NADU TOMA

GRUPA 141

EXAMEN SCRIS

STRUCTURI ALGEBRICE ÎN INFORMATICĂ

1. NUME : NADU
PRENUME : TOMA | $\Rightarrow a = b = 4$

2. Nr. de permutări de ordin 4 din grupul de permutări S_8.

$$\frac{A_8^4}{4} = \frac{\frac{8!}{4!}}{4} = \frac{\overset{2}{\cancel{8}}\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{\cancel{4}} = 420 \text{ de } \cancel{\text{permutări}} \text{ cicli disj. de ordin 4 din } S_8$$

Fie $\sigma \in S_8$. $\sigma = C_{i_1}\cdot\ldots\cdot C_{i_k}$ desc. lui σ în produs de cicli disjuncți; $k=\overline{1,7}$; $i_k = \overline{2,8}$; $i_1+\ldots+i_k \le 8$; C_{i_k} - cicli disj. de lungime i_k.

$$ord(\sigma) = [i_1,\ldots,i_k] = 4 = 2^2 = \underset{4<8}{[4,1]} = \underset{4+2=6<8}{[4,2]} = \underset{4+4=8}{[4,4]} = \underset{4+2+2=8}{[4,2,2]}$$

I. $k=1$, $i_1 = 4 \Rightarrow \sigma = C_4 \Rightarrow 420$ permutări

II. $k=2$, $i_1=4$, $i_2=2 \Rightarrow \sigma = C_4\cdot C_2$

$$\frac{A_8^4}{4}\cdot\frac{A_{(8-4)}^2}{2} = 420\cdot\frac{\frac{4!}{2!}}{2} = 420\cdot\frac{\cancel{4}\cdot 3\cdot 2}{\cancel{4}} = 2520 \text{ permutări}$$

III. $k=2$, $i_1=i_2=4 \Rightarrow \sigma = C_4\cdot C_4$

CONTINUARE PE PAGINA 11

$$\frac{\frac{A_8^4}{4}\cdot\frac{A_4^4}{4}}{2} = \frac{420\cdot\frac{\overset{6}{\cancel{4!}}}{\cancel{4}}}{2} = \frac{420\cdot 6}{2} = 1260 \text{ permutări}$$

NADU TOMA

GRUPA 141

3. $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7\ 8)(9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15\ 16) \in S_{16}$

Pp. că $\exists\ \tau \in S_{16}$ a.î. $\tau^3 = \sigma$. Fie $\tau = C_{i_1} \cdot \ldots \cdot C_{i_k}$ desc. în produs de cicli disj. a lui τ; $k = \overline{1,15}$; $i_k = \overline{2,16}$; $i_1 + \ldots + i_k \leq 16$; C_{i_k} – ciclu de lungime i_k

$$\tau^3 \underset{\substack{\text{disj.}\\ \text{comută}}}{\overset{\text{cicli}}{=\!=\!=}} C_{i_1}^3 \cdot \ldots \cdot C_{i_k}^3$$

Din unicitatea descompunerii în produs de cicli disjuncți $\Rightarrow i_j \not\vdots\, 3$, $\forall j = \overline{1,k}$

(altfel, descompunerea lui σ ar conține $\overset{\text{minimum}}{3}$ cicli de lungime $i_j/3$)

$\left.\begin{array}{l} ord((1\ 2\ 3\ 4)) = ord((5\ 6\ 7\ 8)) = 4 \not\vdots\, 3 \\ ord((9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15\ 16)) = 8 \not\vdots\, 3 \end{array}\right| \Rightarrow k = 3$ și putem

Pp. că $i_1 = i_2 = 4$ și $i_3 = 8$.

$\tau^3 = C_{4(1)}^3 \cdot C_{4(2)}^3 \cdot C_8^3 = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7\ 8)(9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15\ 16)$

$C_{4(1)}^3 = (1\ 2\ 3\ 4) \Rightarrow (C_{4(1)}^3)^3 = (1\ 2\ 3\ 4)^3 = C_{4(1)}^9 = C_{4(1)}^8 \cdot C_{4(1)} = (C_{4(1)}^4)^2 \cdot C_{4(1)} = e^2 \cdot C_{4(1)} = C_{4(1)} \Rightarrow C_{4(1)} = (1\ 2\ 3\ 4)^3 = (1\ 4\ 3\ 2)$

$C_{4(2)}^3 = (5\ 6\ 7\ 8) \Rightarrow (C_{4(2)}^3)^3 = (5\ 6\ 7\ 8)^3 = (C_{4(2)}^4)^2 \cdot C_{4(2)} = e^2 \cdot C_{4(2)} = C_{4(2)} \Rightarrow C_{4(2)} = (5\ 6\ 7\ 8)^3 = (5\ 8\ 7\ 6)$

NADU TOMA

GRUPA 141

3. $C_8^3 = (9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15\ 16) \Rightarrow (C_8^3)^3 = (9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15\ 16)^3$

$= C_8^9 = C_8^8 \cdot C_8 = e \cdot C_8 = C_8 \Rightarrow C_8 = (9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15\ 16)^3$

$\Rightarrow C_8 = (9\ 12\ 15\ 10\ 13\ 16\ 11\ 14)$

Așadar, $\tau = (1\ 4\ 3\ 2)(5\ 8\ 7\ 6)(9\ 12\ 15\ 10\ 13\ 16\ 11\ 14)$ soluția unică a ~~ei~~ ecuației

4. $4^{8^{4^8}} \pmod{41}$ $\qquad (\text{mod } n) \overset{\text{not.}}{=} (n)$

$(4, 41) = 1 \overset{\text{Euler}}{\Longrightarrow} 4^{\varphi(41)} \equiv 1\ (41)$

41 prim $\Rightarrow \varphi(41) = 40$

$\Rightarrow 4^{40} \equiv 1\ (41)$

Este suficient să calculez $8^{4^8}\ (40)$.

$$\begin{cases} 8^{4^8} \equiv 0\ (8) \\ 8^{4^8} \equiv a\ (5) \end{cases}$$

$(8, 5) = 1 \overset{\text{Euler}}{\Longrightarrow} 8^{\varphi(5)} \equiv 1\ (5)$

5 prim $\Rightarrow \varphi(5) = 4$

$\Rightarrow 8^4 \equiv 1\ (5)$

Calculez $4^8\ (4)$: $4^8 (4) \equiv 0\ (4) \Rightarrow 8^{4^8} \equiv 8^{4k}\ (5) \equiv 1\ (5)$

$\Rightarrow a = 1$

$$\left.\begin{cases} 8^{4^8} \equiv 0\ (8) \\ 8^{4^8} \equiv 1\ (5) \end{cases}\right| \underset{(8,5)=1}{\overset{\text{L.C.R.}}{\Longrightarrow}} 8^{4^8} \equiv 16\ (40)$$ (soluția unică a sistemului)

NADU TOMA

GRUPA 141

4.

$$\begin{cases} x \equiv 0 (8) \\ x \equiv 1 (5) \end{cases} \quad (8,5)=1 \overset{\text{LEMA}}{\underset{\text{CHINEZĂ A RESTURILOR}}{\Longrightarrow}}$$ Sistemul de congruențe are soluție unică modulo 40

$N = 8 \cdot 5 = 40$

$N_1 = \frac{40}{8} = 5 \Rightarrow N_1 x_1 (8) \equiv 5 x_1 (8) \equiv 1 (8) \Rightarrow x_1 \equiv 5 (8)$

$N_2 = \frac{40}{5} = 8 \Rightarrow N_2 x_2 (5) \equiv 8 x_2 (5) \equiv 1 (5) \Rightarrow x_2 \equiv 2 (5)$

$x = 0 \cdot 5 \cdot 5 + 1 \cdot 8 \cdot 2 = 16 \Rightarrow$ sol. unică: 16 (mod 40)

Așadar, $4^{8^{4^8}} \equiv 4^{40k+16} (41) \equiv 4^{16} (41) \equiv (4^3)^5 \cdot 4 (41) \equiv 64^5 \cdot 4 (41)$

$\equiv 23^5 \cdot 4 (41) \equiv (23^2)^2 \cdot 23 \cdot 4 (41) \equiv 529^2 \cdot 92 (41) \equiv 37^2 \cdot 10 (41)$

$\equiv 1369 \cdot 10 (41) \equiv 37 (41) \Rightarrow 4^{8^{4^8}} \equiv 37 \pmod{41}$

5. $x = \min(4,4) = 4 \Rightarrow A = \{4,5,6,7,8\}$

A, $x \rho y \Leftrightarrow exp_2(x) = exp_2(y)$, unde $exp_2(x)$ este puterea lui 2 din descompunerea în factori primi a lui x.

a) $exp_2(x) = exp_2(x) \Rightarrow x \rho x, \forall x \in A \Rightarrow$ reflexivitate

b) ~~ex~~ $x \rho y \Rightarrow exp_2(x) = exp_2(y) \Rightarrow exp_2(y) = exp_2(x) \Rightarrow y \rho x$, $\forall x,y \in A \Rightarrow$ simetrie

c) $\left.\begin{array}{l} x \rho y \Rightarrow exp_2(x) = exp_2(y) \\ y \rho z \Rightarrow exp_2(y) = exp_2(z) \end{array}\right| \Rightarrow exp_2(x) = exp_2(z) \Rightarrow x \rho z$, $\forall x,y,z \in A \Rightarrow$ tranzitivitate

NADU TOMA

GRUPA 141

5. din a), b) și c) => „ρ" relație de echivalență

$$\hat{x} = \{y \in A \mid x \rho y\} = \{y \in A \mid exp_2(x) = exp_2(y)\} =$$

$$\begin{cases} 4 = 2^2 \\ 5 = 2^0 \cdot 5^1 \\ 6 = 2^1 \cdot 3^1 \\ 7 = 2^0 \cdot 7^1 \\ 8 = 2^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} exp_2(4) = 2 \\ exp_2(5) = 0 \\ exp_2(6) = 1 \\ exp_2(7) = 0 \\ exp_2(8) = 3 \end{cases} \Rightarrow exp_2(x) \in \{0, 1, 2, 3\}, \ \forall x \in A$$

$\Rightarrow$ 4 clase de echivalență: $\begin{cases} \hat{4} = \{4\} \text{ (Adevărat)} \\ \hat{5} = \{5, 7\} \\ \hat{6} = \{6\} \\ \hat{8} = \{8\} \end{cases}$

$\Rightarrow A/\rho = \{\hat{4}, \hat{5}, \hat{6}, \hat{8}\}$, $|A/\rho| = 4$ (Adevărat)

Așadar, legea de compoziție „ρ" respectă cerințele exercițiului.

NADU TOMA

GRUPA 141

6. Nr. elem. de ordin 9 din grupul $(\mathbb{Z}_{3^4},+)\times(\mathbb{Z}_{3^4},+)$.

$\{(\hat{k},\hat{e})\in(\mathbb{Z}_{3^4},+)\times(\mathbb{Z}_{3^4},+) \mid ord((\hat{k},\hat{e}))=9\}$

$ord((\hat{k},\hat{e}))=[ord(\hat{k}),ord(\hat{e})]=9=3^2$

Lagrange $\Rightarrow \begin{cases} ord(\hat{k}) \mid 3^4 \\ ord(\hat{e}) \mid 3^4 \end{cases} \Rightarrow$ $ord(\hat{k})=3^2=9$ sau $ord(\hat{e})=3^2=9$

$3^2=9=[1,9]=[3,9]=[9,9]=[9,3]=[9,1]$

$(ord(\hat{k}),ord(\hat{e}))\in\{(1,9),(3,9),(9,9),(9,3),(9,1)\}$

$ord(\hat{k})=\frac{3^4}{(3^4,k)}\in\{1,3,9\}$, $k=\overline{1,80}$:

3 cazuri:

a) $ord(\hat{k})=1 \Rightarrow k=0$

b) $ord(\hat{k})=3 \Rightarrow \frac{3^4}{(3^4,k)}=3 \Rightarrow (3^4,k)=27$, $k=27x$, $(x,3)=1$ $\Rightarrow k=27$

c) $ord(\hat{k})=9 \Rightarrow \frac{3^4}{(3^4,k)}=9 \Rightarrow (3^4,k)=9$, $k=9x$, $(x,3)=1$ $\Rightarrow k\in\{9,18,36,45,63,72\}$

Analog $ord(\hat{e})=\frac{3^4}{(3^4,e)}\in\{1,3,9\}$, $\hat{e}\in\mathbb{Z}_{3^4}$

NADU TOMA

GRUPA 141

6. Așadar, avem 6 numere pentru $ord(\hat{k}) = 9$,
1 număr pentru $ord(\hat{k}) = 3$ și 1 număr pentru $ord(\hat{k}) = 0$.

$6 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 6 \cdot 6 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 6 = 60$ elemente de ordin 9 în $(\mathbb{Z}_{3^4}, +) \times (\mathbb{Z}_{3^4}, +)$

8. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 4x + 4(1+4), & x < -4 \\ 4x^2 + 2 \cdot 4(4-1)x + 4^3 - 2 \cdot 4^2 + 4 + 4, & x \geq -4 \end{cases}$

$f(x) = \begin{cases} 4x + 20, & x < -4 \\ 4x^2 + 24x + 40, & x \geq -4 \end{cases}$

I. $x \in (-\infty, -4) \Rightarrow f$ funcție de gradul I $\Rightarrow f$ inj.

$x < -4 \Rightarrow 4x < -16 \Rightarrow 4x + 20 < 4 \Rightarrow f(x) < 4 \Rightarrow f((-\infty, -4)) = (-\infty$

II. $x \in [-4, \infty) \Rightarrow f$ funcție de gradul al II-lea
$\Rightarrow f$ inj. $\Leftrightarrow [-4, \infty) \subseteq A$ sau $[-4, \infty) \subseteq B$, unde
$A = (-\infty; -\frac{b}{2a}]$ și $B = [-\frac{b}{2a}, \infty)$

$a = 4$, $b = 24$, $c = 40$

$\Delta = 24^2 - 4^2 \cdot 40 = -64 \Rightarrow -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{-64}{16} = 4$

$-\frac{b}{2a} = -\frac{24}{8} = -3$

$\Rightarrow V(-3, 4)$

Cum $[-4, \infty) \not\subseteq [-3, \infty)$ și $[-4, \infty) \not\subseteq (-\infty, -3] \Rightarrow f$ nu e inj.

NADU TOMA

GRUPA 141

8. $\left.\begin{array}{l} a=4>0 \\ f \text{ de gradul al II-lea} \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \geq f(-3) \Rightarrow f(x) \geq 4 \Rightarrow f([-4,\infty)) = [4,\infty)$

din I și II $\Rightarrow \begin{cases} f \text{ nu e inj. pe } [-4,\infty) \Rightarrow f \text{ nu e inj. pe } \mathbb{R} \\ \operatorname{im} f = f((-\infty,-4)) \cup f([-4,\infty)) = (-\infty,4) \cup [4,\infty) = \mathbb{R} \end{cases}$

$\Rightarrow f$ surj.

f nu e inj. $\Rightarrow f$ nu e bij.

$f^{-1}([-8,8]) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [-8,8]\}$

I. $\left.\begin{array}{l} x \in (-\infty,-4) \\ f(x) \in [-8,8] \end{array}\right| \Rightarrow -8 \leq 4x+20 \leq 8$

$-28 \leq 4x \leq -12 \Rightarrow -7 \leq x \leq -3 \Rightarrow x \in [-7,-3]$

dar $x \in (-\infty,-4) \Rightarrow x \in [-7,-4)$

II. $\left.\begin{array}{l} x \in [-4,\infty) \\ f(x) \in [-8,8] \end{array}\right| \Rightarrow -8 \leq 4x^2+24x+40 \leq 8 \quad |:4$

$-2 \leq x^2+6x+10 \leq 2$

a) $\left.\begin{array}{l} x^2+6x+12 \geq 0 \\ \Delta = 36-48 = -12 < 0 \end{array}\right| \Rightarrow x \in \mathbb{R} \cap [-4,\infty) = [-4,\infty)$

b) $\left.\begin{array}{l} x^2+6x+8 \leq 0 \\ \Delta = 36-32 = 4 \\ x_{1,2} = \frac{-6 \pm 2}{2} \begin{array}{l} \nearrow -4 \\ \searrow -2 \end{array} \end{array}\right| \Rightarrow x \in [-4,-2] \cap [-4,\infty) = [-4,-2]$

din a) și b) $\Rightarrow x \in [-4,\infty) \cap [-4,-2] = [-4,-2]$

din I și II $\Rightarrow x \in [-7,-4) \cup [-4,-2] = [-7,-2]$

$f^{-1}([-8,8]) = [-7,-2]$

NADU TOMA

GRUPA 141

10. $\begin{cases} x \equiv 4 \pmod 9 \\ x \equiv 5 \pmod{10} \\ x \equiv 6 \pmod{11} \end{cases}$ $\quad (\text{mod } m) \overset{\text{not.}}{=} (m)$

$(9, 10, 11) = 1 \xRightarrow[\text{CHINEZĂ A RESTURILOR}]{\text{LEMA}}$ sistemul de congruențe are soluție unică modulo $9 \cdot 10 \cdot 11$.

$N = 9 \cdot 10 \cdot 11 = 990$

$N_1 = \frac{N}{9} = \frac{990}{9} = 110$; $N_2 = \frac{N}{10} = \frac{990}{10} = 99$; $N_3 = \frac{N}{11} = \frac{990}{11} = 90$

$N_1 x_1 \equiv 1 (9) \Rightarrow 110 x_1 \equiv 1 (9) \Rightarrow 2x_1 \equiv 1 (9) \Rightarrow x_1 \equiv 5 (9)$

$N_2 x_2 \equiv 1 (10) \Rightarrow 99 x_2 \equiv 1 (10) \Rightarrow 9 x_2 \equiv 1 (10) \Rightarrow x_2 \equiv 9 (10)$

$N_3 x_3 \equiv 1 (11) \Rightarrow 90 x_3 \equiv 1 (11) \Rightarrow 2x_3 \equiv 1 (11) \Rightarrow x_3 \equiv 6 (11)$

Soluția unică modulo 990 este $x (990)$,

$x = 4 \cdot 110 \cdot 5 + 5 \cdot 99 \cdot 9 + 6 \cdot 90 \cdot 6 = 9895$

$9895 \equiv 985 (990)$

$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{ 985 + y \cdot 990 \mid y \in \mathbb{Z} \}$

NADU TOMA

GRUPA 141

7. a) Fie $f:(-\infty,1] \to [1,\infty)$, ~~f(x)=x+~~ $f(x)=-x+3$

$x \leq 1 \Rightarrow -x \geq -1 \Rightarrow -x+3 \geq 2 \Rightarrow f(x) \geq 2 \Rightarrow \operatorname{im} f=[2,\infty)$

$\operatorname{im} f \neq [1,\infty) \Rightarrow f$ nu este surj.

f funcție de gradul I $\Rightarrow f$ inj.

b) Fie $g:[1,\infty) \to (-\infty,1]$, $g(x)=-x^2+8x-15$

g funcție de gradul al II-lea $\Rightarrow g$ inj. doar pe $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ sau pe $[-\frac{b}{2a}, \infty)$.

$a=-1$; $b=8$; $c=-15$

$\Delta = 8^2-4\cdot 15=4 \Rightarrow -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{4}{-4} = 1$

$-\frac{b}{2a} = -\frac{8}{-2} = 4$

$\Rightarrow V(4,1)$

Cum g inj. doar pe $(-\infty,4]$ saup pe $[4,\infty)$,

iar $[1,\infty) \not\subseteq (-\infty,4]$ și $[1,\infty) \not\subseteq [4,\infty) \Rightarrow g$ nu e inj.

$a=-1<0 \Rightarrow g(x) \leq g(4) \Rightarrow g(x) \leq 1 \Rightarrow \operatorname{im} g = (-\infty,1]$

$\Rightarrow g$ surj.

NADU TOMA

GRUPA 141

7. c) cum $\mathbb{R}$ și $(4,8]$ sunt mulțimi echipotente

$\Rightarrow |\mathbb{R}| = |(4,8]|$
$\mathbb{R}$ nenumărabilă $\Bigg| \Rightarrow (4,8]$ nenumărabilă

$(4,8]$ nenumărabilă
$\mathbb{N}$ numărabilă $\Bigg/ \Rightarrow |(4,8]| > |\mathbb{N}| \Rightarrow \nexists\ h$ funcție bij., $h: (4,8] \to \mathbb{N}$

2.

$\underline{\text{IV}}$. $k=3$, $i_1=4$, $i_2=i_3=2 \Rightarrow \sigma = C_4 \cdot C_{2(1)} \cdot C_{2(2)}$

$$\frac{A_8^4}{4} \cdot \frac{\frac{A_4^2}{2} \cdot \frac{A_2^2}{2}}{2} = 420 \cdot \frac{\frac{\overset{6}{\cancel{4!}}}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}}{2} = 420 \cdot \frac{6}{2} = 420 \cdot 3 = 1260$$
permutări

din I, II, III și IV $\Rightarrow 420 + 2520 + 1260 + 1260 = 5460$ permutări de ordin 4 în S_8