1

Mecânica e Campo Eletromagnético

2019/2020 – parte 3

Luiz Pereira
luiz@ua.pt

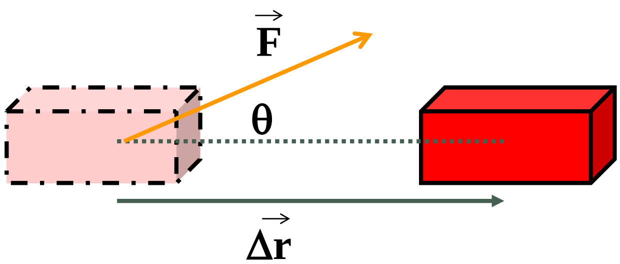
2

Tópicos

- **Trabalho e energia**
  - **Trabalho de uma força**
  - **Energia cinética**
  - **Potência**
  - **Força conservativa**
  - **Conservação da energia**

Trabalho de uma força constante

- Um corpo sofre um deslocamento, estando sob a ação duma força F constante (entre outras)



O trabalho W realizado pela força F durante o deslocamento Δr é dado pelo produto

$$W = |\vec{F}||\Delta\vec{r}|\cos\theta$$

Ou com o produto interno (escalar)

$$W = \vec{F} \bullet \Delta\vec{r}$$

Trabalho de forças constantes

Em geral, para uma força constante com componentes cartesianas

$$\vec{F} = F_x\,\hat{i} + F_y\,\hat{j} + F_z\,\hat{k}$$

E um deslocamento:

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\,\hat{i} + \Delta y\,\hat{j} + \Delta z\,\hat{k}$$

O trabalho de F durante o deslocamento é

$$W = \vec{F} \bullet \Delta\vec{r} = F_x\Delta x + F_y\Delta y + F_z\Delta z$$

Trabalho de forças constantes

Uma força realiza trabalho nulo se:

W=0: { O deslocamento é nulo; A força é perpendicular ao deslocamento }

No S. I. a unidade de trabalho é o Joule (J)

Se houver várias forças aplicadas a um corpo, podemos calcular o trabalho total (da resultante) usando a propriedade distributiva:

$$W(\vec{F}_{res}) = \left(\sum_{todas} \vec{F}_i\right) \bullet \Delta\vec{r} = \sum_{todas} \left(\vec{F}_i \bullet \Delta\vec{r}\right) = \sum_{todas} W\left(\vec{F}_i\right)$$

O trabalho da resultante é igual à soma dos trabalhos de todas as forças

Trabalho de forças variáveis

Como generalizar quando a força F depende da posição?

Suponhamos um deslocamento segundo x e $F=F_x(x)$ é a componente x da força

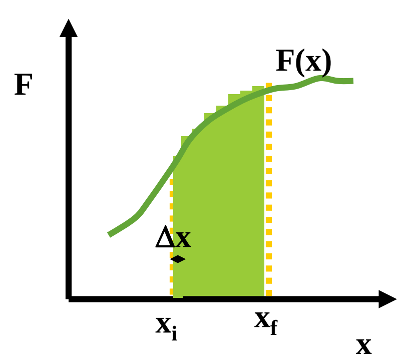
Para deslocamento infinitesimal Δx

$\Delta w = F_x(x).\ \Delta x$

$$W = \sum_{x_i}^{x_f} F_x(x)\Delta x$$

No limite $\Delta x \Longrightarrow 0$

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x(x)dx$$



Trabalho de forças variáveis

Como generalizar quando o deslocamento não é retilíneo?

Contribuirão as componentes da força segundo x,y e z, cada uma delas dependendo dos pontos x,y,z da trajetória.

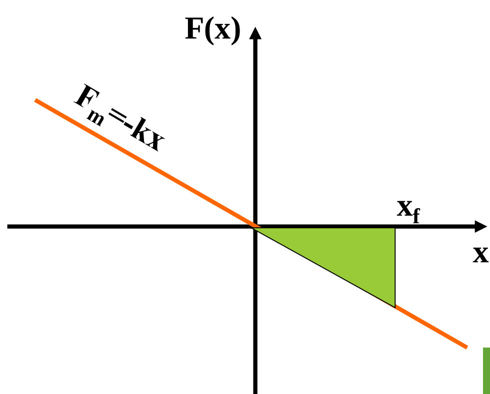
$$W=\int_{r_i}^{r_f}\vec{F}(\vec{r})\bullet d\vec{r}=\int_{r_i}^{r_f}F_x(x,y,z)dx+F_y(x,y,z)dy+F_z(x,y,z)dz$$

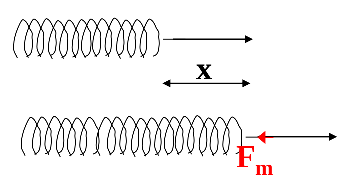
$$W=\int_{r_i}^{r_f}F_x(x,y,z)dx+\int_{r_i}^{r_f}F_y(x,y,z)dy+\int_{r_i}^{r_f}F_z(x,y,z)dz$$

Integral de caminho

O trabalho será dado pela soma de três integrais, um para cada componente. Em cada um, as coordenadas têm que ser reescritas à custa de (cada) variável de integração, usando a equação que descreve a trajetória.

Trabalho realizado por uma mola





Trabalho realizado PELA mola

$$W=\int_{x_i}^{x_f}F(x)dx \qquad W=\int_{x_i}^{x_f}(-kx)dx$$

$$w=-k\int_{x_i}^{x_f}x\,dx=\frac{1}{2}kx_i^2-\frac{1}{2}kx_f^2$$

Trabalho realizado PELA mola

$$x_i=0\Rightarrow W=-\frac{1}{2}kx_f^2$$

Trabalho e Energia

Veremos a seguir que em muitos casos é possível descrever o movimento de um corpo relacionando diretamente a velocidade e o deslocamento, sem explicitar o tempo.
A partir do trabalho da força resultante num dado deslocamento, é possível calcular a variação de velocidade correspondente

Suponhamos que uma partícula está sujeita a um conjunto de forças, de resultante F. Para um deslocamento segundo xx

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x(x)\,dx = \int_{x_i}^{x_f} ma\,dx$$

Usando a 2ª Lei de Newton pois F é resultante

$$a = \frac{dv}{dt} = \left(\frac{dv}{dx}\right) \times \left(\frac{dx}{dt}\right) = \left(\frac{dv}{dx}\right) \times v$$

Eliminámos t e explicitamos a velocidade

Trabalho e Energia

$$W = \int_{x_i}^{x_f} mv\left(\frac{dv}{dx}\right)dx = \int_{x_i}^{x_f} m\frac{d}{dx}\left(\frac{v^2}{2}\right)dx$$

Lembrando que:

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

$$W_{RES} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

$$W_{RES} = E_{cf} - E_{ci} = \Delta E_c$$

TEOREMA DO TRABALHO E ENERGIA

Este resultado é válido em geral, para uma trajetória arbitrária

Potência de uma força

Potência é a taxa temporal com que é realizado trabalho

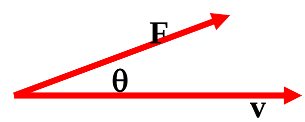
Realizando um trabalho ΔW num intervalo de tempo Δt

$$P_{media} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\vec{F} \bullet \Delta\vec{r}}{\Delta t} \Rightarrow P = \vec{F} \bullet \vec{v}$$

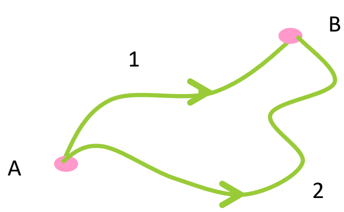
$$P = \left|\vec{F}\right| v \cos\theta$$



Forças Conservativas

Uma força é CONSERVATIVA se o trabalho realizado num deslocamento entre dois pontos arbitrários for INDEPENDENTE do caminho seguido entre esses pontos

Nestas condições, o trabalho é apenas função das coordenadas final e inicial do deslocamento

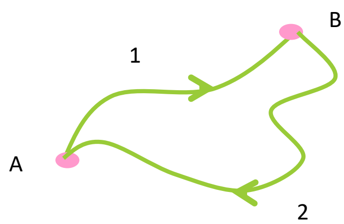


F conservativa

$$W_{AB}(caminho\ 1) = W_{AB}(caminho 2)$$

Ainda, o trabalho realizado ao longo dum trajeto FECHADO é NULO

Forças Conservativas



O trabalho realizado ao longo dum trajeto FECHADO é NULO

$$W_{AA}(\text{caminho fechado}) = W_{AB}(\text{caminho } 1) + W_{BA}(\text{caminho } 2)$$

Mas: $W_{BA}(\text{caminho}2) = -W_{AB}(\text{caminho}2)$ Porquê?

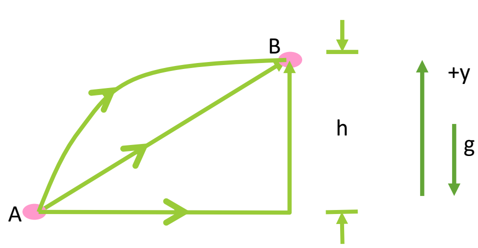
F conservativa ⇨ $W_{AA}(\text{caminho fechado}) = 0$

Forças Conservativas

Exemplos de forças conservativas são:

- *Gravítica*
- *Eletrostática*
- *Elástica duma mola*

No caso da força gravítica (junto à superfície da Terra) em que é constante, o trabalho só depende da diferença de alturas entre os pontos final e inicial Porquê?

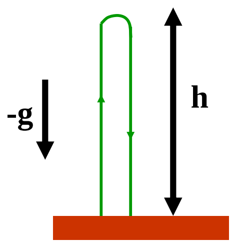


$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{r} = \int_A^B F_y dy = = \int_A^B -mg\, dy = -mg(y_B - y_A)$$

Para qualquer trajeto de A→B $W_{AB} = -mg(y_B - y_A)$

Forças Conservativas: gravidade

Uma massa m é lançada até uma altura h



Qual o trabalho realizado pelo peso durante a subida e descida até à posição inicial?

Subida: W(0 →h) = -mgh
Descida: W(h →0) = +mgh
Trabalho total=0

Forças Conservativas: gravidade

Qual o trabalho realizado pelo peso durante uma sequência de passos?

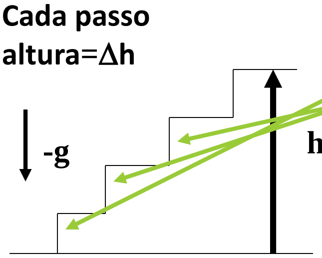
Trabalho realizado pela gravidade

$$w = -mg\Delta h_1 + -mg\Delta h_2 + -mg\Delta h_3 + \ldots$$

$$= -mg(\Delta h_1 + \Delta h_2 + \Delta h_3 + \ldots\ldots)$$

$$= -mgh$$

Cada passo altura=Δh



O mesmo que num passo único (-mgh)

Forças Conservativas e Energia Potencial

Como o trabalho realizado por uma força conservativa é apenas função das posições inicial e final, podemos definir uma função (de ponto) ENERGIA POTENCIAL satisfazendo:

$$W_{fcons} = \int_{P_i}^{P_f} \vec{F} \bullet d\vec{r} = -\Delta E_P = E_{Pi} - E_{Pf}$$

$E_{potencial}$ no ponto inicial

$E_{potencial}$ no ponto final

O trabalho realizado por uma força conservativa duma posição inicial para uma final é o *simétrico* da variação da ENERGIA POTENCIAL nesse trajeto:

Energia Potencial Gravítica

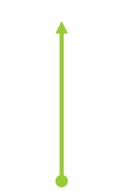
Para o caso do peso, considerado constante junto à superfície da Terra, temos:

$$W_{peso} = \int_{P_i}^{P_f} \vec{P} \bullet d\vec{r} = mgy_i - mgy_f$$

Energia potencial gravítica (junto à superfície da Terra)

$$E_{Pg} = mgy$$

A menos de uma constante, que define a origem, o zero da E_{Pg}



$$\Delta E_{Pg} > 0 \qquad W < 0$$

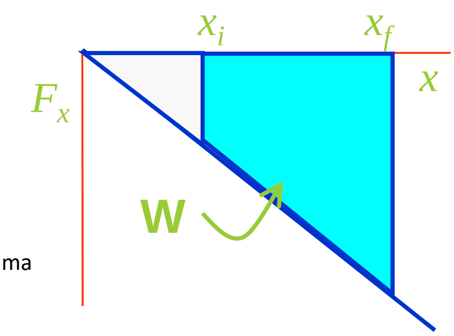
$$\Delta E_{Pg} < 0 \qquad W > 0$$

Energia Potencial Elástica

Para a mola elástica, em que F=-kx

O trabalho de x_i até x_f é:

$$W_{i\to f} = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$$



Define-se a energia potencial elástica duma mola como

$$E_{Pe} = \frac{1}{2}kx^2$$

Atenção: x=0 é a posição de equilíbrio, não é arbitrária.

Energia Mecânica: conservação da E.M.

Suponhamos que uma partícula sofre apenas a ação de uma força conservativa F num deslocamento duma posição P_i para P_f

Do teorema do Trabalho-Energia:

$$W_{i\to f} = \int_{P_i}^{P_f} \vec{F} \bullet d\vec{r} = \Delta E_c = E_{cf} - E_{ci}$$

F é a resultante

Como F é conservativa:

$$W_{i\to f} = -\Delta E_P = E_{Pi} - E_{Pf}$$

$$E_{Pi} - E_{Pf} = E_{cf} - E_{ci}$$

$$E_{ci} + E_{Pi} = E_{cf} + E_{Pf}$$

A soma é constante

$$E_M = E_c + E_P$$

ENERGIA MECÂNICA É CONSTANTE

Energia Mecânica: conservação da E.M.

Sob a ação de uma força conservativa F, a energia mecânica

$$E_M = E_c + E_P$$

é conservada: $E_{Mi} = E_{Mf} \Leftrightarrow \Delta E_M = 0$

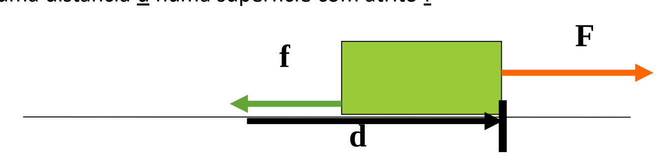
No caso de haver várias forças conservativas aplicadas ao corpo, a cada uma associada uma energia potencial, a energia mecânica é

$$\vec{F}_{res} = \sum_{varias\,Ep} \vec{F}_{cons} \quad \Rightarrow \quad E_M = E_c + \sum_{varias\,Ep} E_P$$

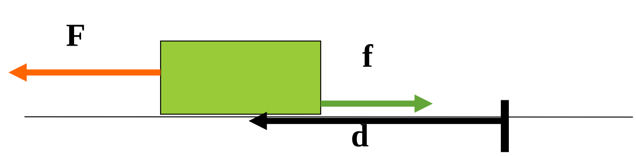
Forças não-conservativas: atrito

No caso de forças não-conservativas, o trabalho realizado num trajeto fechado não é nulo, como podemos ver com a força de atrito cinético

Um bloco é deslocado uma distância d numa superfície com atrito f



Trabalho da força de atrito A→B $W_{AB} = -fd$



Trabalho da força de atrito B→A $W_{BA} = -fd$

$$W_{AA}(ida\,e\,volta) = -2fd \neq 0$$

Energia Mecânica:

Em geral, a uma partícula estarão aplicadas forças conservativas e não-conservativas. Podemos estipular, para a resultante das forças:

$$\vec{F}_{res} = \sum_{variasEp} \vec{F}_{cons} + \vec{F}_{NC}$$

Num deslocamento de P_i para P_f $W_{i\to f}(Fres) = \Delta E_C$

Por outro lado $W_{i\to f}(Fres) = W_{i\to f}\left(\sum F_C\right) + W_{i\to f}(F_{NC})$

$W_{i\to f}\left(\sum F_C\right) = -\sum \Delta E_P$ **Ep total:**

$$\begin{aligned} W_{i\to f}(F_{NC}) &= W_{i\to f}(Fres) - W_{i\to f}\left(\sum F_C\right) = \\ &= \Delta E_C - \left(-\sum \Delta E_P\right) = \\ &= \Delta E_C + \sum \Delta E_P = \Delta E_M \end{aligned}$$

$$W_{i\to f}(F_{NC}) = \Delta E_M$$

Energia Mecânica:

Assim, resumindo:

Num deslocamento de P_i para P_f

$$W_{i\to f}(Fres) = \Delta E_C$$

$$W_{i\to f}\left(\sum F_C\right) = -\sum \Delta E_P$$

$$W_{i\to f}(F_{NC}) = \Delta E_M$$

A energia mecânica varia se as forças não conservativas realizarem trabalho

Energia potencial e forças conservativas

A variação de energia potencial num deslocamento é dada a partir do integral de caminho da força (conservativa)

$$W_{fcons} = \int_{P_i}^{P_f} \vec{F} \bullet d\vec{r} = -\Delta E_P = E_{Pi} - E_{Pf}$$

Se soubermos a energia potencial em cada ponto, poderemos saber a força correspondente?

Esta questão tem uma resposta imediata, se a energia potencial só depender de uma coordenada cartesiana, por exemplo x

Como E_p só depende de x, basta considerar deslocamentos segundo x, surgindo apenas a componente x da força F

$$W_{fcons} = \int_{P_i}^{P_f} F_x dx = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx = E_P(x_i) - E_P(x_f)$$

Energia potencial e forças conservativas

$$F_x = -\frac{dE_p(x)}{dx}$$

A componente x da Força é – derivada de Ep em ordem a x

E as componentes y e z da força?

Serão nulas, pois se o trabalho num qualquer deslocamento segundo y é nulo (pois Ep só depende de x), isso significa que Fy=Fz=0

Se Ep=Ep(x)

$$F_x = -\frac{dE_p}{dx}$$

$$F_y = F_z = 0$$

Energia potencial e forças conservativas

Consideremos a energia potencial gravítica, junto à Terra, que depende da altitude y (vertical)

$$E_{Pg} = mgy$$

Resulta:

$$F_{gy} = -\frac{dE_{Pg}}{dy} = -mg$$

Só componente vertical.
Correto?

Para uma mola elástica

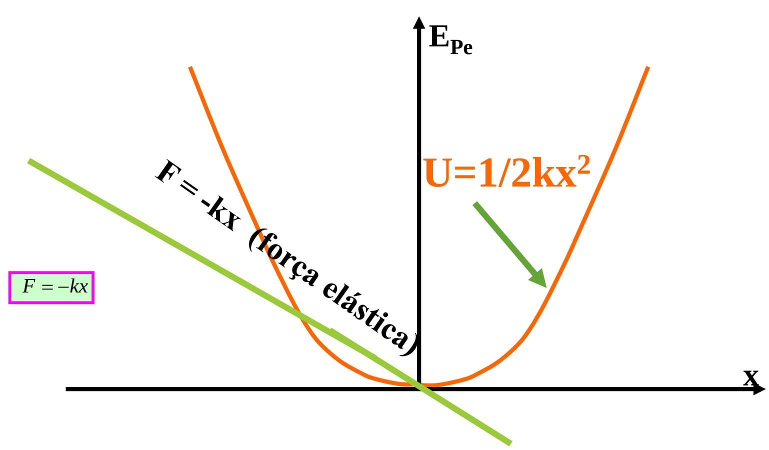
$$E_{Pe} = \frac{1}{2}kx^2$$

Resulta:

$$F_{ex} = -\frac{dE_{Pe}}{dx} = -kx$$

Vejamos o gráfico

Energia potencial e forças conservativas



Energia potencial e forças conservativas

Como aproveitar esta representação?

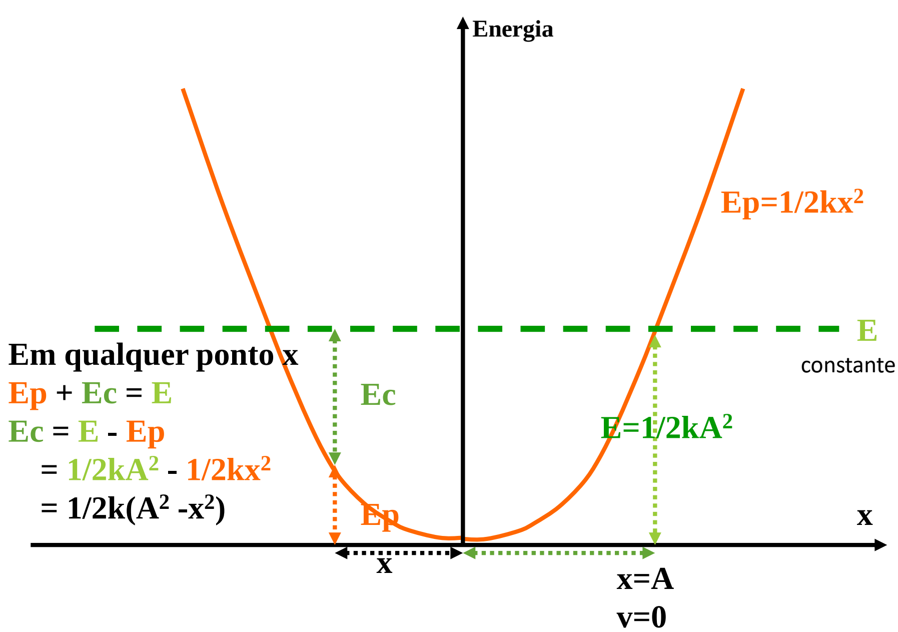
Se a mola é esticada até x=A e em seguida a partícula é largada (com vi=0), a conservação de energia mecânica conduz a

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

Verifique!

Podemos determinar a velocidade em qualquer posição x

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}\left(A^2 - x^2\right)}$$



Energia potencial e forças conservativas

Quando a energia depende das várias coordenadas $E_p=E_p(x,y,z)$

A relação dada antes para uma coordenada

$$F_x = -\frac{dE_p}{dx}$$

É generalizada utilizando a noção de derivada parcial

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

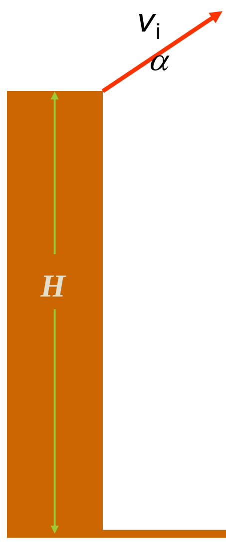
Diremos que a Força é o simétrico do **GRADIENTE** da energia potencial

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\hat{k} \right)$$

Alguns exemplos

- Projéteis (sistema simples)
- Pêndulo simples

Projéteis simples



Projétil disparado, com inclinação α e velocidade v_i do alto duma torre de altura H

Qual a velocidade v_f (módulo) quando chega ao solo?

A energia mecânica é conservada. Porquê?

Vem:

$$\frac{1}{2}mv_i^2 + mgH = \frac{1}{2}mv_f^2$$

$$v_f = \sqrt{v_i^2 + 2gH}$$

A velocidade é independente do ângulo de lançamento!

Pêndulo

Um corpo, de massa m está suspenso por um fio de comprimento L, e é largado dum ângulo inicial θ_i com a vertical.

Qual a velocidade v quando a inclinação é θ? Qual a máxima v?

Quais as forças em causa?
- Tensão: não realiza trabalho
- Peso: é conservativa

Pela conservação da energia mecânica

$$E_{Mi} = E_{Mf}$$

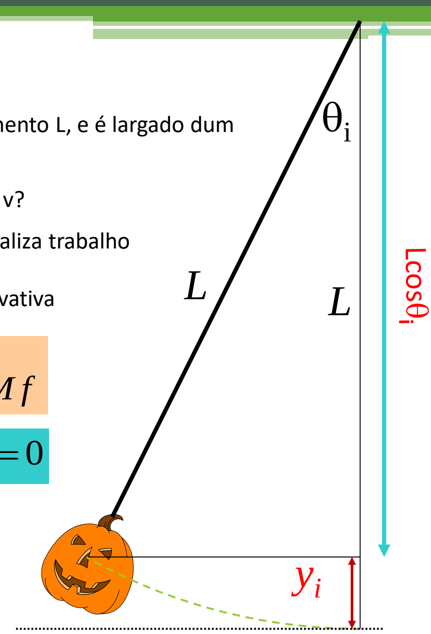
Posição inicial: $\theta = \theta_i$

$$v_i = 0 \Rightarrow E_{ci} = 0$$

Considerando o zero da energia potencial na base, y=0

$$y_i = L - L\cos\theta_i = L(1-\cos\theta_i)$$

$$E_{Pgi} = mgy_i = mgL(1-\cos\theta_i)$$



Pêndulo

Quando a inclinação é θ

Posição: $\theta_f = \theta$

$$y = L(1-\cos\theta)$$

$$v_f = v = ?$$

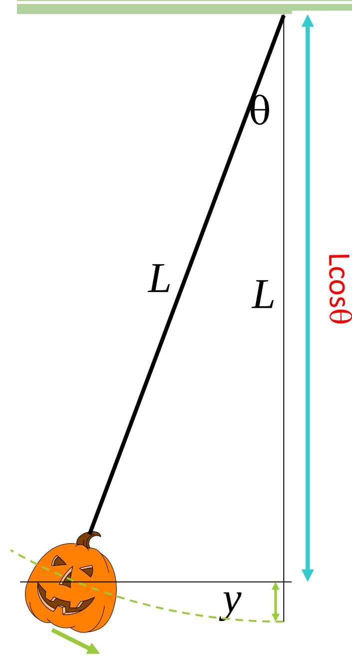
$$E_{Mf} = \frac{1}{2}mv^2 + mgL(1-\cos\theta)$$

Conservação da energia mecânica

$$E_{Mi} = E_{Mf}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgL(\cos\theta - \cos\theta_i)$$

$$v = \sqrt{2gL(\cos\theta - \cos\theta_i)}$$



Pêndulo

Máxima velocidade quando está na vertical

$\theta = 0$

$$v_{max} = \sqrt{2gL(1-\cos\theta_i)}$$

Qual a tensão no fio nesse ponto? (Máxima!)

Da 2ª Lei de Newton $\vec{T} + \vec{P} = m\vec{a}$

O movimento é circular

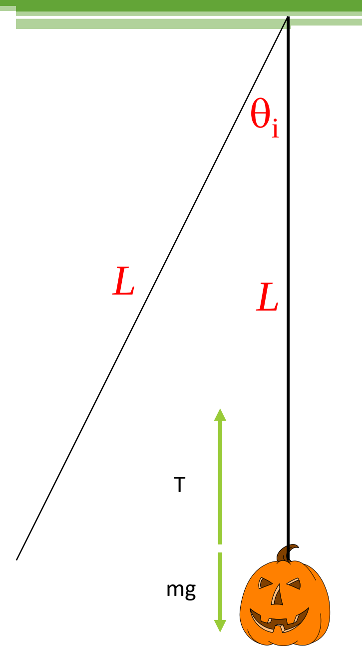
Componente normal

Neste ponto:

$$T - mg = m\frac{v^2}{L}$$

$$T = mg + 2mg(1-\cos\theta_i)$$

$$T = mg(3 - 2\cos\theta_i)$$



Pêndulo

Tensão máxima num pêndulo

$$T = mg\left(3 - 2\cos\theta_i\right)$$

Se for largado de um ângulo de 60º

$$T = 2mg$$

O fio tem que poder suportar o dobro do peso!