Examen scris
Structuri Algebrice în Informatică
25/01/2021

Nume: .... **Punctaj parţial 1.................**

Prenume: .... **Punctaj parţial 2.................**

<u>**IMPORTANT!!**</u>. **Punctul din oficiu este acordat pentru aflarea lui a şi b pe care, ulterior, le veţi înlocui în toate enunţurile problemelor. Pe foile voastre de examen veţi scrie enunţurile problemelor cu a şi b înlocuite cu valorile anterior determinate.**

$a = ...,$ $b = ...,$

unde

(1) a este egal cu maximul dintre numerele de litere ale cuvintelor care compun numele vostru de familie. (de exemplu, dacă numele de familie este Popescu-Simion atunci $a = 7$, maximul dintre 7 (nr. de litere al cuvântului Popescu) şi 6 (nr. de litere al cuvântului Simion); dacă numele de familie este Moisescu atunci $a = 8$)

(2) b este egal cu maximul dintre numerele de litere ale cuvintelor care compun prenumele vostru. (de exemplu, dacă prenumele este Andreea-Beatrice-Luminiţa atunci $b = 8$, maximul dintre 7 (nr. de litere al cuvântului Andreea) şi 8 (nr. de litere atât al cuvântului Beatrice cât şi al cuvântului Luminiţa).)

Problema	Punctaj	Total
1	1	
2	1	
3	1	
4	1	
5	1	
6	1	
7	1	
8	1	
9	1	
oficiu	1	
Total	10	

Justificaţi toate răspunsurile!

1. Există permutări de ordin $a \cdot b - 1$ în grupul de permutări S_{a+b}?

2. Se consideră permutarea $\sigma = (1, \ldots, a)(a+1, \ldots, a+b)$, un produs de 2 cicli disjuncţi de lungime a, respectiv b, din S_{a+b}. Determinaţi toate permutările $\tau \in S_{a+b}$ astfel încât $\tau^3 = \sigma$.

3. Calculaţi $a^{a^{b^b}} \pmod{31}$.

4. Considerăm polinomul cu coeficienţi întregi $P(X) = X^3 - aX + b$. Determinaţi dacă polinomul $P(X)$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.

5. Determinaţi numărul elementelor de ordin 8 din grupul produs direct $(\mathbb{Z}_{2^a}, +) \times (\mathbb{Z}_{2^b}, +)$.

6. Fie p cel mai mic număr prim din descompunerea în factori primi a lui a şi q cel mai mare număr prim mai mic sau egal cu $a+b$, diferit de p. Pentru un număr natural nenul n notăm cu $\exp_p(n)$ exponentul la care apare p în descompunerea în factori primi a lui n. Considerăm pe $\mathbb{N}$ relaţia binară ρ dată astfel: $m\rho n$ dacă $\exp_p(n) = \exp_p(m)$ şi $\exp_q(n) = \exp_q(m)$. Să se arate că ρ este relaţie de echivalenţă, să se calculeze clasele de echivalenţă ale lui a şi b şi să se determine un sistem complet de reprezentanţi pentru această relaţie de echivalenţă.

7. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definită astfel:

$$f(x) = \begin{cases} ax + b(1+a), & \text{dacă } \ x < -b, \\ ax^2 + 2a(a-1)x + a^3 - 2a^2 + a + b, & \text{dacă } \ x \geq -b. \end{cases}$$

   Decideţi dacă funcţia f este injectivă, surjectivă, respectiv bijectivă. Calculaţi $f^{-1}([-b-1, b+1])$.

8. Demonstraţi că inelul factor $\mathbb{Q}[X]/(X^2 - a^2 - a)$ este izomorf cu inelul $(\mathbb{Q}[\sqrt{a^2+a}], +, \cdot)$, unde $\mathbb{Q}[\sqrt{a^2+a}] = \{\alpha + \beta\sqrt{a^2+a} | \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\}$.

9. Determinaţi constantele $c, d \in \mathbb{Q}$ astfel încât polinoamele $X^b - aX + 1$ şi $cX + d$ să fie în aceeaşi clasă de echivalenţă în inelul $\mathbb{Q}[X]/(X^2 - a^2 - a)$.

Guțu Ștefania - Alexandra 25-01-2021
grupa 141

Examen
Structuri algebrice în informatică

$a = 4$
$b = 9$

1. $a \cdot b - 1 = 4 \cdot 9 - 1 = 35$

S_{13}
ordin 35 în S_{13}

$35 = 5 \cdot 7$

O permutare posibilă din S_{13} de ordin 35 ($= 5 \cdot 7$) este formată dintr-un ciclu de lungime 5 și un ciclu de lungime 7.

Ex: $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)(6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12)$

2. $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13)$

$\tau \in S_{13}$, $\tau^3 = \sigma$

$sgn(\sigma) = (-1)^{4-1} \cdot (-1)^{9-1} = (-1)^3 \cdot (-1)^8 = -1 \Rightarrow \sigma$ permutare impară

$\Rightarrow \tau$ permutare impară

Fie $\tau = C_{i_1} \cdot C_{i_2} \cdot \ldots \cdot C_{i_k}$ descompunerea lui τ în produs de cicli disjuncți, unde $ord(C_{i_j}) = i_j$ $(\forall j)$ și $i_1 + i_2 + \ldots + i_k = 13$

$\tau^3 = C_{i_1}^3 C_{i_2}^3 \ldots C_{i_k}^3$

$C_{i_j}^3$ → $3 | i_j \Rightarrow C_{i_j}^3$ este produs de 3 cicli disjuncți de lungimi egale cu $i_j/3$

→ $3 \nmid i_j \Rightarrow C_{i_j}^3$ este tot un ciclu de lungime i_j.

$(1\ 2\ 3\ 4)$ → a provenit tot dintr-un ciclu de lungime 4 deoarece $3 \nmid 4$

$(5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13)$ → a provenit tot dintr-un ciclu de lungime 9, Fals deoarece $3 | 9$.

~~→ a provenit~~

$\Rightarrow$ Nu există permutări $\tau \in S_{13}$ a.î. $\tau^3 = \sigma$

5. el. de ordin 8 din $(\mathbb{Z}_{16},+)\times(\mathbb{Z}_{512},+)$

Fie $(\hat{k},\bar{l})\in\mathbb{Z}_{16}\times\mathbb{Z}_{512}$.

$ord(\hat{k},\bar{l})=[ord(\hat{k}),ord(\bar{l})]=8=2^3 \Rightarrow ord(\hat{k})|8$
$ord(\bar{l})|8$

Lagrange $\Rightarrow$ $ord(\hat{k})|16$ $\quad ord(\hat{k})|2^4$
$ord(\bar{l})|512$ $\quad ord(\bar{l})|2^9$

$D_{16}=\{1,2,2^2,2^3,2^4\}$

$D_{512}=\{1,2,2^2,2^3,2^4,2^5,2^6,2^7,2^8,2^9\}$

$(ord(\hat{k}),ord(\bar{l}))\in\{(1,8),(2,8),(4,8),(8,8),(8,1),(8,2),(8,4)\}$

$ord(\hat{k})\in\{1,2,4,8\}$

$ord(\bar{l})\in\{1,2,4,8\}$

ordin 1 în $\mathbb{Z}_{16}$ $\quad ord(\hat{x})=\frac{16}{(16,x)}=1 \Rightarrow (16,x)=1 \Rightarrow x=\hat{0}$

ordin 2 în $\mathbb{Z}_{16}$ $\quad ord(\hat{x})=\frac{16}{(16,x)}=2 \Rightarrow (16,x)=8 \Rightarrow x=\hat{8}$

ordin 4 în $\mathbb{Z}_{16}$ $\quad ord(\hat{x})=\frac{16}{(16,x)}=4 \Rightarrow (16,x)=4 \Rightarrow x\in\{\hat{4},\hat{12}\}$

ordin 8 în $\mathbb{Z}_{16}$ $\quad ord(\hat{x})=\frac{16}{(16,x)}=8 \Rightarrow (16,x)=2 \Rightarrow x\in\{\hat{2},\hat{6},\hat{10},\hat{14}\}$

ordin 1 în $\mathbb{Z}_{512}$ $\quad ord(\hat{x})=\frac{512}{(512,x)}=1 \Rightarrow (512,x)=512 \Rightarrow x=\bar{0}$

ordin 2 în $\mathbb{Z}_{512}$ $\quad ord(\hat{x})=\frac{512}{(512,x)}=2 \Rightarrow (512,x)=256 \Rightarrow x=\overline{256}$

ordin 4 în $\mathbb{Z}_{512}$ $\quad ord(\hat{x})=\frac{512}{(512,x)}=4 \Rightarrow (512,x)=128 \Rightarrow$
$\Rightarrow x=\{128,384\}$

ordin 8 în $\mathbb{Z}_{512}$ $\quad ord(\hat{x})=\frac{512}{(512,x)}=8 \Rightarrow (512,x)=64$
$\Rightarrow x=\{64,192,320,448\}$

$\# = \# ord(\hat{k})=1 \times \# ord(\bar{l})=8 + \# ord(\hat{k})=2 \times \# ord(\bar{l})=8) + \dots$

$\# = 1\cdot4+1\cdot4+2\cdot4+4\cdot4+4\cdot1+8\cdot1+4\cdot2$

$=4+4+8+16+4+8+8=$

$=52$

52 de el au ordin 8 în $(\mathbb{Z}_{16},+)\times(\mathbb{Z}_{512},+)$

$\cancel{G}$

6. $a = 2^2 \Rightarrow p = 2$

$b = 3^2 \Rightarrow \cancel{q_1 = 3}$ $a + b = 13 \Rightarrow q = 13$

$exp_2(n)$

$m \rho n$: $\begin{cases} exp_2(n) = exp_{13}(m) \\ exp_{13}(n) = exp_2(m) \end{cases}$

ρ rel. de echivalență dacă este reflexivă
simetrică
tranzitivă

ρ reflexivă dacă $a \rho a$ $(\forall) a \in \mathbb{N}$

$a \rho a \Rightarrow \begin{cases} exp_2(a) = exp_{13}(a) \\ exp_{13}(a) = exp_2(a) \end{cases}$ Adv.

ρ ~~simetrică~~ tranzitivă dacă $a \rho b$, $b \rho c \Rightarrow a \rho c$

$a \rho b \Rightarrow \begin{cases} exp_2(a) = exp_{13}(b) \\ exp_{13}(a) = exp_2(b) \end{cases}$

$b \rho c \Rightarrow \begin{cases} exp_2(b) = exp_{13}(c) \\ exp_{13}(b) = exp_2(c) \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} exp_2(a) = exp_2(c) \\ exp_{13}(a) = exp_{13}(c) \end{cases}$

ρ simetrică dacă $a \rho b \Leftrightarrow b \rho a$

$a \rho b \Rightarrow \begin{cases} exp_2(a) = exp_{13}(b) \\ exp_{13}(a) = exp_2(b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} exp_2(b) = exp_{13}(a) \\ exp_{13}(b) = exp_2(a) \end{cases} \Leftrightarrow b \rho a$

$\Rightarrow \rho$ rel de echivalență

$[a] = \{ b \in \mathbb{N} \mid a \rho b \} \Rightarrow [2^2] = \{ 13^2 \cdot \alpha, \alpha \in \mathbb{N} \} = [a]$

$[3^2] = \{ 13^0 \cdot \alpha, \alpha \in \mathbb{N} \} = [b]$

$SCR = \{ (2 \cdot 13)^0, (2 \cdot 13)^1, (2 \cdot 13)^2, \ldots \} =$

$= \{ 1, 26, 26^2, 26^3, \ldots \}$

7. $f(x) = \begin{cases} 4x+45 & x<-9 \\ 4x^2+2\cdot 12x+64-32+4+9 & , x\geq -9 \end{cases}$

$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 4x+45 & , x<-9 \\ 4x^2+24x+45 & , x\geq -9 \end{cases}$

~~Verificăm dacă~~

f injectivă dacă $(\forall)\, x, y \in \mathbb{R}$ cu $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

$f(x) = f(y)$

$4x+\cancel{45} = 4y+\cancel{45} \Rightarrow x=y$

$4x^2+24x+\cancel{45} = 4y^2+24y+\cancel{45} \Rightarrow x=y$

$x(4x+24) = y(4y+24)$

f surjectivă dacă $(\forall) y\in B$, $\exists\, x\in A$ a.î. $f(x)=y$

~~8. $\mathbb{Q}[x]/(x^2$~~

9. x^9-4x+1 , $cx+d$

$x^2-20=0$

$x^2=20 \Rightarrow x=\pm\sqrt{20}$

$x^9-4x+1 = q_1(x)\cdot(x^2-4^2-4)+r$

$cx+d = q_2(x)\cdot(x^2-4^2-4)+r$

$(\sqrt{20})^9-4\sqrt{20}+1=r$ și $(-\sqrt{20})^9+4\sqrt{20}+1=r$

$c\sqrt{20}+d=r$ $\qquad -c\sqrt{20}+d=r$

$(\sqrt{20})^9-4\sqrt{20}+1=r$

$(-\sqrt{20})^9+4\sqrt{20}+1=r$ +

$/ \quad / \quad 2=2r \Rightarrow r=1 \Rightarrow c\sqrt{20}+d=1$

$-c\sqrt{20}+d=1$

$/ \quad 2d=2 \Rightarrow d=1 \Rightarrow c=0$

3. $4^{4^{9^9}} \pmod{31} =$

$= (256)^{9^9} \pmod{31} = (8)^{9^9} \pmod{31} = (134\,217\,728)^9 \pmod{31}$

4. $P(x) = x^3-4x+9$

$P(x)$ ireductibil în $\mathbb{Q}[x]$ dacă nu are rădăcini în $\mathbb{Q}[x]$

Fie $x = \frac{p}{q}$ (p,q prime între ele) rădăcină a lui $P(x)$ ($P(x)=0$)

$p\in\{-9,-3,-1,0,1,3,9\}$ - divizorii termenului liber

~~$q\in\{-4,-2,-1,0,1,2,4\}$~~

$q\in\{-1,0,1\}$ - divizorii coeficientului dominant

$P(9) = 729 - 4\cdot 9 + 9 \neq 0$

$P(-9) = -729 + 4\cdot 9 + 9 \neq 0$

$P(0) = 9 \neq 0$

$P(3) = 27 - 12 + 9 \neq 0$ $\Rightarrow P(x)$ ireductibil în $\mathbb{Q}[x]$

$P(-3) = -27 + 12 + 9 \neq 0$

$P(1) = 1 - 4 + 9 \neq 0$

$P(-1) = -1 + 4 + 9 \neq 0$

1. Există permutări de ordin $4\cdot 9 - 1$ în grupul de permutări S_{4+9}

2. Se cons. permutarea $\sigma = (1 \ldots 4)(5 \ldots 13)$ un prod de 2 cicli disjuncți de lung 4, respectiv 9, din S_{13}. Det toate permutările $\tau \in S_{13}$ a.î. $\tau^3 = \sigma$

3. Calculați $4^{4^{9^9}} \pmod{31}$

4. Considerăm pol cu coef întregi $P(X) = X^3 - 4X + 9$. Det dacă polinomul $P(x)$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[x]$.

5. Determinați numărul elementelor de ordin 8 din grupul produs direct $(\mathbb{Z}_{24}, +) \times (\mathbb{Z}_{29}, +)$.

8. Demonstrați că inelul factor $\mathbb{Q}[x]/(x^2 - 16 - 4)$ este izomorf cu inelul $(\mathbb{Q}[\sqrt{20}], +, \cdot)$, unde $\mathbb{Q}[\sqrt{20}] = \{\alpha + \beta\sqrt{20}, \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\}$

9. Determinați constantele $c, d \in \mathbb{Q}$ a.î. polinoamele $x^9 - 4X + 1$ și $cX + d$ să fie în aceeași clasă de echivalență în inelul $\mathbb{Q}[x]/(x^2 - 20)$

7. Se cons. funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 4x + 45 \\ 4x^2 + 24x + 45 \end{cases}$$

Decideți dacă f e inj, surj, bij. Calculați $f^{-1}([-10, 10])$