Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Laboratory for High
Power Electronic Systems

Netzwerke und Schaltungen II, D-ITET

Bodeplots — Musterlösung

Hinweise

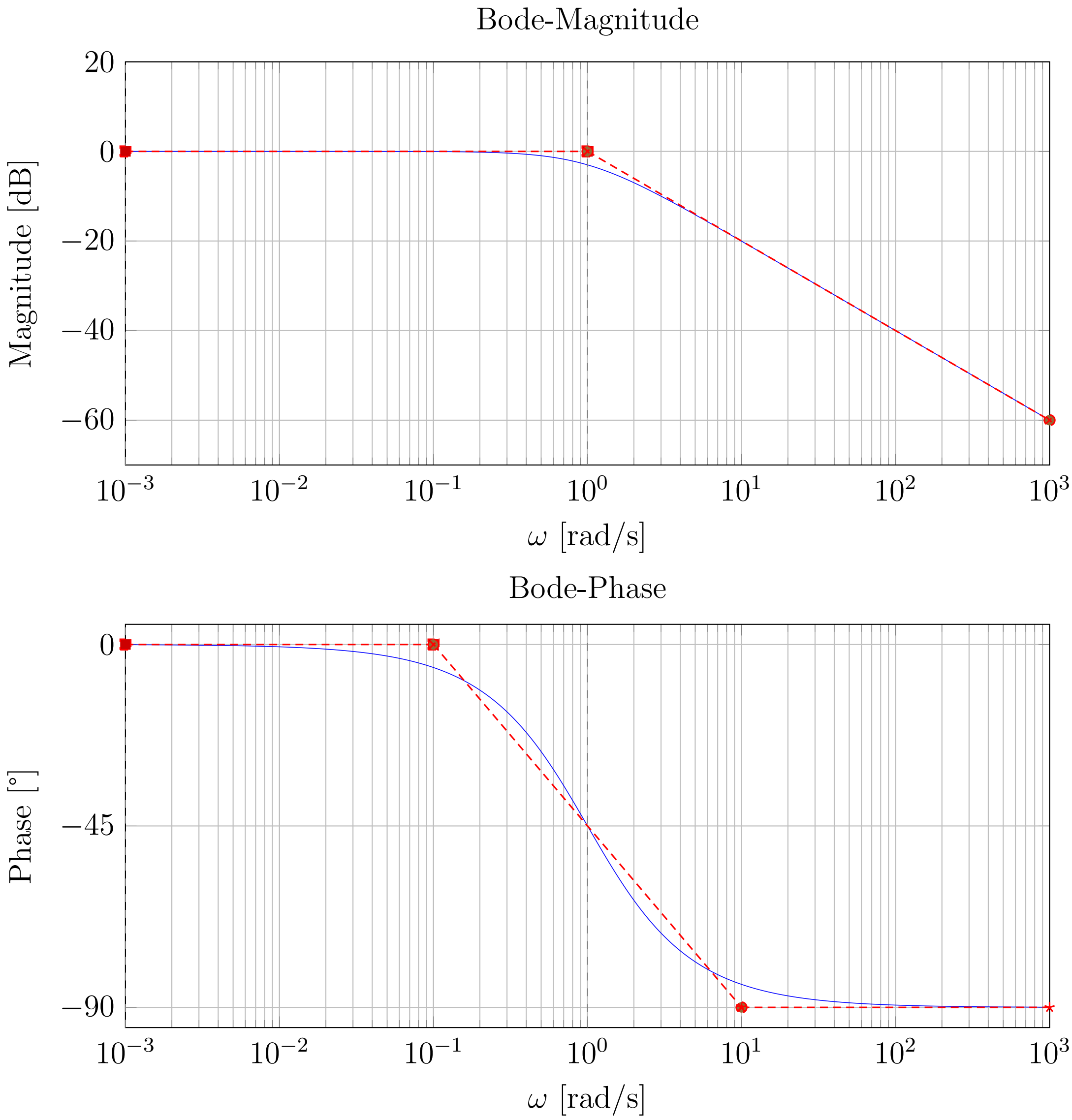
– Phasenverläufe können aus ästhetischen Gründen um 360° verschoben sein; eine Verschiebung um 360° ändert die Aussage nicht.
– Magnitudenplots sind auf der y-Achse standardmäßig in 20-dB-Schritten beschriftet; falls es sich ästhetisch anbietet, sind auch 10-dB-Schritte zulässig.
– Mit dem MATLAB-Skript kann man selbst experimentieren, die Plots exakt berechnen und alle Ergebnisse nachprüfen.

Version: October 20, 2025

Aufgabe A)

$$H(s) = \frac{1}{s+1}\,.$$

A.1 Bode-Diagramm



A.2 Erklärung

Schritt 1 DC-Faktor = 1: für $\omega \ll 1$ ist $|H(\mathrm{j}\omega)| \approx 1$; Betrag liegt bei 0 dB ohne Anfangssteigung, Phase $\approx 0°$.

Schritt 2 Einfacher Pol bei $\omega_p = 1\,\mathrm{rad/s}$: ab $\omega = 1$ ändert die Magnituden-Steigung um $-20\,\mathrm{dB/dec}$; bei $\omega = 1$ liegt die exakte Dämpfung bei $-10\log_{10} 2 \approx -3.01\,\mathrm{dB}$.

Schritt 3 Grenzverhalten: für $\omega \gg 1$ folgt $|H(\mathrm{j}\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx -20\log_{10}\omega$; die Phase fällt in der Übergangsdekade $\omega_l = 0.1\,\mathrm{rad/s}$ bis $\omega_h = 10\,\mathrm{rad/s}$ von $0°$ auf $-90°$ (lineare Näherung: $-45° - 45\log_{10}\omega$ bei $\omega \in [0.1, 10]$), mit $\angle H(\mathrm{j}\omega) = -45°$ bei $\omega = 1$.

Stückweise Näherung

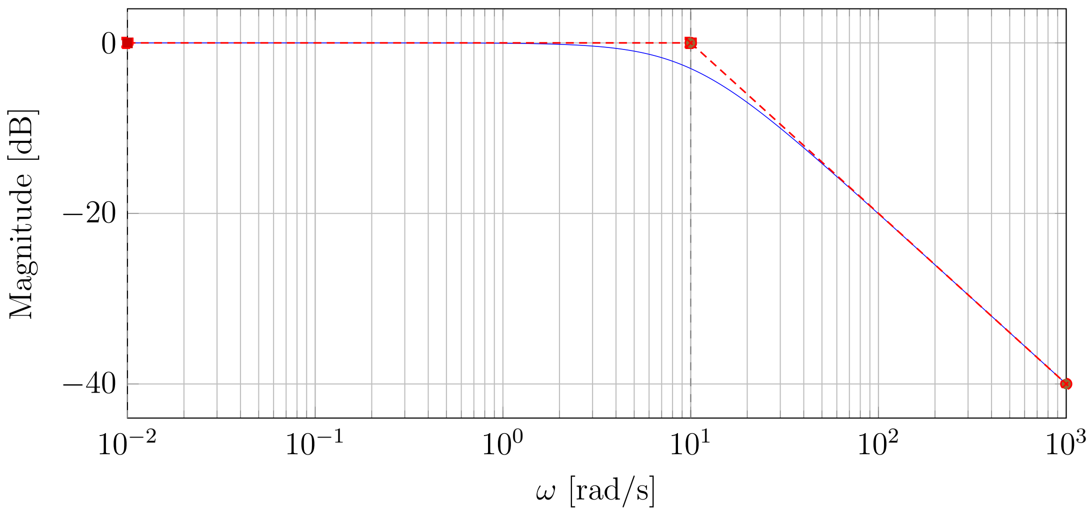
$$|H(\mathrm{j}\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx \begin{cases} 0, & \omega \ll 1, \\ -10\log_{10} 2, & \omega = 1, \\ -20\log_{10}\omega, & \omega \gg 1, \end{cases}$$

Aufgabe B)

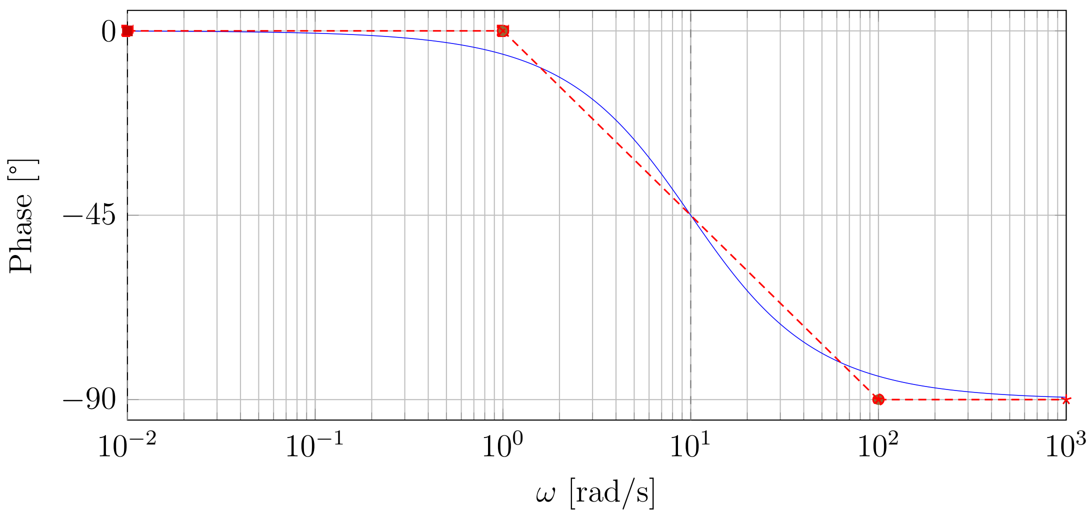
$$H(s) = \frac{10}{s + 10}\,.$$

B.1 Bode-Diagramm

Bode-Magnitude



Bode-Phase



B.2 Erklärung

Schritt 1 DC-Faktor 1: $H(s) = \frac{10}{s+10} = \frac{1}{1+s/10}$, daher für $\omega \ll 10$ gilt $|H(\mathrm{j}\omega)| \approx 1$; Betrag liegt bei $0\,\mathrm{dB}$ ohne Anfangssteigung, Phase $\approx 0°$.

Schritt 2 Einfacher Pol bei $\omega_p = 10\,\mathrm{rad/s}$: ab $\omega = 10$ wechselt die Magnituden-Steigung um $-20\,\mathrm{dB/dec}$; die exakte Dämpfung am Eckpunkt beträgt $-10\log_{10} 2 \approx -3.01\,\mathrm{dB}$. Die Phasenübergangsdekade liegt zwischen $\omega_l = 1$ und $\omega_h = 100\,\mathrm{rad/s}$.

Schritt 3 Grenzverhalten: für $\omega \gg 10$ folgt $|H(\mathrm{j}\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx -20\log_{10}(\omega/10)$; die Phase fällt in der Übergangsdekade linearisiert von $0°$ nach $-90°$ (Näherung: $-45° - 45\log_{10}(\omega/10)$), mit $\angle H(\mathrm{j}\omega) = -45°$ bei $\omega = 10$.

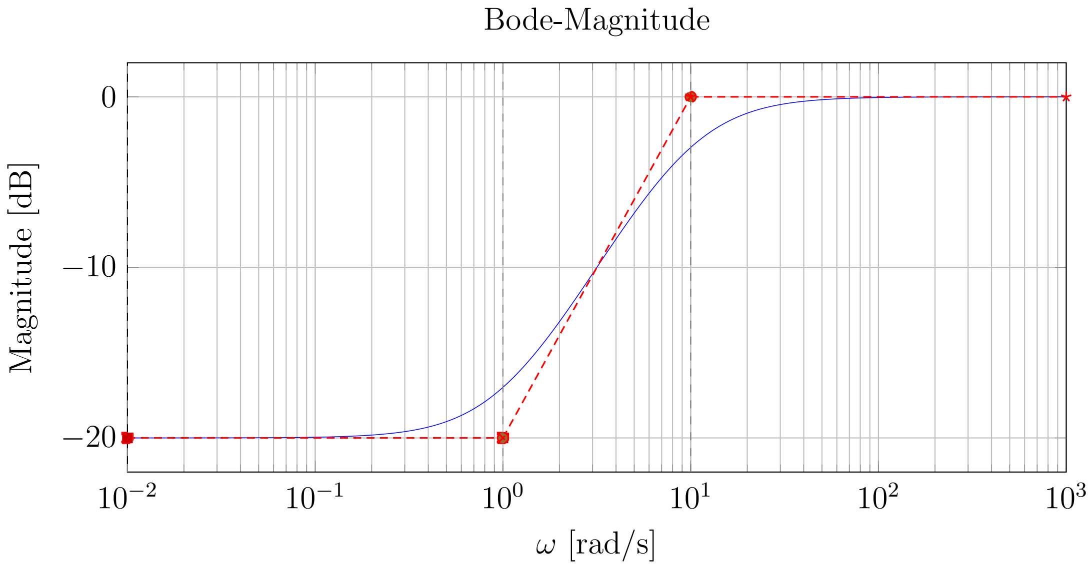
Stückweise Näherung

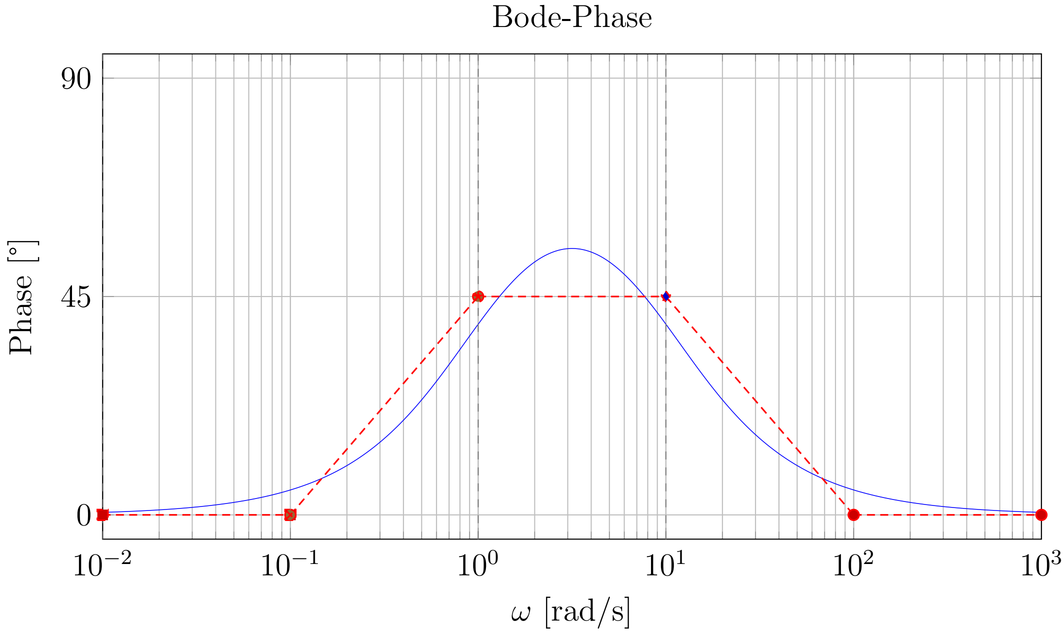
$$|H(\mathrm{j}\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx \begin{cases} 0, & \omega \ll 10, \\ -10\log_{10} 2, & \omega = 10, \\ -20\log_{10}(\omega/10), & \omega \gg 10, \end{cases}$$

Aufgabe C)

$$H(s) = \frac{s+1}{s+10}\,.$$

C.1 Bode-Diagramm





C.2 Erklärung

Schritt 1 DC-Faktor $\frac{1}{10}$: $H(s) = \frac{s+1}{s+10} = \frac{1+s}{10(1+s/10)}$. Für $\omega \ll 1$ dominiert der DC-Anteil: $|H(\mathrm{j}\omega)| \approx \frac{1}{10}$, daher Betrag $-20\,\mathrm{dB}$ ohne Startsteigung; Startphase $\approx 0°$.

Schritt 2 Nullstelle bei $\omega_z = 1\,\mathrm{rad/s}$: ab $\omega = 1$ steigt die Magnitude mit $+20\,\mathrm{dB/dec}$; zwischen $\omega_l = 0.1$ und $\omega_h = 10$ wächst die Phasenbeitrag der Nullstelle näherungsweise linear von $0°$ auf $+90°$ (Geradennäherung: $+45° + 45\log_{10}\omega$ in $[0.1, 10]$), sodass bei $\omega = 1$ etwa $+45°$ erreicht werden.

Schritt 3 Pol bei $\omega_p = 10\,\mathrm{rad/s}$: ab $\omega = 10$ kommt ein Steigungswechsel von $-20\,\mathrm{dB/dec}$ hinzu; dadurch wird die Gesamtslope wieder $0\,\mathrm{dB/dec}$ und der Betrag konvergiert gegen $0\,\mathrm{dB}$ für $\omega \gg 10$. Der Pol führt in $[1, 100]$ zu einer Phasenabnahme um $90°$ (Geradennäherung: $+45° - 45\log_{10}(\omega/10)$), sodass die Gesamtphase für $\omega \gg 100$ wieder gegen $0°$ fällt. Das Zwischenband $1 \leq \omega \leq 10$ ist somit nahezu phasenflach bei $\approx +45°$ und weist eine Betrags-Slope von $+20\,\mathrm{dB/dec}$ auf.

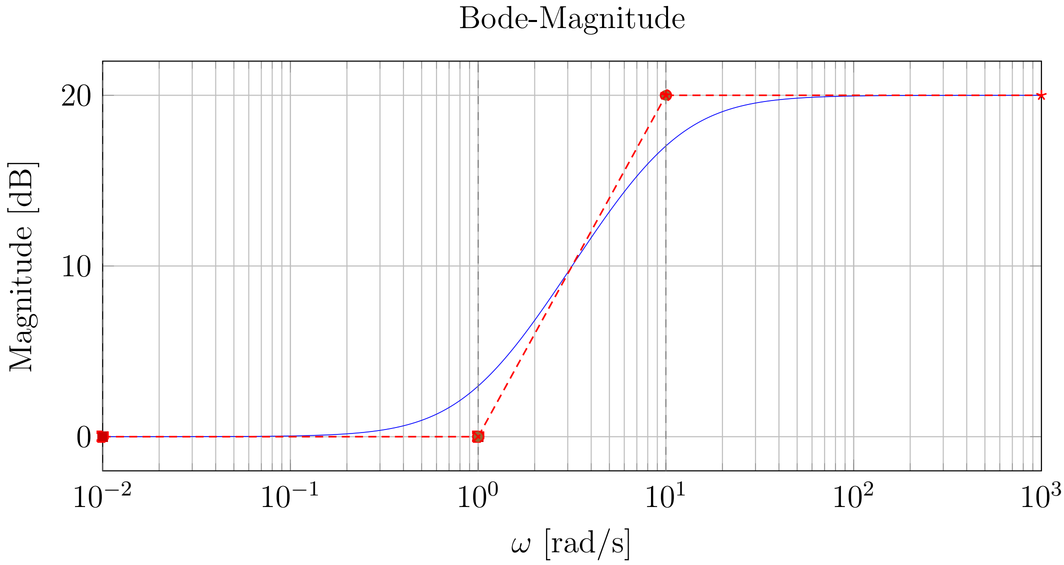
Stückweise Näherung

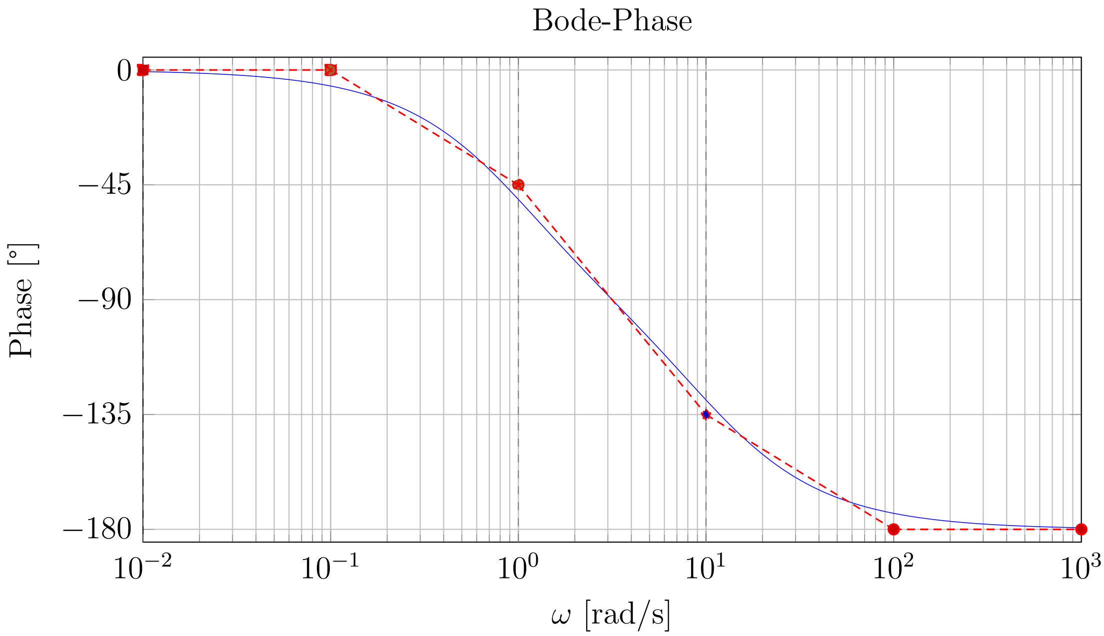
$$|H(\mathrm{j}\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx \begin{cases} -20, & \omega \ll 1, \\ -20 + 20\log_{10}\omega, & 1 \ll \omega \ll 10, \\ 0, & \omega \gg 10, \end{cases}$$

Aufgabe D)

$$H(s) = \frac{10\,(1-s)}{s+10}\,.$$

D.1 Bode-Diagramm





D.2 Erklärung

Schritt 1 DC-Faktor 1: $H(0) = 1 \Rightarrow |H|_{\mathrm{DC}} = 0\,\mathrm{dB}$ ohne Anfangssteigung; Phase $\approx 0°$.

Schritt 2 Nullstelle bei $\omega_z = 1\,\mathrm{rad/s}$ in der rechten Halbebene $\Rightarrow$ ab $\omega = 1$ Anstieg um $+20\,\mathrm{dB/dec}$. Übergang $0° \to -90°$ über $\omega \in [0.1, 10]$; Geradennäherung $-45° - 45\log_{10}\omega$ liefert $\angle H(1) \approx -45°$. Exakt liegt die Magnitude bei $\omega = 1$ bei $20 + 10\log_{10} 2 - 10\log_{10} 101 \approx +3\,\mathrm{dB}$.

Schritt 3 Pol bei $\omega_p = 10\,\mathrm{rad/s}$: ab $\omega = 10$ Steigungswechsel um $-20\,\mathrm{dB/dec}$; für $\omega \gg 10$ ergibt sich konstanter Betrag $\approx +20\,\mathrm{dB}$. Phasenabfall des Pols um weitere $90°$ über $\omega \in [1, 100]$; Geradennäherung $-45° - 45\log_{10}(\omega/10)$. Zusammengesetzt: Phase $\approx 0°$ für $\omega \ll 0.1$, $\approx -45°$ um $\omega \approx 1$, $\approx -135°$ um $\omega \approx 10$ und $\approx -180°$ für $\omega \gg 100$.

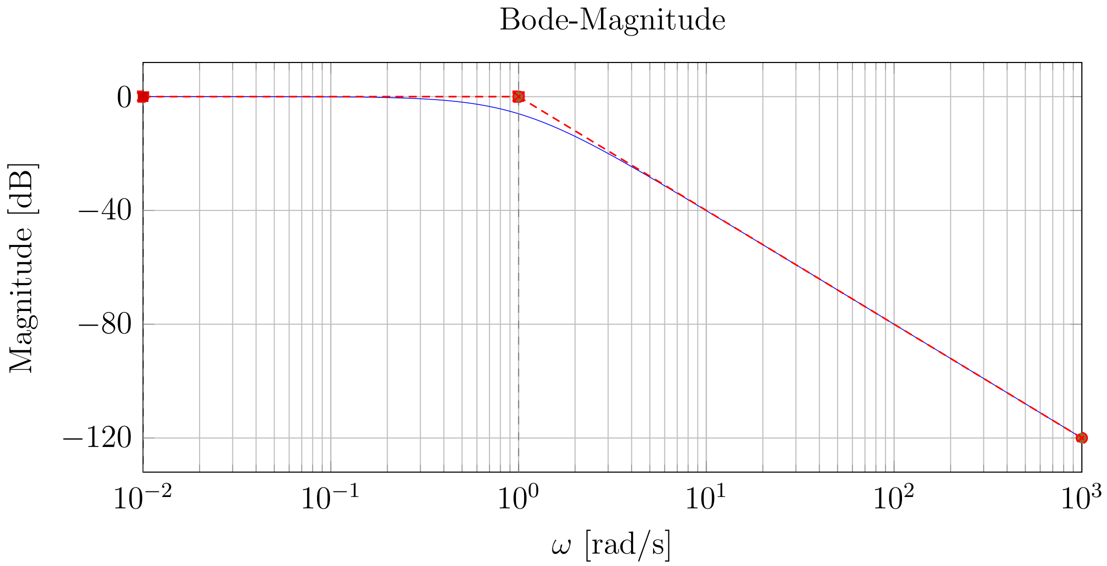
Stückweise Näherung

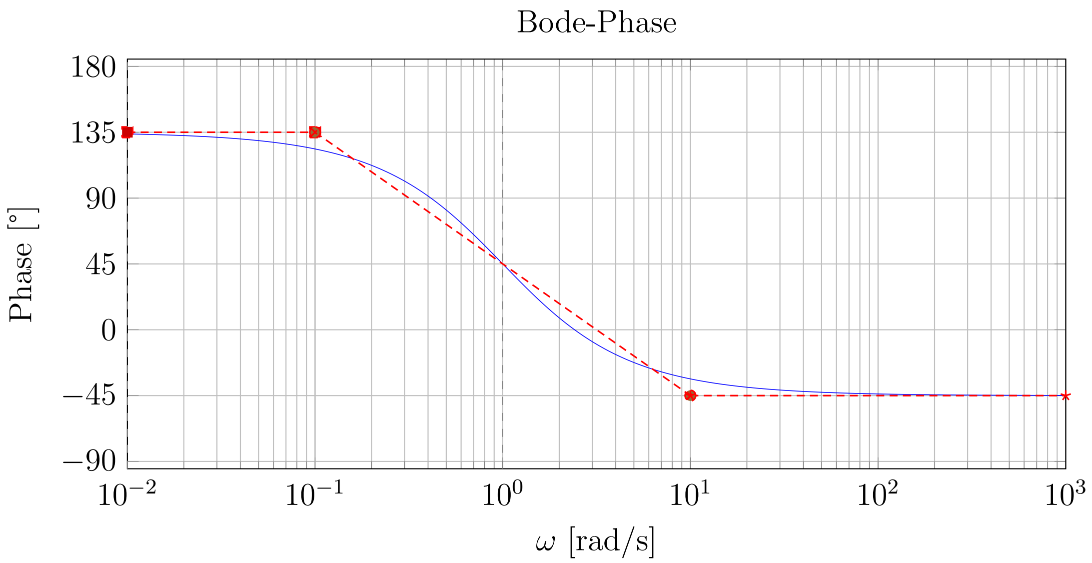
$$|H(\mathrm{j}\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx \begin{cases} 0, & \omega \ll 1, \\ 20\log_{10}\omega, & 1 \ll \omega \ll 10, \\ 20, & \omega \gg 10, \end{cases}$$

Aufgabe E)

$$H(s) = \frac{-1 + \mathrm{j}}{\sqrt{2}\,(s+1)^2}\,.$$

E.1 Bode-Diagramm





E.2 Erklärung

Schritt 1 Konstanter Faktor $(-1+\mathrm{j})/\sqrt{2} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}135^\circ}$: Betrag 1 $\Rightarrow$ Start bei 0 dB ohne Anfangssteigung; die Phase "fängt" bei $+135^\circ$ an (reiner Phasor, kein Einfluss auf die Magnitude).

Schritt 2 Doppelpol bei $\omega_p = 1\,\mathrm{rad/s}$: ab $\omega = 1$ sinkt die Magnitude mit $-40\,\mathrm{dB/dec}$; am Eckpunkt beträgt die exakte Dämpfung $-20\log_{10}(1+1) = -20\log_{10}2 \approx -6\,\mathrm{dB}$ (Summe aus zwei $-3.01\,\mathrm{dB}$). Die Phase der beiden gleichliegenden Pole fällt zusammen in der Übergangsdekade $\omega \in [0.1, 10]$ insgesamt um 180°; lineare Geradennäherung: $135^\circ \to -45^\circ$ mit $\varphi_{\mathrm{approx}}(\omega) = 45^\circ - 90^\circ \log_{10}\omega$ für $\omega \in [0.1, 10]$.

Schritt 3 Grenzverhalten: für $\omega \ll 1$ gilt $|H(\mathrm{j}\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx 0\,\mathrm{dB}$ und $\angle H \approx +135^\circ$ für $\omega \ll 0.1$; für $\omega \gg 1$ folgt $|H(\mathrm{j}\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx -40\log_{10}\omega$ und die Phase nähert sich $+135^\circ - 2\cdot 90^\circ = -45^\circ$ an.

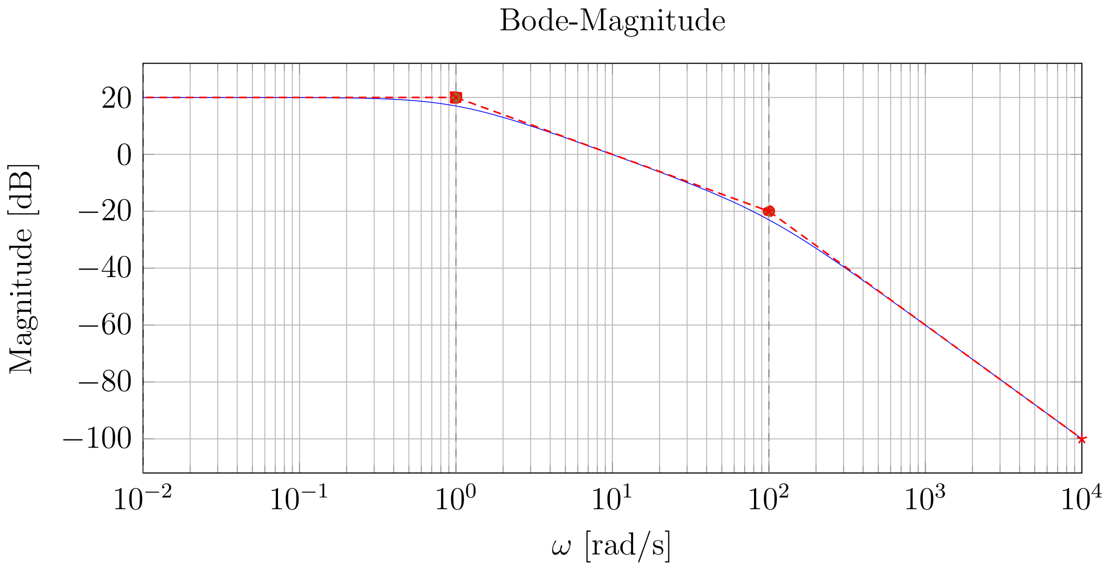
Stückweise Näherung

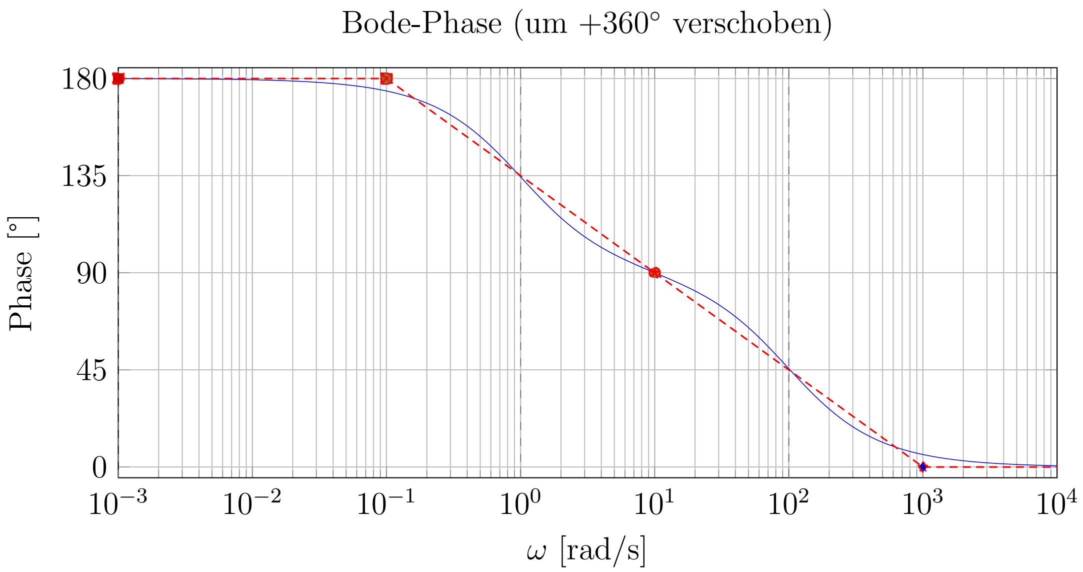
$$|H(\mathrm{j}\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx \begin{cases} 0, & \omega \ll 1, \\ -20\log_{10}2, & \omega = 1, \\ -40\log_{10}\omega, & \omega \gg 1, \end{cases}$$

Aufgabe F)

$$H(s) = \frac{-1000}{(s+1)(s+100)}\,.$$

F.1 Bode-Diagramm





F.2 Erklärung

Schritt 1 Konstante und Normierung: $H(s) = ... = -10 \, \dfrac{1}{(1+s)(1+s/100)}$. DC-Wert $H(0) = -10 \Rightarrow |H|_{\mathrm{DC}} = 20\,\mathrm{dB}$. Das negative Vorzeichen bewirkt eine konstante Zusatzphase; hier wird die Phase, aus Darstellungsgründen, um $+360°$ angehoben, sodass sie von $180°$ (für $\omega \ll 1$) nach $0°$ (für $\omega \gg 100$) verläuft.

Schritt 2 Pol bei $\omega_{p1} = 1\,\mathrm{rad/s}$: ab $\omega = 1$ sinkt die Magnitude mit $-20\,\mathrm{dB/dec}$. Exakt: Zusatzdämpfung $-10\log_{10} 2 \approx -3\,\mathrm{dB}$. Phasenanteil (verschoben): Geradennäherung $135° - 45° \log_{10}\omega$ über $[0.1, 10]$ zu $90°$.

Schritt 3 Pol bei $\omega_{p2} = 100\,\mathrm{rad/s}$: ab $\omega = 100$ weitere Steigungsänderung $-20\,\mathrm{dB/dec} \Rightarrow$ Gesamtslope $-40\,\mathrm{dB/dec}$ für $\omega \gg 100$. Phasenanteil (verschoben): $45° - 45° \log_{10}(\omega/100)$ über $[10, 10^5]$. Grenzwerte: $|H(\mathrm{j}\omega)|_{\mathrm{dB}} \sim -40\log_{10}(\omega/100) + 20$; $\angle H(\mathrm{j}\omega) \to 0°$ für $\omega \to 10^5$.

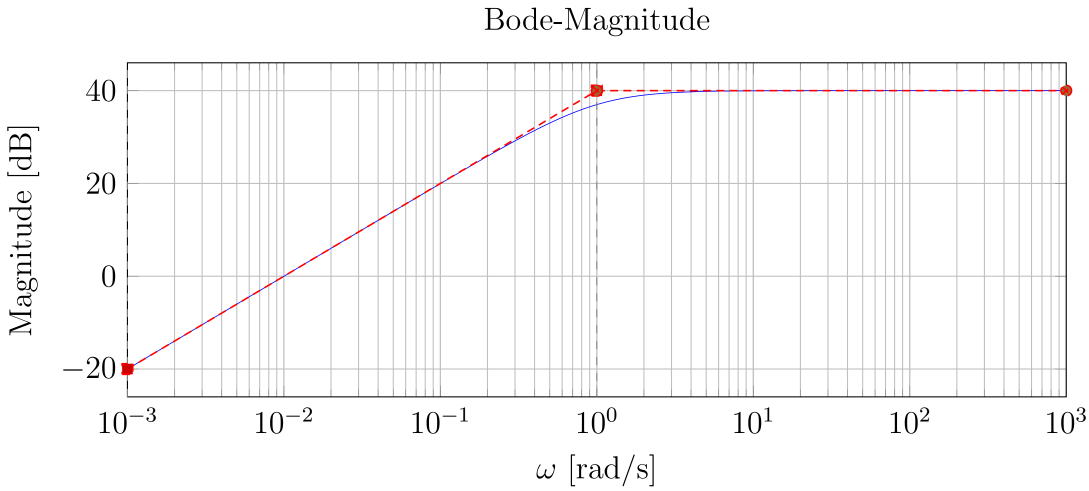
Stückweise Näherung

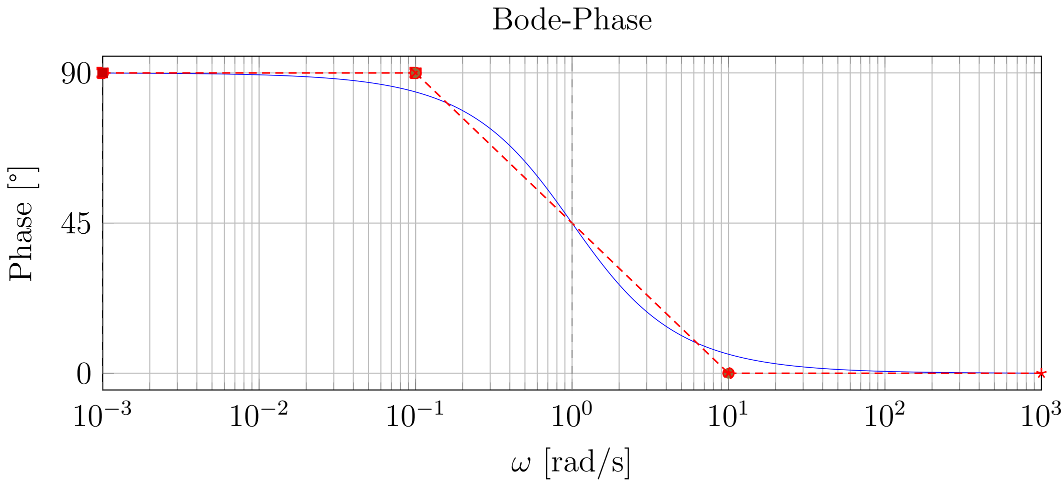
$$|H(\mathrm{j}\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx \begin{cases} 20, & \omega \ll 1, \\ 20 - 10\log_{10} 2, & \omega = 1, \\ 20 - 20\log_{10}\omega, & 1 \ll \omega \ll 100, \\ -20 - 10\log_{10} 2, & \omega = 100, \\ -20 - 40\log_{10}(\omega/100), & \omega \gg 100, \end{cases}$$

Aufgabe G)

$$H(s) = \frac{100\,s}{s+1}\,.$$

G.1 Bode-Diagramm





G.2 Erklärung

Schritt 1 DC-Faktor 100: Betrag global um $+40\,\mathrm{dB}$ verschoben; die konstante (reell-positive) Verstärkung ändert die Steigung nicht und fügt keine zusätzliche Phase hinzu. Referenzniveau der Geradennäherung damit bei $40\,\mathrm{dB}$.

Schritt 2 Nullstelle im Ursprung: Startsteigung $+20\,\mathrm{dB/dec}$ für $\omega \ll 1$, da $|H(\mathrm{j}\omega)| \sim 100\,\omega$; Startphase $\approx +90^\circ$ (idealer Integrator). In der Magnituden-Näherung ergibt sich links der Ecke die Gerade $40+20\log_{10}\omega$.

Schritt 3 Pol bei $\omega_p = 1\,\mathrm{rad/s}$: ab $\omega = 1$ Steigungswechsel um $-20\,\mathrm{dB/dec}$; resultierend flacht die Magnitude auf $0\,\mathrm{dB/dec}$ ab und nähert sich für $\omega \gg 1$ dem konstanten Niveau $\approx 40\,\mathrm{dB}$. Exakter Eckpunkt: $40 - 10\log_{10} 2 \approx 37\,\mathrm{dB}$. Die Phase fällt über die Übergangsdekade $\omega_l = 0.1$ bis $\omega_h = 10\,\mathrm{rad/s}$ von $\approx +90^\circ$ gegen 0° (Geradennäherung: $45^\circ - 45^\circ \log_{10}\omega$ in $[0.1, 10]$).

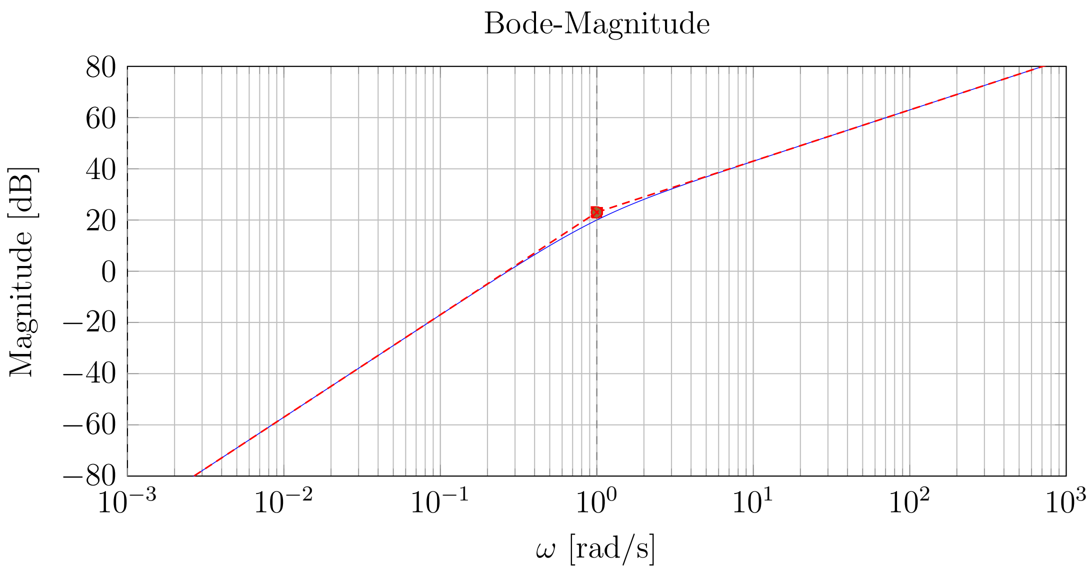
Stückweise Näherung

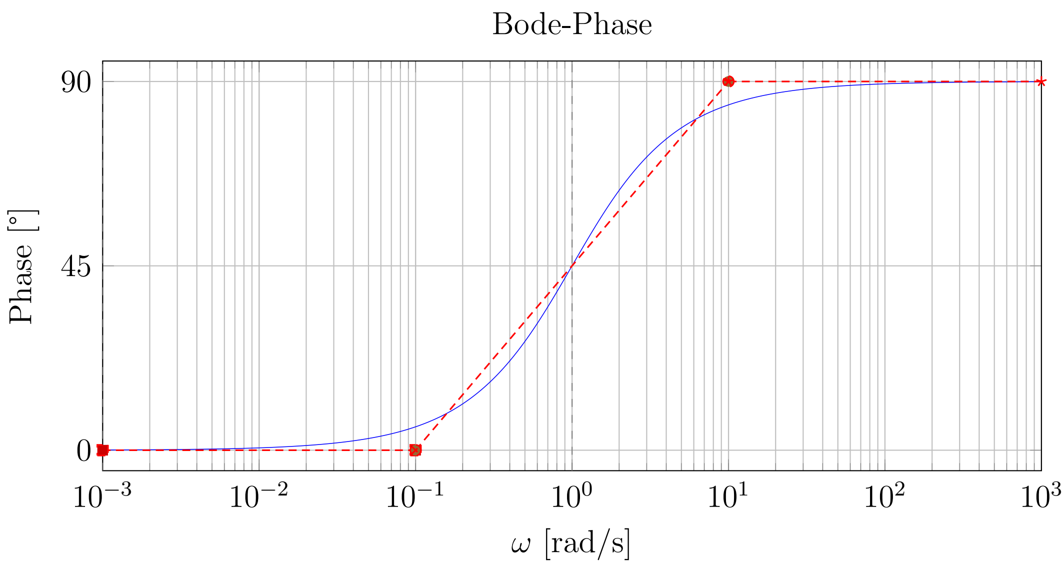
$$|H(\mathrm{j}\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx \begin{cases} 40 + 20\log_{10}\omega, & \omega \ll 1, \\ 40 - 10\log_{10} 2, & \omega = 1, \\ 40, & \omega \gg 1, \end{cases}$$

Aufgabe H)

$$H(s) = \frac{10\sqrt{2}\, s^2}{s-1}\,.$$

H.1 Bode-Diagramm





H.2 Erklärung

Schritt 1 Doppelnullstelle im Ursprung: Startsteigung $+40\,\mathrm{dB/dec}$; Startphase $0°$.

Schritt 2 RHP-Pol bei $\omega_p = 1\,\mathrm{rad/s}$: ab $\omega = 1$ Steigungsänderung $-20\,\mathrm{dB/dec}$; Netto $+20\,\mathrm{dB/dec}$ für $\omega \gg 1$. Phasen-Geradennäherung in 45°-Schritten: $0°$ für $\omega \leq 0.1$, $45° + 45\log_{10}\omega$ in $[0.1, 10]$, $90°$ für $\omega \geq 10$.

Schritt 3 Grenzwerte: $|H|_{\mathrm{dB}} \approx 20 + 10\log_{10} 2 + 40\log_{10}\omega$ für $\omega \ll 1$, und $20 + 10\log_{10} 2 + 20\log_{10}\omega$ für $\omega \gg 1$; $\angle H \to 90°$ für große ω.

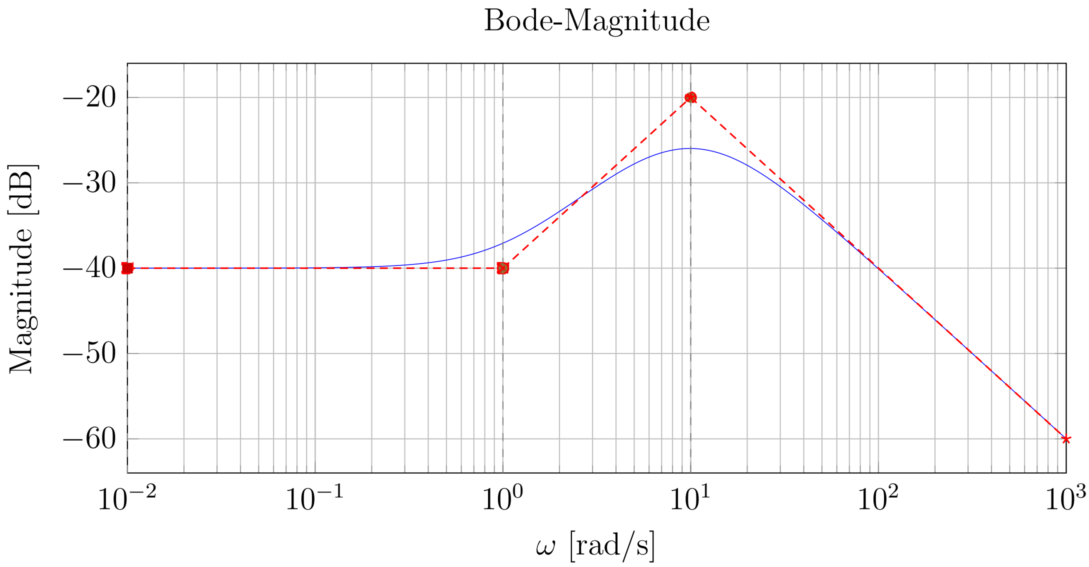
Stückweise Näherung

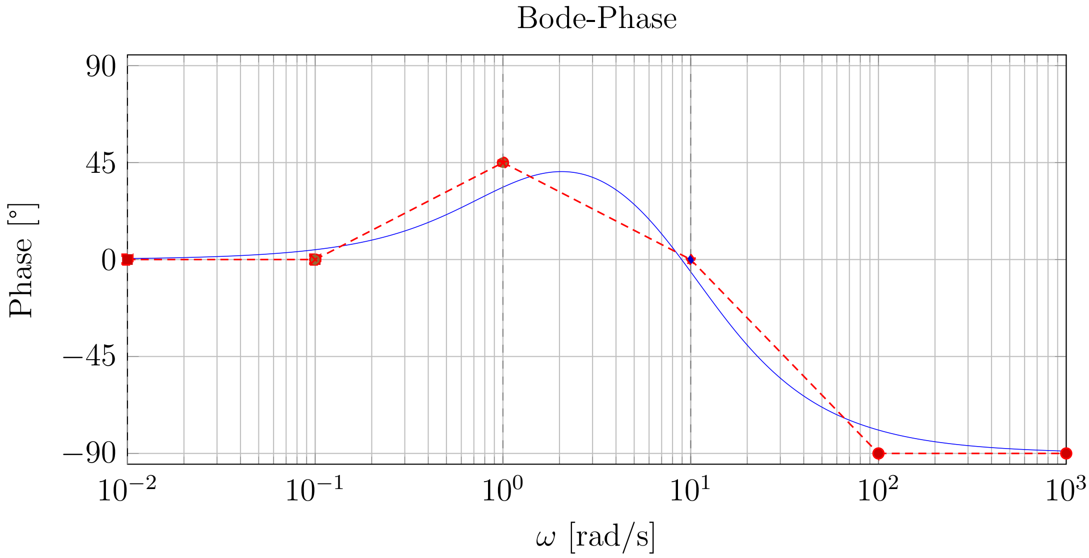
$$|H(\mathrm{j}\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx \begin{cases} 20 + 10\log_{10} 2 + 40\log_{10}\omega, & \omega \ll 1, \\ 20, & \omega = 1, \\ 20 + 10\log_{10} 2 + 20\log_{10}\omega, & \omega \gg 1, \end{cases}$$

Aufgabe I)

$$H(s) = \frac{s+1}{(s+10)^2}\,.$$

I.1 Bode-Diagramm





I.2 Erklärung

Schritt 1 DC-Faktor $\frac{1}{100}$: $H(s) = \dfrac{s+1}{(s+10)^2}$ liefert $H(0) = \frac{1}{100}$, daher Startniveau $-40\,\mathrm{dB}$ ohne Anfangssteigung; Startphase $\angle H(\mathrm{j}\omega) \approx 0°$ für $\omega \ll 1$.

Schritt 2 Nullstelle bei $\omega_z = 1\,\mathrm{rad/s}$: ab $\omega = 1$ steigt die Magnitude mit $+20\,\mathrm{dB/dec}$; bei $\omega = 1$ liegt der exakte Betrag um $+10\log_{10} 2 \approx +3\,\mathrm{dB}$ über der Geradennäherung ($|H(\mathrm{j}1)|_{\mathrm{dB}} \approx -37.0\,\mathrm{dB}$). Phasenbeitrag der LHP-Nullstelle: Übergang $0° \to +90°$ über $\omega \in [0.1, 10]$; Geradennäherung $+45° + 45° \log_{10} \omega$ in $[0.1, 1]$.

Schritt 3 Doppelpol bei $\omega_p = 10\,\mathrm{rad/s}$: ab $\omega = 10$ zusätzliche Steigungsänderung um $-40\,\mathrm{dB/dec}$; Netto-Slope damit $-20\,\mathrm{dB/dec}$ für $\omega \gg 10$ (asymptotisch $|H| \sim \omega/\omega^2 = 1/\omega$). Exakt bei $\omega = 10$: $|H(\mathrm{j}10)|_{\mathrm{dB}} = -20 - 20\log_{10} 2 \approx -26\,\mathrm{dB}$ (d. h. $-6\,\mathrm{dB}$ unter der Geradennäherung). Phasenbeitrag der beiden Pole: gemeinsamer Abfall um $180°$ über $\omega \in [1, 100]$; lineare Summe zweier Beiträge ($-45° - 45° \log_{10}(\omega/10)$) ergibt die roten Segmente $45° - 45° \log_{10} \omega$ für $\omega \in [1, 10]$ und $-90° \log_{10}(\omega/10)$ für $\omega \in [10, 100]$. Grenzwerte: $\angle H \to 0°$ für $\omega \ll 0.1$ und $\angle H \to -90°$ für $\omega \gg 100$.

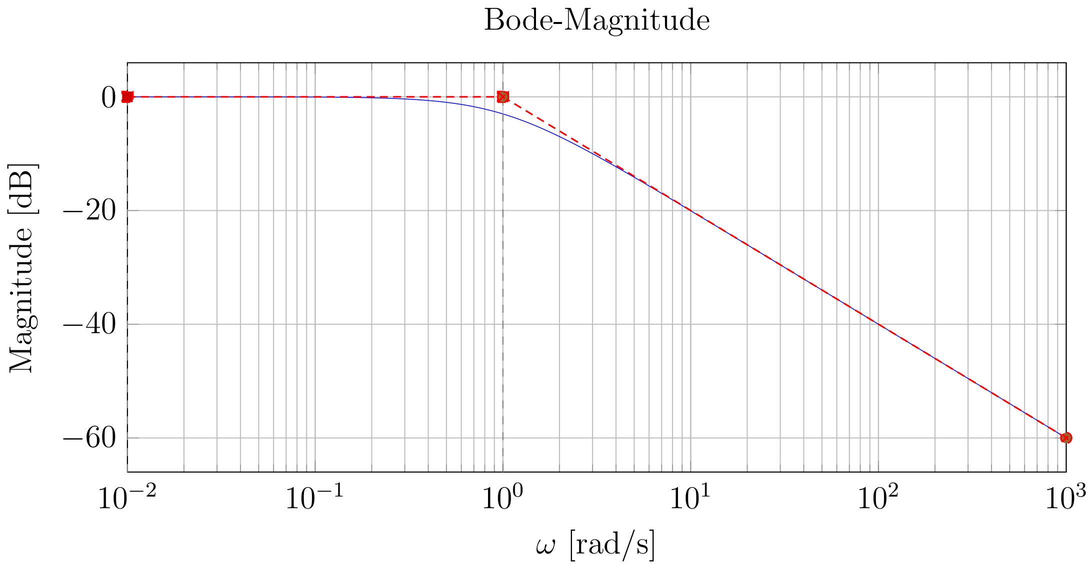
Stückweise Näherung

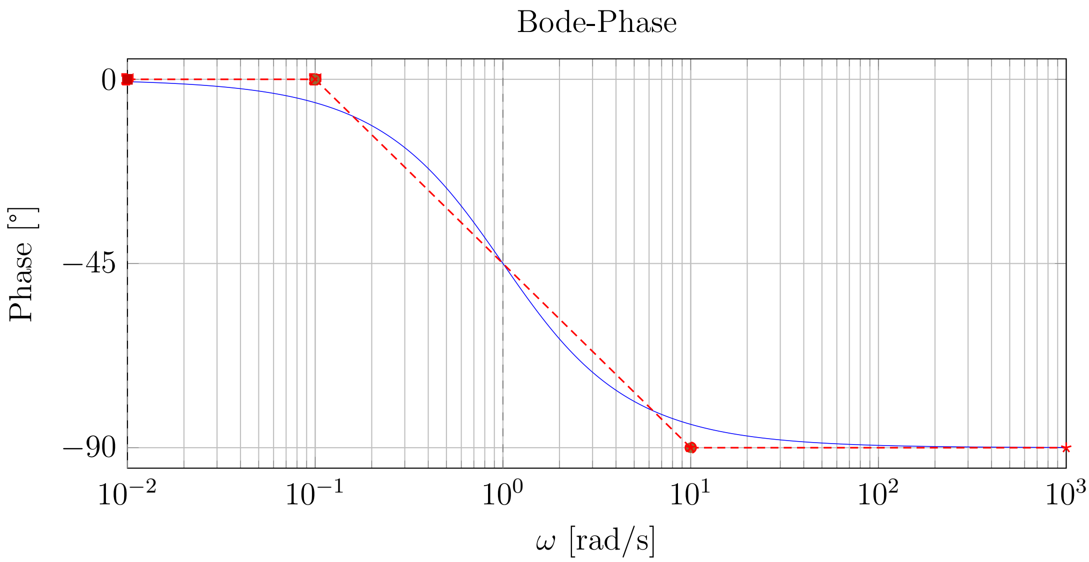
$$|H(\mathrm{j}\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx \begin{cases} -40, & \omega \ll 1, \\ -40 + 20\log_{10} \omega, & 1 \ll \omega \ll 10, \\ -20 - 20\log_{10}(\omega/10), & \omega \gg 10, \end{cases}$$

Aufgabe J)

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+1} = \frac{1}{s+1}\,.$$

J.1 Bode-Diagramm





J.2 Erklärung

Schritt 1 Kürzung: $s^2+2s+1 = (s+1)^2 \Rightarrow H(s) = \dfrac{s+1}{(s+1)^2} = \dfrac{1}{s+1}$. DC-Faktor 1: für $\omega \ll 1$ gilt $|H(\mathrm{j}\omega)| \approx 1$; Betrag 0 dB ohne Anfangssteigung, Phase $\approx 0°$.

Schritt 2 Einfacher Pol bei $\omega_p = 1\,\mathrm{rad/s}$: ab $\omega = 1$ wechselt die Magnituden-Steigung um $-20\,\mathrm{dB/dec}$. Am Eckpunkt beträgt die exakte Dämpfung $-10\log_{10} 2 \approx -3\,\mathrm{dB}$ relativ zur Geraden. Phasenübergang über $\omega \in [0.1, 10]$ von $0°$ nach $-90°$; Geradennäherung: $-45° - 45\log_{10}\omega$.

Schritt 3 Grenzverhalten: für $\omega \gg 1$ folgt $|H(\mathrm{j}\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx -20\log_{10}\omega$; die Phase nähert sich $-90°$. Für $\omega \ll 1$ bleibt $|H| \approx 1$ und $\angle H \approx 0°$.

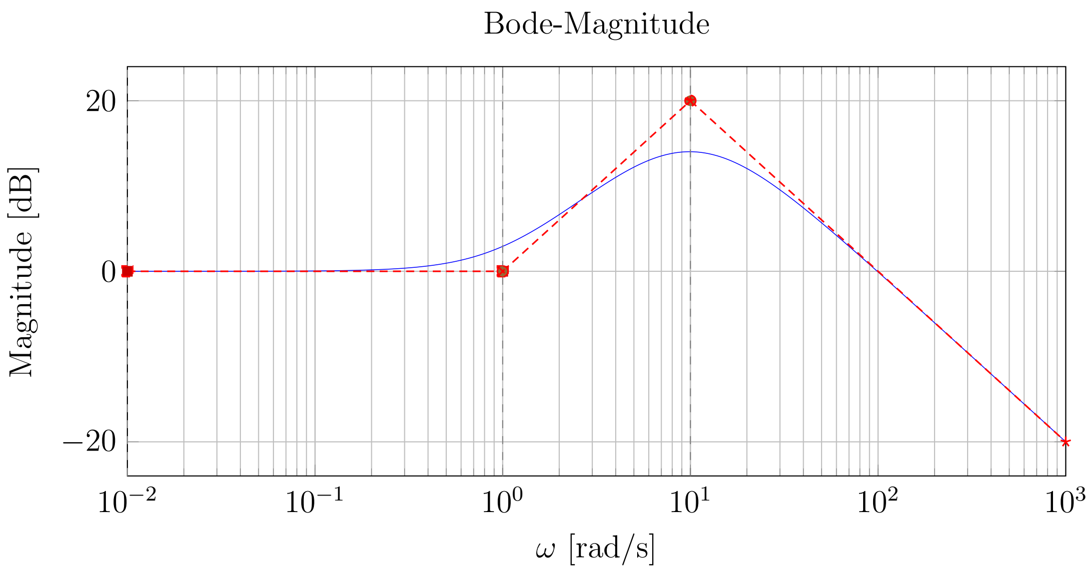
Stückweise Näherung

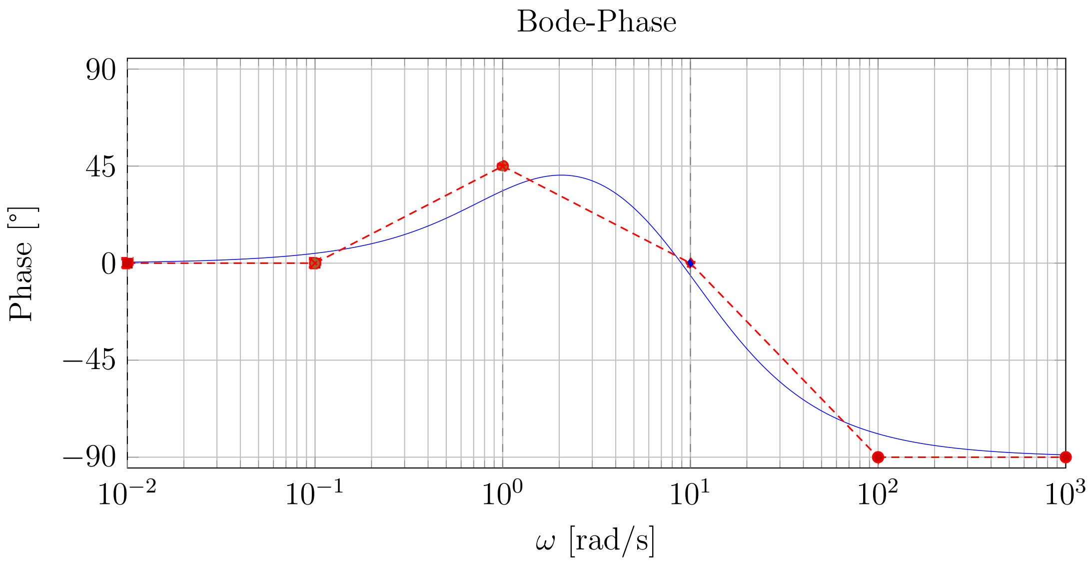
$$|H(\mathrm{j}\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx \begin{cases} 0, & \omega \ll 1, \\ -10\log_{10} 2, & \omega = 1, \\ -20\log_{10}\omega, & \omega \gg 1, \end{cases}$$

Aufgabe K)

$$H(s) = \frac{100\,(s+1)}{s^2+20s+100} = \frac{100\,(s+1)}{(s+10)^2}\,.$$

K.1 Bode-Diagramm





K.2 Erklärung

Schritt 1 Faktorisierung: $s^2+20s+100 = (s+10)^2 \Rightarrow H(s) = 100\,\dfrac{s+1}{(s+10)^2}$.
DC-Wert $H(0) = 1 \Rightarrow |H|_{\mathrm{DC}} = 0\,\mathrm{dB}$; Anfangssteigung $0\,\mathrm{dB/dec}$, Startphase $\approx 0°$.

Schritt 2 Nullstelle bei $\omega_z = 1\,\mathrm{rad/s}$: ab $\omega = 1$ steigt die Magnitude mit $+20\,\mathrm{dB/dec}$ (rote Gerade $20\log_{10}\omega$). Exakt bei $\omega = 1$: $|H(\mathrm{j}1)| \approx \frac{100\sqrt{2}}{101} \Rightarrow |H|_{\mathrm{dB}} \approx +3\,\mathrm{dB}$ über der Geraden. Phasenbeitrag der LHP-Nullstelle: Übergang $0° \to +90°$ über $\omega \in [0.1, 10]$ (Geradennäherung: $45° + 45\log_{10}\omega$).

Schritt 3 Doppelpol bei $\omega_p = 10\,\mathrm{rad/s}$: ab $\omega = 10$ zusätzliche Steigungsänderung um $-40\,\mathrm{dB/dec}$; Netto-Slope für $\omega \gg 10$ ist $-20\,\mathrm{dB/dec}$ (asymptotisch $|H| \sim 100\,\omega/\omega^2 = 100/\omega$). Am Eckpunkt $\omega = 10$ liegt die exakte Magnitude bei $\approx 14.0\,\mathrm{dB}$, d. h. etwa $-6\,\mathrm{dB}$ unter der Mittellinie. Phasenabfall der beiden Pole gesamt $180°$ über $\omega \in [1, 100]$; Geradennäherung: zunächst $45° - 45\log_{10}\omega$ für $\omega \in [1, 10]$ (netto zurück Richtung $0°$), danach $-90\log_{10}(\omega/10)$ für $\omega \in [10, 100]$ (netto bis $-90°$).

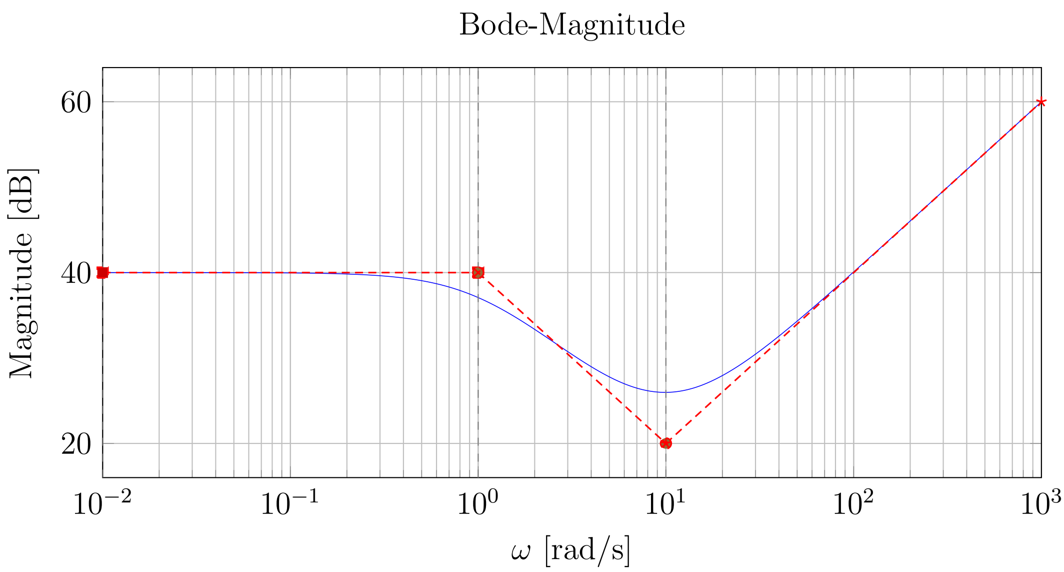
Stückweise Näherung

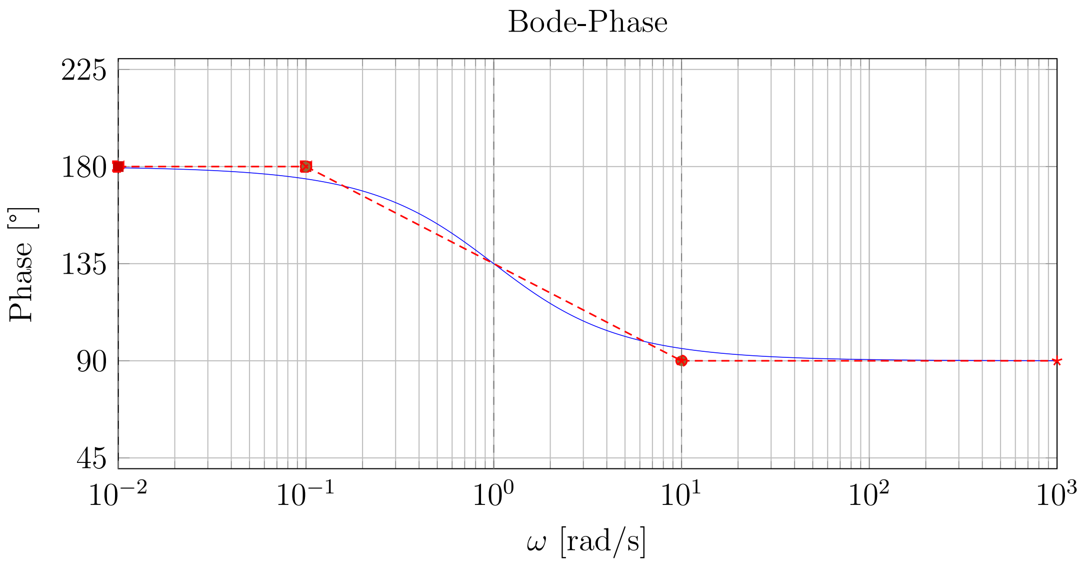
$$|H(\mathrm{j}\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx \begin{cases} 0, & \omega \ll 1, \\ 20\log_{10}\omega, & 1 \ll \omega \ll 10, \\ 20 - 20\log_{10}(\omega/10), & \omega \gg 10, \end{cases}$$

Aufgabe L)

$$H(s) = \frac{s^2 - 100}{s + 1} = \frac{(s - 10)(s + 10)}{s + 1} \, .$$

L.1 Bode-Diagramm





L.2 Erklärung

Schritt 1 Struktur: $H(s) = \dfrac{(s-10)(s+10)}{s+1}$. Für $\omega \ll 1$ ist $|H(\mathrm{j}\omega)| \approx \dfrac{100}{1} = 100 \Rightarrow 40\,\mathrm{dB}$ ohne Startsteigung. $H(0) = -100 = 100e^{+j180^\circ} \Rightarrow$ konstante Phasenlage $+180^\circ$.

Schritt 2 Pol bei $\omega_p = 1\,\mathrm{rad/s}$: ab $\omega = 1$ Steigungswechsel um $-20\,\mathrm{dB/dec}$; am Eckpunkt exakte Dämpfung $-10\log_{10} 2 \approx -3\,\mathrm{dB}$ gegenüber der linken Geraden. Phasenabnahme des Pols um 90° über $\omega \in [0.1, 10]$; Geradennäherung $135^\circ - 45^\circ \log_{10}\omega$ (von 180° auf 90°).

Schritt 3 Nullstellen bei $\omega_z = 10\,\mathrm{rad/s}$ (eine LHP, eine RHP): Magnitudenbeitrag von zwei Nullstellen $\Rightarrow$ zusätzliche $+40\,\mathrm{dB/dec}$ ab $\omega = 10$; Netto-Gesamtslope wird $+20\,\mathrm{dB/dec}$ für $\omega \gg 10$. Am Eckpunkt $\omega = 10$ liegt $|H(\mathrm{j}10)|_{\mathrm{dB}} \approx 20 + 6 = 26.0\,\mathrm{dB}$. Die Phasenänderungen der LHP- und RHP-Nullstelle heben sich gegenseitig auf; Netto entsteht an $\omega = 10$ keine zusätzliche Phasenänderung (die konstanten $+180^\circ$ sind bereits berücksichtigt).

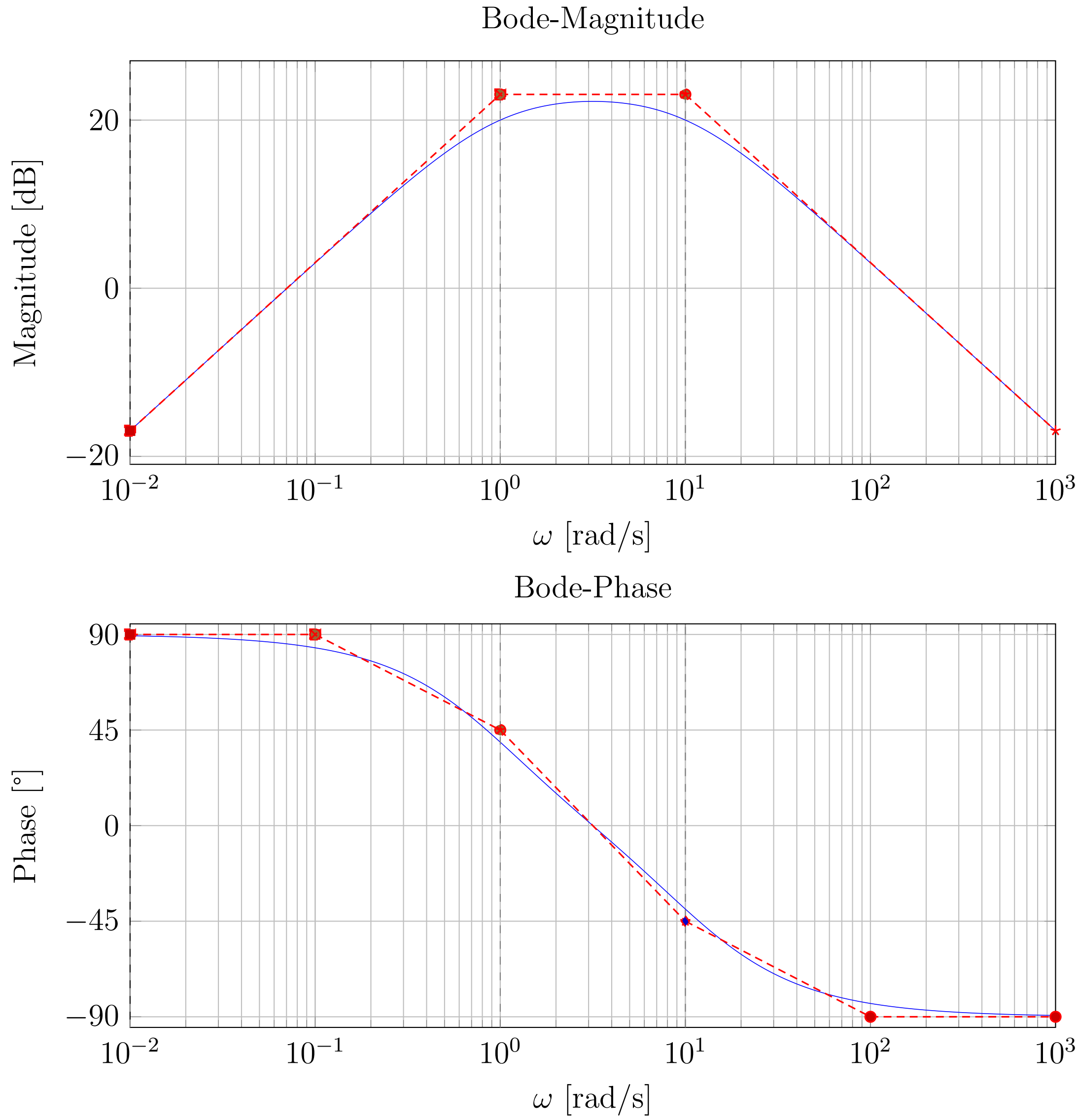
Stückweise Näherung

$$|H(\mathrm{j}\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx \begin{cases} 40, & \omega \ll 1, \\ 40 - 10\log_{10} 2, & \omega = 1, \\ 40 - 20\log_{10}\omega, & 1 \ll \omega \ll 10, \\ 20 + 20\log_{10}(\omega/10), & \omega \gg 10, \end{cases}$$

Aufgabe M)

$$H(s) = \frac{10\sqrt{202}\,s}{(s+1)(s+10)}\,.$$

M.1 Bode-Diagramm



M.2 Erklärung

Schritt 1 Nullstelle im Ursprung: $H(s) = 10\sqrt{202}\,\dfrac{s}{(s+1)(s+10)}$. Für $\omega \ll 1$ gilt $|H(\mathrm{j}\omega)| \approx \sqrt{202}\,\omega$; Startsteigung $+20\,\mathrm{dB/dec}$ mit Fixniveau[1] $10\log_{10} 202\,\mathrm{dB} = 23\,\mathrm{dB}$ bei $\omega = 5$. Startphase $\approx +90°$.

Schritt 2 Pol bei $\omega_{p1} = 1\,\mathrm{rad/s}$: ab $\omega = 1$ Steigungswechsel um $-20\,\mathrm{dB/dec}$; Zwischenbereich $[1, 10]$ ist betragsflach. Exakt $|H(\mathrm{j}1)| = \dfrac{10\sqrt{202}}{\sqrt{2}\sqrt{101}} = 10 \Rightarrow 20\,\mathrm{dB}$ (symmetrische Ecklage). Phasenabfall um $90°$ über $\omega \in [0.1, 10]$; Geradennäherung $45° - 45°\log_{10}\omega$.

Schritt 3 Pol bei $\omega_{p2} = 10\,\mathrm{rad/s}$: ab $\omega = 10$ weiterer Steigungswechsel um $-20\,\mathrm{dB/dec}$; Gesamtslope $-20\,\mathrm{dB/dec}$ für $\omega \gg 10$. Auch hier $|H(\mathrm{j}10)| = \dfrac{100\sqrt{202}}{\sqrt{101}\sqrt{200}} = 10 \Rightarrow 20\,\mathrm{dB}$. Der zweite Pol senkt die Phase um weitere $90°$ in $\omega \in [1, 100]$; Geradennäherung $-45°\log_{10}(\omega/10)$, Grenzwert $\angle H \to -90°$.

Stückweise Näherung

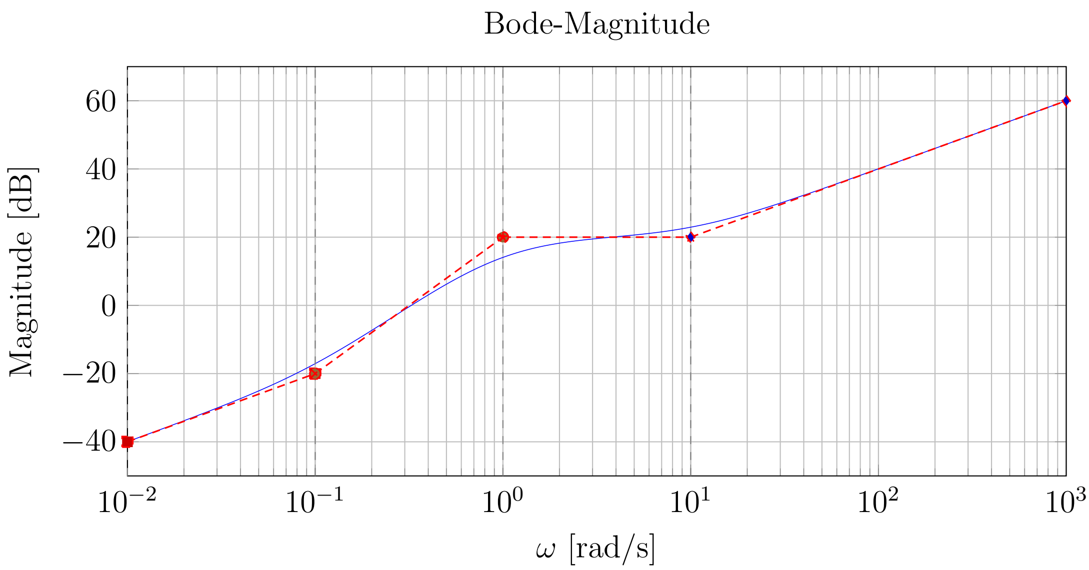
$$|H(\mathrm{j}\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx \begin{cases} 10\log_{10} 202 + 20\log_{10}\omega, & \omega \ll 1, \\ 20, & \omega = 1, \\ 10\log_{10} 202, & 1 \ll \omega \ll 10, \\ 20, & \omega = 10, \\ 10\log_{10} 202 - 20\log_{10}(\omega/10), & \omega \gg 10, \end{cases}$$

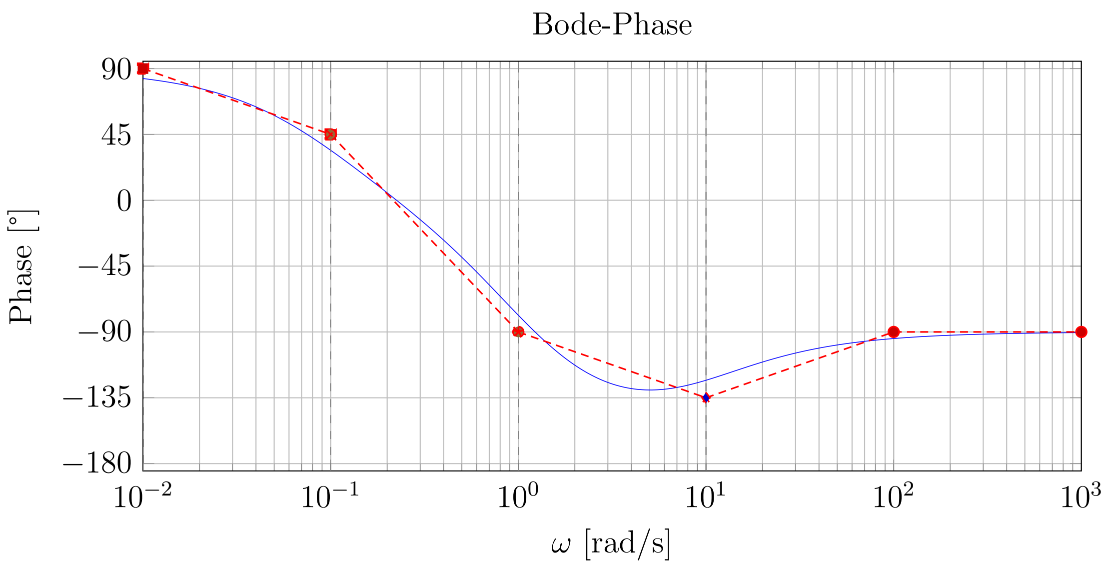
[1] Die Festlegung der ersten Geradennäherung gestaltet sich hier schwierig. Alternativ kann man die Verstärkung bei der Eckfrequenz $\omega = 1$ ansetzen; dabei ist zu beachten, dass man den exakten Wert der blauen Kurve berechnet und dieser etwa $3\,\mathrm{dB}$ unter der Geradennäherung liegt, welche man dann einzeichnen muss.

Aufgabe N)

$$H(s) = \frac{s\,(0.1 - s)\,(s + 10)}{(s + 1)^2}\,.$$

N.1 Bode-Diagramm





N.2 Erklärung

Schritt 1 Struktur und Startverhalten: $H(s) = \dfrac{s(0.1-s)(s+10)}{(s+1)^2}$. Für $\omega \ll 0.1$ gilt $|H(\mathrm{j}\omega)| \approx \omega \cdot 0.1 \cdot 10/1 = \omega \Rightarrow$ Startsteigung $+20\,\mathrm{dB/dec}$; Startphase aus $\mathrm{j}\omega$ ist $\approx +90^\circ$ (keine Übergänge aktiv).

Schritt 2 RHP-Nullstelle bei $\omega_z = 0.1\,\mathrm{rad/s}$: Magnitude-Beitrag wie LHP-Nullstelle $\Rightarrow$ zusätzlicher Anstieg $+20\,\mathrm{dB/dec}$ ab $\omega = 0.1$; Nettoslope ist $+40\,\mathrm{dB/dec}$ Phase hingegen fällt um 90° über $\omega \in [0.01, 1]$ (Geradennäherung: $45^\circ - 45^\circ \log_{10}(\omega/0.1)$ bis $45^\circ - 135^\circ \log_{10}(\omega/0.1)$).

Schritt 3 Doppelpol bei $\omega_p = 1\,\mathrm{rad/s}$ und LHP-Nullstelle bei $\omega_z = 10\,\mathrm{rad/s}$: Der Doppelpol reduziert die Slope um $-40\,\mathrm{dB/dec} \Rightarrow$ Netto $0\,\mathrm{dB/dec}$ in $[1, 10]$ (Betrag $\approx 20\,\mathrm{dB}$ als Geraden-Niveau); die LHP-Nullstelle hebt ab $\omega = 10$ die Slope wieder auf $+20\,\mathrm{dB/dec}$. Phasenbild: der Doppelpol liefert insgesamt -180° über $\omega \in [0.1, 10]$; die LHP-Nullstelle addiert $+90^\circ$ über $\omega \in [1, 100]$. Daraus resultieren die roten Segmente: $+90^\circ \to +45^\circ$ ($[0.01, 0.1]$), weiter bis $\approx -90^\circ$ ($[0.1, 1]$), in $[1, 10]$ Abfall bis $\approx -135^\circ$, anschließend Anstieg zurück gegen $\approx -90^\circ$ für $\omega \gg 100$.

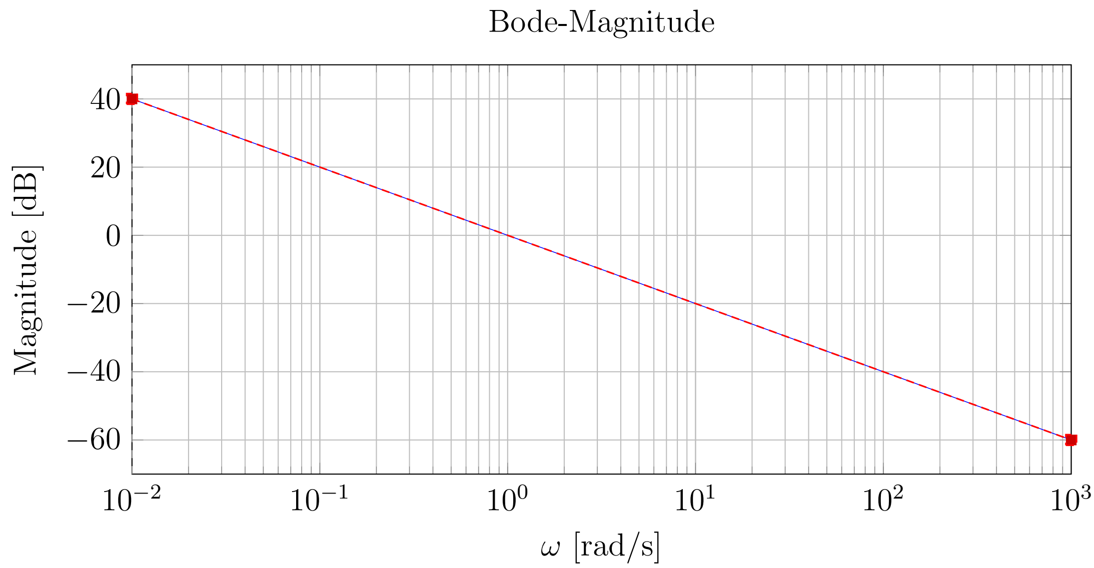
Stückweise Näherung

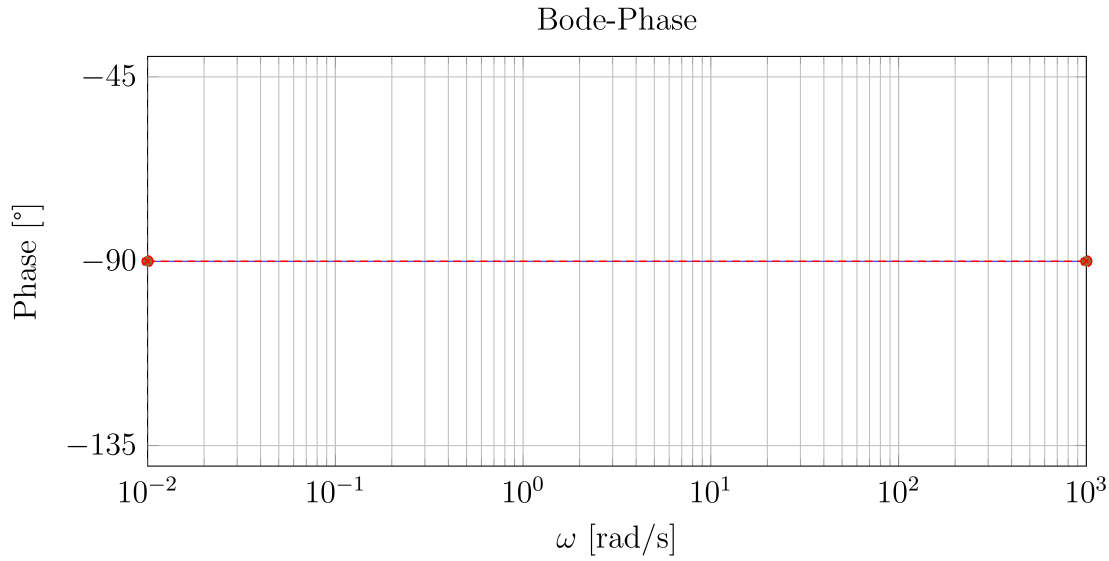
$$|H(\mathrm{j}\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx \begin{cases} 20\log_{10}\omega, & \omega \ll 0.1, \\ 40\log_{10}\omega + 20, & 0.1 \ll \omega \ll 1, \\ 20, & 1 \ll \omega \ll 10, \\ 20 + 20\log_{10}(\omega/10), & \omega \gg 10, \end{cases}$$

Aufgabe O)

$$H(s) = \frac{1}{s}\,.$$

O.1 Bode-Diagramm





O.2 Erklärung

Schritt 1 Pol im Ursprung: $H(s) = 1/s$ liefert für alle $\omega > 0$ die Betragsasymptote $|H(\mathrm{j}\omega)|_{\mathrm{dB}} = -20\log_{10}\omega$ mit konstanter Steigung $-20\,\mathrm{dB/dec}$; keine endliche Eckfrequenz. Wir benötigen ein Fixpunkt und wählen diesen beliebig bei $\omega = 1 \rightarrow |H(1)|_{dB} = 20log_{10}(1)\,\mathrm{dB} = 0\,\mathrm{dB}$

Schritt 2 Phase: $\angle(1/\,\mathrm{j}\omega) = -90°$ für alle Frequenzen; keine Übergangsdekaden, daher rote Geradennäherung deckungsgleich mit dem exakten Verlauf.

Schritt 3 Grenzfälle: $\omega \to 0^+ \Rightarrow |H| \to \infty$ (Integrator), $\omega \to \infty \Rightarrow |H| \to 0$; Phase bleibt stets $-90°$.

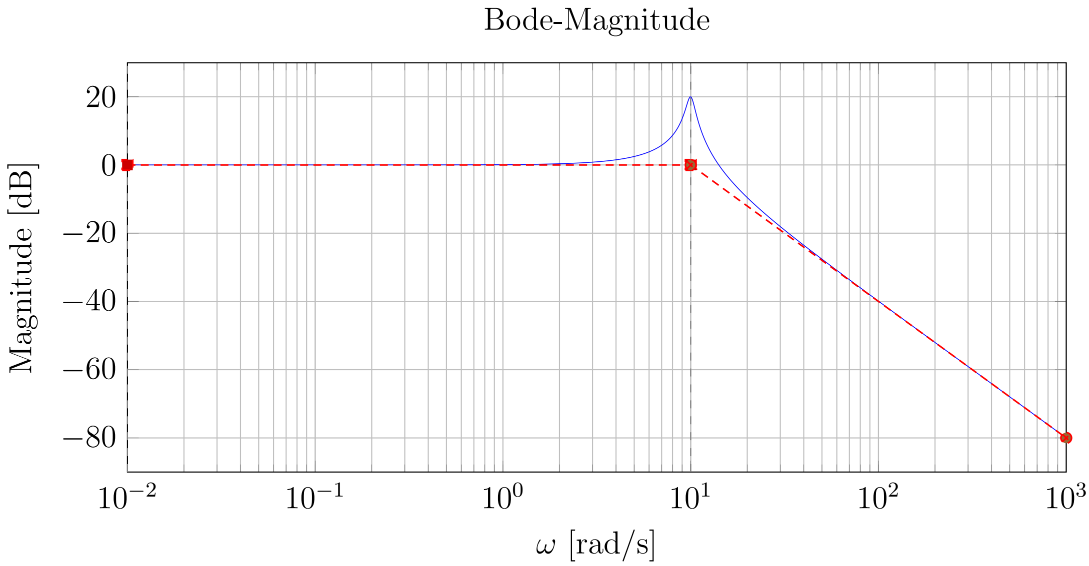
Stückweise Näherung

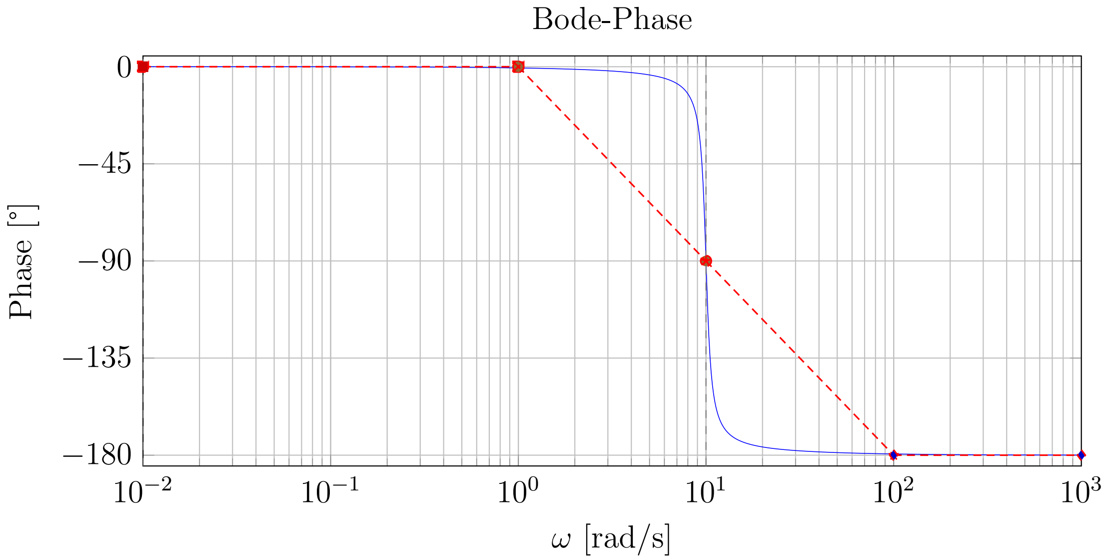
$$|H(\mathrm{j}\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx \begin{cases} -20\log_{10}\omega, & \omega \ll 1, \\ 0, & \omega = 1, \\ -20\log_{10}\omega, & \omega \gg 1, \end{cases}$$

Aufgabe P)

$$H(s) = \frac{100}{s^2 + s + 100}\,.$$

P.1 Bode-Diagramm





P.2 Erklärung

Schritt 1 Normform: $s^2+s+100=\omega_n^2\left[\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2+2\zeta\left(\frac{s}{\omega_n}\right)+1\right]$ mit $\omega_n=10$ und $\zeta=\frac{1}{2\omega_n}=0.05$. DC-Faktor $100/100=1 \Rightarrow 0\,\text{dB}$ ohne Anfangssteigung; Startphase $\approx 0°$.

Schritt 2 Konjugiertes Polpaar: Resonanz bei $\omega_n=10$. Asymptote $0\,\text{dB}$ für $\omega \ll 10$, ab $\omega=10$ Slope $-40\,\text{dB/dec}$. Exakt liegt die Verstärkung bei Resonanz bei $|H(\text{j}\omega_n)|=\frac{1}{2\zeta}=10 \Rightarrow 20\,\text{dB}$.

Schritt 3 Phase: Gesamtabfall[2] um 180° um ω_n, für die Geradennäherung über zwei Dekaden verteilt ($[1,100]$): $0° \to -90°$ in $[1,10]$, weiter $-90° \to -180°$ in $[10,100]$. Für $\omega \gg 10$ nähert sich $\angle H \to -180°$.

Stückweise Näherung

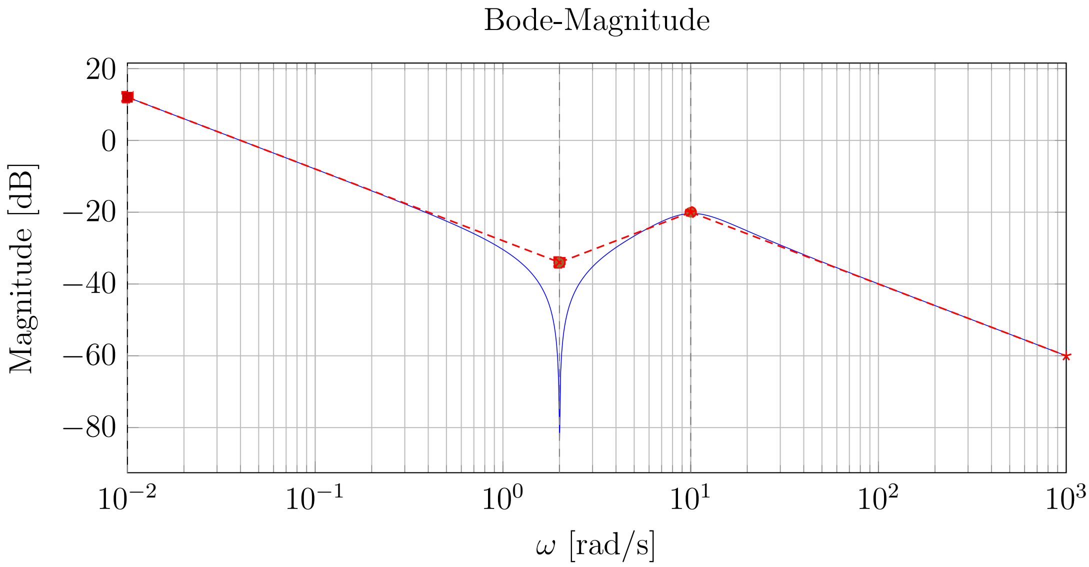
$$|H(\text{j}\omega)|_{\text{dB}} \approx \begin{cases} 0, & \omega \ll 10, \\ +20, & \omega = 10, \\ -40\log_{10}(\omega/10), & \omega \gg 10, \end{cases}$$

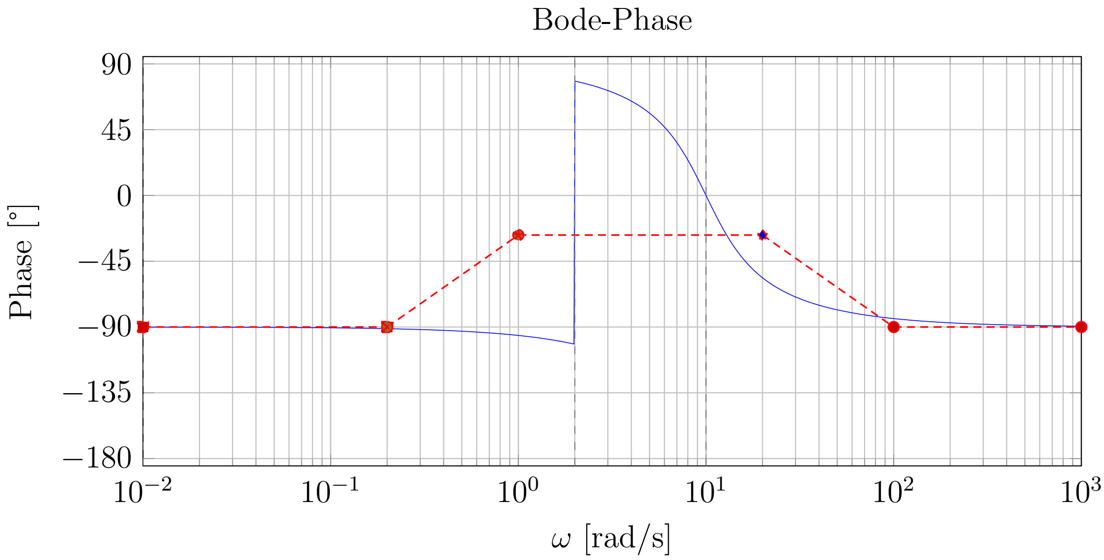
[2]Im exakten Verlauf kippt die Phase schneller als von der Geradennäherung prognostiziert; Ursache ist das sehr kleine ζ. Je kleiner ζ, desto abrupter der Phasenübergang und desto schmaler sowie ausgeprägter die Resonanz im Magnitudenplot. Die handschriftliche Bode-Näherung ist hier grob; die genaue Lage der roten Segmente bleibt eine Abschätzung.

Aufgabe Q)

$$H(s) = \frac{s^2+4}{s\,(s^2+10s+100)}\,.$$

Q.1 Bode-Diagramm





Q.2 Erklärung

Schritt 1 Struktur: Integrator $1/s$, konjugiertes Polpaar mit $\omega_n = 10$, $\zeta = 0.5$, und Doppelnullen auf der imaginären Achse bei $\omega_z = 2$. Für $\omega \ll 2$: $|H(\mathrm{j}\omega)| \approx \dfrac{4}{100\,\omega} = 0.04/\omega \Rightarrow$ Slope $-20\,\mathrm{dB/dec}$ um Niveau $20\log_{10} 0.04 \approx -20\,\mathrm{dB}$ bei $\omega = 0.4$; Phase $\approx -90°$.

Schritt 2 Doppelnullen bei $\omega_z = 2$: Betrag hat dort ein exaktes Null ($|H(\mathrm{j}2)| = 0$). Asymptotisch steigt die Slope vor $\omega = 2$ bei $-20\,\mathrm{dB/dec}$ (Nach $\omega = 2$ netto bei $-20 + 40 \to +20\,\mathrm{dB/dec}$). Phasenbeitrag der Zählerdoppelnull ist exakt ein Sprung um $+180°$ (von $0°$ auf $180°$); in der Geradennäherung als $+180°$ über zwei Dekaden $[0.2, 20]$ modelliert.

Schritt 3 Polpaar bei $\omega_n = 10$, $\zeta = 0.5$: ab $\omega = 10$ Slope-Änderung $-40\,\mathrm{dB/dec}$ (Netto $+20 \to -20\,\mathrm{dB/dec}$). Exakt bei $\omega = 10$: $|H(\mathrm{j}10)| = \dfrac{|4-100|}{10\cdot 100} = \dfrac{96}{1000} \approx -20\,\mathrm{dB}$. Phasenbeitrag des Polpaares $-180°$ über $[1, 100]$, wodurch die Gesamtsumme nach dem temporären Anheben durch die Zählernullen wieder zurück auf $-90°$ fällt[3].

Schritt 4 Resonanz korrekt: Das Zählerpolynom $s^2 + 4$ liefert reelle zwei Nullstellen auf der imaginären Achse bei $\omega_z = 2$. Folge: $|H(\mathrm{j}2)| = 0$; in Dezibel $-\infty\,\mathrm{dB}$. Das Polpaar $s^2 + 10s + 100$ hat $\omega_n = 10$ und $\zeta = 0.5$ ($Q = 1$). ζ ist recht groß und Q unterdrückt Resonanz; konkret $|H(\mathrm{j}10)| = \frac{|4-100|}{10\cdot 100} = 0.096 \Rightarrow\approx -20\,\mathrm{dB}$.

Stückweise Näherung

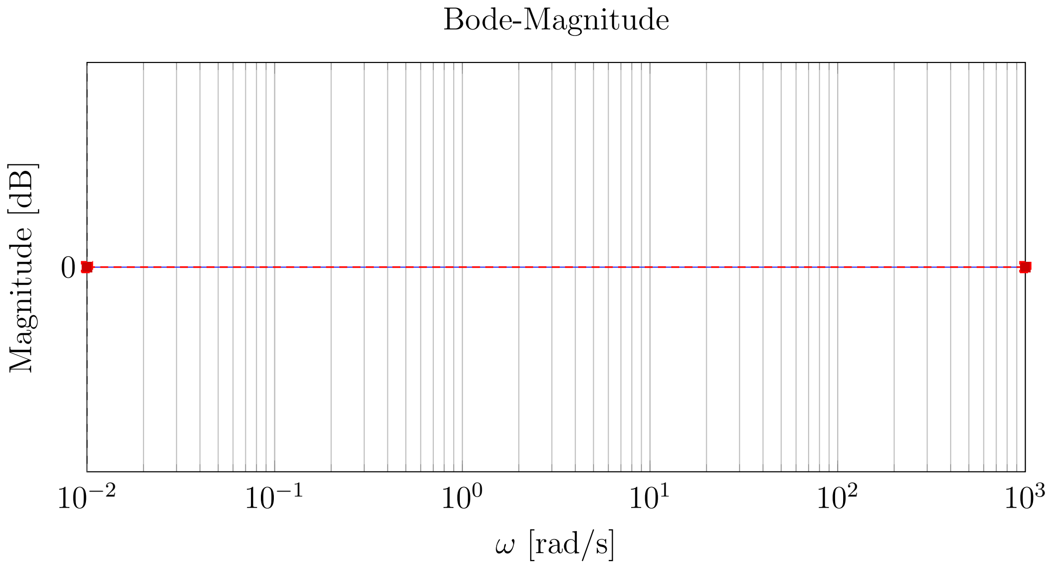
$$|H(\mathrm{j}\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx \begin{cases} 20\log_{10}(0.04) - 20\log_{10}\omega, & \omega \ll 2, \\ -\infty, & \omega = 2, \\ -40 + 20\log_{10}\omega, & 2 \ll \omega \ll 10, \\ -20 - 20\log_{10}(\omega/10), & \omega \gg 10, \end{cases}$$

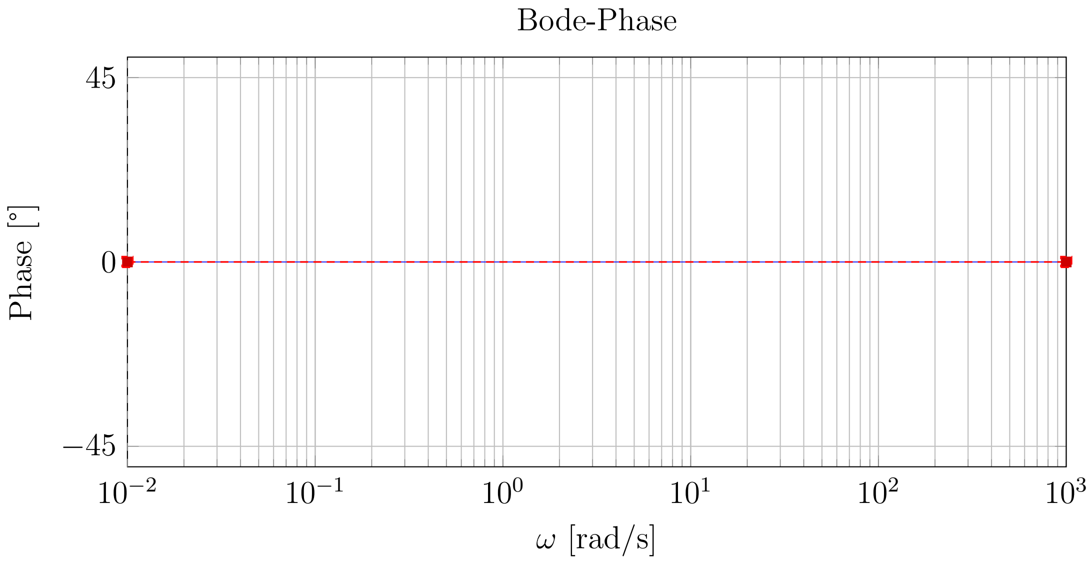
[3]Aufgrund der sehr kleinen Dämpfung ζ wirkt der Phasenverlauf "chaotisch". Tatsächlich überlagern sich zwei 180°-Übergänge: zuerst der abrupte Sprung des Nullstellenpaares, direkt danach der vergleichsweise sanfte Abfall des Polpaares.

Aufgabe R)

$$H(s) = \frac{s^2 + 2s + 10}{s^2 + 2s + 10} = 1\,.$$

R.1 Bode-Diagramm





R.2 Erklärung

Schritt 1 Kürzung: Zähler und Nenner sind identisch, daher $H(s) \equiv 1$. DC-Faktor $1 \Rightarrow |H|_{\mathrm{DC}} = 0\,\mathrm{dB}$; Anfangssteigung $0\,\mathrm{dB/dec}$; Phase $0°$.

Schritt 2 Keine Ecken: keine endlichen Pole/Nullstellen nach Kürzung, daher keine Eckfrequenzen und keine Phasen- und Magnitudenänderungen. Die Geradennäherungen decken sich exakt mit dem exakten Verlauf.

Schritt 3 Grenzverhalten: für $\omega \to 0$ und $\omega \to \infty$ bleibt $|H(\mathrm{j}\omega)| = 1$ und $\angle H(\mathrm{j}\omega) = 0°$; das gesamte Bode-Diagramm ist konstant.

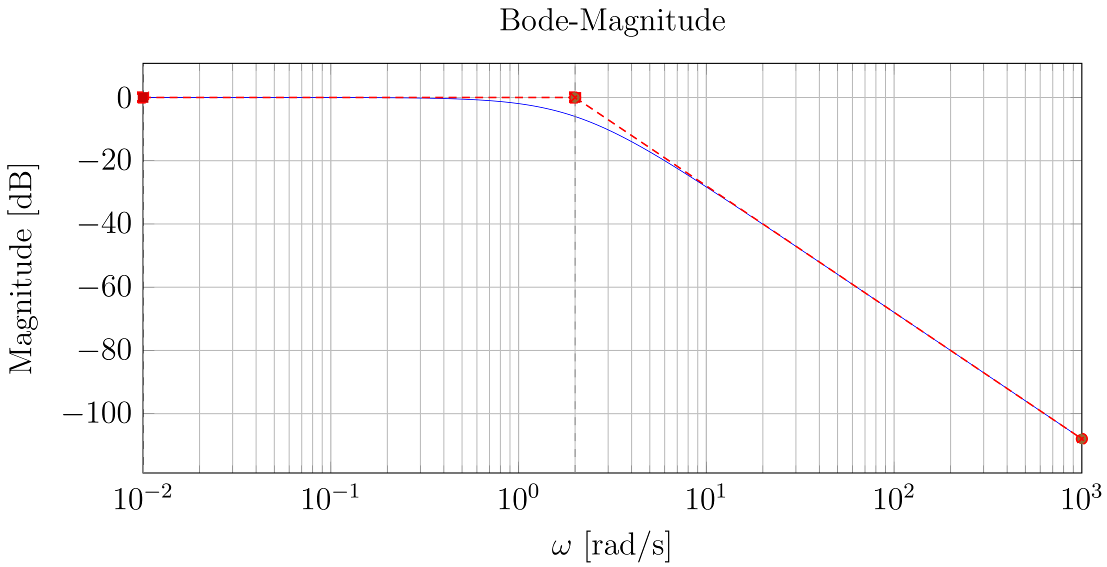
Stückweise Näherung

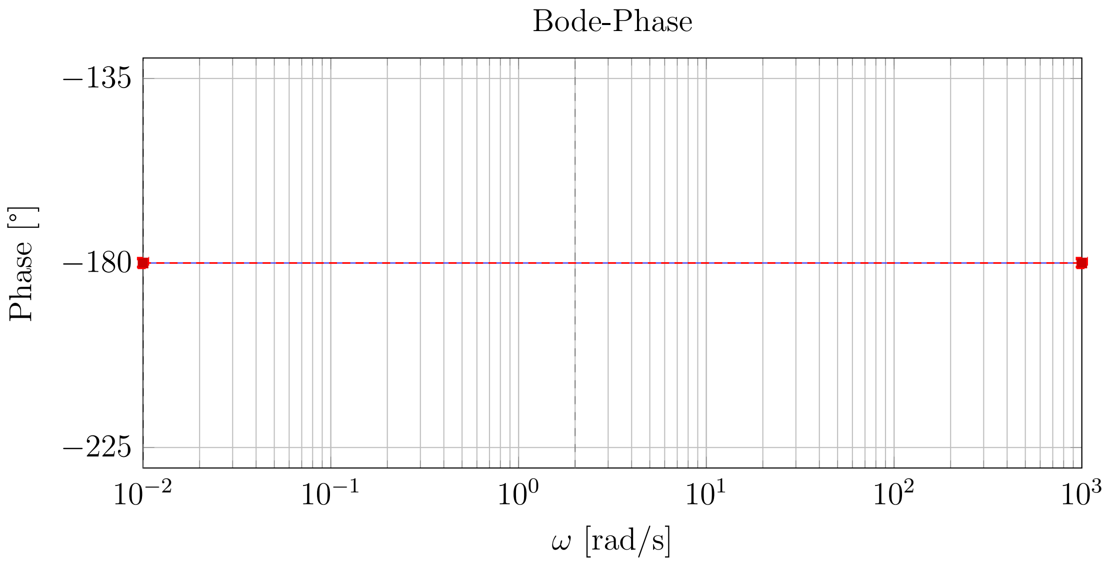
$$|H(\mathrm{j}\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx \begin{cases} 0, & \omega \ll 1, \\ 0, & \omega = 1, \\ 0, & \omega \gg 1, \end{cases}$$

Aufgabe S)

$$H(s) = \frac{4}{s^2 - 4} = \frac{4}{(s-2)(s+2)}\,.$$

S.1 Bode-Diagramm





S.2 Erklärung

Schritt 1 Faktorisierung: $H(s) = \dfrac{4}{(s-2)(s+2)}$. DC-Wert $H(0) = -1 \Rightarrow |H|_{\mathrm{DC}} = 0\,\mathrm{dB}$; das negative Vorzeichen liefert eine konstante Phase von $-180°$. Anfangssteigung $0\,\mathrm{dB/dec}$.

Schritt 2 Pole bei $\omega_p = 2\,\mathrm{rad/s}$ (einer RHP, einer LHP): Magnitudenbeitrag entspricht einem Doppelpol bei $\omega = 2 \Rightarrow$ ab $\omega = 2$ Slope $-40\,\mathrm{dB/dec}$. Am Eckpunkt exakte Dämpfung $-20\log_{10} 2 \approx -6\,\mathrm{dB}$. Phasenverlauf: die entgegengesetzen Beiträge der LHP- und RHP-Polphase heben sich auf; netto bleibt die Phase für alle ω konstant $-180°$.

Schritt 3 Grenzverhalten: für $\omega \ll 2$ bleibt $|H(\mathrm{j}\omega)| \approx 1$; für $\omega \gg 2$ folgt $|H(\mathrm{j}\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx -40\log_{10}(\omega/2)$; die Phase bleibt über das gesamte Spektrum bei $-180°$.

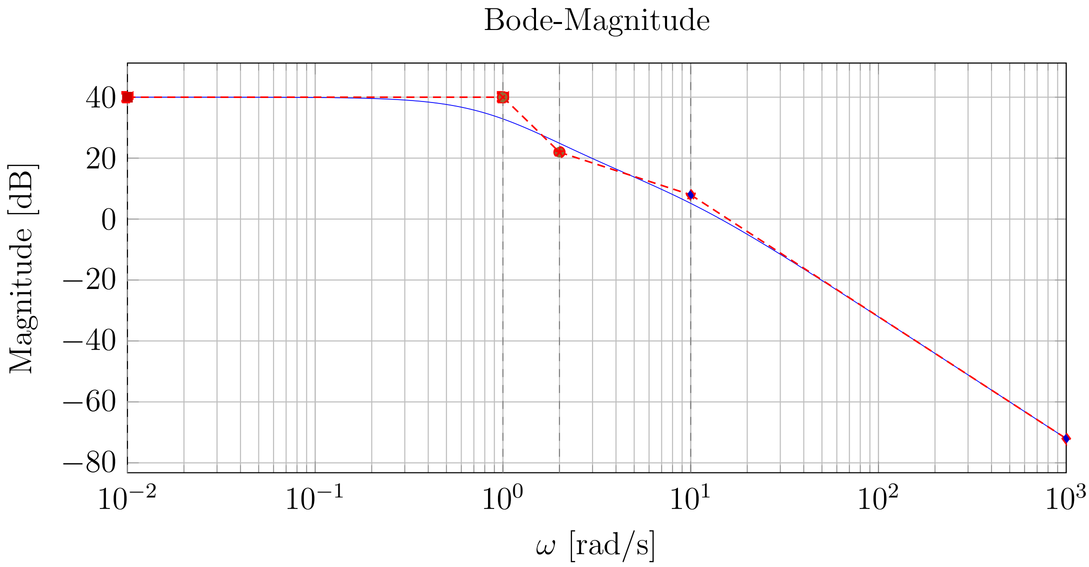
Stückweise Näherung

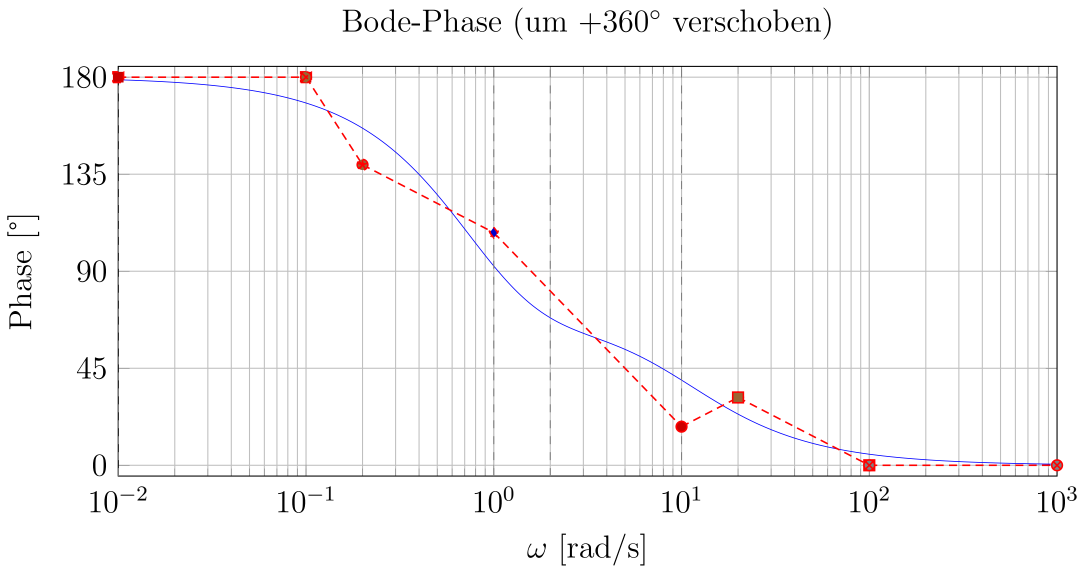
$$|H(\mathrm{j}\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx \begin{cases} 0, & \omega \ll 2, \\ -20\log_{10} 2, & \omega = 2, \\ -40\log_{10}(\omega/2), & \omega \gg 2, \end{cases}$$

Aufgabe T)

$$H(s) = \frac{-1000\,(s+2)^2}{4\,(s+1)^3\,(s+10)} = -250\,\frac{(s+2)^2}{(s+1)^3\,(s+10)}\,.$$

T.1 Bode-Diagramm





T.2 Erklärung

Schritt 1 Konstante & Vorzeichen: $H(0) = -100 \Rightarrow |H|_{\mathrm{DC}} = 40\,\mathrm{dB}$, Anfangssteigung $0\,\mathrm{dB/dec}$. Die Darstellung ist um $+360^\circ$ verschoben: Startphase 180° (das negative Vorzeichen).

Schritt 2 Dreifachpol bei $\omega = 1\,\mathrm{rad/s}$: ab $\omega = 1$ Steigungsänderung um $-60\,\mathrm{dB/dec}$; Exakte Abweichung ggü. Geradennäherung $-3 \cdot 10\log_{10} 2 \approx -9\,\mathrm{dB}$. Phasenabfall dieses Poltripels über $\omega \in [0.1, 10]$ um 270°.

Schritt 3 Doppelnullstelle bei $\omega = 2\,\mathrm{rad/s}$ und Pol bei $\omega = 10\,\mathrm{rad/s}$: die Doppelnull hebt die Slope ab $\omega = 2$ um $+40\,\mathrm{dB/dec}$ (Netto $-20\,\mathrm{dB/dec}$ in $(2, 10)$), der Pol bei $\omega = 10$ senkt sie um weitere $-20\,\mathrm{dB/dec}$ (Netto $-40\,\mathrm{dB/dec}$ für $\omega \gg 10$). Phasenbeiträge: $+180^\circ$ der Doppelnullstelle über $[0.2, 20]$, -90° des Pols bei 10 über $[1, 100]$; Die Phase verläuft von 180° ($\omega \ll 0.1$) gegen 0° ($100 \ll \omega$).

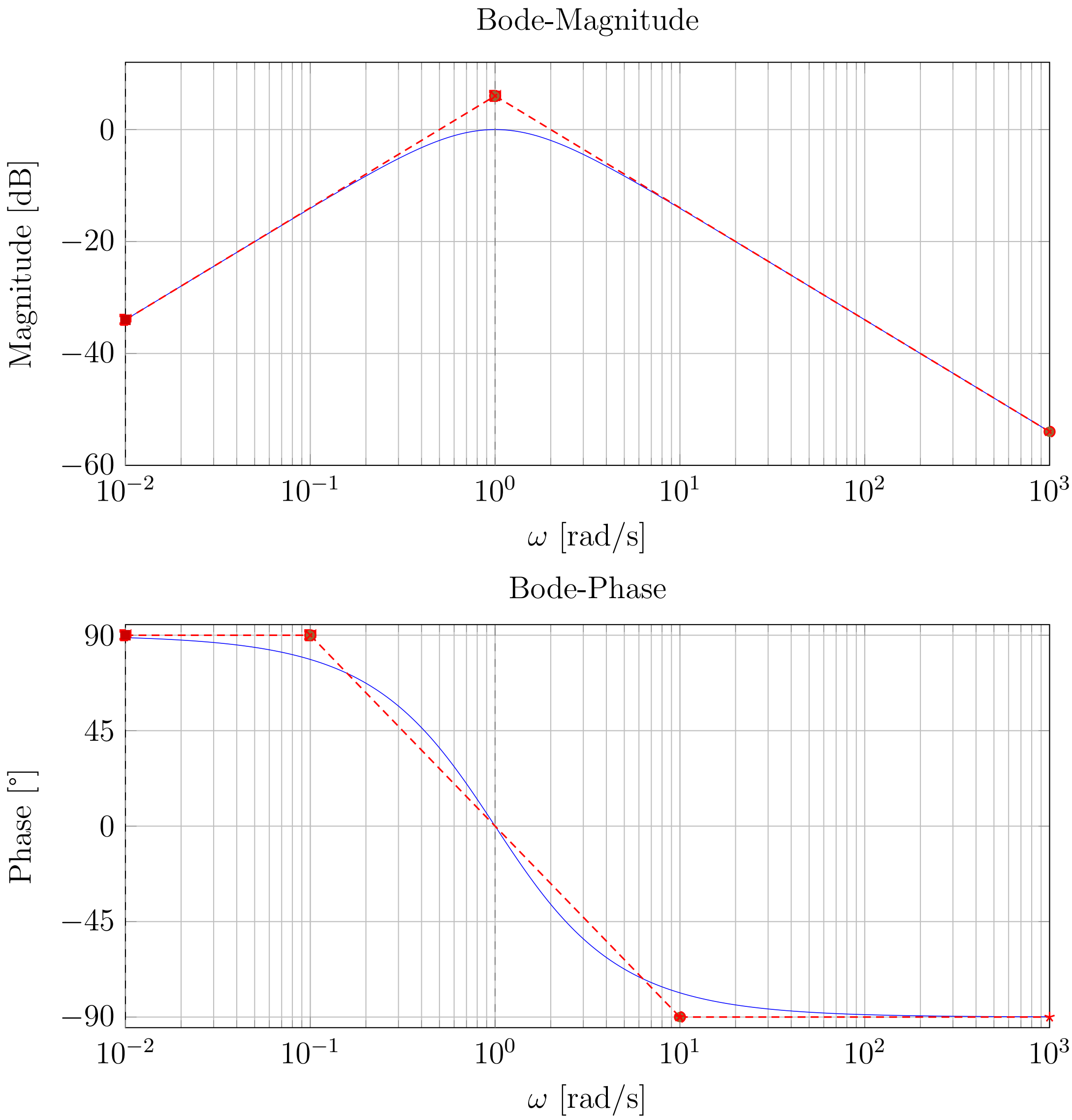
Stückweise Näherung

$$|H(\mathrm{j}\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx \begin{cases} 40, & \omega \ll 1, \\ 40 - 60\log_{10}\omega, & 1 \ll \omega \ll 2, \\ 40 - 60\log_{10} 2 - 20\log_{10}(\omega/2), & 2 \ll \omega \ll 10, \\ 40 - 60\log_{10} 2 - 20\log_{10} 5 - 40\log_{10}(\omega/10), & \omega \gg 10, \end{cases}$$

Aufgabe U)

$$H(s) = \frac{2\,s}{s^2 + 2s + 1} = \frac{2\,s}{(s+1)^2}\,.$$

U.1 Bode-Diagramm



U.2 Erklärung

Schritt 1 Nullstelle im Ursprung und Faktor 2: für $\omega \ll 1$ gilt $|H(\mathrm{j}\omega)| \approx 2\,\omega$ $\Rightarrow$ Startsteigung $+20\,\mathrm{dB/dec}$, Fixpunkt bei $|H(1j)|_{dB} = 20\log_{10} 1 \approx 0\,\mathrm{dB}$; Fixpunkt für Geradennäherung liegt ca. $6\,\mathrm{dB}$ über exakten Fixpunkt $0\,\mathrm{dB}$. Startphase $\approx +90°$.

Schritt 2 Doppelter Pol bei $\omega = 1\,\mathrm{rad/s}$: ab $\omega = 1$ zusätzliche Steigungsänderung um $-40\,\mathrm{dB/dec}$; Netto-Slope für $\omega \gg 1$ ist $-20\,\mathrm{dB/dec}$ ($|H| \sim 2/\omega$). Phasenabfall der beiden Pole zusammen $180°$ über $\omega \in [0.1, 10]$; Näherung: $45° - 90° \log_{10} \omega$.

Schritt 3 Grenzverhalten: $\omega \ll 1 \Rightarrow |H|_{\mathrm{dB}} \approx 20\log_{10} 2 + 20\log_{10}\omega$, $\angle H \approx +90°$; $\omega \gg 1 \Rightarrow |H|_{\mathrm{dB}} \approx 20\log_{10} 2 - 20\log_{10}\omega$, $\angle H \to -90°$.

Stückweise Näherung

$$|H(\mathrm{j}\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx \begin{cases} 20\log_{10} 2 + 20\log_{10}\omega, & \omega \ll 1, \\ 20\log_{10} 2 \;\; - 20\log_{10} 2 = 0, & \omega = 1, \\ 20\log_{10} 2 - 20\log_{10}\omega, & \omega \gg 1, \end{cases}$$