EXAMEN SCRIS

- STRUCTURI ALGEBRICE ÎN INFORMATICĂ -

Student: GHEORGHE G. LIVIU-IONUȚ

Grupa: 144

Număr pagini: 16

1.

$a = 8$, $b = 5$

$len(\text{"GHEORGHE"}) = 8$

$\max(len(\text{"LIVIU"}), len(\text{"IONUT"})) = 5$

2. $a = 8$, $b = 5$

Numărul de permutări de ordin 8 din S_{13}

Fie $\sigma \in S_{13}$ cu prop. că $ord(\sigma) = 8 \Rightarrow \sigma^8 = e$

O condiție necesară ~~dar~~ nu și suficientă pt. a exista perm de ordin 8 în S_{13} (din thm Lagrange) este ca $8 \mid 13!$

$(13! = |S_{13}|)$

$13! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 13 \Rightarrow 8 \mid 13!$

Fie $c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_k$ descompunerea în produs de cicli disjuncți a perm σ, fiecare dintre cicli având lungimile $l_1, l_2, \ldots, l_k$.

$ord(\sigma) = [l_1, l_2, \ldots, l_k]$

Deci trebuie găsite toate perm. cu prop că $[l_1, l_2, \ldots, l_k] = 8$ și $l_1 + l_2 + \ldots + l_k \leq 13$

Student: GHEORGHE G. LIVIU-IONUȚ

Grupa: 144

Avem unm. posibilități pentru lungimile ciclului:

$[8]=8$, $8\le 13$

$[8,2]=8$, $8+2\le 13$

$[8,4]$, $8+4\le 13$

Cazul I

$\sigma = c_1$, cu $l_1 = 8$

Nr. de cicli de lungime 8 din S_{13} este egal cu

$$\frac{A_{13}^{8}}{8} = \frac{\frac{13!}{5!}}{8} = \frac{6\cdot 7\cdot \cancel{8}\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13}{\cancel{8}} = \frac{13!}{8\cdot 5!}$$

Cazul II.

$\sigma = c_1 c_2$, cu $l_1 = 8$ și $l_2 = 2$

$$\text{Nr. de perm} = \frac{A_{13}^{8}}{8}\cdot\frac{A_5^{2}}{2} = \frac{13!}{8\cdot 5!}\cdot\frac{\frac{5!}{3!}}{2}$$

$$= \frac{13!}{8\cdot 5!}\cdot\frac{\cancel{4}^{2}\cdot 5}{\cancel{2}} = \frac{13!}{8\cdot 5!}\cdot 10 = \frac{10\cdot 13!}{8\cdot 5!}$$

Cazul III.

$\sigma = c_1 c_2 c_3$

$$\text{Nr. de perm} = \frac{A_{13}^{8}}{8}\cdot\frac{A_5^{4}}{4} = \frac{13!}{8\cdot 5!}\cdot\frac{5}{4}$$

Deci numărul total este $\frac{13!}{8\cdot 5!} + \frac{13!}{8\cdot 5!}\cdot 10 + \frac{13!}{8\cdot 5!}\cdot\frac{5}{4}$

Student: GHEORGHE G. LIVIU-IONUȚ

Grupa: 144

$$= \frac{13!}{8\cdot 5!}\left(1+10+\frac{5}{4}\right) = \frac{49}{4}\cdot\frac{13!}{8\cdot 5!} = \frac{6227020800}{8\cdot 120}\cdot\frac{49}{4} = 79459380$$ permutări.

$a=8,\ S=5$

3. $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8)(9\ 10\ 11\ 12\ 13)(14\ 15\ \dots\ 26)$

$\in S_{26}$.

Det toate perm $\tau \in S_{26}$ cu prop că $\tau^3 = \sigma$

Fie $\tau = c_1\cdot c_2\cdot \dots \cdot c_h$, cu lungimile $l_1, l_2, \dots, l_h$ (produs de cicli disjuncți).

Cazul I.

$h=1 \Rightarrow$ Nu există soluții, ar trebui să existe un singur ciclu sau 3 cicli de lungimi egale.

$h=2 \Rightarrow$ Nu există soluții, un ciclu ridicat la puterea a 3-a nu poate genera 2 cicli de lungimi dif.

$h=3 \Rightarrow \tau = c_1\cdot c_2\cdot c_3$

$$\tau = c_1\cdot c_2\cdot c_3 \xRightarrow[\text{pdcd}]{\text{Unicitatea descomp.}} \tau^3 = c_1^3 c_2^3 c_3^3$$

$c_1^3 c_2^3 c_3^3 = (1\ 2\ 3\ 4 \dots 8)(9 \dots 13)(14 \dots 26)$

$c_1^3 = (1\ 2\ 3\ 4 \dots 8) \Rightarrow c_1$ ciclu de lungime $8 \Rightarrow c_1^8 = e$

$c_1^3 = (1\ 2\ 3\ 4 \dots 8) \,\Big|\, ()^3 \Rightarrow c_1^9 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8)^3$

$\Rightarrow c_1^9 = \underbrace{(c_1^8)}_{e}\cdot c_1 = (1\ 4\ 7\ 2\ 5\ 8\ 3\ 6)$

$\Rightarrow c_1 = (1\ 4\ 7\ 2\ 5\ 8\ 3\ 6)$

Student: GHEORGHE G. LIVIU-IONUȚ

Grupa: 144

$c_2^3 = (9\ 10\ 11\ 12\ 13) \to c_2$ ciclu de lungime 5 $\Rightarrow$

$c_2^5 = e$

$c_2^3 = (9\ 10\ 11\ 12\ 13) \,|\, (\ )^2 \Rightarrow c_2^6 = c_2^5 \cdot c_2 = (9\ 10\ 11\ 12\ 13)$

$\Rightarrow c_2 = (9\ 11\ 13\ 10\ 12)$

$c_3^3 = (14 \dots 26) \Rightarrow c_3$ ciclu de lungime 13 $\Rightarrow$

$c_3^{13} = e$

$c_3^3 = (14\ 15\ 16\ 17\ 18\ 19\ 20\ 21\ 22\ 23\ 24\ 25\ 26) \,|\, (\ )^4$

$\Rightarrow c_3^{12} = c_3^{-1} \cdot \underbrace{c_3^{13}}_{= e} = (14 \dots 26)^4$

$\Rightarrow c_3^{-1} = (14\ 18\ 22\ 26\ 17\ 21\ 25\ 16\ 20\ 24\ 15\ 19\ 23)$

$\Rightarrow c_3 = (14\ 23\ 19\ 15\ 24\ 20\ 16\ 25\ 21\ 17\ 26\ 22\ 18)$

Cazul IV. Nu există soluții, 4 cicli nu pot genera 3 cicli cu lungimi asemănătoare de 13 (la fel și pt $l_1 \geq 5$)).
$\Rightarrow$ Ecuația $\tau^3 = \sigma$ are o singură soluție,

$\tau = (1\ 4\ 7\ 2\ 5\ 8\ 3\ 6)(9\ 11\ 13\ 10\ 12)(14\ 23\ 19\ 15\ 24\ 20\ 16\ 25\ 21\ 17\ 26\ 22\ 18)$

Student: GHEORGHE G. Liviu-IONUȚ

Grupa: 144

4. Calculați $a^{a+s^{b^{a+s}}}$ mod 41

$a = 8, S = 5 \Rightarrow$ Trebuie calculat $8^{13^{5^{13}}}$ mod 41

$(8, 41) = 1 \xRightarrow{\text{Euler}} 8^{40} \equiv 1 \pmod{41}$

41 prim $\Rightarrow \varphi(41) = 40$

Calculez restul împărțirii la 41 pt puteri consecutive ale lui 8.

Prin convenție, 8^k va însemna 8^k mod 41.

$8^1 = 8$	$= 8^1$ mod 41 $= 8$
$8^2 = 23$	$= 8^1 \cdot 8$ mod 41 $= 8 \cdot 8$ mod 41
$8^3 = 20$	$= 8^2 \cdot 8$ mod 41 $= 23 \cdot 8$ mod 41
$8^4 = 37$	$= 8^3 \cdot 8$ mod 41 $= 20 \cdot 8$ mod 41
$8^5 = 9$	$= 8^4 \cdot 8$ mod 41 $= 37 \cdot 8$ mod 41
$8^6 = 31$	$= 8^5 \cdot 8$ mod 41 ⋮
$8^7 = 2$	$= 8^6 \cdot 8$ mod 41 ⋮
$8^8 = 16$	$= 8^7 \cdot 8$ mod 41 ⋮
$8^9 = 5$	$= 8^8 \cdot 8$ mod 41 ⋮
$8^{10} = 40$	$= 8^9 \cdot 8$ mod 41
$8^{11} = 33$	$= 8^{10} \cdot 8$ mod 41
$8^{12} = 18$	$= 8^{11} \cdot 8$ mod 41
$8^{13} = 21$	⋮
$8^{14} = 4$	
$8^{15} = 32$	MOD 41
$8^{16} = 10$	⋮
$8^{17} = 39$	
$8^{18} = 25$	
$8^{19} = 36$	
$8^{20} = 1$	
$8^{21} = 8 = 8^1$	

Student: GHEORGHE G. Liviu-Ionuț

Grupa: 144

Deci puterile lui 8 mod 41 se repetă din 20 în 20, trebuie să aflăm restul împărțirii lui $13^{5^{13}}$ mod 20.

$$\left.\begin{array}{l} 13^1 = 13 \\ 13^2 = 9 = 13 \cdot 13 \bmod 20 \\ 13^3 = 17 = 13^2 \cdot 13 \bmod 20 \\ 13^4 = 1 = 13^3 \cdot 13 \bmod 20 \end{array}\right\} \text{MOD } 20.$$

$13^5 = 13 = 13^1$

Deci puterile lui 13 MOD 20 se repetă din 4 în 4, trebuie să aflăm restul împărțirii lui 5^{13} la 4.

$(5,4)=1 \overset{\text{Euler}}{\Rightarrow} 5^{\varphi(4)} \equiv 1 \pmod 4$

$\varphi(4) = 4\left(1-\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$

$\Rightarrow 5^2 \equiv 1 \pmod 4$

$\Rightarrow 5^{13} \bmod (4) = 5 \bmod 4 = 1$

Deci restul lui 5^{13} la împărțirea cu $4 = 1$

$\Rightarrow$ Restul lui $13^{5^{13}}$ la împ cu $20 = 13$

$\Rightarrow$ Restul lui $8^{13^{5^{13}}}$ la împ cu 41 este 21

Student: GHEORGHE G. LIVIU-IONUȚ

Grupa: 144

$a = 8, b = 5$

5. $A = \{x, \dots, a+b\}$ unde $x = \min(a, b)$

$\Rightarrow A = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$

Det o rel de ech ρ pe mulțimea A cu prop că mulțimea factor A/ρ are exact 4 clase de ech dif, iar clasa de ech a lui 8 să conțină doar 8 și 5.

O relație de echivalență pe mulțimea A cu proprietățile cerute este următoarea:

$$\rho = \{\{5, 8\}, \{6, 7\}, \{11\}, \{9, 10, 12, 13\}\}$$

$|A/\rho| = 4$

$\hat{5} = \{5, 8\}$

$$\bigcap_{\hat{a} \in A/\rho} = A$$

$$\bigcup_{\hat{a} \in A/\rho} = \emptyset$$

Deci ρ este rel. de ech. pe A.

UNGUREANU LIVIU-IONUȚ

Grupa: 144

$a = 8, b = 5$

6. Det numărul elementelor de ordin 9 din grupul produs direct

$(\mathbb{Z}_{3^8}, +) \times (\mathbb{Z}_{3^5}, +)$

În grupul produs direct $(\mathbb{Z}_t, +) \times (\mathbb{Z}_u, +)$,

ordinul unui element $(\hat{a}, \bar{b}) = [ord(\hat{a}), ord(\bar{b})]$,

cu $\hat{a} \in \mathbb{Z}_t$, $\bar{b} \in \mathbb{Z}_u$ și $ord(\hat{a})$ = ordinul lui $\hat{a}$ în $\mathbb{Z}_t$,

$ord(\bar{b})$ = ordinul lui $\bar{b}$ în $\mathbb{Z}_u$.

Fie $\hat{a} \in \mathbb{Z}_{3^8}$, $\bar{b} \in \mathbb{Z}_{3^5}$ și $m = ord(\hat{a})$, $n = ord(\bar{b})$

$[m, n] = 9$

Din thm Lagrange $\Rightarrow \begin{cases} ord(\hat{a}) \mid 3^8 \\ ord(\bar{b}) \mid 3^5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \mid 3^8 \\ n \mid 3^5 \end{cases}$

$1, 3, 9 \mid 3^8$ ✓

$1, 3, 9 \mid 3^5$ ✓

$\Rightarrow$ Perechile posibile sunt

$(m, n) \in \{(1,9), (3,9), (9,9), (9,3), (9,1)\}$

Student: GHEORGHE G. LIVIU-IONUȚ

Grupa: 144

Determinăm toate posibilitățile pentru n și m.

Pentru m:

Ne folosim de faptul că, în $\mathbb{Z}_{3^8}$, $ord(\hat{a}) = \frac{3^8}{(3^8, a)}$

$m = 1 \Rightarrow 1 = \frac{3^8}{(3^8, a)} \Rightarrow a = 3^8 \Rightarrow \hat{a} = \hat{0} \Rightarrow$ 1 pos.

$n = 3 \Rightarrow 3 = \frac{3^8}{(3^8, a)} \Rightarrow (3^8, a) = 3^7 \Rightarrow \hat{a} \in \{\widehat{3^7}, \widehat{3^7 \cdot 2}\} \Rightarrow$

2 pos.

$m = 9 \Rightarrow 9 = \frac{3^8}{(3^8, a)} \Rightarrow (3^8, a) = 3^6 \Rightarrow a \in \{\widehat{3^6}, \widehat{3^6 \cdot 2}, \widehat{3^6 \cdot 4}, \widehat{3^6 \cdot 5}, \widehat{3^6 \cdot 7}, \widehat{3^6 \cdot 8}\}$

$\Downarrow$

6 pos.

Pentru m:

Ne fol de faptul că în $\mathbb{Z}_{3^5}$ $ord(\bar{S}) = \frac{3^5}{(3^5, S)}$

$m = 1 \Rightarrow 1 = \frac{3^5}{(3^5, S)} \Rightarrow (3^5, S) = 3^5 \Rightarrow S = 3^5 \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{S} \in \hat{0} \Rightarrow$ 1 pos.

$n = 3 \Rightarrow 3 = \frac{3^5}{(3^5, S)} \Rightarrow (3^5, S) = 3^4 \Rightarrow \bar{b} \in \{\widehat{3^4}, \widehat{3^4 \cdot 2}\}$

$n = 9 \Rightarrow 9 = \frac{3^5}{3^5, S} \Rightarrow (3^5, S) = 3^3 \Rightarrow \bar{S} \in \{\widehat{3^3}, \widehat{3^3 \cdot 2}, \widehat{3^3 \cdot 4}, \widehat{3^3 \cdot 5}, \widehat{3^3 \cdot 7}, \widehat{3^3 \cdot 8}\}$

$\Rightarrow$ 6 pos.

Student: GHEORGHE G. LIVIU-IONUȚ

Grupa: 144

Avem:

$n = 1 \Rightarrow 1$ pos.

$n = 3 \Rightarrow 2$ pos

$n = 9 \Rightarrow 6$ pos

$m = 1 \Rightarrow 1$ pos

$m = 3 \Rightarrow 2$ pos

$m = 9 \Rightarrow 6$ pos

(n, m) este

- $(1, 9) \Rightarrow 1 \cdot 6 = 6$ pos
- $(3, 9) \Rightarrow 2 \cdot 6 = 12$ pos
- $(9, 9) \Rightarrow 6 \cdot 6 = 36$ pos
- $(9, 3) \Rightarrow 6 \cdot 2 = 12$ pos
- $(9, 1) \Rightarrow 6 \cdot 1 = 6$ pos

$\Rightarrow$ Nr. de elem de ordin 9 în $(\mathbb{Z}_{3^8}, +) \times (\mathbb{Z}_{3^5}, +)$

este egal cu 72 $(2 \cdot 6 + 2 \cdot 12 + 36$

Student: GHEORGHE G. LIVIU-IONUȚ

Grupa: 144

$a = 8, b = 5$

1. Dați este un exemplu sau justificați de ce nu există, în caz contrar:

- Fcț injectivă, care nu este surjectivă,

$f : (-\infty, \frac{8}{5}] \to [\frac{5}{8}, +\infty)$

DA, există

Ex. $f : (-\infty, \frac{8}{5}) \to [\frac{5}{8}, +\infty)$,

$f(x) = x$

f injectivă (gr I), însă nesurjectivă ($\mathrm{Im} f = (-\infty, \frac{8}{5})$),

$\nexists$ $x \in (-\infty, \frac{8}{5})$ a.î. $f(x)$ să fie $> \frac{8}{5}$ (ex. 100).

- Funcție surjectivă, care nu este injectivă,

$g : [\frac{8}{5}, \infty) \to (-\infty, \frac{5}{8})$

DA, există.

Ex. $g[\frac{8}{5}, \infty) \to (-\infty, \frac{5}{8})$, $g(x) = \begin{cases} tg\, x, & \text{dc. } x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} / k \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$

$\mathrm{Im} f = \mathbb{R}$, $(-\infty, \frac{5}{8}) \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow g$ surj

Dar $g(100) = g(100 + \pi) \Rightarrow g$ nu e inj.

Student: GHEORGHE G. LIVIU-IONUȚ

Grupa: 144

- Funcție surjectivă $h : (5,8) \to \mathbb{N}$

NU:

Deoarece $\mathbb{R}$ nu este în surjecție cu $\mathbb{N}$, iar $(5,8)$ este un interval $\in \mathbb{R}$, este la fel de „dens" ca $\mathbb{R}$, deci proprietatea că nu există o surjecție de la $(5,8)$ la $\mathbb{N}$ se păstrează: $(5,8)$ nu este numărabilă.

8. $a=8$, $S=5$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 8x + 45, & \text{dacă } x < -5 \\ 8x^2 + 112x + 347, & \text{dacă } x \geq -5 \end{cases}$$

$8^3 - 2\cdot 8^2 + 8 + 5 = 397$

Vf. dc. f este inj, surj, bij și calc. $f^{-1}([-13,13])$

Fie $f_1, f_2 : (-\infty,-5)$ resp $[-5,\infty)$,

$f_1 = 8x+45$

$f_2 = 8x^2+112x+347$

f_1 inj (gr I) $\Leftarrow\!\!\!\!/\ f\nearrow \Rightarrow \operatorname{Im} f = (-\infty, \lim_{x\to -5} f_1(-5))$

$a = 8 > 0$

$= (-\infty, 5)$

Student: GHEORGHE G. Iulia-Ionuț

Grupa: 144

Pt. f_2:

$-\frac{b}{2a} = -\frac{112}{16} = -7$; $f_{2\,min} = f(-\frac{b}{2a}) = f(-7)$

$f_2(-\frac{b}{2a}) = f(-7) = 8 \cdot 49 + 112 \cdot (-7) + 397 = 5$

Dar $-7 < -5 \Rightarrow -7 \notin [-5, \infty)$

Cum $a = 8 > 0 \Rightarrow$ ~~$Im f = [f_2(-5), f(-7)), +\infty]$~~

$Im f_2 = [f(-5), \infty)$

$f_2(-5) = 8 \cdot 25 + 112 \cdot (-5) + 397 = 37$

$\Rightarrow Im f_2 = [37, \infty)$

Asadar, $Im f_1 = (-\infty, 5)$

$Im f_2 [37, \infty)$

Cum $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f este evident nesurjectivă $\Rightarrow$ nu e bijectivă.

f_2 injectivă pe $[-\frac{b}{2a}, \infty)$ $\Rightarrow f_2$ inj pe $[-5, \infty)$

$-\frac{b}{2a} = -7 < -5$

f_1 injectivă pe $(-\infty, -5)$ (f_1 de gr I)

$f_{1\,max} < f_{2\,min} \Rightarrow f$ injectivă.

Deci f este injectivă, însă nu este nici surjectivă nici bijectivă.

9. Considerăm inelele produs direct $R = \mathbb{Z}[x] \times \mathbb{Z}[x]$ și $a = 8, S = 5$

$S = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Def. $\phi : R \to S$ astfel:

$\phi(P(x), Q(x)) = (P(8), Q(5))$. Dem că ϕ este un morfism de inele. Det $Ker(\phi)$, nucleul morfismului ϕ.

Dem că ϕ îndeplinește toate prop unui morfism de inele.

a) în $\mathbb{Z}[x]$ elem neutru este polinomul $P_E(x) = 1 \Rightarrow$

în $\mathbb{Z}[x] \times \mathbb{Z}[x]$ elem neutru este $P_{E'}(1, 1)$

$\Rightarrow$ ~~$\phi(P(1), P(1))$~~ $\phi(1, 1) = (P_{E'}(8), P_{E'}(8))$

Cum $P_{E'}(x) = 1$ $(\forall)$ $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow (P_{E'}(8), P_{E'}(5)) = (1, 1) = 1_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$

$\Rightarrow \phi(1_{\mathbb{Z}[x] \times \mathbb{Z}[x]}) = 1_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$ ✓ (1)

b) Fie $(P_1(x), Q_1(x))$ și $(P_2(x), Q_2(x)) \in \mathbb{Z}[x] \times \mathbb{Z}[x]$

$\phi((P_1(x), Q_1(x)) + (P_2(x), Q_2(x))) = \phi((P_1(x) + P_2(x)), (Q_1(x) + Q_2(x)))$

$= (P_1(8) + P_2(8), Q_1(5) + Q_2(5)) = (P_1(8) + P_2(8), Q_1(5) + Q_2(5))$

$\phi(P_1(x), Q_1(x)) + \phi(P_2(x), Q_2(x)) = (P_1(8), Q_1(5)) + (P_2(8), Q_2(5))$

$= (P_1(8) + P_2(8), Q_1(5) + Q_2(5))$

$\Rightarrow$ ~~Cum~~ $\phi((P_1(x), Q_1(x)) + (P_2(x), Q_2(x))) = \phi((P_1(x), Q_1(x)) + \phi((P_2(x), Q_2(x))$ $(\forall)(P_1(x), Q_1(x))$ și $(P_2(x), Q_2(x)) \in \mathbb{Z}[x] \times \mathbb{Z}[x]$ (2)

Continuare pe pagina următoare (9')

Student: GHEORGHE G. LIVIU-IONUȚ

Grupa: 144.

$$\phi((P_1(x), Q_1(x)) \cdot (P_2(x), Q_2(x))) =$$
$$\phi((P_1(x) \cdot P_2(x), Q_1(x) \cdot Q_2(x))) =$$
$$(P_1(8) \cdot P_2(8), Q_1(5) \cdot Q_2(5)) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

$$\phi(P_1(x), Q_1(x)) \cdot \phi(P_2(x), Q_2(x)) =$$
$$(P_1(8), Q_1(5)) \cdot (P_2(8), Q_2(5)) =$$
$$(P_1(8) \cdot P_2(8), Q_1(5) \cdot Q_2(5))$$

$$\Rightarrow \phi((P_1(x), Q_1(x)) \cdot (P_2(x), Q_2(x))) =$$
$$\phi((P_1(x), Q_1(x))) \cdot \phi((P_2(x), Q_2(x))) \ (\forall)$$
$$(P_1(x), Q_1(x)) \text{ și } (P_2(x), Q_2(x)) \} \in \mathbb{Z}[x] \times \mathbb{Z}[x] \quad (3)$$

Din (1), (2), (3) $\Rightarrow \phi$ morfism de inele

$\text{Ker}\,\phi$ este repr. de mulțimea tuturor ~~polinoamelor~~ perechilor de polinoame din $\mathbb{Z}[x] \times \mathbb{Z}[x]$ cu prop că, trecute prin funcția ϕ, dau $(1,1)$, INDIFERENT de nedeterminata x. Singurul polinom din $\mathbb{Z}[x]$ cu prop că $P(x) = 1$ $(\forall)$ $x \in \mathbb{Z}$ este $P(x) = 1$, deci $\text{Ker}\,f$ este alcătuit din ~~polinoamele~~ perechea de polinoame $\wedge_{\mathbb{Z}[x] \times \mathbb{Z}[x]}$ determinat anterior, deci constante $(1,1)$. Morfismul ϕ este ~~o~~ ~~dar~~ injectiv.

Student: GHEORGHE G. LIVIU-IONUȚ

Grupa: 144

$a=8$, $b=5$

10\. Det. toate numerele întregi cu prop. că

$$\begin{cases} x \equiv 8 \pmod{11} \\ x \equiv 9 \pmod{12} \\ x \equiv 10 \pmod{13} \end{cases}$$

Se utilizează Lema chineză a resturilor:

$m_1 = 11$
$m_2 = 12$
$m_3 = 13$

$a_1 = 8$
$a_2 = 9$
$a_3 = 10$

11, 12, 13 prime între ele 2 câte 2.

Fie $M = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 = 11 \cdot 12 \cdot 13 = 1716$

$$M_1 = \frac{M}{m_1} = \frac{M}{11} = 156$$

$$M_2 = \frac{M}{m_2} = \frac{M}{12} = 143$$

$$M_3 = \frac{M}{m_3} = \frac{M}{13} = 132$$

$\Rightarrow \quad x \equiv a_1 M_1 y_1 + a_2 M_2 y_2 + a_3 M_3 y_3 \pmod{M}, \ (i)$

unde $\quad M_i y_i \equiv 1 \pmod{m_i}$ cu $i = \overline{1,3}$

Pt. $i=1$

$156 \cdot y_1 \equiv 1 \pmod{11}$

$\Rightarrow \underline{y_1 = 6}, \quad 156 \cdot 6 = 85 \cdot 11 + 1$

Pt $i=2$

$143 \cdot y_2 \equiv 1 \pmod{12}$

$\Rightarrow \underline{y_2 = 11}, \quad 143 \cdot 11 = 131 \cdot 12 + 1$

GHEORGHE G. LIVIU-IONUȚ
Grupa: 144

Pt $i=3$

$132 \cdot y_3 \equiv 1 \pmod{13}$

$\Rightarrow \underline{y_3 = 7}$, $132 \cdot 7 = 71 \cdot 13 + 1$

$\overset{(1)}{\Rightarrow} \quad x \equiv 8 \cdot 156 \cdot 6 + 9 \cdot 143 \cdot 11 + 10 \cdot 132 \cdot 7 \pmod{1716}$

$\Rightarrow x \equiv 30885 \pmod{1716}$

$30885 \equiv 1713 \pmod{1716}$

$\Rightarrow \quad x \equiv 1713 \pmod{1716}$

$\Rightarrow$ Numerele întregi care satisfac cerințele problemei sunt de forma $1713 + 1716k$, cu $k \in \mathbb{Z}$ sau mulțimea $\hat{1713}$ din $\mathbb{Z}_{1716}$