Dănescu Adela - Gabriela, grupa 142

① Numele de familie este DĂNESCU $\Rightarrow a = 7$

Prenumele sunt ADELA (5) și GABRIELA(8)$\Rightarrow b = 8$

$$m = \min(a, b) = 7$$

$$M = \max(a, b) = 8$$

② $\tau \in S_8$ ord $\tau = 7 \underset{prim}{} \Rightarrow \tau = $ ciclu de ordin 7

Putem alege 7 el. din 8 în C_8^7 moduri.

Cu 7 el. date, $\exists$ 6! moduri de a forma cicluri cu cele 7 el $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ în total $C_8^7 \cdot 6! = 7 \cdot 6! = 7! \overset{=5040}{}$ permutări de ordin 7 în S_8

③ $\sigma = (1, 2, \ldots, 7) \cdot (8, \ldots, 16) \cdot (17, \ldots, 24)$

$$\sigma^2 = \tau$$

$$\varepsilon(\tau) = (-1)^6 \cdot (-1)^9 \cdot (-1)^8 = (-1)^{23} = -1$$

$$\Rightarrow \varepsilon(\sigma^2) = -1$$

$$\parallel$$

$$(\varepsilon(\sigma))^2 = 1$$

$\Rightarrow$ Ec. nu are soluție

④ $8^{7^{8^7}}$

$8^{30} \overset{\text{Fermat}}{\equiv} 1 (\text{mod } 31)$

$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

$\left. \begin{array}{l} 7 \equiv 1 (\text{mod } 2) \\ 7 \equiv 1 (\text{mod } 3) \\ 7 \equiv 1 (\text{mod } 5) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 7^4 \equiv 1 (\text{mod } 30) \\ 8^7 \vdots 4 \end{array} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 7^{8^7} \equiv 1 (\text{mod } 30) \Rightarrow$

$\Rightarrow 7^{8^7} = 30k + 1$

$8^{7^{8^7}} = 8^{30k+1} = (8^{30})^k \cdot 8 \equiv 8 (\text{mod } 31)$

⑤

$\left. \begin{array}{l} x \equiv 7 (\text{mod } 13) \\ x \equiv 7 (\text{mod } 14) \\ x \equiv 8 (\text{mod } 15) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x \equiv 7 (\text{mod } 182) \\ x \equiv 8 (\text{mod } 15) \end{array}$

$x \equiv 7 (\text{mod } 182) \Leftrightarrow x = 182a + 7$

$182a + 7 \equiv 8 \text{ mod } (15)$

$\Leftrightarrow 2a \equiv 1 (\text{mod } 15) \equiv 16 (\text{mod } 15) \Leftrightarrow a \equiv 8 (\text{mod } 15) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = 15k + 8 \Rightarrow x = 182(15k + 8) + 7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 1730k + 1463 \leq 9999 \Leftrightarrow k \leq 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underset{\text{max}}{x} = 1730 \cdot 4 + 1463 = 6920 + 1463 = 8383$ cel

mai mare nr. natural de 4 cifre cu proprietatea
dată

②

⑥ $(x,y) \in \mathbb{Z}_{2^7} \times \mathbb{Z}_{6^8}$

$\text{ord}(x,y) = 12 \Leftrightarrow [\text{ord } x, \text{ord } y] = 12$

În $\mathbb{Z}_{2^7}$, $\text{ord } x = 2^t$, $t \in \mathbb{N}$

$\text{ord } x \mid 12 \Rightarrow t \in \{0, 1, 2\}$

$\text{ord } x = 1 \Leftrightarrow$ ~~2^0 = 1~~ $x = 0$

$\text{ord } x = 2 \Leftrightarrow x = 2^6$

$\text{ord } x = 4 \Leftrightarrow x = 2^5$ sau $x = 3 \cdot 2^5$

$\text{ord } x = 1 \Rightarrow \text{ord } y = 12 \Leftrightarrow y = 2^6 \cdot 3^7 \cdot a$, unde $a \in \{1, 5, 7, 11\}$

$\Rightarrow$ 4 elemente

$\text{ord } x = 2 \Rightarrow \text{ord } y = 12 \Rightarrow y = 2^6 \cdot 3^7 \cdot a$, unde $a \in$
$\{1, 5, 7, 11\}$
$\Rightarrow$ 4 elemente

$\text{ord } x = 4 \Rightarrow \text{ord } y \in \{3, 6, 12\}$

i) $\text{ord } y = 3 \Rightarrow$ ~~y~~ ~~y~~ $\Rightarrow$
$\Rightarrow y \in \{2^8 \cdot 3^7, 2^9 \cdot 3^7\} \Rightarrow 2$ elemente ~~2 elemente~~

ii) $\text{ord } y = 6 \Rightarrow y \in \{2^7 \cdot 3^7, 2^7 \cdot 3^7 \cdot 5\} \Rightarrow 2$ elemente

iii) $\text{ord } y = 12 \Rightarrow 4$ elemente, analog

$\Rightarrow$ în total $4 + 4 + 2 + 2 + 4 = 16$ elemente

③

Dănescu Adela-Gabriela, grupa 142

⑦ $x \rho y \Leftrightarrow x^2 - 7x + 7 - 7 = y^2 - 7y + 8 - 8 \Leftrightarrow x^2 - 7x = y^2 - 7y$

$\Rightarrow x^2 - y^2 - 7(x-y) = 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y-7) = 0 \} \Leftrightarrow y = x$

sau $y = 7 - x$

~~$\hat{a} = 3 x \in \mathbb{R} | x = a$~~

$\hat{a} = 3 x \in \mathbb{R} | x = a$ sau $x = 7 - a \} \Leftrightarrow \hat{3} = \{0, 7\}$

$\hat{b} = 3 x \in \mathbb{R} | x = b$ sau $x = 7 - b \} \Leftrightarrow \hat{8} = \{3, -1, 8\}$

Un sistem de reprezentanți este $[x_{\hat{y}}, +\infty)$, unde $x_{\hat{y}} = \frac{7}{2}$.

$\Rightarrow$ sistem complet și independent de rep: $[\frac{7}{2}, +\infty)$

$R/\rho = 3 \hat{a} | a \in [\frac{7}{2}, \infty) \}$

$f(\hat{x}) = 2x(x-7) - 7$

~~$f($~~ $f(\overrightarrow{7-x}) = 2(7-x)(7-x-7) - 7 =$

$= 2(7-x)(-x) - 7 = 2x(x-7) - 7 = f(\hat{x}) \Rightarrow$ ~~f bine definită~~

$\Rightarrow$ funcția f e bine definită

$x \rho y \Leftrightarrow y = x$ sau $y = 7 - x$ ①

Reflexivitate: $x \rho x \ (\forall) x \in \mathbb{R}$, ~~din ① $x = x$~~
reiese din ①

Simetrie: Dacă $x \rho y \Rightarrow y = x$ sau $y = 7 - x \Leftrightarrow x = y$ sau ③
$x = 7 - y \Rightarrow y \rho x$ ③

Transitivitate: Dacă $x \rho y$ și $y \rho z \Leftrightarrow x = y$ sau $x + y = 7$
și $y = z$ sau $y + z = 7$
$\Rightarrow x = z$ sau $x + z = 7 \Rightarrow x \rho z$ ④

Din ②③,④ $\Rightarrow \rho$ e relație de echivalența

④

Sămescu Adela - Gabriela , grupa 142

⑩ $x^7 - 8x + 1$ și $cX + d$ au aceeași clasă de echivalență

în inelul $\dfrac{Q[X]}{(x^2 - 7^2 + 8)} = \dfrac{Q[X]}{(x^2 - 41)}$

$x^2 = 41 \Rightarrow x^6 = 41^3 \Leftrightarrow x^7 = 41^3 x$

$\Rightarrow \overline{x^7 - 8x + 1} = \overline{(41^3 - 8)x + 1} = \overline{cx + d}$

$\Leftrightarrow \dfrac{41^3 - 8}{c} = \dfrac{1}{d} \Leftrightarrow d = \dfrac{c}{41^3 - 8} = \dfrac{c}{68913}$, $c \in Q$

⑨ $\varphi : \mathbb{Z}_7 \to \mathbb{Z}_8$ morfism

$\varphi(\hat{m}) = \underbrace{\varphi(\hat{1}) + \dots \varphi(\hat{1})}_{m \text{ ori}} = m\,\varphi(1), \forall m \in \mathbb{Z}$

$\varphi(\hat{m}) = \varphi(\widehat{m+7}) \Leftrightarrow m\,\varphi(1) = (m+7)\,\varphi(1)$

$\Leftrightarrow 7\,\varphi(1) = 0 \Leftrightarrow \varphi(1) = 0$

$(7, 8) = 1$

$\Rightarrow \varphi(\hat{m}) = \hat{0}$ e unicul morfism de la $\mathbb{Z}_7$ la $\mathbb{Z}_8$

φ nu e nici inj, nici surj, nici bij

⑤

Dănescu Adela - Gabriela, grupa 142

⑧ $f(x) = \begin{cases} 7x + 8(1-8) & , x < 7 \\ 28x^2 - 28 \cdot 15x + 49 \cdot 23 + 8 \cdot 57, & 7 \leq x \leq 8 \\ 8x - 56 + 7, & x > 8 \end{cases}$

$f(x) = \begin{cases} 7x - 56, & x < 7 \\ 28x^2 - 420x + 1583, & x \in [7,8] \\ 8x - 49, & x > 8 \end{cases}$

⑥