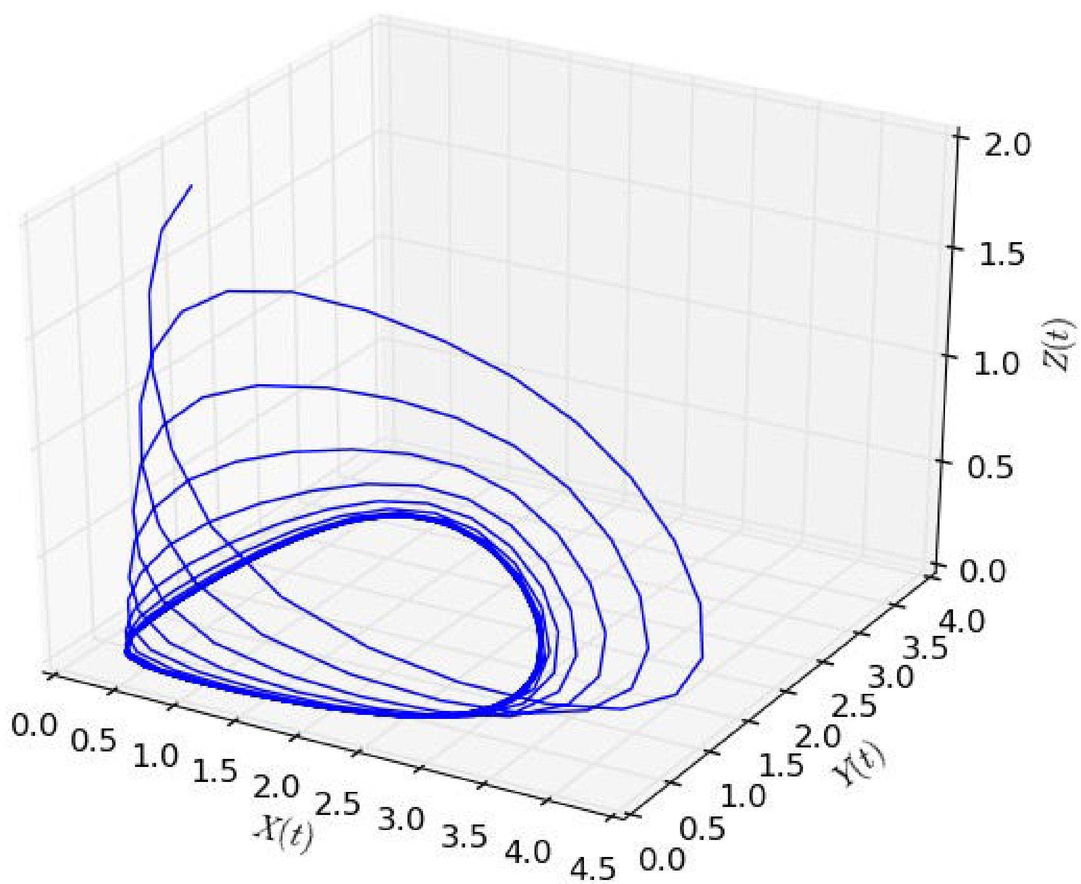
Gráfica 12. Dinámica de las tres especies con 50 diferentes condiciones iniciales.

Extinción de la especie z

El caso particular en el que asignamos los valores de las constantes de la siguiente manera:
$a=1 \quad b=1 \quad c=1 \quad d=1 \quad e=1 \quad f=1 \quad g=0.88$

Se presenta un comportamiento peculiar.

Tomando las condiciones iniciales:
$x_0=0.5 \quad , \quad y_0=1 \quad , \quad z_0=2$

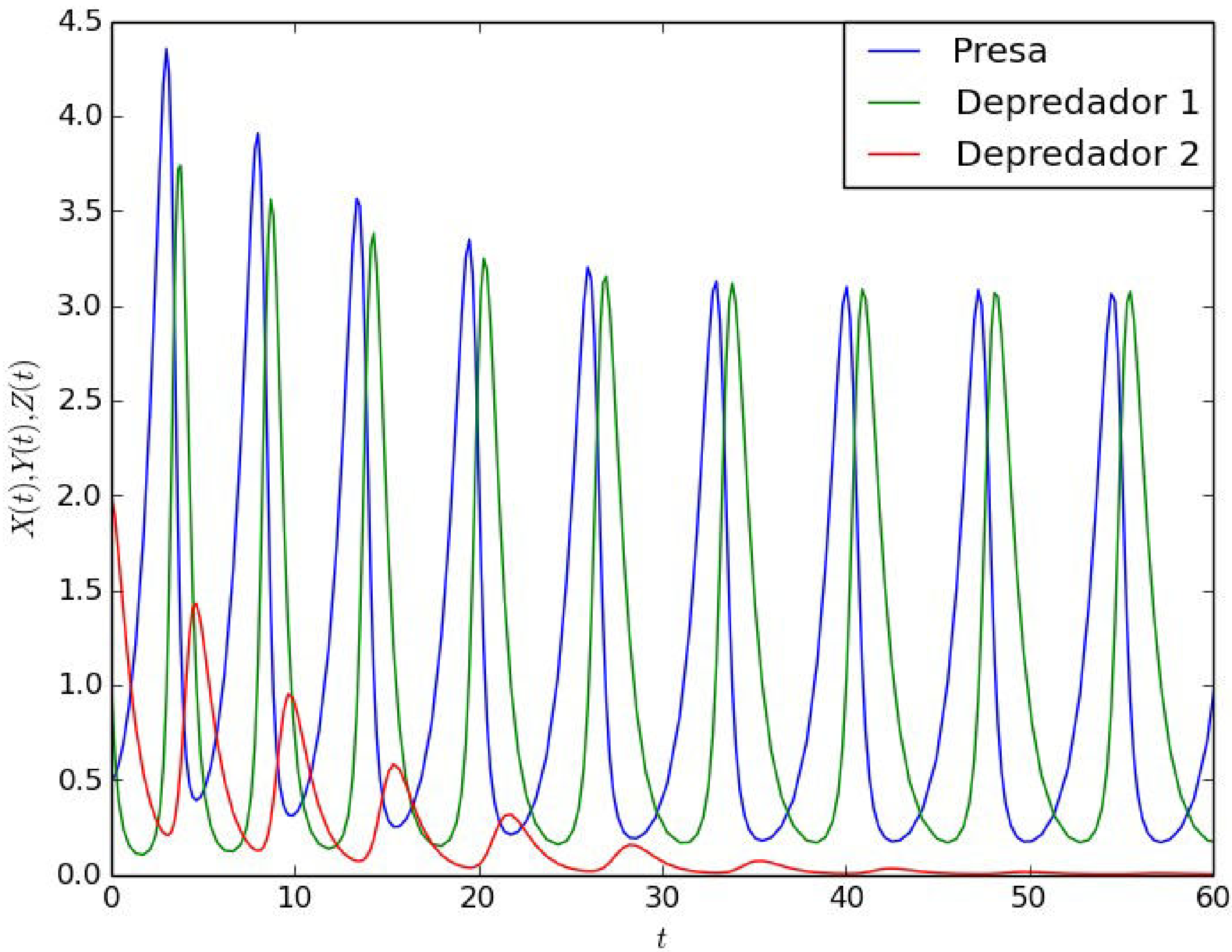


Gráfica 13. Dinámica de especies

Se puede ver en la gráfica que las soluciones tienen al plano $z=0$.
Biológicamente, esto implica que el depredador *z*, tiende a la extinción, mientras que las especies *x* e *y* tienden a exhibir comportamiento tradicional Lotka-Volterra periódico en ausencia de *z*.

Raquel Aguilar Márquez
Raúl Álvarez Mendoza

Se ve más clara la extinción de la especie *z* en la gráfica que muestra la evolución de las especies a través del tiempo.

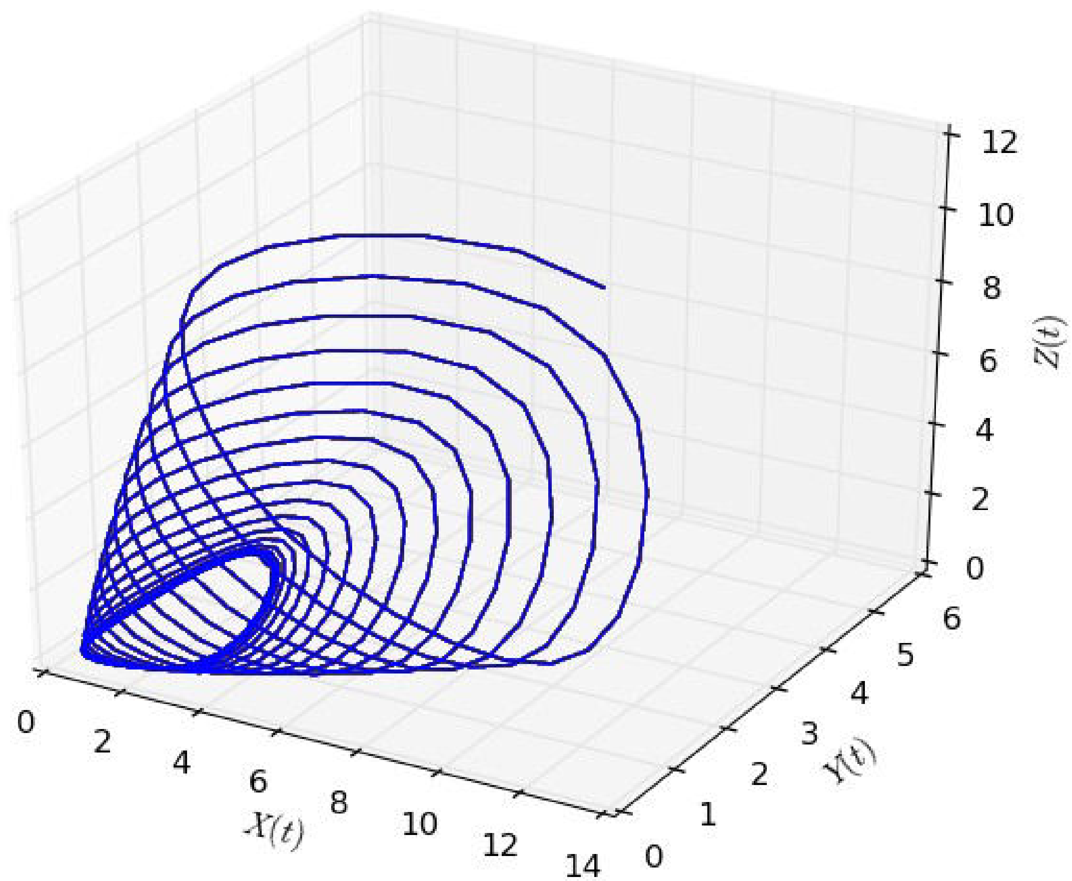


Gráfica 14. Especies vs. Tiempo

De manera general, este comportamiento se presenta cuando las constantes cumplen:

$$ga < fb$$

Si se grafica para un rango más amplio de condiciones iniciales de la forma (1+0.1t,1+0.1t,1+0.1t) con t=1,...,50 se obtiene la siguiente gráfica:



Gráfica 15. Dinámica de especies

Esto resulta ser bastante interesante, ya que a pesar de tener alimento disponible, la especie *z* termina extinguiéndose.

Población X y Y tienden a infinito

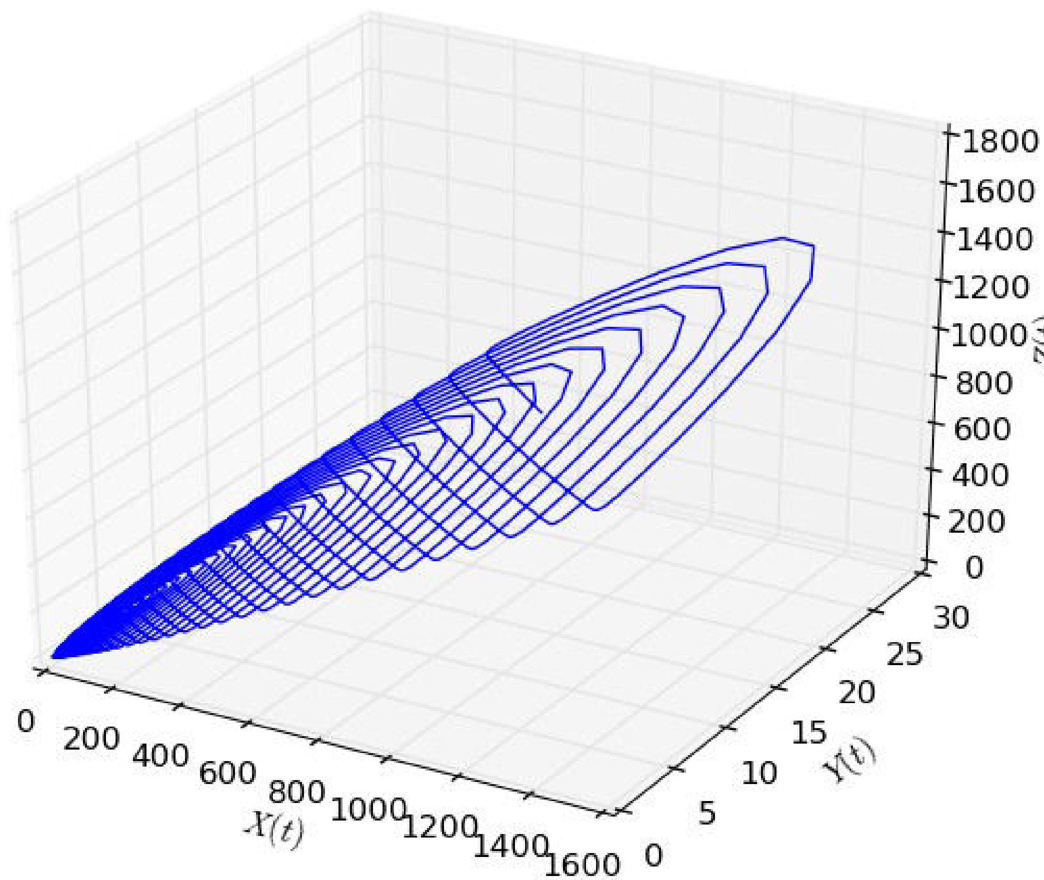
El caso particular en el que asignamos los valores de las constantes de la siguiente manera:

$a=1 \quad b=1 \quad c=1 \quad d=1 \quad e=1 \quad f=1 \quad g=1.6$

Se presenta un comportamiento peculiar.

Tomando las condiciones iniciales:

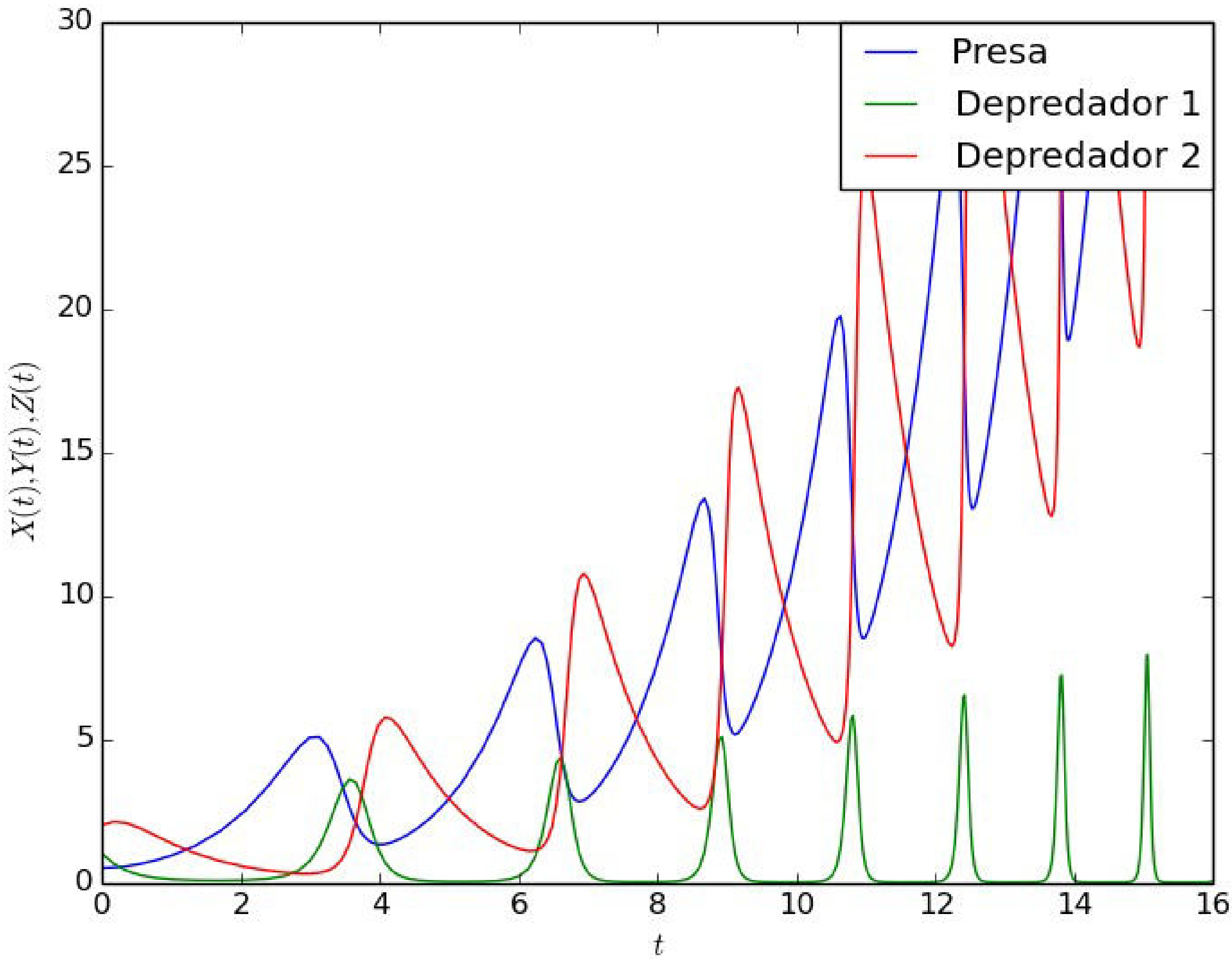
$x_0=0.5 \quad , \quad y_0=1 \quad , \quad z_0=2$



Gráfica 16. Dinámica de especies

Raquel Aguilar Márquez
Raúl Álvarez Mendoza

Comportamiento en el tiempo:



Gráfica 17. Especies vs. Tiempo

Esto implica que las poblaciones de la especie *x* y *z* tiende a + ∞, aunque no de forma monótona, mientras que la población de *y* con el tiempo experimenta fluctuaciones cada vez mayores.

De manera general, este comportamiento se presenta cuando las constantes cumplen:

$$ga > fb$$

Raquel Aguilar Márquez
Raúl Álvarez Mendoza

Conclusión

La persistencia global a largo plazo de la especie superior *z* depende únicamente de los parámetros a, b, f, y g. En particular, si $ag < fb$, entonces la especie *z* se extingue, mientras que si $ag \geq fb$, entonces la especie *z* sobrevive, creciendo sin límite en el caso $ag > fb$.

Esto coincide con nuestra intuición, ya que a mayores valores de a y g benefician explícitamente a la especie *z*, mientras que mayores valores de b y f inhiben a la especie *z*.

También se puede observar que los parámetros que tienen una mayor relación con la especie *y*, que son c, d, e, de ninguna manera afectan la extinción o supervivencia de la especie z. Es decir, la especie *y* solo actúa como un conducto entre la especie superior e inferior. Este modelo no permite la posibilidad de la extinción de la especie *y* mientras exista la especie *x*.

Raquel Aguilar Márquez
Raúl Álvarez Mendoza

Referencias:

Alan Hastings, *POPULATION BIOLOGY Concepts and Models*
Larry L. Rochwood, Introduction to *Population Ecology*, 2006
F. Brauer, C. Castillo-Chávez, Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology,

http://math.bd.psu.edu/~jpp4/mathmag243-255.pdf
https://www.cs.unm.edu/~forrest/classes/cs365/lectures/Lotka-Volterra.pdf