Turdui Vlad-Bores,   1.09.2022
grupa 141

Examen la algebră

1. nume - Turdui Vlad Bores

$n = 6$
$s = 5$

2. Nr de perm. impare, dacă există, de ordin 5 din S_6
Considerăm σ = permutare de ordin 5, de forma $(\sigma_1, \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_5)$
~~ord~~

$\sigma = (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_5) = (\sigma_1 \sigma_2)(\sigma_2 \sigma_3)(\sigma_3 \sigma_4)(\sigma_4 \sigma_5) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ 4 cicli de ord par $\Leftrightarrow$ } $\Rightarrow$ ∞
dar σ are ord 5 (ipoteză) } și este impară $\Rightarrow$ Nu există permutări impare de ordin 5 din S_6

3.

FURDUI VLAD-MARES

(3) Se consideră ciclul de lungime 6, $\sigma = (6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11)$ din S_{11}

Det. nr. permutărilor $\tau \in S_{11}$, dacă există, a.î. $\tau^5 = \sigma$

Pp că $\exists \tau$ a.î. $\tau^5 = \sigma$

Fie $\tau = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_k$ descompunere în produs de cicli disjuncți de lungime >1

$ord(\tau_1) + \dots + ord(\tau_k) \leq n$, cu $k \geq 1$.

$\tau^5 = \tau_1^5 \tau_2^5 \dots \tau_k^5$

notăm l_i - lungimea lui τ_i, $l_i < 11$

$\tau_i^5 \xrightarrow{5 | l_i}$ produs de 5 cicli disjuncți de lungime $\frac{l_i}{5}$

$\boxed{5 \nmid l_i} \rightarrow$ ciclu de lungime l_i

$\tau^5 = (6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11)$

$\Rightarrow (\exists)$ un ciclu de lungime 6, iar celelalte 5 numere pot forma un ciclu de lungime 5, sau 5 cicli de lungime 1

1 $\tau^5_1 = (6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11) = (6\ 11\ 10\ 9\ 8\ 7)$ I

$\Rightarrow \tau = (x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5)(6\ 11\ 10\ 9\ 8\ 7)$

$\Rightarrow (\exists)\ \frac{P_5}{5} = \frac{5!}{5} = 4! = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ cicli de lungime 5.

II $\tau = (6\ 11\ 10\ 9\ 8\ 7)$ #

din I și II $\Rightarrow$ sunt $24 + 1 = 25$ de permutări τ a.î. $\tau^5 = \sigma$

(4)

FUMDUI VLAD ANDREI

$5^{11^{6^6}} \pmod{37}$

Vom nota (mod 37) cu (37)

$(5,37)=1 \xrightarrow{\text{Euler}} 5^{\varphi(37)} \equiv 1\ (37)$
37 prim $\Rightarrow \varphi(37)=36$
$\Rightarrow 5^{36} \equiv 1 (37)$

Este suficient să calculez $11^{6^6} (36)$

$(11,36)=1 \xrightarrow{\text{Euler}} 11^{\varphi(36)} \equiv 1\ (36)$
$\varphi(36)=36\cdot(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3}) = 36\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{3}=\frac{36}{3}=12.$
$\Rightarrow 11^{12} \equiv 1 (36)$

$\Rightarrow$ Este suficient să calculez $6^6 (12)$

$6^6 (12) = (6^2)^3 (12) = 36^3 (12) = (3\cdot 12)^3 (12)$

$=0$

$\Rightarrow 11^{6^6} (36) \equiv 11^0 (36) \equiv 1(36) = 1$

$\Rightarrow 5^{11^{6^6}} (37) \equiv 5^1 (37)$

$\Rightarrow 5^{11^{6^6}} \bmod 37 = 5$

FORDUI VLAD-MARES

(5)

Deoarece o relație de echivalență pe A este echivalentă cu o partiție a mulțimii A, vom da explicit relația de echivalență listând mulțimile unei partiții a lui A. Astfel, mulțimile partiției vor repr. clase de echivalență ale relației ρ

$\{6\} = \{5\} = \{5, 6\}$

$\{9\} = \{8\} = \{7\} = \{7, 8, 9\}$

$\{10\} = \{10\}$

$\{12\} = \{11\} = \{11, 12\}$

$\{13\} = \{13\}$

$n = \operatorname{rk}(A) + \operatorname{Ker} A)$

$A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$B: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$

Observăm că mulțimile listate sunt disjuncte și reuniunea lor este egală cu A, deci repr. o partiție a lui A și deci induce o relație de echivalență cu respectivele 5 clase. $\{5\} = \{6\} = \{5, 6\}$, deci cerința este respectată.

(6)

FOMNUI
VLAD-MAMEȘ

Fie H subgrupul ciclic al lui $(G,+)=(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},+)$, generat de elementul $(18,15)$. Este grupul factor G/H ciclic?

~~Grupul factor G/H ciclic es~~

Pp că grupul factor G/H este ciclic, atunci acesta este izomorf fie cu $(\mathbb{Z},+)$, fie cu $(\mathbb{Z}_m,+)$, din Teorema de str a grupurilor ciclice.

Dar $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/\langle(18,15)\rangle$ conține elementul $(\widehat{6,5})$ cu ordin 3 și elementul $(\widehat{1,1})$ cu ordin infinit

$\Rightarrow$ ꭍ $\Rightarrow$ acesta nu este ciclic.

FUMAUI
VLAD-MAMEȘ

(7)

X_5 și X_{11}.

$X_5=\{5,6,7\ldots\}$ $X_6=\{6,7\ldots\}$

a) funcție injectivă, care nu este surjectivă, $f_{a,b}: X_6 \times X_5 \to X_{11}$

$f(a,b)=2b+2$

Fie (a,b), (c,d) a.î. $f(a,b)=f(c,d) \Rightarrow 2b+2=2d+2 \mid -2$

$\Rightarrow 2b=2d \mid :2 \Rightarrow b=d$ injectivă

Dar f nu este surjectivă, deoarece $f(a,5)=2\cdot5+2=12$, 5 fiind cea mai mică val din $X_5 \Rightarrow$ nu va lua valoarea 11

b) funcție surjectivă, dar ne injectivă.

$g(a,b)=a+b$

luăm $g(6,6)=g(7,5) \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} 6+6=12 \\ 7+5=12 \\ (6,6)\neq(7,5) \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ nu este inj.}$$

Se observă că f este surjectivă deoarece $g(5,6)$, minimele celor două mulțimi, este egal cu 11, minimul codomeniului $\Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{Im} g = X_{11}$

FUMDUI

FUMDUI
VLAD MARES

~~e) f bijectivă, f: $X_A + X_B \to X_{A+B} \times Y_{A+B}$~~
~~f(a,b)~~

c) h bijectivă, $h_{5,6}: X_5 + X_6 \to X_{11} \times X_{11}$
bij <=> inj și surj
injectivitate

$$f(a,b) = f(c,d)$$

$$\Rightarrow (2a-1, 2b+1) = (2c-1, 2d+1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a-1 = 2c-1 \\ 2b+1 = 2d+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases} \Rightarrow f \text{ injectivă } (1)$$

f surj.

f(6,5), minimele, este egal cu (11,11), minimele codomeniului, observându-se că valorile vor crește => Imf = $X_{11} \times X_{11}$ => surj (2)

din (1) și (2) => bij

(8)

FUNCȚII
VCADRATICE

$$f(x) = \begin{cases} x^2+4x-2, & x \le -2 \\ -4x-3, & x \in (-2,1) \\ -x^2+4x-9, & x \ge 1 \end{cases}$$

a) Este f pe $(1,12]$ injectivă?

$x \in (1,12] \Rightarrow f(x) = -x^2+4x-9 \Rightarrow$ funcție de gradul II

$\Rightarrow f(x)$ injectivă $\Leftrightarrow (1,12] \subseteq A$ sau $(1,12] \subseteq B$, unde

$A = (-\infty; -\frac{b}{2a}]$ și $B = [-\frac{b}{2a}, \infty)$

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{4}{(-2)} = \frac{4}{2} = 2$$

Cum $(1,12] \not\subseteq (-\infty;2]$ și ~~Aș~~ $(1,12] \subseteq [2,\infty)$, f nu este injectivă pe $(1,12]$.

b) $f^{-1}((-a,5])$

$(-a,5] = (-6,5]$.

$f(-6,5] = f(-6,-2] \cup f(-2,1) \cup f[1,5]$

I $\left.\begin{array}{l} x \in \cancel{[-2}\ (-\infty,-2] \\ f(x) \in (-6,5] \end{array}\right| \Rightarrow -6 < x^2+4x-2 \le 5 \mid -2$

$\Rightarrow -8 < x^2+4x-4 \le 3$

$\Rightarrow -8 < (x-2)^2 \le 3$

FURDUI VLAD-MARIUS

$\Rightarrow (x-2)^2 \leq 3 \Rightarrow -\sqrt{3} \leq x-2 \leq \sqrt{3} \mid +2$

$\Rightarrow 2-\sqrt{3} \leq x \leq 2+\sqrt{3}$

$\Rightarrow x \in [2-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3}] \cup (-\infty, -2]$

$\Rightarrow x \in \emptyset$ (1)

II $x \in (-2,1)$, $f(x) \in (-5,6]$ $\Rightarrow -5 < -4x-3 \leq 6 \mid +3$

$\Rightarrow -2 < -4x \leq 9 \mid \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \Rightarrow \frac{1}{2} > x \geq -\frac{9}{4}$

$\Rightarrow x \in \left[-\frac{9}{4}, \frac{1}{2}\right) \cap (-2,1) \Rightarrow x \in \left(-2, \frac{1}{2}\right]$ (2)

III $x \in [1,\infty)$, $f(x) \in (-5,6]$ $\Rightarrow -5 < -x^2+4x-9 \leq 6 \mid (-1)$

$\Rightarrow -6 \leq x^2-4x+9 < 5 \mid -5 \Rightarrow -11 \leq x^2-4x+4 < 0.$

$\Rightarrow -11 \leq (x-2)^2 < 0$ FALS, deoarece $(x-2)^2 \geq 0$

$\Rightarrow x \in \emptyset$ (3)

din (1), (2), (3) $\Rightarrow$ ~~$x \in f^{-1}((-5,6]$~~

$\Rightarrow f^{-1}((-5,6]) = (-2; \frac{1}{2}]$

FUNDUI
VLAD-[illegible]

(9) Fie inelul $\mathbb{Z}[x]$ și numerele întregi: ~~c = a+5, d = a5+~~
$c = 5+6 = 11$ și $d = 5\cdot 6 + 5^2 + 1 = 30 + 26 = 56$. Considerăm I, idealul lui $\mathbb{Z}[x]$, generat de c și dX. Este adevărat că polinomul $X^3 - 4X + 6 \in I$?
Este inelul factor $\mathbb{Z}[x]/I$ finit? Dacă da, calc. nr. de elemente.

$X^3 - 4X + 6 \in I$?

Pp. că $X^3 - 4X + 6 \in I \Rightarrow X^3 - 4X + 6 = 11A + 56XB$ cu $A, B \in \mathbb{Z}[x]$

$$\begin{cases} A = a_3 \cdot X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \;/ 11 \\ B = b_2X^2 + b_1X + b_0 \;/ \cdot 56X \end{cases}$$

$\Rightarrow 11a_3X^3 + 56b_2X^3 = X^3 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 11a_3 + 56b_2 = 1 \\ (11, 56) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Da, $(\exists) a_3$ și $b_2 \in \mathbb{Z}$ a.î. $11a_3 + 56b_2 = 1$

$\Rightarrow 11a^2x^2 + 56b_1x^2 = 0$

$\Downarrow$

$11a_2 + 56b_1 = 0$

$a_2 = -56,\ b_1 = 11$

Așadar, $\exists a_2, b_1 \in \mathbb{Z}$

FURDUI
VLAD-MAREȘ

(11)

Notăm $(\text{mod } 5) = (5)$

$\cap\ 4v \equiv 1 \pmod 5$

$\Rightarrow 11a_1X + 56b_0X = -4X$

FURDUI
VLAD MAREȘ

$$\left.\begin{array}{l} 11a_1 + 56b_0 = -4 \\ (11, 56) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists a_1, \exists a, b_0 \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow 11a_0 = 6$ FALS, deoarece $a_0 \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow X^3 - 4X + 6 \notin I$

Prin urmare, $\mathbb{Z}[A]/_I \simeq \mathbb{Z}_{11}$, deci este finit, cu 11 elemente.

FURNUI
VLAD-MARES

(11) Notăm $(\text{mod } 5) = (5)$

$4x \equiv 6 \pmod 5$
$5x \equiv 5 \pmod 6$
$5x \equiv 6+3 \pmod{2\cdot 5+1}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x \equiv 1 \pmod 5 \\ 5x \equiv -1 \pmod 6 \\ 5x \equiv 9 \pmod{11} \end{cases}$

Aplicăm lema chineză a resturilor.

Observăm că $(5,6) = (5,11) = (6,11) = 1$ (1)

$\begin{cases} x \equiv 4^{-1}\cdot 1 \pmod 5 \\ x \equiv 5^{-1}\cdot(-1) \pmod 6 \\ x \equiv 5^{-1}\cdot 9 \pmod{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 4\cdot 1 (5) \\ x \equiv 5(-1)(6) \\ x \equiv 9\cdot 9 (11) \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 4 (5) \\ x \equiv -5 (6) \\ x \equiv 81 (11) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 4(5) \Rightarrow a_1 = 4, N_1 = \frac{330}{5} = 6\cdot 11 = 66 \\ x \equiv 1(6) \Rightarrow a_2 = 1, N_2 = \frac{5\cdot 11\cdot 6}{6} = 55 \\ x \equiv 4(11) \Rightarrow a_3 = 4, N_3 = \frac{5\cdot 6\cdot 11}{11} = 30 \end{cases}$

$N = [5, 6, 11] \xRightarrow{(1)} N = 5\cdot 6\cdot 11 = 30\cdot 11 = 30\cdot 10 + 30 = 300 + 30 = 330$

I $66x_1 \equiv 1 (5) \xLeftrightarrow{66 \equiv 1 (5)} 1x_1 \equiv 1 (5) \Leftrightarrow x_1 \equiv 1(5)$

II $55x_2 \equiv 1(6) \Leftrightarrow x_2 \equiv 1(6) \Leftrightarrow x_2 \equiv 1 (6)$

III $30x_3 \equiv 1 (11) \Leftrightarrow 8x_3 \equiv 1 (11) \Leftrightarrow x_3 \equiv 7(11)$

$\Rightarrow x \equiv 4\cdot 66\cdot 1 + 1\cdot 55\cdot 1 + 4\cdot 30\cdot 7 \ (330)$

$x \equiv 264 + 55 + 840 \ (330)$

$x \equiv 1159 (330) \Rightarrow x \equiv 169 (330)$

$\Rightarrow x \in \{169 + k\cdot 330 \mid k \in \cancel{\mathbb{N}}\ \mathbb{Z}\}$