Examen scris Seria 14
Structuri Algebrice în Informatică[1]
26/01/2023

Nume şi prenume: .... **Punctaj parţial 1................**

Grupa: .... **Punctaj parţial 2................**

Justificaţi toate răspunsurile!

Subiectul 1 a) Fie funcţia $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq -\frac{1}{2} \\ x^2+x+1, & x > -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Calculaţi mulţimile $f([-2,0])$ şi $f^{-1}([-3,3])$. **(3 pct.)**

b) Daţi exemplu de o relaţie de echivalenţă pe mulţimea $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ ce are exact 4 clase de echivalenţă, fiecare dintre ele având un număr diferit de elemente, iar 1 şi 10 să fie în aceeaşi clasă de echivalenţă. **(3 pct.)**

c) Fie mulţimea $\mathcal{A} = \{B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) | B \text{ este inversabilă}\}$ şi funcţia $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^*$ definită prin $f(B) = \det(B)$. Este f surjectivă? Dar injectivă? Este $\mathcal{A}$ mulţime numărabilă? **(4 pct.)**

Subiectul 2 a) Se consideră permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 6 & 2 & 7 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in S_8$. Descompuneţi σ în produs de cicli disjuncţi şi în produs de transpoziţii. Aflaţi signatura şi ordinul lui σ şi apoi calculaţi σ^{-2023}. **(3 pct.)**

b) Determinaţi toate permutările $\tau \in S_8$ cu proprietatea că $\tau^2 = (1\ 2)(7\ 8)$. **(5 pct.)**

c) Este $(\mathbb{Z}_{14}, +)$ izomorf cu un subgrup al lui S_8? **(2 pct.)**

Subiectul 3. a) Determinaţi toate elementele $\widehat{k} \in \mathbb{Z}_{20}$ astfel încât grupul $(\mathbb{Z}_{20}, +)$ să fie generat de $\widehat{k}$. **(2 pct.)**

b) Determinaţi $\widehat{k} \in \mathbb{Z}_{20}$ astfel încât să aibă loc egalitatea $\widehat{17}^{-26} \cdot \widehat{k} \cdot \widehat{7}^{2023} = \hat{3}^{-9}$ în $(U(\mathbb{Z}_{20}), \cdot)$. **(3 pct.)**

c) Determinaţi numărul de elemente ale grupului factor $G = (\mathbb{Z}_4, +) \times (\mathbb{Z}_{10}, +) / \langle(\widehat{1}, \overline{5})\rangle$. **(3 pct.)**

d) Este grupul produs direct $(\mathbb{Z}_{10}, +) \times (S_3, \circ)$ ciclic? **(2 pct.)**

Subiectul 4 a) Fie idealul $I = (X^2, X^3)$ al inelului de polinoame $\mathbb{R}[X]$.

1. Daţi exemplu de: un polinom care aparţine idealului I şi are exact 6 termeni, precum şi de un polinom care nu aparţine idealului I şi are exact 4 termeni. **(2 pct.)**

2. Este adevărat că $I = (X^3)$? **(2 pct.)**

3. Determinaţi $U(\mathbb{R}[X]/I)$, elementele inversabile ale inelului factor $\mathbb{R}[X]/I$. **(3 pct.)**

b) Fie polinomul $P(X) = X^3 + nX - 4 \in \mathbb{Z}[X]$. Studiaţi ireductibilitatea lui P, în funcţie de n, peste fiecare din corpurile $\mathbb{C}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}_2$. **(3 pct.)**

[1]**Toate subiectele sunt obligatorii. Toate răspunsurile trebuie justificate. Timp de lucru 3 ore. Fiecare subiect trebuie scris pe foi separate. Succes!**