Subiectul 1 :

a. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin :

$$f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\le -\frac{1}{2}\\ x^2+x+1, & x>-\frac{1}{2}.\end{cases}$$

Calculați $f([-2,0])$ și $f^{-1}([-3,3])$.

Rezolvare

$f([-2,0]) = f([-2,-\frac{1}{2}])\cup f((-\frac{1}{2},0]))$.

Pe intervalul $[-2,-\frac{1}{2}]$, $f(x)=2x+1$ funcție de gradul I strict crescătoare.

Atunci $f([-2,-\frac{1}{2}])=[f(-2),f(-\frac{1}{2})]=[-3,0]$.

Pe intervalul $(-\frac{1}{2},0]$, $f(x)=x^2+x+1$ funcție de gradul al II-lea.

$x_{vf}=-\frac{b}{2a}=-\frac{1}{2}$.

Pe $(-\frac{1}{2},+\infty)$, $f(x)=x^2+x+1$ este strict crescătoare.

Deci $f((-\frac{1}{2},0])=(f(-\frac{1}{2}),f(0)]=(\frac{3}{4},1]$.

Atunci $f([-2,0])=[-3,0]\cup(\frac{3}{4},1]$.

Imaginea funcției pe prima ramură este $(-\infty,0]$.
Imaginea funcției pe a doua ramură este $(\frac{3}{4},+\infty)$. $\Big\}\Rightarrow Im f=(-\infty,0]\cup(\frac{3}{4},+\infty)$.

$f^{-1}([-3,3])=f^{-1}([-3,0])\cup f^{-1}((0,\frac{3}{4}])\cup f^{-1}((\frac{3}{4},3])$

$f^{-1}((0,\frac{3}{4}])=\phi$ deoarece $Im f=\mathbb{R}\setminus(0,\frac{3}{4}]$.

$f(x)=-3 \Rightarrow 2x+1=-3 \Rightarrow x=-2$

$f(x)=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$.

$\Rightarrow f^{-1}([-3,0])=[-2,-\frac{1}{2}]$.

Pentru intervalul $(\frac{3}{4},3]$ suntem pe a doua ramură.

$f(x)=\frac{3}{4} \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$.

$f(x)=3 \Rightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow x_1=1$ sau $x_2=-2$, nu convine $(-2\notin(-\frac{1}{2},+\infty))$.

$\Rightarrow f^{-1}((\frac{3}{4},3])=(-\frac{1}{2},1]$.

$\Rightarrow f^{-1}([-3,3]) = [-2, -\frac{1}{2}] \cup (-\frac{1}{2}, 1] = [-2, 1]$.

b. Dați exemplu de o relație de echivalență pe mulțimea $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ ce are exact 4 clase de echivalență, fiecare dintre ele având un număr diferit de elemente, iar 1 și 10 să fie în aceeași clasă de echivalență.

Rezolvare:

Cum mulțimea claselor de echivalență este o partiție a mulțimii pe care relația de echivalență este definită, vrem 4 mulțimi $A_1, A_2, A_3, A_4$ disjuncte două câte două, de cardinale distincte, astfel încât $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = A \overset{not.}{=} \{1,2,\dots,10\}$.

Scriem 10 ca sumă a 4 numere naturale distincte nenule.

$10 = 1+2+3+4$.

Alegem $A_1 = \{2\}$, $A_2 = \{3,4\}$, $A_3 = \{1,5,10\}$, $A_4 = \{6,7,8,9\}$.

Atunci avem relația de echivalență pe $A$:

$\{(2,2), (3,3), (3,4), (4,4), (1,1), (1,5), (1,10), (5,5), (5,1), (5,10), (10,1), (10,5), (10,10), (4,3), (6,6), (6,7), (6,8), (6,9), (7,6), (7,7), (7,8), (7,9), (8,6), (8,7), (8,8), (8,9), (9,6), (9,7), (9,8), (9,9)\}$.

c. Fie mulțimea $A = \{B \in M_2(\mathbb{R}) \mid B \text{ este inversabilă}\}$ și funcția $f: A \to \mathbb{R}^*$ definită prin $f(B) = \det(B)$. Este $f$ surjectivă? Dar injectivă? Este $A$ mulțime numărabilă?

Rezolvare:

$B \in M_2(\mathbb{R})$.

$B$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det(B) \neq 0$.

$\Rightarrow \operatorname{Im} f \subseteq \mathbb{R}^*$.

Fie $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Matricea $B(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ are $\det(B(\alpha)) = \alpha \neq 0$.

$\Rightarrow f(B(\alpha)) = \alpha$.

$\Rightarrow f$ este surjectivă.

Fie $B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Atunci $f(B_1) = 2 = f(B_2)$, $B_1 \neq B_2$.

$\Rightarrow f$ nu este injectivă.

$f: \mathcal{A} \to \mathbb{R}^*$, $f(B) = \det(B)$.

Cum $f$ este o funcție surjectivă al cărei codomeniu $\mathbb{R}^*$ este o mulțime nenumărabilă, rezultă că și $\mathcal{A}$ este nenumărabilă.

Observație: $\mathcal{A} \supsetneq \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R}^* \right\} \simeq \mathbb{R}^*$.

Subiectul 2:

a. Se consideră permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 6 & 2 & 7 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in S_8$. Descompuneți $\sigma$ în produs de cicli disjuncți și în produs de transpoziții. Aflați signatura și ordinul lui $\sigma$ și apoi calculați $\sigma^{-2023}$.

Rezolvare:

- $\sigma = (1\ 3\ 6)(2\ 8\ 5\ 7\ 4)$.
- $\sigma = (1\ 3)(3\ 6)(2\ 8)(8\ 5)(5\ 7)(7\ 4)$.
- $\varepsilon(\sigma) = (-1)^6 = 1$
- $\mathrm{ord}(\sigma) = [3, 5] = 15. \Rightarrow \sigma^{15} = e$
- $\sigma^{-2023} = (\sigma^{2023})^{-1}$

  $\sigma^{2023} = \sigma^{2010} \cdot \sigma^{13} = (\sigma^{15})^{134} \cdot \sigma^{13} = \sigma^{13} = \sigma^{-2}$

  $\sigma^{-2023} = (\sigma^{-2})^{-1} = \sigma^2 = (1\ 6\ 3)(2\ 5\ 4\ 8\ 7)$.

b. Determinați toate permutările $\tau \in S_8$ cu proprietatea că $\tau^2 = (1\ 2)(7\ 8)$

Rezolvare:

Fie $\tau = c_1 \ldots c_i$ descompunerea în cicli disjuncți a lui $\tau$. Notăm cu $l_i$ lungimea ciclului $c_i$.

Știm că dacă $c$ este un ciclu de lungime $l$, atunci $c^2$ este
- un ciclu de lungime $l$ dacă $2 \nmid l$
- produsul a doi cicli de lungime $\frac{l}{2}$ dacă $2 \mid l$.

$\tau^2 = c_1^2 \ldots c_i^2 = (1\ 2)(7\ 8)(3)(4)(5)(6)$.

Avem următoarele cazuri :

I. $\sigma = c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 \cdot c_4 \cdot c_5$, cu $l_1 = 4$, $l_2 = l_3 = l_4 = l_5 = 1$.

$c_1^2 = (1\ 2)(7\ 8) \Rightarrow c_1 = (1\ 7\ 2\ 8)$ sau $c_1' = (1\ 8\ 2\ 7)$.

$c_2^2 = (3) \Rightarrow c_2 = (3)$ $\qquad$ $c_4^2 = (5) \Rightarrow c_4 = (5)$

$c_3^3 = (4) \Rightarrow c_3 = (4)$ $\qquad$ $c_5^2 = (6) \Rightarrow c_5 = (6)$

Obținem soluțiile $\sigma_1 = (1\ 7\ 2\ 8)(3)(4)(5)(6)$ și
$\sigma_2 = (1\ 8\ 2\ 7)(3)(4)(5)(6)$.

II. $\sigma = c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 \cdot c_4$, cu $l_1 = 4$, $l_2 = 2$, $l_3 = l_4 = 1$.

Obținem soluțiile :

$\sigma_3 = (1\ 7\ 2\ 8)(3\ 4)(5)(6)$

$\sigma_4 = (1\ 8\ 2\ 7)(3\ 4)(5)(6)$

$\sigma_5 = (1\ 7\ 2\ 8)(3\ 5)(4)(6)$

$\sigma_6 = (1\ 8\ 2\ 7)(3\ 5)(4)(6)$

$\sigma_7 = (1\ 7\ 2\ 8)(3\ 6)(4)(5)$

$\sigma_8 = (1\ 8\ 2\ 7)(3\ 6)(4)(5)$

$\sigma_9 = (1\ 7\ 2\ 8)(4\ 5)(3)(6)$

$\sigma_{10} = (1\ 8\ 2\ 7)(4\ 5)(3)(6)$

$\sigma_{11} = (1\ 7\ 2\ 8)(4\ 6)(3)(5)$

$\sigma_{12} = (1\ 8\ 2\ 7)(4\ 6)(3)(5)$

$\sigma_{13} = (1\ 7\ 2\ 8)(5\ 6)(3)(4)$

$\sigma_{14} = (1\ 8\ 2\ 7)(5\ 6)(3)(4)$.

III. $\sigma = c_1 \cdot c_2 \cdot c_3$, cu $l_1 = 4$, $l_2 = l_3 = 2$.

Obținem soluțiile :

$\sigma_{15} = (1\ 7\ 2\ 8)(3\ 4)(5\ 6)$

$\sigma_{16} = (1\ 8\ 2\ 7)(3\ 4)(5\ 6)$

$\sigma_{17} = (1\ 7\ 2\ 8)(3\ 5)(4\ 6)$

$\sigma_{18} = (1\ 8\ 2\ 7)(3\ 5)(4\ 6)$

$\sigma_{19} = (1\ 7\ 2\ 8)(3\ 6)(4\ 5)$

$\sigma_{20} = (1\ 8\ 2\ 7)(3\ 6)(4\ 5)$.

c. Este $(\mathbb{Z}_{14}, +)$ izomorf cu un subgrup al lui $S_8$?

Rezolvare:

Cerința este echivalentă cu: există permutări de ordin 14 în $S_8$?
Fie $\sigma$ o permutare de ordin 14. Cum ordinul unei permutări este cel mai mic multiplu comun al lungimilor ciclilor din descompunerea sa în cicli disjuncți și $14 = 2 \cdot 7$, observăm că cea mai mică permutare de ordin 14 este produsul unui ciclu de lungime 7 cu o transpoziție. Dar în $S_8$ nu putem întâlni o permutare de această formă.

Subiectul 3:

a. Determinați toate elementele $\hat{k} \in \mathbb{Z}_{20}$ astfel încât grupul $(\mathbb{Z}_{20}, +)$ să fie generat de $\hat{k}$.

Rezolvare:

$\hat{k} \in \mathbb{Z}_{20}$ generează grupul $(\mathbb{Z}_{20}, +) \Leftrightarrow \text{ord}(\hat{k}) = 20 \Leftrightarrow (k, 20) = 1$.

Așadar $\hat{k} \in \{\hat{1}, \hat{3}, \hat{7}, \hat{9}, \hat{11}, \hat{13}, \hat{17}, \hat{19}\}$.

b. Determinați $\hat{k} \in \mathbb{Z}_{20}$ astfel încât să aibă loc egalitatea:

$$\hat{17}^{-26} \cdot \hat{k} \cdot \hat{7}^{2023} = \hat{3}^{-9} \text{ în } (\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{20}), \cdot).$$

Rezolvare:

$$\hat{k} = \hat{17}^{26} \cdot \hat{7}^{-2023} \cdot \hat{3}^{-9} = (-\hat{3})^{26} \cdot \hat{7}^{-2023} \cdot \hat{3}^{-9} = \hat{3}^{26} \cdot \hat{7}^{-2023} \cdot \hat{3}^{-9}$$
$$= \hat{3}^{17} \cdot \hat{7}^{-2023}.$$

$$\varphi(20) = 20\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 20 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = 8.$$

Aplicăm Teorema lui Euler și obținem:

$\hat{3}^8 = \hat{1}$ și $\hat{7}^8 = \hat{1}$.

$$\Rightarrow \hat{3}^{17} = (\hat{3}^8)^2 \cdot \hat{3} = \hat{3}.$$
$$\hat{7}^{-2023} = \hat{1} \cdot \hat{7}^{-2023} = \hat{7}^{2024} \cdot \hat{7}^{-2023} = \hat{7}.$$

Așadar, $\hat{k} = \hat{3} \cdot \hat{7} = \hat{21} = \hat{1}$.

c. Determinați numărul de elemente ale grupului factor $G = (\mathbb{Z}_4,+)\times(\mathbb{Z}_{10},+)/<(\hat{1},\bar{5})>$.

Rezolvare:

$(\mathbb{Z}_4,+)\times(\mathbb{Z}_{10},+)$ are $4\cdot 10 = 40$ elemente.

$<(\hat{1},\bar{5})>$ are $ord((\hat{1},\bar{5})) = [ord_{\mathbb{Z}_4}(\hat{1}), ord_{\mathbb{Z}_{10}}(\bar{5})] = [4,2] = 4$ elemente.

$ord_{\mathbb{Z}_4}(\hat{1}) = \frac{4}{(4,1)} = \frac{4}{1} = 4$, $ord_{\mathbb{Z}_{10}}(\bar{5}) = \frac{10}{(10,5)} = \frac{10}{5} = 2$.

Atunci G are $\frac{40}{4} = 10$ elemente.

d. Este grupul produs direct $(\mathbb{Z}_{10},+)\times(S_3,\circ)$ ciclic?

Rezolvare:

$|(\mathbb{Z}_{10},+)\times(S_3,\circ)| = |\mathbb{Z}_{10}|\cdot|S_3| = 10\cdot 3! = 10\cdot 6 = 60$.

Presupunem că există $(\hat{k},\sigma)\in\mathbb{Z}_{10}\times S_3$ astfel încât $<(\hat{k},\sigma)> = \mathbb{Z}_{10}\times S_3$. Atunci $ord((\hat{k},\sigma)) = 60$.

$ord((\hat{k},\sigma)) = [ord(\hat{k}), ord(\sigma)]$ $(= 2^2\cdot 3\cdot 5)$.

$ord(\hat{k}) \mid |\mathbb{Z}_{10}| = 10$ $(ord(\hat{k})\in\{1,2,5,10\})$.

$ord(\sigma) \mid |S_3| = 6$ $(ord(\sigma)\in\{1,2,3\})$.

Se observă că nu există elemente de ordin 60 în $\mathbb{Z}_{10}\times S_3$.

Subiectul 4.

a. Fie idealul $I = (X^2, X^3)$ al inelului de polinoame $\mathbb{R}[X]$.

1. Dați exemplu de: un polinom care aparține idealului I și are exact 6 termeni, precum și de un polinom care nu aparține idealului I și are exact 4 termeni.

$f = X^2 + X^3 + X^4 + X^5 + X^6 + X^7 \in I$. $(f = X^2\cdot f')$

$g = 1 + X^2 + X^3 + X^4 \notin I$. $(g = 1 + X^2\cdot g'$.

Dacă $g\in I$, cum $X^2 g'\in I$,

rezultă $g - X^2 g' = 1 \in I$ Ab $)$.

2. Este adevărat că $I = (X^3)$?

Dacă $I = (X^3)$, cum $X^2 \in I$, rezultă că $X^3 | X^2$. ⊥.

Mai mult, $I = (X^2, X^3) = (X^2)$ deoarece $X^2 | X^3$.

3. Determinați $\mathcal{U}(\mathbb{R}[X]/I)$.

$$\frac{\mathbb{R}[X]}{I} = \frac{\mathbb{R}[X]}{(X^2)} = \{ \widehat{aX+b} \mid a,b \in \mathbb{R} \}.$$

$$\varphi : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \{ \widehat{aX+b} \mid a,b \in \mathbb{R} \}.$$

$\varphi(f)$ = restul împărțirii lui $f$ la $X^2$.

$Ker(f) = (X^2)$.

$Im(f) = \{ \widehat{aX+b} \mid a,b \in \mathbb{R} \}$.

$\widehat{aX+b} \in \mathcal{U}(\mathbb{R}[X]/I) \iff \exists\ \widehat{cX+d} \in \mathbb{R}[X]/I$ a.î.

$$(\widehat{aX+b})(\widehat{cX+d}) = \hat{1}.$$

$$\widehat{acX^2} + (\widehat{ad+bc})\hat{X} + \widehat{bd} = \hat{1}$$

$$(\widehat{ad+bc})X + \widehat{bd} = \hat{1}$$

$\Rightarrow ad + bc = 0$

$bd = 1 \Rightarrow d = \frac{1}{b} \quad (b, d \in \mathbb{R}^*)$.

$\frac{a}{b} + bc = 0 \mid \cdot b \neq 0 \Rightarrow a + b^2c = 0 \Rightarrow b^2c = -a \Rightarrow c = -\frac{a}{b^2}$.

$$(\widehat{aX+b}) \cdot \left(\widehat{-\frac{a}{b^2}X + \frac{1}{b}}\right) =$$

$$= \widehat{-\frac{a^2}{b^2}X^2 + \frac{a}{b}X - \frac{ab}{b^2}X + \frac{b}{b}} = \hat{1}.$$

$$\mathcal{U}(\mathbb{R}[X]/I) = \{ \widehat{aX+b} \mid a,b \in \mathbb{R},\ b \neq 0 \}$$

b. Fie polinomul $P(X) = X^3 + mX - 4 \in \mathbb{Z}[X]$. Studiați ireductibilitatea lui $P$, în funcție de $m$, peste fiecare din corpurile $\mathbb{C}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}_2$.

Rezolvare:

- $\deg(P) = 3 \Rightarrow P$ este reductibil peste $\mathbb{C}$ pentru orice $m \in \mathbb{Z}$. (deoarece singurele polinoame ireductibile din $\mathbb{C}[X]$ sunt cele de gradul 1).

- $\deg(P) = 3 \Rightarrow P$ este ireductibil peste $\mathbb{Q}$ dacă și numai dacă $P$ nu are rădăcini în $\mathbb{Q}$. (chiar în $\mathbb{Z}$ deoarece coeficientul lui $X^3$ este 1)

Rădăcinile întregi (raționale) posibile ale lui $P$ sunt $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$.

$P(1) = 1 + m - 4 = m - 3 \Rightarrow P$ reductibil pentru $m = 3$.

$P(-1) = -1 - m - 4 = -m - 5 \Rightarrow P$ reductibil pentru $m = -5$.

$P(2) = 8 + 2m - 4 = 2m + 4 \Rightarrow P$ reductibil pentru $m = -2$.

$P(-2) = -8 - 2m - 4 = -2m - 12 \Rightarrow P$ reductibil pentru $m = -6$.

$P(4) = 64 + 4m - 4 = 4m + 60 \Rightarrow P$ reductibil pentru $m = -15$

$P(-4) = -64 - 4m - 4 = -4m - 68 \Rightarrow P$ reductibil pentru $m = -17$.

- În $\mathbb{Z}_2[X]$, $\hat{P}(X) = X^3 + \hat{m}X$ care este reductibil pentru orice $m \in \mathbb{Z}$.