

# Mecânica e Campo Eletromagnético

2019/2020 – Introdução & parte 1

Luiz Pereira

luiz@ua.pt



## Tópicos

- **Informações Gerais: conteúdos e avaliação**
- **Cinemática de massas pontuais**
  - **Grandezas cinemáticas: generalização 3D**
  - **Posição e trajectória**
  - **Deslocamento e distância**
  - **Velocidade e aceleração**
  - **Equações do movimento obtidas a partir do cálculo**
    - Casos particulares de movimento rectilíneo
      - Uniforme, uniformemente acelerado e retardado
  - **Movimento de queda livre**
    - Movimento retilíneo com aceleração constante
  - **Exemplos de aplicação**

## Informação geral

- **Ano Académico:** 2019/2020
- **Curso:** Mestrado Integrado em Engenharia de Computadores e Telemática
- **Código da Unidade Curricular:** 47170
- **Ciclo / Ano / Semestre:** 1º / 2º / 1º
- **ECTS:** 8.0 (14 semanas, 215 horas): 70h Contato + 145 autónomas (10 h / semana)

## Avaliação contínua

- O tipo de avaliação pré-definida é a avaliação contínua.
- Os alunos que pretendam ser avaliados por avaliação final (1 único teste a realizar na época de exames, com um peso relativo de 100%) deverão inscrever-se ([paco.ua.pt](http://paco.ua.pt) até ao dia **27/09/2018**).
- Componente teórico-prática (TP), com um peso ( $P_{C_1}$ ) de **70 %**:
  - Assiduidade ( $Pe_A$ ) de **5%**.
    - 100% assiduidade (1,0 valor)
    - Superior a 80% das aulas dadas, (0,5 valores)
    - Inferior ou igual a 80% das aulas dadas (0,0 valores)

## Avaliação contínua

- Componente teórica-prática (TP), com um peso ( $P_{C1}$ ) de **70 %**:
  - Assiduidade ( $Pe_A$ ) de **5%**.
  - 4 momentos de avaliação, nas aulas TP, com recurso a *classroom response systems* (clickers/Kahoot), com um peso ( $Pe_{clickers}$ ) de **20 %**.
  - 3 momentos de avaliação, nas aulas PN, realizados em grupos de 4 alunos, com um peso ( $Pe_{PN}$ ) de **15%**.
  - Teste Final ( $Pe_T$ ) de **60%**
- Componente prática-laboratorial (PL), com um peso ( $P_{C2}$ ) de **30%**:
  - Trabalho 1.1 ( $Pe_{PL1,1} = 10\%$ ): realizado em grupo de três alunos, durante uma aula prática.
  - Trabalho 1.2 ( $Pe_{PL1,2} = 45\%$ ): realizado em grupo de três alunos, durante três aulas práticas.
  - Trabalho 2.1 ( $Pe_{PL2,1} = 45\%$ ): realizado em grupo de três alunos, durante quatro aulas práticas e apresentação oral.

## Planeamento – Aulas TP

Semana	Programa
16-20/Set	Apresentação da Unidade Curricular. <b>Capítulo 1.1.</b> Cinemática da partícula
23-27/Set	<b>Capítulo 1.2.</b> Dinâmica da partícula
30/Set-04/Out	<b>Capítulo 1.3.</b> Trabalho e Energia
07-11/Out	<b>Capítulo 1.4.</b> Dinâmica de um sistema de partículas <b>07/outubro, AC<sub>TP1</sub></b>
14-18/Out	
21-25/Out	<b>Capítulo 2.</b> Sistemas oscilatórios <b>21/outubro, AC<sub>TP2</sub></b>
28/Out-01/Nov	<b>Capítulo 3.1.</b> Campo elétrico
	<b>Capítulo 3.2</b> Potencial elétrico
04-08/Nov	<b>Capítulo 3.3.</b> Lei de Gauss
11-15/Nov	<b>Capítulo 3.4.</b> Capacidade e condensadores <b>11/novembro, AC<sub>TP3</sub></b>
18-22/Nov	<b>Capítulo 3.5</b> Corrente elétrica e resistência
25-29/Nov	<b>Capítulo 3.6</b> Campo magnético
	<b>Capítulo 3.6</b> Campo magnético
02-06/Dez	<b>Capítulo 3.7.</b> Indução eletromagnética <b>02/dezembro, AC<sub>TP4</sub></b>
09-13/Dez	<b>Capítulo 3.7.</b> Indução eletromagnética <b>Capítulo 3.8.</b> Equações de Maxwell
16-20/Dez	<b>Capítulo 3.8.</b> Equações de Maxwell <b>Teste final, 16/dezembro*</b>

\* Se devido às comemorações do Aniversário da UA as aulas forem suspensas, o teste realizar-se-á na aula TP seguinte.

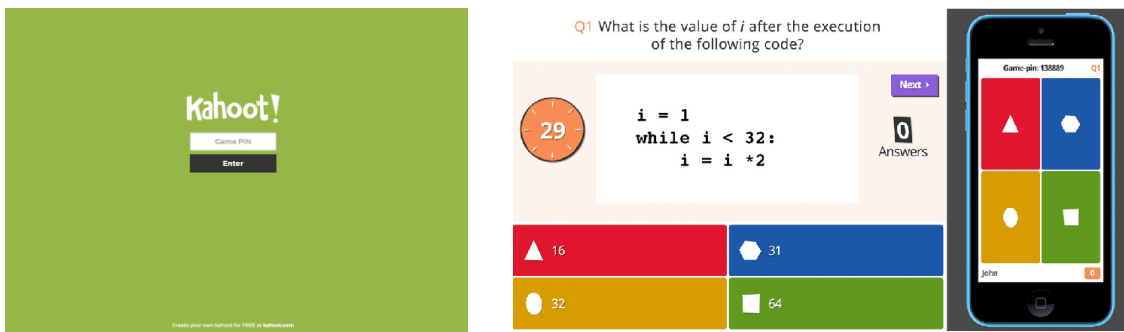
## Planeamento – Aulas PN/PL

Semana	3ª feira		4ª feira	5ª feira	6ª feira	
	PN2	PL3, PL4		PNR1	PN1, PNR2	PL1, PL2
16-20/Set	PN-P1			PN-P1		
23-27/Set		T1.1				T1.1
30/Set-04/Out	PN-P2+ AC <sub>PN1</sub>		Laboratório aberto 15h-17h	PN-P2+ AC <sub>PN1</sub>		
07-11/Out		T1.2				T1.2
14-18/Out		T1.2				T1.2
21-25/Out		T1.2				T1.2
28/Out-01/Nov	PN-P3			PN-P3	PN-P3 Feriado*	
04-08/Nov	PN-P4 AC <sub>PN2</sub>			PN-P4 AC <sub>PN2</sub>		
11-15/Nov	PN-P5			PN-P5		
18-22/Nov	PN-P6 AC <sub>PN3</sub>			PN-P6 AC <sub>PN3</sub>		
25-29/Nov		T2.2	Laboratório aberto 15h-17h			T2.2
02-06/Dez		T2.2				T2.2
09-13/Dez		T2.2				T2.2
16-20/Dez		Apresentação oral (T2.2)				Apresentação oral (T2.2)

## Planeamento – Aulas OT

semana	Objetivos*	3ª feira (18:30 h)	5ª feira (10:30 h)
		OT1	OT2
16-20/Set	<b>Preparação aula PL</b>	T1.1. Dinâmica de translação	
23-27/Set	<b>Consolidação aula TP</b>	Cap. 1.1	
30/Set-04/Out	<b>Preparação aula PL</b>	T1.2. Movimento de projéteis	
07-11/Out			
14-18/Out			
21-25/Out			
28/Out-01/Nov	<b>Consolidação aula TP</b>	Cap. 1.2-1.4	
04-08/Nov		Cap. 2	
11-15/Nov		Cap.3.1- 3.2	
18-22/Nov		Cap.3.3	
25-29/Nov	<b>Preparação aula PL</b>	T2.1. Campo magnético: Bobinas de Helmholtz	
02-06/Dez			
09-13/Dez	<b>Consolidação aula TP</b>	Cap.3.4-3.6	
16-20/Dez		Cap.3.7-3.8	

## Kahoot



- Utilizado em 4 momentos de avaliação nas aulas TP (3 – 5 questões).
- Aceder com dispositivo móvel: <https://kahoot.it>.
- Registar com nº mecanográfico.
- Responder opção múltipla. Cada resposta errada, desconta 1/3.
- Tempo de resposta limitado.
  - Resposta fora do tempo ou ausência de resposta equivale a classificação nula.

## Programa

- **Capítulo 1. Fundamentos de Mecânica Clássica**
  - **1.1 Cinemática da partícula (3,0 h)**
  - Posição e trajetória. Deslocamento e distância. Velocidade instantânea e média. Aceleração instantânea e média. Aplicações 1-D: queda livre. Aplicações 2-D: projétil e movimento circular. Aplicações 3-D: movimento curvilíneo geral.
  - **1.2 Dinâmica da partícula (3,0 h)**
  - Conceito de força. Leis de Newton. Forças de contacto e ligação. Tensões e outras ligações.
  - Força de atrito. Força elástica.
  - **1.3. Trabalho e Energia (3,0 h)**
  - Trabalho realizado por uma força constante e variável. Energia cinética e teorema do trabalho. Potência. Forças conservativas e forças não conservativas. Energia potencial. Conservação da Energia.
  - **1.4 Dinâmica de um sistema de partículas (6,0 h)**
  - Momento linear do sistema. Conservação do Momento linear. Centro de massa. Colisões. Cinemática e energia cinética de rotação. Momento de inércia. Momento de uma força. Dinâmica de rotação. Momento angular.
- **Capítulo 2: Sistemas oscilatórios (3,0 h)**
  - Oscilador harmónico simples. Oscilador harmónico amortecido. Oscilador harmónico forçado: Ressonância. Oscilações acopladas.

## Programa (continuação)

### • Capítulo 3: Campos elétrico e magnético

- **3.1 Campo elétrico (2,0 h)**
  - Propriedades das cargas elétricas. Isoladores e condutores. Lei de Coulomb. Campo elétrico.
- **3.2 Potencial elétrico (1,0 h)**
  - Diferença de potencial. Potencial elétrico. Energia potencial. Cálculo do campo elétrico, a partir do potencial elétrico.
- **3.3 Lei de Gauss (3,0 h)**
  - Lei de Gauss. Aplicações da Lei de Gauss. Condutores em equilíbrio eletrostático.
- **3.4 Capacidade e condensadores (3,0 h)**
  - Capacidade de um condensador. Combinação de condensadores. Energia armazenada num condensador.
- **3.5 Corrente elétrica e resistência (2,0 h)**
  - Corrente elétrica. Resistência e a Lei de Ohm. Energia e potência elétricas. Combinação de resistências. Leis de Kirchhoff.
- **3.6 Campo magnético (4,0 h)**
  - Campo magnético. Força magnética. Lei de Biot-Savat. Lei de Ampère.
- **3.7 Indução eletromagnética (4,0 h)**
  - Lei de Faraday. Lei de Lenz. Auto-indutância. Indutância mútua.
- **3.8 Equações de Maxwell (1,5 h)**
  - Conceitos gerais sobre as equações de Maxwell.

## Laboratório

### Prática laboratorial (PL)

#### *Trabalhos práticos.*

#### **Série 1. Mecânica (4 aulas)**

- 1.1. Dinâmica de translação (1 aulas)
- 1.2. Movimento de projéteis (3 aulas)

#### **Série 2. Campo eletromagnético (3 aulas)**

- 2.1. Campo Magnético; bobinas de Helmholtz

**O laboratório das aulas PL estará em regime aberto, durante o período em que decorrem os trabalhos 1.2 e 2.1. Os alunos deverão contactar o Mestre David Furtado, na sala 13.2.26, às quartas-feiras, 15-17 h.**

## Laboratório (continuação)

- Os alunos deverão trazer para cada aula material de escrita, máquina de calcular científica ou gráfica e computador (facultativo e, no máximo, um por grupo).
- As aulas decorrerão em grupos de 3 alunos. Cada grupo deverá, previamente a cada aula, preparar o trabalho de acordo com o objetivo de cada aula. Deverão recorrer às aulas OT e aos laboratórios abertos.
- No final de cada aula, será obrigatoriamente entregue um relatório sumário das tarefas executadas. Um aluno de cada grupo ficará responsável (**aluno coordenador**) pela entrega deste relatório 2 vezes no semestre. O aluno responsável deverá organizar o trabalho em equipa, de forma a garantir a sua entrega no final da aula.
- O docente discutirá com cada grupo o relatório entregue, na aula seguinte à data de entrega.

## Laboratório (continuação)

- O **relatório sumário** deverá ter a seguinte estrutura:
  - Identificação dos autores e do trabalho.
  - Resumo (1 parágrafo). Objetivos. Metodologia. Indicação sobre o valor do parâmetro e respetivo erro. Informação sobre precisão e exatidão. Identificar os objetivos atingidos.
  - Introdução. Deverão ser incluídos apenas aspetos relevantes para a análise e discussão das medidas experimentais (não deverá ser incluída informação idêntica àquela dos guiões). Enquadramento do trabalho no contexto dos conteúdos lecionados na componente TP.
  - Análise e discussão. Apresentação dos cálculos efetuados (incluindo a análise dos erros) e a sua discussão.
  - Conclusões. Identificação dos objetivos atingidos e dos problemas encontrados (estratégias de mitigação).
  - Contribuição individual, Indicação clara e objetiva da contribuição de cada elemento de grupo na fase de preparação do trabalho, execução experimental e escrita do relatório. Indicação sobre o nome do aluno coordenador, nesta aula.
  - Anexos: tabelas com todos os dados experimentais.

## Laboratório (continuação)

- **Trabalho 1.1** (1 aula, 10 % classificação)
- Os alunos deverão preparar o trabalho, de acordo com o guião disponibilizado em *elearning.ua.pt*.
- A divisão das tarefas deverá assegurar a entrega do relatório sumário, no final da aula.
- **Trabalho 1.2** (3 aulas, 45 % classificação)
- Os alunos deverão preparar o trabalho, de acordo com o guião disponibilizado em *elearning.ua.pt*.
- A divisão das tarefas deverá assegurar, a entrega do relatório sumário, no final de cada aula. O relatório completo deverá ser entregue no final da terceira aula.
- **Trabalho 2.1** (4 aulas, 45 % classificação)
- Os alunos deverão preparar o trabalho, de acordo com o guião disponibilizado em *elearning.ua.pt*.
- A divisão das tarefas deverá assegurar, a entrega do relatório sumário, no final da terceira aula.
- Apresentação oral (quarta aula) em suporte visual com a duração de 9 minutos, distribuídos pelos 3 alunos. Seguir-se-ão 6 minutos de questões colocadas pelo docente a cada aluno individualmente.

## Bibliografia

- R.A. Serway - Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics, Saunders Golden Sunburst Series.
- P.A. Tipler e G. Mosca - Física, Vol I, 5ª ed, Livros técnicos e Científicos Editora, S.A, Rio de Janeiro, 2006.
- Alonso & Finn- Física um curso universitário, Vol I e II, Edgard Bluecher.
- C. Kittel *et al.*- Curso de Física de Berkeley : Mecânica, Vol 1, Edgard Bluecher.
- H.J. Pain, The physics of Vibrations and Waves, Ed. Wiley.
- R. Resnick e D. Halliday - Física, 4ª ed, Livros Técnicos e Científicos Editora.
- R. Kip, Fundamentals of Electricity and Magnetism, McGraw Hill.



A **Mecânica** é a ciência do movimento. Consiste num conjunto de regras e princípios que se aplicam a todos os tipos de movimento.

Para a análise e previsão dos movimentos, resultantes de interações conhecidas, foram criados conceitos importantes, como:

- Quantidade de movimento
- Força
- Energia

No entanto, o princípio da descrição do movimento baseia-se na cinemática...

## Cinemática

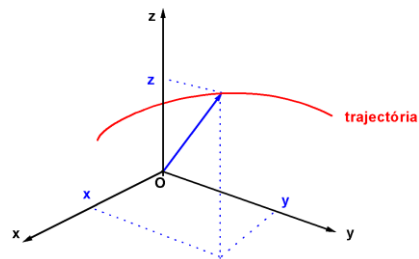
- **Objetivo: descrever o movimento independentemente das causas que o provocam**
  - Reconhecer a diferença entre **posição**, **espaço** e **deslocamento**
  - Reconhecer a diferença entre **velocidade** e **aceleração**
  - Identificar movimento **acelerado** e **retardado**
  - Ser capaz de determinar o **deslocamento**, **velocidade** e **aceleração usando equações do movimento**
  - Interpretar gráficos **posição vs tempo**, **velocidade vs t** e **aceleração vs t**

## Estado de Movimento

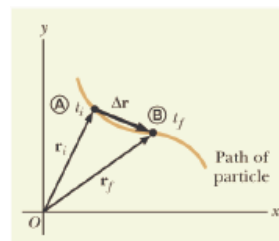
- **Referencial** em relação ao qual o movimento é analisado
- **Vetor posição**: fornece a posição da partícula em qualquer instante  $[t, \vec{r}(t)]$

## Posição e Trajetória

- Trajetória – lugar geométrico dos pontos ocupados por um ponto material (partícula) P ao longo do tempo (Ex. **2D**)
- Deslocamento – grandeza vetorial, variação na posição,



$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i$$



## Posição e Trajetória (ex. 3D)

- Sistema de coordenadas cartesianas: posição de uma massa pontual M relativamente à origem

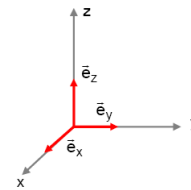
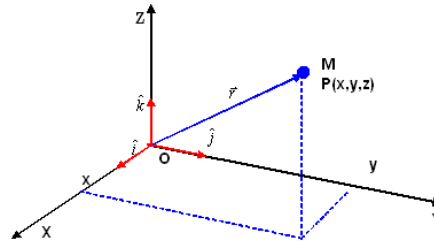
- Posição

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

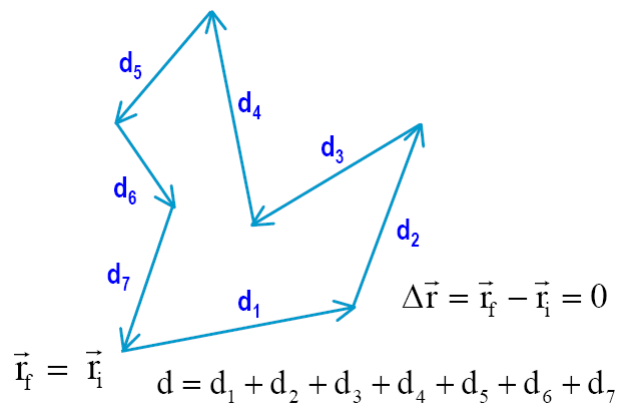
$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

- Vetores unitários: versores

$$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$$



## Deslocamento (r) e distância percorrida (d)



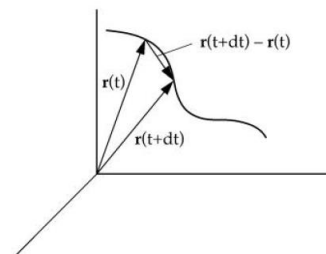
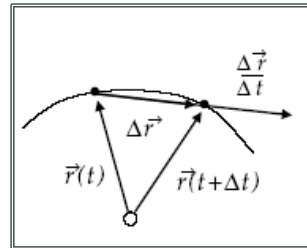
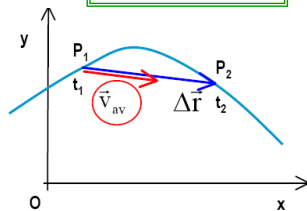
## Velocidade

### • Velocidade média

[L]/[T]

m/s

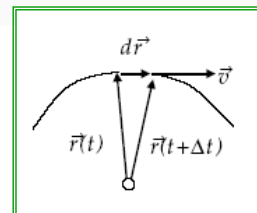
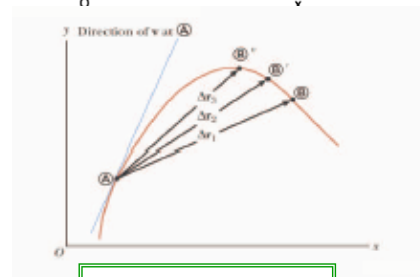
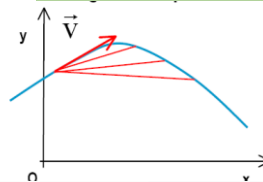
$$\vec{v}_{\text{méd}} = \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t}$$



## Velocidade

### • Velocidade instantânea

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \\ \vec{v}(t) &= \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \\ &= v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k} \\ v &= |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\end{aligned}$$



## Posição, obtida pelo cálculo integral

- Dado que  $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$
- Então

$$\vec{r}(t) = \int_{t_0}^t \vec{v}'(t') dt' + \vec{r}(t_0)$$

$$\vec{r}(t) = \left[ \int_{t_0}^t v_x(t') dt' + x(t_0) \right] \hat{i} + \left[ \int_{t_0}^t v_y(t') dt' + y(t_0) \right] \hat{j} + \left[ \int_{t_0}^t v_z(t') dt' + z(t_0) \right] \hat{k}$$

$$\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) = \int_{t_0}^t \vec{v}'(t') dt'$$

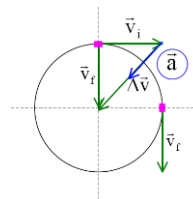
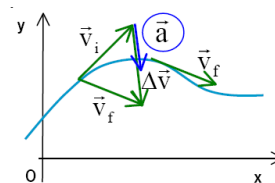
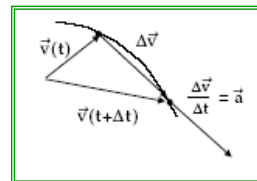
## Aceleração

- Aceleração média

$$[L]/[T]^2$$

$$m/s^2$$

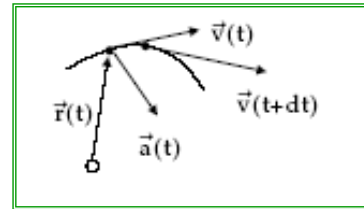
$$\vec{a}_{méd} = \frac{\Delta \vec{v}(t)}{\Delta t}$$



## Aceleração

- **Aceleração instantânea**

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}(t)}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \\ \vec{a}(t) &= \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} (v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}) \\ &= a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k} \\ a &= |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\end{aligned}$$



$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2}$$

## Velocidade, obtida pelo cálculo integral

- Dado que

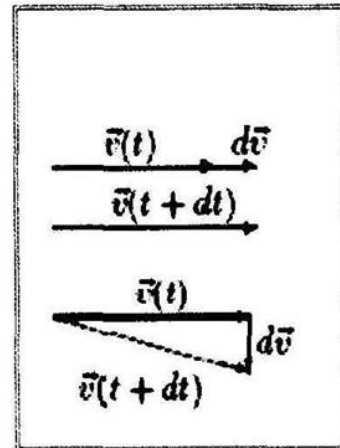
$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

- Então

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \int_{t_0}^t \vec{a}'(t') dt' + \vec{v}(t_0) \\ \vec{v}(t) &= \left[ \int_{t_0}^t a_x(t') dt' + v_x(t_0) \right] \hat{i} + \left[ \int_{t_0}^t a_y(t') dt' + v_y(t_0) \right] \hat{j} + \left[ \int_{t_0}^t a_z(t') dt' + v_z(t_0) \right] \hat{k} \\ \vec{v}(t) - \vec{v}(t_0) &= \int_{t_0}^t \vec{a}'(t') dt'\end{aligned}$$

## Aceleração

- Traduz a variação do vetor velocidade por intervalo de tempo
- Não tem que ter o sentido do movimento



## Velocidade e Aceleração

- **Ex. 1D**
- **MRU**
- **MRUA**
- **MRUR**



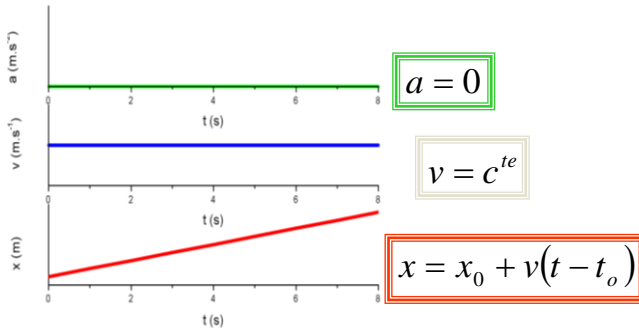
## Casos particulares de movimento a 1D (retilíneo)

$$\text{Ex.: } \vec{v}(t) = v(t)\hat{i}$$

1) **Uniforme ( $v=c^{te}$ )**

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$\begin{aligned} x(t) - x(t_0) &= \int_{t_0}^t v(t') dt' \\ x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t v(t') dt' \\ x(t) &= x_0 + v \int_{t_0}^t dt' \\ x(t) &= x_0 + v(t - t_0) \end{aligned}$$



$$a = 0$$

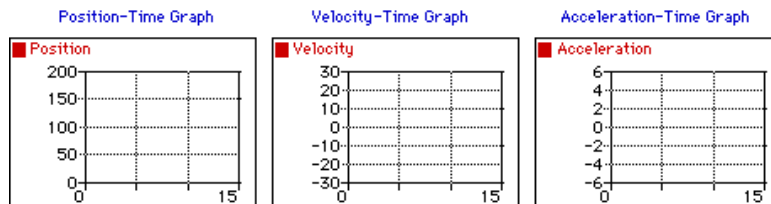
$$v = c^{te}$$

$$x = x_0 + v(t - t_0)$$

## Casos particulares de movimento a 1D (retilíneo)

• **Uniforme ( $v=c^{te}$ )**

<http://www.PhysicsClassroom.com>

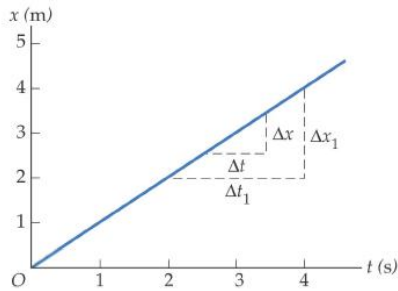


Valores arbitrários  
e não correlacionados

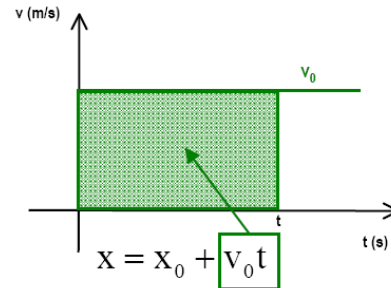


## Casos particulares de movimento a 1D (retilíneo)

### • Uniforme ( $v=c^{te}$ )



Cálculo de  $v$



## Casos particulares de movimento a 1D (retilíneo)

### 2) Uniformemente variado ( $a = c^{te}$ ): acelerado ou retardado

$$Ex.: \vec{a}(t) = a(t)\hat{i}$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$$

$$\begin{aligned} v(t) - v(t_0) &= \int_{t_0}^t a(t') dt' \\ v(t) &= v_0 + \int_{t_0}^t a(t') dt' \\ v(t) &= v_0 + a \int_{t_0}^t dt' \\ v(t) &= v_0 + a(t - t_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(t) - x(t_0) &= \int_{t_0}^t v(t') dt' \\ x(t) - x(t_0) &= \int_{t_0}^t [v_0 + a(t' - t_0)] dt' \\ x(t) - x(t_0) &= v_0 \int_{t_0}^t dt' + a \int_{t_0}^t (t' - t_0) dt' \\ x(t) &= x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}(t - t_0)^2 \end{aligned}$$

## Casos particulares de movimento a 1D (retilíneo)

- **Uniformemente variado ( $a = c^{te}$ ): acelerado ou retardado**

Eliminando  $t$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ v = \frac{dx}{dt} = v_0 + at \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v = v_0 + at \Rightarrow t = \frac{v - v_0}{a} \\ \text{substituindo em } x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \end{array} \right.$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

## Casos particulares de movimento a 1D (retilíneo)

- **Uniformemente variado ( $a = c^{te}$ ): acelerado (retardado)**

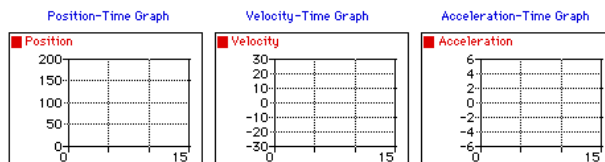
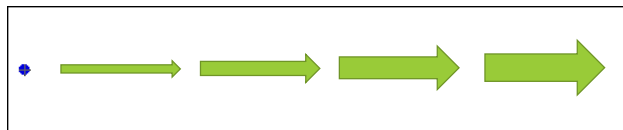
$$a = c^{te}$$

$$v(t) = v_0 + a(t - t_0)$$

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a(t - t_0)^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

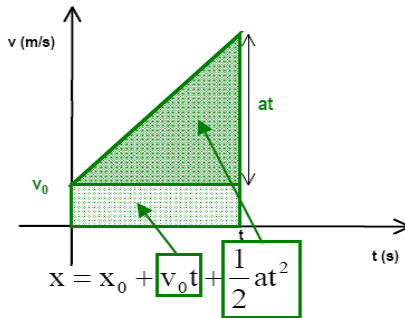
<http://www.PhysicsClassroom.com>



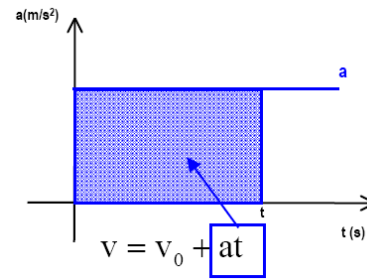
Valores  
arbitrários  
e não  
correlacionados

## Casos particulares de movimento a 1D (retilíneo)

- **Uniformemente variado ( $a = c^{te}$ ): acelerado**



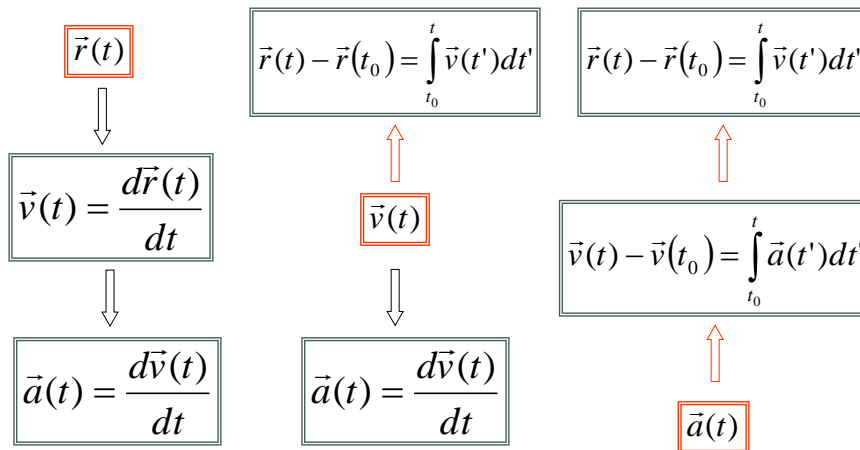
Cálculo de  $x - x_0$



Cálculo de  $v - v_0$

## Cinemática 3D (equações cinemáticas)

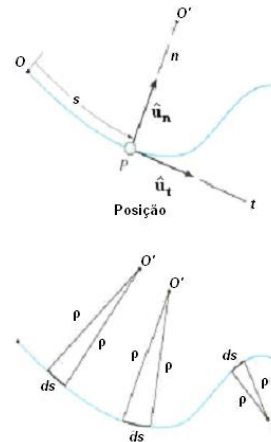
Genericamente



## Movimento curvilíneo geral

### Componentes tangencial e normal

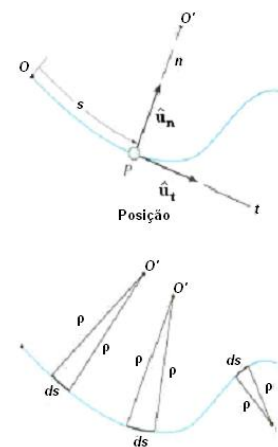
- Quando uma partícula se movimenta ao longo de uma trajetória curvilínea por vezes é conveniente descrever o movimento usando sistemas de coordenadas distintas das cartesianas.
- Quando a trajetória do movimento é conhecida são frequentemente utilizadas as coordenadas nas direções tangente,  $\mathbf{t}$ , e normal,  $\mathbf{n}$ , à trajetória
- O referencial pode ser entendido como um sistema de eixos perpendiculares acoplados ao movimento da partícula:
  - $\mathbf{t}$  – sempre na direção do movimento
  - $\mathbf{n}$  – perpendicular ao 1º e sempre dirigido para o centro de curvatura



## Movimento curvilíneo geral

### Componentes tangencial e normal

- O centro de curvatura  $O'$  localiza-se sempre do lado côncavo da trajetória; o raio de curvatura  $\rho$  é definido como a distância, medida na perpendicular, da curva ao centro de curvatura num dado ponto.
- A posição da partícula, em qualquer instante, pode ser descrita por uma só coordenada medida sobre a curva a partir de uma origem fixa, igual ao comprimento do arco,  $s(\mathbf{t})$ .



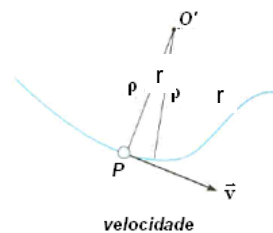
Versores unitários  $\hat{\mathbf{u}}_t, \hat{\mathbf{u}}_n$

## Movimento curvilíneo geral

### Componentes tangencial e normal

- A velocidade da partícula tangente à trajetória em qualquer instante será:

$$\vec{v}(t) = \frac{ds}{dt} \hat{u}_t = v \hat{u}_t$$



## Movimento curvilíneo geral

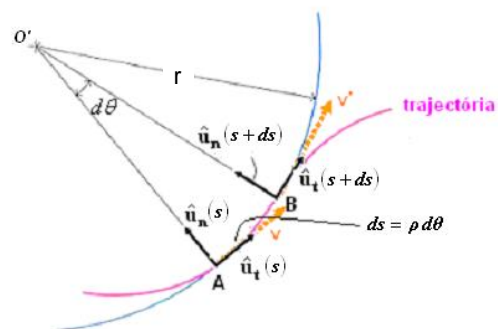
### Componentes tangencial e normal

- Num dado intervalo de tempo  $dt$  a partícula movimenta-se de **A** para **B**
- O incremento da variável da trajetória **s** corresponde a

$$ds = r d\theta$$

- A intensidade da velocidade é então

$$v = \frac{ds}{dt} = r \frac{d\theta}{dt}$$



## Movimento curvilíneo geral

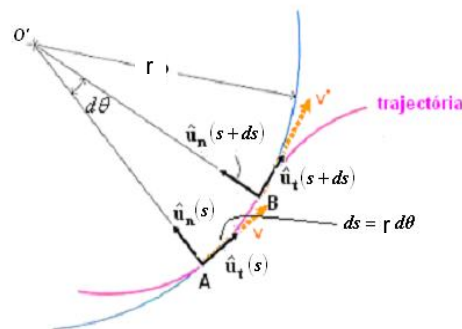
### Componentes tangencial e normal

- O **vetor velocidade** é tangente à trajetória em qualquer instante

$$\vec{v} = v \hat{u}_t$$

com

$$v = \frac{ds}{dt} = r \frac{d\theta}{dt}$$



## Movimento curvilíneo geral

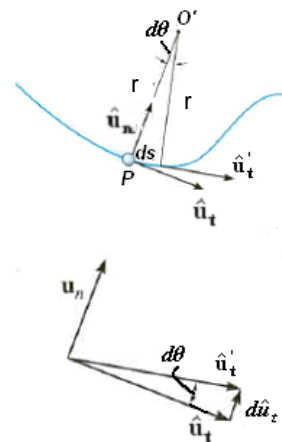
### Componentes tangencial e normal

- Para determinar o vetor aceleração temos que diferenciar o vetor velocidade.
- O vetor aceleração reflete a alteração na **intensidade, direção e sentido da velocidade**

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}[v \hat{u}_t] = \frac{dv}{dt} \hat{u}_t + v \frac{d\hat{u}_t}{dt}$$

$$\frac{d\hat{u}_t}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \hat{u}_n$$

$$d\hat{u}_t = d\theta \hat{u}_n$$



## Movimento curvilíneo geral

### Componentes tangencial e normal

Assim, e como  $v = r \frac{d\theta}{dt}$  então

$$\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt} \hat{u}_t + v \frac{d\hat{u}_t}{dt}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt} \hat{u}_t + \frac{v^2}{r} \hat{u}_n \Leftrightarrow \vec{a}(t) = a_t \hat{u}_t + a_n \hat{u}_n$$

com

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

$$a_n = \frac{v^2}{r}$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$



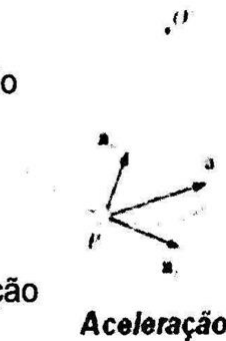
## Componentes normal e tangencial do vetor aceleração

$a_t$

■ Traduz a variação no módulo do vector velocidade

$a_N$

■ Traduz a variação na direcção do vector velocidade



## Movimento curvilíneo geral

Casos particulares:

1. Movimento retilíneo

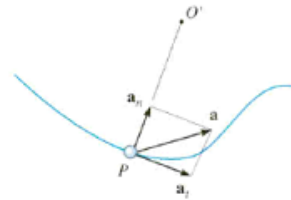


$$a_t = \frac{dv}{dt} \neq 0$$



$$a_n = \frac{v^2}{r(=\infty)} = 0$$

$$\vec{a}(t) = a_t \hat{u}_t + a_n \hat{u}_n$$



Aceleração

Módulo de  $v$  varia ( $a_t$  paralela à velocidade)

Direção do vetor velocidade não se altera e  $\rho$  é infinito

## Movimento curvilíneo geral

Casos particulares:

2. Movimento ao longo de uma curva com  $v=c^{te}$

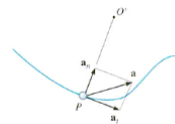


$$a_t = \frac{dv}{dt} = 0$$



$$a_n = \frac{v^2}{r}$$

$$\vec{a}(t) = a_t \hat{u}_t + a_n \hat{u}_n$$



Aceleração

Módulo de  $v$  não varia ( $a_t$  nula)

$a_n$  representa a variação no tempo da direção e sentido do vetor velocidade



## Movimento curvilíneo geral

Casos particulares:

2. Movimento ao longo de uma curva com  $v=c^{te}$

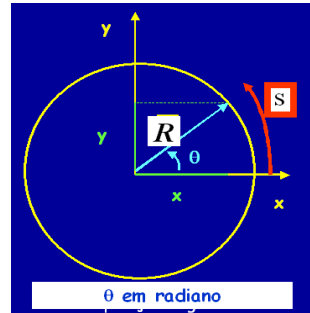


$$a_t = \frac{dv}{dt} = 0$$



$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

$$\vec{a}(t) = a_t \hat{u}_t + a_n \hat{u}_n$$



Movimento circular uniforme

## Movimento curvilíneo geral

Casos particulares:

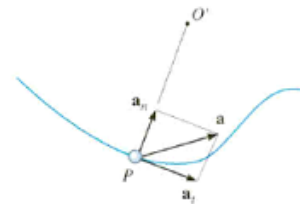
3. Componente tangencial  $a_t=c^{te}$



$$a_t = \frac{dv}{dt} = c^{te}$$



$$a_n = \frac{v^2}{r}$$



Aceleração

Neste caso, e segundo esta direcção, tem-se

$$\begin{aligned} D(t) &= D_0 + v_0(t-t_0) + \frac{1}{2}a_t(t-t_0)^2 \\ v(t) &= v_0 + a_t(t-t_0) \\ v^2 &= v_0^2 + 2a_t(D-D_0) \end{aligned}$$

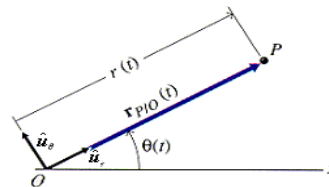
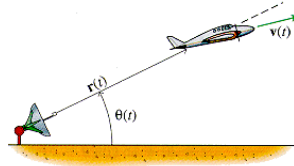
## Movimento curvilíneo geral

### Coordenadas polares

- Uma outra opção na descrição do movimento consiste em localizar a partícula através da distância radial,  $r$  e a posição angular  $\theta$  em relação a uma direção fixa.

$$\vec{r}(t) = r \hat{u}_r$$

Vetores unitários  $\hat{u}_r, \hat{u}_\theta$



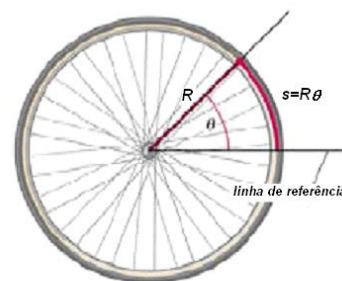
## Movimento Circular: Posição angular

### Grandezas angulares

- Para este tipo de movimento (caso particular do movimento curvilíneo geral) a distância (**comprimento do arco**)  $s$ , o raio  $R$  e o ângulo  $\theta$  relacionam-se por

$$\theta = \frac{s}{R}$$

- $\theta > 0$  no sentido contrário ao sentido dos ponteiros de um relógio (anti horário) a partir da linha de referência
- $\theta$  é medido em radiano



$$1 \text{ rev} = 360^\circ = 2\pi \text{ rad}$$

$$\theta_{\text{rad}} = \frac{\pi}{180} \theta_{\text{graus}}$$

## Movimento Circular: Velocidade angular média

### Grandezas angulares

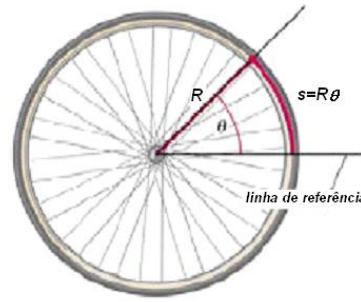
- À medida que o corpo roda  $\theta$  altera-se com o tempo. Podemos definir o **deslocamento angular**  $\Delta\theta$ , como

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$$

- O que nos permite estabelecer a **velocidade angular média** como

$$\omega_{\text{méd}} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_f - \theta_i}{t_f - t_i}$$

$$\text{rad/s} = \text{s}^{-1}$$



$$1 \text{ rev} = 360^\circ = 2\pi \text{ rad}$$

## Movimento Circular: Velocidade angular instantânea

### Grandezas angulares

- velocidade angular instantânea

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\text{rad/s} = \text{s}^{-1}$$

- $\omega > 0$  para uma rotação no sentido anti horário
- $\omega < 0$  para uma rotação no sentido horário

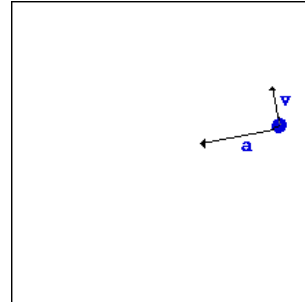
## Movimento Circular: Período do movimento

### Movimento periódico

- O **período do movimento, T**, corresponde ao tempo que a partícula demora a efetuar uma rotação completa

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$



$$\omega = 2\pi f \quad f = \frac{1}{T} \quad \text{s}^{-1} = \text{Hz}$$

## Movimento Circular: Aceleração angular média e instantânea

### Grandezas angulares

- Podemos definir,

$$\alpha_{\text{méd}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_f - \omega_i}{t_f - t_i}$$

$$\text{rad/s}^2 = \text{s}^{-2}$$

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

## Movimento Circular Uniforme

*Grandezas angulares versus grandezas lineares*

$$\omega = c^{te}$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\theta(t) - \theta(t_0) = \int_{t_0}^t \omega(t') dt'$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega \int_{t_0}^t dt'$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega(t - t_0)$$

$$s = R\theta$$

## Movimento Circular Uniformemente acelerado ou retardado

*Grandezas angulares versus grandezas lineares*

$$\alpha = c^{te}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\omega(t) - \omega(t_0) = \int_{t_0}^t \alpha(t') dt'$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha \int_{t_0}^t dt'$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha(t - t_0)$$

$$v = R\omega$$

$$\theta(t) - \theta(t_0) = \int_{t_0}^t \omega(t') dt'$$

$$\theta(t) - \theta(t_0) = \int_{t_0}^t [\omega_0 + \alpha(t' - t_0)] dt'$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2$$

$$s = R\theta$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

## Movimento Circular versus movimento linear

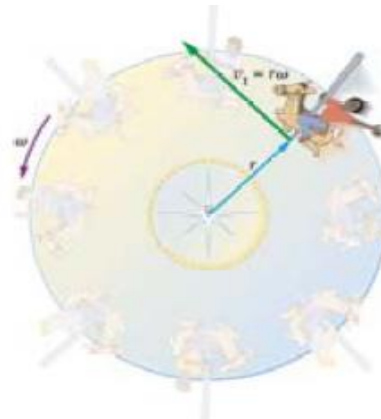
<i>Linear</i>	<i>Circular (Rotação)</i>
$x$	$\theta$
$v$	$\omega$
$a$	$\alpha$
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
$v^2 = v_0^2 + 2a(x-x_0)$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta-\theta_0)$

## Movimento Circular: Grandezas angulares versus grandezas lineares

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(R\theta) = \omega R$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega R) = \alpha R$$



## Queda livre

- Corpos em queda livre movimentam-se com aceleração constante
- Objetos com diferentes massas caem com a mesma aceleração constante desde que a **resistência do ar** seja suficientemente pequena de tal modo que possa ser **desprezada**
- Nesta aproximação **desprezam-se** ainda
  - os efeitos da rotação da Terra
  - e da variação da aceleração da gravidade com a latitude e altitude de um lugar

## Queda livre

- Aceleração da gravidade, na Terra

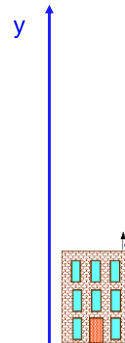
 $\vec{g}$ 

$$g \sim 9.8 \text{ m/s}^2$$

$$\vec{g} = -9.8 \hat{j}$$

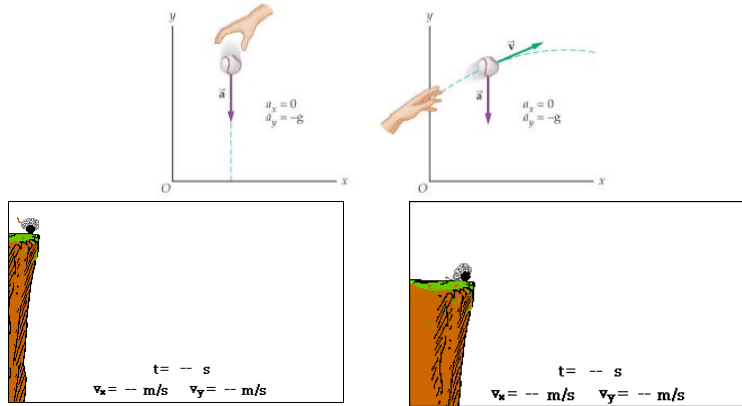
$$v = v_0 - g(t - t_0)$$

$$y = y_0 + v_0(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2$$



## Projétil lançado obliquamente

*caso particular de movimento curvilíneo no plano*



## Relembrar

*movimento curvilíneo no plano  
(ex. xy) descrito em componentes retangulares*

- Usando componentes retangulares a posição, velocidade e aceleração podem ser representadas na sua forma cartesiana como:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\hat{i} + \frac{dy(t)}{dt}\hat{j} = v_x(t)\hat{i} + v_y(t)\hat{j}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\hat{j} = \frac{dv_x(t)}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y(t)}{dt}\hat{j} = a_x(t)\hat{i} + a_y(t)\hat{j}$$



## Relembrar

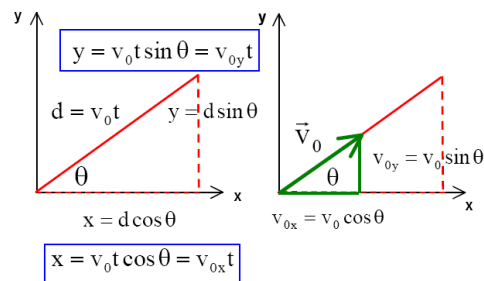
*movimento curvilíneo no plano  
(ex. xy) descrito em componentes retangulares*

$$\mathbf{v} = \mathbf{c}^{te}$$

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$$

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \vec{v}_0 = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j} = \\ &= (v_0 \cos \theta)\hat{i} + (v_0 \sin \theta)\hat{j}\end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t \\ y = y_0 + v_{0y}t \end{cases}$$



## Relembrar

*movimento curvilíneo no plano  
(ex. xy) descrito em componentes retangulares*

$$\mathbf{a} = \mathbf{c}^{te}$$

$$\vec{a}(t) = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$$

$$\begin{cases} a_x = c^{te} \\ a_y = c^{te} \end{cases}$$

$$\vec{v}(t) = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}$$

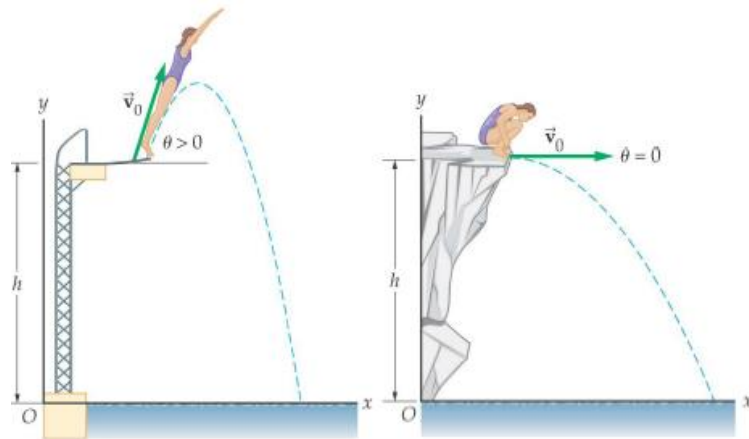
$$\begin{cases} v_x = v_{0x} + a_x t \\ v_y = v_{0y} + a_y t \end{cases}$$

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \\ y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \end{cases}$$

## Projétil lançado obliquamente

*caso particular de movimento curvilíneo no plano  $a=c^e$*

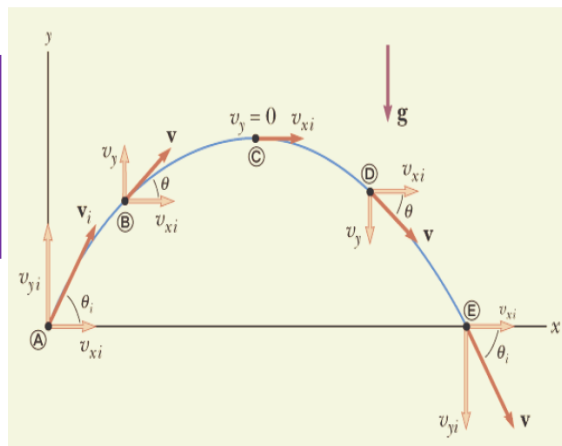


## Projétil lançado obliquamente

*resistência do ar ignorada  
aceleração gravítica  $c^e$  e dirigida para o centro da Terra  
rotação da Terra ignorada*

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \vec{g} \\ \vec{v} &= \vec{v}_o + \vec{g}(t - t_o) \\ \vec{r} &= \vec{r}_o + \vec{v}_o(t - t_o) + \frac{1}{2}\vec{g}(t - t_o)^2\end{aligned}$$

$$\vec{a}(t): \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$



## Projétil lançado obliquamente

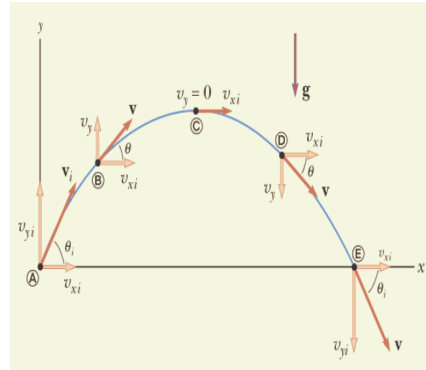
$$\vec{a} = \vec{g}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{g}(t - t_o)$$

$$\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{v}_o(t - t_o) + \frac{1}{2}\vec{g}(t - t_o)^2$$

$$\vec{a}(t): \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

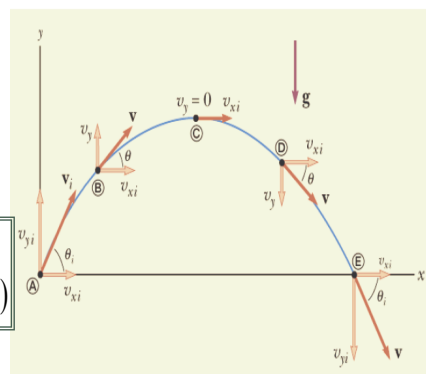
$$\vec{v}(t): \begin{cases} v_x = v_{x,0} = v_0 \cos \theta_i = c^{te} \\ v_y = v_{y,0} - g(t - t_0) = v_0 \sin \theta_i - g(t - t_0) \end{cases}$$



## Projétil lançado obliquamente

$$\vec{a}(t): \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

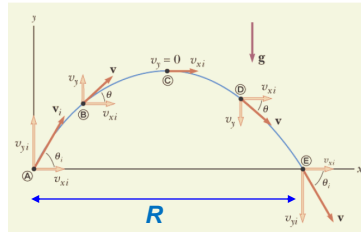
$$\vec{v}(t): \begin{cases} v_x = v_{x,0} = v_0 \cos \theta_i = c^{te} \\ v_y = v_{y,0} - g(t - t_0) = v_0 \sin \theta_i - g(t - t_0) \end{cases}$$



$$\vec{r}(t): \begin{cases} x = x_0 + v_{x,0}(t - t_0) = x_0 + (v_0 \cos \theta_i)(t - t_0) \\ y = y_0 + v_{y,0}(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 = y_0 + (v_0 \sin \theta_i)(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 \end{cases}$$

## Projétil lançado obliquamente

Qual o alcance máximo,  $x_{\text{máx}}=R$ ?



$$v_{x,0} = v_0 \cos \theta; \quad v_{y,0} = v_0 \sin \theta$$

$$R = 2v_{x,0}t; \quad 0 = v_{y,0} - gt; \quad t = v_{y,0} / g$$

$$R = 2v_{x,0}v_{y,0} / g = 2v_0^2 \sin \theta \cos \theta / g$$

$$R = (v_0^2 / g) \sin 2\theta$$

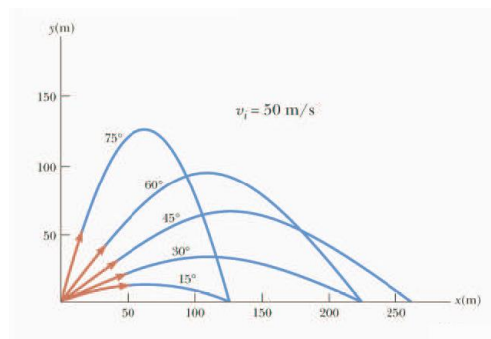
## Projétil lançado obliquamente

Qual o alcance máximo,  $x_{\text{máx}}=R$ ?

$$R = (v_0^2 / g) \sin 2\theta$$

$$(x_0, y_0) = (0,0)$$

**Alcance máx  $\theta_0 = 45^\circ$   
sen  $(2\theta_0) = 1$  ;  $2\theta_0 = 90^\circ$**



## Projétil lançado obliquamente

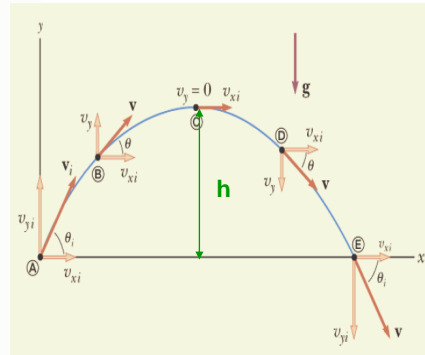
Qual a altura máxima,  $y_{\text{máx}}=h$ ?

$$v_{x,0} = v_0 \cos \theta; \quad v_{y,0} = v_0 \sin \theta$$

$$t = v_{y,0} / g$$

$$h = h_0 + v_{y,0} (v_{y,0} / g) - \frac{1}{2} g (v_{y,0} / g)^2$$

$$h = h_0 + \frac{v_{y,0}^2}{2g} = h_0 + \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$$



## Projétil lançado obliquamente

Equação da trajetória

$$(x_0 = 0; h_0 = 0)$$

$$x = x_0 + v_{x,0}(t - t_0); \quad h = h_0 + v_{y,0}(t - t_0) - \frac{1}{2} g (t - t_0)^2$$

$$v_{x,0} = v_0 \cos \theta_0; \quad v_{y,0} = v_0 \sin \theta_0$$

$$h = x(\tan \theta) - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta}$$

## Projétil lançado obliquamente: exemplos

