Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Laboratory for High
Power Electronic Systems

Netzwerke und Schaltungen II, D-ITET

Bodeplots — Musterlösung

Hinweise

– Phasenverläufe können aus ästhetischen Gründen um 360° verschoben sein; eine Verschiebung um 360° ändert die Aussage nicht.
– Magnitudenplots sind auf der y-Achse standardmäßig in 20-dB-Schritten beschriftet; falls es sich ästhetisch anbietet, sind auch 10-dB-Schritte zulässig.
– Mit dem MATLAB-Skript kann man selbst experimentieren, die Plots exakt berechnen und alle Ergebnisse nachprüfen.

Version: October 26, 2025

Einleitung: s und $j\omega$

Warum sind manche Übertragungsfunktionen manchmal abhängig von s und manchmal von jω*?*

Für sinusförmige stationäre Signale ist die Laplace- mit der Fourier-Transformierten auf der imaginären Achse äquivalent; eine Abklinghülle ist nicht nötig, daher setzt man $\sigma = 0$ und damit

$$s = j\omega.$$

Der Frequenzgang wird zwar als $H(j\omega)$ ausgewertet, aber die Schreibweise in s ist kompakter und, wie wir gesehen haben, äquivalent: Standardformen wie $1 + sT$, $1/(1 + sT)$, sL, $1/(sC)$ sind sofort lesbar und einfacher zu faktorisieren. Es bietet sich an in s zu modellieren und faktorisieren und um Magnituden/Phasen explitizit auszurechnen, am Ende $s \to j\omega$ einsetzen und mit den Gesetzen der komplexen Zahlen zu arbeiten.

Beispiele

$$H(s) = \frac{1}{1 + sT} \qquad \Leftrightarrow \qquad H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$$

$$H(s) = \frac{sT}{1 + sT} \qquad \Leftrightarrow \qquad H(j\omega) = \frac{j\omega T}{1 + j\omega T}$$

$$H(s) = \frac{1}{sT} \qquad \Leftrightarrow \qquad H(j\omega) = \frac{1}{j\omega T}$$

$$H(s) = sT \qquad \Leftrightarrow \qquad H(j\omega) = j\omega T$$

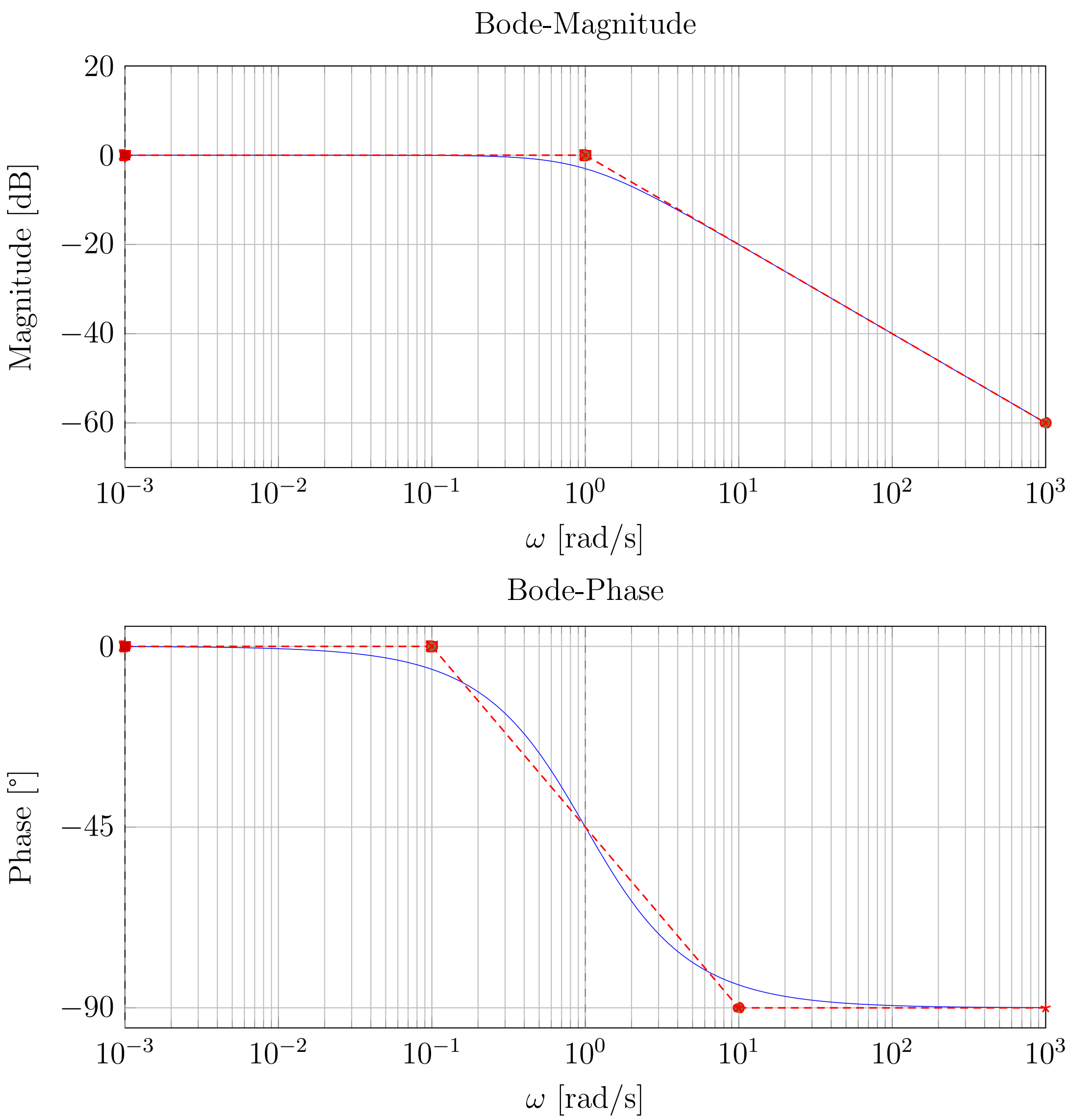
$$H(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad H(j\omega) = \frac{\omega_0^2}{-\omega^2 + j\,2\zeta\omega_0\omega + \omega_0^2}$$

$$H(s) = \frac{1 + sT_z}{1 + sT_p} \qquad \Leftrightarrow \qquad H(j\omega) = \frac{1 + j\omega T_z}{1 + j\omega T_p}$$

Aufgabe A)

$$H(s) = \frac{1}{s+1}\,.$$

A.1 Bode-Diagramm



A.2 Erklärung

1. **Normalform herstellen.** Bringe die Übertragungsfunktion exakt in die im Skript definierte Standardform für reelle Pol-/Nullstellen.

$$H(s) = \frac{1}{1 + sT_p} \quad \text{mit} \quad T_p = 1.$$

   Hier haben wir:

$$\underline{F}_1(s) = \frac{1}{1 + sT_p} \quad \text{und} \quad K_0 = 1 \quad \text{und} \quad r = 0.$$

   Klassifizikation des ersten Teilglieds $\underline{F}_1$: reelles Polglied erster Ordnung.

2. **Eckfrequenz bestimmen und sortieren.** Bestimme die Eckfrequenz aus der Zeitkonstante:

$$\omega_p = \frac{1}{T_p} = 1\,\text{rad/s}.$$

   Es existiert nur diese Eckfrequenz; die aufsteigende Sortierung $\omega_1 < \omega_2 < \ldots$ ist damit trivial.

3. **Startpunkt des Amplitudengangs festlegen (Geradennäherung).** Setze die Startfrequenz gleich der kleinsten Eckfrequenz $\omega_{\min} = \omega_p = 1\,\text{rad/s}$. Verwende die Skript-Regel

$$F_{\text{dB}}(\omega_{\min}) = 20\log_{10}\Big(|K_0\, F^*_{ges}(0)| \cdot \omega^r_{\min}\Big) = 20\log_{10}(1) = 0\,\text{dB}$$

   Hier gilt $K_0 = 1$, $r = 0$ und $F^*_{ges}(0) = 1 \Rightarrow F_{\text{dB}}(\omega_{\min}) = 0\,\text{dB}$. Dieser Punkt nützt uns als Anker für die Geradennäherung.

4. **Verlauf links vom Startpunkt zeichnen.** Für $\omega < \omega_{\min}$ bleibt die Amplituden-Asymptote waagrecht, denn die Anfangssteigung beträgt $r \cdot 20\,\text{dB/dec} = 0$. Trage also eine horizontale Linie bei $0\,\text{dB}$ ein.

5. **Steigungswechsel an der Eckfrequenz eintragen.** Ein einfaches Polglied $1/(1+sT_p)$ reduziert die Steigung ab ω_p um $20\,\text{dB/dec}$. Da bist jetzt die Steigung $0\,\text{dB/dec}$ betrug, ist diese ab jetzt $-20\,\text{dB/dec}$. Zeichne rechts von ω_p die Gerade mit Steigung $-20\,\text{dB/dec}$. Die Formel für die Geradennäherung lautet:

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} \approx -20\log_{10}\omega \quad (\omega \geq 1).$$

   Mehrfachpole würden die Änderung mehrfach zählen; hier nicht nötig.

6. **Eckabrundung korrekt berücksichtigen.** Bei einfachen reellen Polen ergibt sich am Knickpunkt $\omega = \omega_p$ eine Abweichung von $-3\,\mathrm{dB}$ gegenüber der Gerade. Setze dort einen Stützpunkt:

$$|H(j\omega_p)|_{\mathrm{dB}} = -10\log_{10}(1+1^2) = -10\log_{10}2 \approx -3.01\,\mathrm{dB}.$$

Runde die Ecke entsprechend ab. Hätten wir einen Mehrfachpol bei ω_p (Beispielsweise $\left(\frac{1}{1+sT_p}\right)^t$), müsste man die Ecke um $t \cdot 3.01\,\mathrm{dB}$ abrunden.

7. **Phasenstartwert festlegen.** Nutze die Regel für $\omega \to 0$: Da $K_0 F_{ges}(0) > 0$ und $r = 0$, ist der Startwert der Phase

$$\varphi(0) = 0^\circ.$$

8. **Phasenänderung durch das Polglied eintragen.** Ein reelles Polglied erster Ordnung erzeugt insgesamt eine Phasenänderung von -90°. Trage die Näherung ein:

$$\varphi(\omega) \approx \begin{cases} 0^\circ, & \omega \leq 0.1\,\omega_p, \\ \text{linear mit Steigung } -45^\circ/\text{Dec}, & 0.1\,\omega_p < \omega < 10\,\omega_p, \\ -90^\circ, & \omega \geq 10\,\omega_p. \end{cases}$$

Das lineare Zwischenstück kann Formelkonform als $\varphi(\omega) \approx -45^\circ - 45^\circ\log_{10}\omega$ dargestellt werden (hier mit $\omega_p = 1$).

9. **Grenzwerte und Konsistenz prüfen.** DC: $|H(0)| = 1 \Rightarrow 0\,\mathrm{dB}$, $\varphi(0) = 0^\circ$. HF: $|H(j\omega)| \sim 1/\omega \Rightarrow -20\log_{10}\omega\,\mathrm{dB}$). Pol-/Nullzählung bestätigt die Endphase: Zählergrad $m = 0$, Nennergra $n = 1 \Rightarrow \varphi(\infty) = (m-n)\cdot 90^\circ = -90^\circ$.

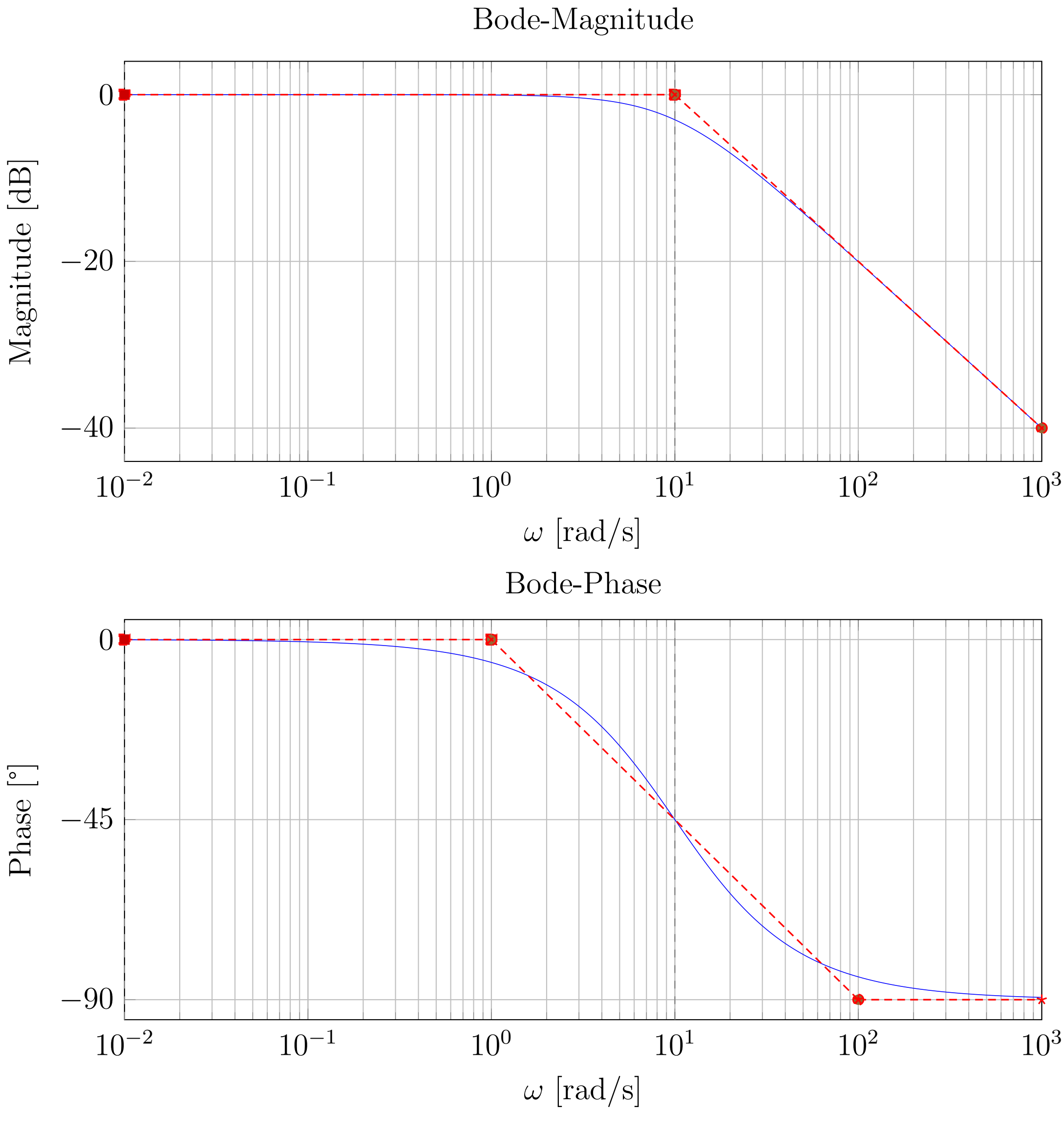
Stückweise Näherungen (für die Skizze)

$$|H(j\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx \begin{cases} 0, & \omega \ll 1, \\ -10\log_{10}2, & \omega = 1, \\ -20\log_{10}\omega, & \omega \gg 1, \end{cases} \qquad \varphi(\omega) \approx \begin{cases} 0^\circ, & \omega \leq 0.1, \\ -45^\circ - 45^\circ\log_{10}\omega, & 0.1 < \omega < 10, \\ -90^\circ, & \omega \geq 10. \end{cases}$$

Aufgabe B)

$$H(s) = \frac{10}{s + 10} \, .$$

B.1 Bode-Diagramm



B.2 Erklärung

1. **Normalform herstellen.** Bringe die Übertragungsfunktion exakt in die im Skript definierte Standardform für reelle Pol-/Nullstellen.

$$H(s) = \frac{1}{1 + sT_p} \quad \text{mit} \quad T_p = \frac{1}{10}.$$

Hier haben wir:

$$\underline{F}_1(s) = \frac{1}{1 + sT_p} \quad \text{und} \quad K_0 = 1 \quad \text{und} \quad r = 0.$$

Klassifizikation des ersten Teilglieds $\underline{F}_1$: reelles Polglied (LHP) erster Ordnung.

2. **Eckfrequenz bestimmen und sortieren.** Bestimme die Eckfrequenz aus der Zeitkonstante:

$$\omega_p = \frac{1}{T_p} = 10\,\text{rad/s}.$$

Es existiert nur diese Eckfrequenz; die aufsteigende Sortierung $\omega_1 < \omega_2 < \ldots$ ist damit trivial.

3. **Startpunkt des Amplitudengangs festlegen (Geradennäherung).** Setze die Startfrequenz gleich der kleinsten Eckfrequenz $\omega_{\min} = \omega_p = 10\,\text{rad/s}$. Verwende die Skript-Regel

$$F_{\text{dB}}(\omega_{\min}) = 20\log_{10}\Big(|K_0\, F^*_{ges}(0)| \cdot \omega^r_{\min}\Big) = 20\log_{10}(1) = 0\,\text{dB}.$$

Hier gilt $K_0 = 1$, $r = 0$ und $F^*_{ges}(0) = 1 \Rightarrow F_{\text{dB}}(\omega_{\min}) = 0\,\text{dB}$. Dieser Punkt nützt uns als Anker für die Geradennäherung.

4. **Verlauf links vom Startpunkt zeichnen.** Für $\omega < \omega_{\min}$ bleibt die Amplituden-Asymptote waagrecht, denn die Anfangssteigung beträgt $r \cdot 20\,\text{dB/dec} = 0$. Trage also eine horizontale Linie bei 0 dB ein.

5. **Steigungswechsel an der Eckfrequenz eintragen.** Ein einfaches Polglied $1/(1 + sT_p)$ reduziert die Steigung ab ω_p um 20 dB/dec. Da bis jetzt die Steigung 0 dB/dec betrug, ist diese ab jetzt $-20\,\text{dB/dec}$. Zeichne rechts von ω_p die Gerade mit Steigung $-20\,\text{dB/dec}$. Die Formel für die Geradennäherung lautet:

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} \approx -20\log_{10}\Big(\frac{\omega}{10}\Big) \quad (\omega \geq 10).$$

Mehrfachpole würden die Änderung mehrfach zählen; hier nicht nötig.

6. **Eckabrundung korrekt berücksichtigen.** Bei einfachen reellen Polen ergibt sich am Knickpunkt $\omega = \omega_p$ eine Abweichung von $-3\,\mathrm{dB}$ gegenüber der Gerade.

7. **Phasenstartwert festlegen.** Nutze die Regel für $\omega \to 0$: Da $K_0 F_{ges}(0) > 0$ und $r = 0$, ist der Startwert der Phase

$$\varphi(0) = r \cdot 90^\circ = 0^\circ.$$

8. **Phasenänderung durch das Polglied eintragen.** Ein reelles Polglied erster Ordnung erzeugt insgesamt eine Phasenänderung von -90°. Trage die Näherung ein:

$$\varphi(\omega) \approx \begin{cases} 0^\circ, & \omega \leq 0.1\,\omega_p\ (=1), \\ \text{linear mit Steigung } -45^\circ/\text{Dec}, & 0.1\,\omega_p < \omega < 10\,\omega_p\ (=100), \\ -90^\circ, & \omega \geq 10\,\omega_p\ (=100). \end{cases}$$

Das lineare Zwischenstück kann Formelkonform als $\varphi(\omega) \approx -45^\circ - 45^\circ \log_{10}(\omega/10)$ dargestellt werden (hier mit $\omega_p = 10$).

9. **Grenzwerte und Konsistenz prüfen.** DC: $|H(0)| = 1 \Rightarrow 0\,\mathrm{dB}$, $\varphi(0) = 0^\circ$. HF: $|H(j\omega)| \sim 10/\omega \Rightarrow -20\log_{10}(\omega/10)\,\mathrm{dB}$). Pol-/Nullzählung bestätigt die Endphase: Zählergrad $m = 0$, Nennergrad $n = 1 \Rightarrow \varphi(\infty) = (m-n)\cdot 90^\circ = -90^\circ$.

Stückweise Näherungen (für die Skizze)

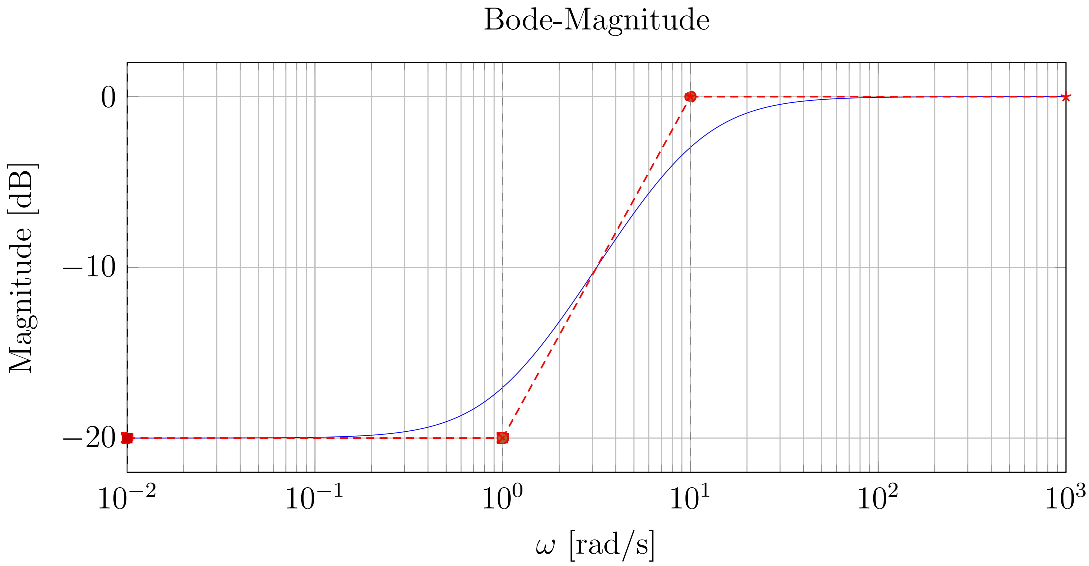
$$|H(j\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx \begin{cases} 0, & \omega \ll 10, \\ -10\log_{10} 2, & \omega = 10, \\ -20\log_{10}(\omega/10), & \omega \gg 10, \end{cases}$$

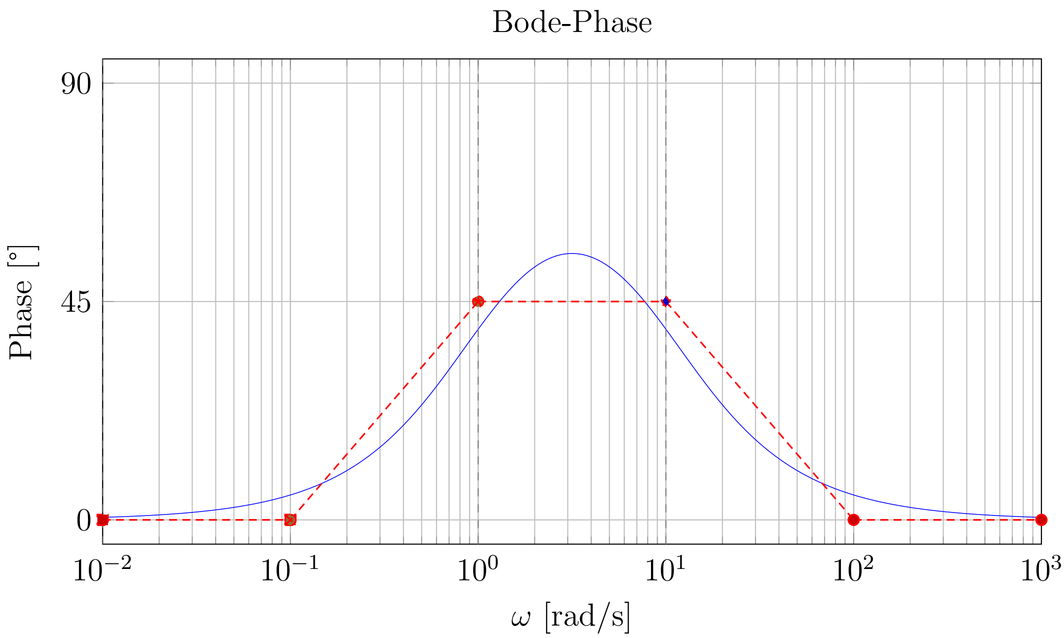
$$\varphi(\omega) \approx \begin{cases} 0^\circ, & \omega \leq 1, \\ -45^\circ - 45^\circ \log_{10}(\omega/10), & 1 < \omega < 100, \\ -90^\circ, & \omega \geq 100. \end{cases}$$

Aufgabe C)

$$H(s) = \frac{s+1}{s+10}\,.$$

C.1 Bode-Diagramm





C.2 Erklärung

1. Zuerst Normalform herstellen.

$$H(s) = \frac{s+1}{s+10} = \frac{1+sT_z}{10\,(1+sT_p)}$$

Die Teilglieder und Variablen gemäß Skript sind:

$$\underline{F}_1(s) = \frac{1}{1+s\frac{1}{10}},\ \underline{F}_2(s) = 1+s, \quad T_z = 1,\ T_p = \tfrac{1}{10},\ K_0 = \tfrac{1}{10} \text{ und } r = 0.$$

reelle Nullstelle erster Ordnung bei $\omega_z = 1/T_z = 1\,\mathrm{rad/s}$; reeller Pol erster Ordnung bei $\omega_p = 1/T_p = 10\,\mathrm{rad/s}$.

2. Danach Eckfrequenzen bestimmen und sortieren.

$$\omega_z = 1\,\mathrm{rad/s}, \qquad \omega_p = 10\,\mathrm{rad/s}, \qquad \omega_z < \omega_p.$$

3. Startpunkt des Amplitudengangs (Geradennäherung). Setze $\omega_{\min} = \omega_z = 1$.

$$F_{\mathrm{dB}}(\omega_{\min}) = 20\log_{10}\!\big(|K_0\,F^*_{ges}(0)|\,\omega^r_{\min}\big) = 20\log_{10}\!\big(\tfrac{1}{10}\big) = -20\,\mathrm{dB}.$$

Anfangssteigung $r \cdot 20\,\mathrm{dB/dec} = 0$.

4. Verlauf links vom Startpunkt. Für $\omega < 1$ bleibt die Magnitude-Asymptote horizontal bei $-20\,\mathrm{dB}$, da $r = 0$.

5. Steigungswechsel an den Ecken. Die Nullstelle bei $\omega_z = 1$ erhöht die Steigung um $+20\,\mathrm{dB/dec}$. Der Pol bei $\omega_p = 10$ senkt sie wieder um $-20\,\mathrm{dB/dec}$. Damit:

$$\begin{cases} \omega < 1: \quad 0\,\mathrm{dB/dec}, \\ 1 \le \omega < 10: \quad +20\,\mathrm{dB/dec}, \\ \omega \ge 10: \quad 0\,\mathrm{dB/dec}. \end{cases}$$

6. Eckabrundung (exakte Stützpunkte).

$$|H(j\omega)| = \frac{\sqrt{1+\omega^2}}{\sqrt{100+\omega^2}}, \qquad |H(j\cdot 1)|_{\mathrm{dB}} = 10\log_{10}\!\left(\frac{2}{101}\right) \approx -17.03\,\mathrm{dB},$$

$$|H(j\cdot 10)|_{\mathrm{dB}} = 10\log_{10}\!\left(\frac{101}{200}\right) \approx -2.97\,\mathrm{dB}.$$

Bei $\omega = 1$ liegt die Kurve $\approx 3\,\mathrm{dB}$ über der Geradennäherung, bei $\omega = 10$ $\approx 3\,\mathrm{dB}$ darunter. Auch hier gilt: Mehrfachpole/-nullstellen sorgen für eine Rundung um $t \cdot 3\,\mathrm{dB}$

7. Phasenstartwert. Da $K_0 F_{ges}(0) > 0$ gilt:

$$\varphi(0) = r \cdot 90^\circ = 0^\circ.$$

8. Phasenänderung durch Nullstelle und Pol. Reelle Nullstelle 1. Ordnung: $0^\circ \to +90^\circ$ über $[0.1, 10]$. Reeller Pol 1. Ordnung: $0^\circ \to -90^\circ$ über $[1, 100]$. Die Phasensteigungs und -senkungseffekte überschneiden sich in $[10, 100]$ und addieren sich dort. In diesem Interval bleibt also die Phase gleich Die Geradennäherung lautet also:

$$\varphi(\omega) \approx \begin{cases} 0^\circ, & \omega \le 0.1, \\ +45^\circ + 45^\circ \log_{10} \omega, & 0.1 < \omega < 1, \\ +45^\circ, & 1 \le \omega \le 10, \\ +45^\circ - 45^\circ \log_{10}(\omega/10), & 10 < \omega < 100, \\ 0^\circ, & \omega \ge 100. \end{cases}$$

9. Exakte Stützstellen (Kontrolle).

$$\varphi(\omega) = \arctan(\omega) - \arctan\left(\frac{\omega}{10}\right) [^\circ].$$

Praktische Punkte:

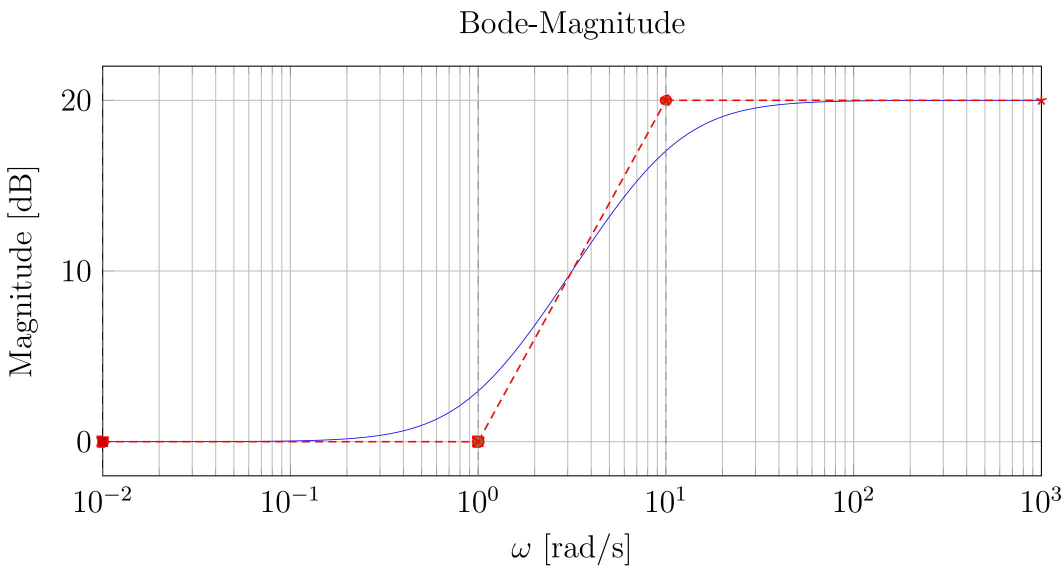
$$\begin{aligned} \omega = 0.1: &\quad |H|_{\text{dB}} \approx -19.96, \quad \varphi \approx +5.14^\circ, \\ \omega = 1: &\quad |H|_{\text{dB}} \approx -17.03, \quad \varphi \approx +39.29^\circ, \\ \omega = 10: &\quad |H|_{\text{dB}} \approx -2.97, \quad \varphi \approx +39.29^\circ, \\ \omega = 100: &\quad |H|_{\text{dB}} \approx -0.04, \quad \varphi \approx +5.14^\circ. \end{aligned}$$

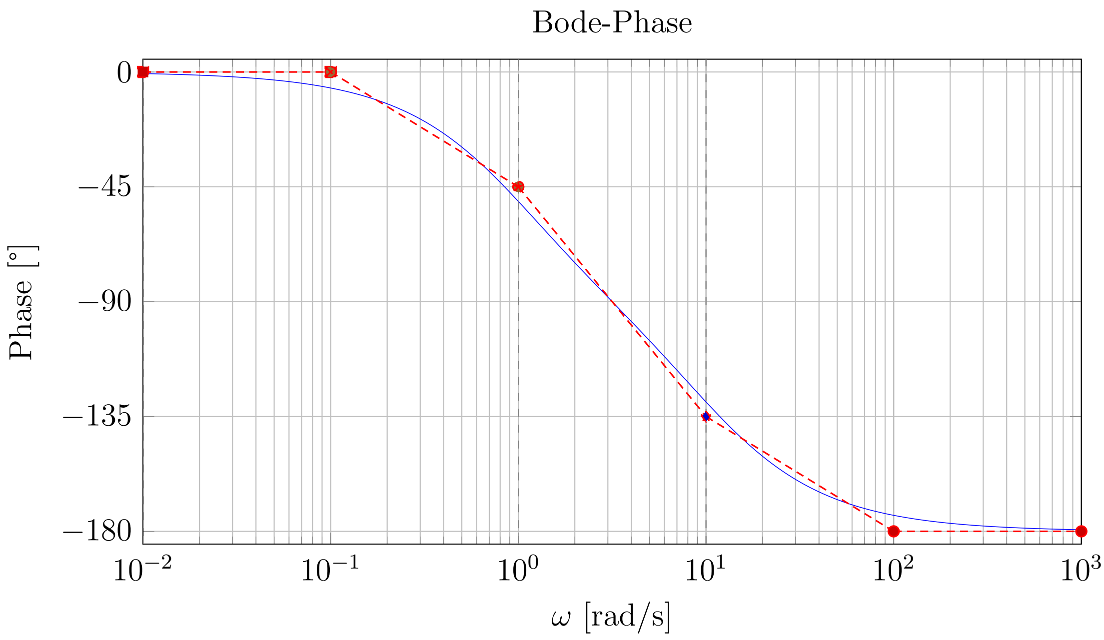
10. Grenzwerte und Konsistenz. DC: $|H(0)| = \frac{1}{10} \Rightarrow -20\,\text{dB}$, $\varphi(0) = 0^\circ$. Für $\omega \to \infty$: $|H(j\omega)| \to 1 \Rightarrow 0\,\text{dB}$. Pol-/Nullzählung: $m = n = 1 \Rightarrow \varphi(\infty) = (m - n) \cdot 90^\circ = 0^\circ$.

Aufgabe D)

$$H(s) = \frac{10\,(1-s)}{s+10}\,.$$

D.1 Bode-Diagramm





D.2 Erklärung

1. **Normalform herstellen.** Bringe die Übertragungsfunktion exakt in die im Skript definierte Standardform.

$$H(s) = \frac{10(1-s)}{s+10} = (1 - sT_z) \cdot \frac{1}{1 + sT_p}\,.$$

mit $K_0 = 1$, $r = 0$, $T_z = 1$, $T_p = \frac{1}{10}$. Klassifiziere die Glieder: RHP-Nullstelle $\underline{F}_z(s) = (1 - sT_z)$ mit $T_z = 1$; reelles Polglied $\underline{F}_p(s) = \frac{1}{1+sT_p}$ mit $T_p = \frac{1}{10}$.

2. **Eckfrequenzen bestimmen und sortieren.** Die ω-Eckfrequenzen lassen sich aus den T_n's bestimmen und müssen anschließend sortiert werden:

$$\omega_z = \frac{1}{T_z} = 1\,\mathrm{rad/s}, \qquad \omega_p = \frac{1}{T_p} = 10\,\mathrm{rad/s}, \qquad \omega_z < \omega_p.$$

3. **Startpunkt des Amplitudengangs festlegen (Geradennäherung).** Wähle $\omega_{\min} = \omega_z = 1$. Regel:

$$F_{\mathrm{dB}}(\omega_{\min}) = 20\log_{10}\big(|K_0 F^*_{ges}(0)| \cdot \omega^r_{\min}\big) = 20\log_{10}(1) = 0\,\mathrm{dB}.$$

Dieser Punkt ist der Anker der Geradennäherung.

4. **Verlauf links vom Startpunkt zeichnen.** Für $\omega < \omega_z$ bleibt die Amplituden-Asymptote bei $0\,\mathrm{dB}$ konstant (Anfangssteigung $r\cdot 20\,\mathrm{dB} = 0$). Zeichne eine waagrechte Gerade links von der kleinsten Eckfrequenz.

5. **Steigungswechsel an den Eckfrequenzen eintragen.** Ab der RHP-Nullstelle bei $\omega_z = 1$ nimmt die Steigung um $+20\,\mathrm{dB/dec}$ zu. Der Pol bei $\omega_p = 10$ bewirkt einen zusätzlichen Steigungswechsel um $-20\,\mathrm{dB/dec}$ ab $\omega = 10$. Netto:

$$\begin{cases} 0\,\mathrm{dB/dec}, & \omega < 1, \\ +20\,\mathrm{dB/dec}, & 1 \le \omega < 10, \\ 0\,\mathrm{dB/dec}, & \omega \ge 10 \;\Rightarrow |H| \to 20\,\mathrm{dB}. \end{cases}$$

Geradennäherungen:

$$|H(j\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx \begin{cases} 0, & \omega \le 1, \\ 20\log_{10}\omega, & 1 < \omega \le 10, \\ 20, & \omega \ge 10. \end{cases}$$

6. **Eckabrundungen korrekt berücksichtigen.** RHP-Nullstelle: bei $\omega = \omega_z$ liegt die exakte Magnitude um $+3\,\mathrm{dB}$ über der Asymptote. Pol: bei $\omega = \omega_p$ liegt die exakte Magnitude um $-3\,\mathrm{dB}$ unter der Asymptote. Stützpunkte:

$$|H(j1)|_{\mathrm{dB}} = 20 + 10\log_{10}(2) - 10\log_{10}(101) \approx +3\,\mathrm{dB},$$
$$|H(j10)|_{\mathrm{dB}} = 20 + 10\log_{10}(101) - 10\log_{10}(200) \approx 17\,\mathrm{dB}.$$

7. **Phasenstartwert festlegen.** Nutze die Regel für $\omega \to 0$: Da $K_0 F_{ges}(0) > 0$ und $r = 0$, ist der Startwert der Phase

$$\varphi(0) = r \cdot 90^\circ = 0^\circ.$$

8. **Phasenänderung durch Nullstelle und Pol eintragen.** RHP-Nullstelle bei $\omega_z = 1$: Phasenänderung -90° über die Dekade $[0.1, 10]$ (Geradennäherung $-45^\circ - 45^\circ \log_{10}\omega$). Pol bei $\omega_p = 10$: zusätzlicher Abfall um -90° über $[1, 100]$ (Geradennäherung $-45^\circ - 45^\circ \log_{10}(\omega/10)$). Im Intervar $[1, 10]$ überlagern sich diese Effekte. Gesamt:

$$\varphi(\omega) \approx \begin{cases} 0^\circ, & \omega \leq 0.1, \\ -45^\circ - 45^\circ \log_{10}\omega, & 0.1 < \omega \leq 1, \\ -45^\circ - 90^\circ \log_{10}\omega, & 1 < \omega \leq 10, \\ -135^\circ - 45^\circ \log_{10}(\omega/10), & 10 < \omega \leq 100, \\ -180^\circ, & \omega \geq 100. \end{cases}$$

9. **Grenzwerte und Konsistenz prüfen.** DC: $|H(0)| = 1 \Rightarrow 0\,\mathrm{dB}$, $\varphi(0) = 0^\circ$. HF: $|H(j\omega)| \to 10 \Rightarrow 20\,\mathrm{dB}$. Pol-/Nullzählung bestätigt die Endphase: Zählergrad $m = -1$, Nennergrad $n = 1 \Rightarrow (m - n) \cdot 90^\circ = 0^\circ$; $m = -1$, da die Nullstelle RHP ist.

Stückweise Näherungen (für die Skizze)

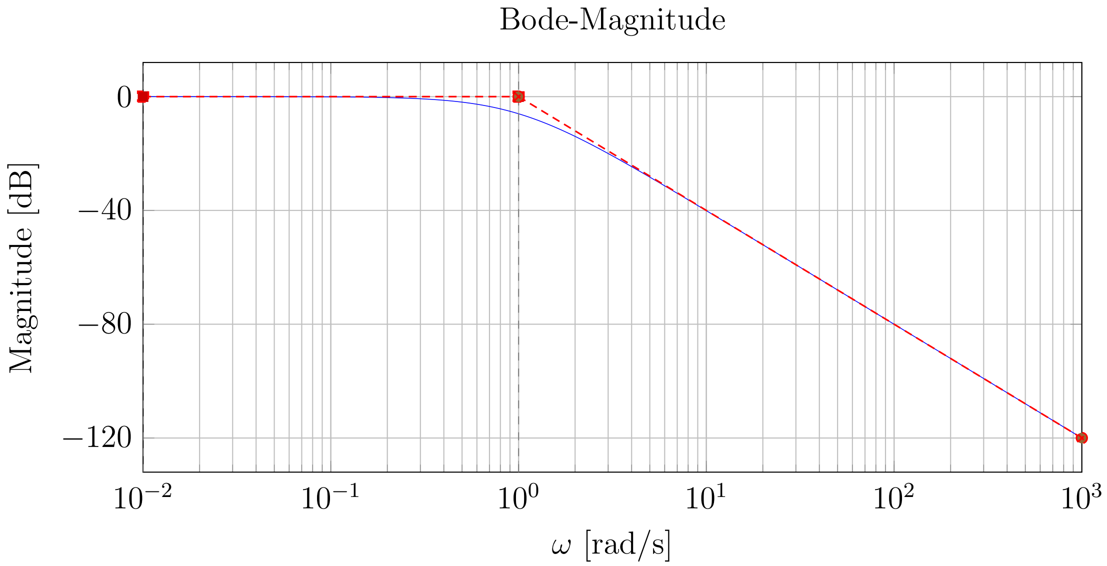
$$|H(j\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx \begin{cases} 0, & \omega \ll 1, \\ 20\log_{10}\omega, & 1 \ll \omega \ll 10, \\ 20, & \omega \gg 10, \end{cases}$$

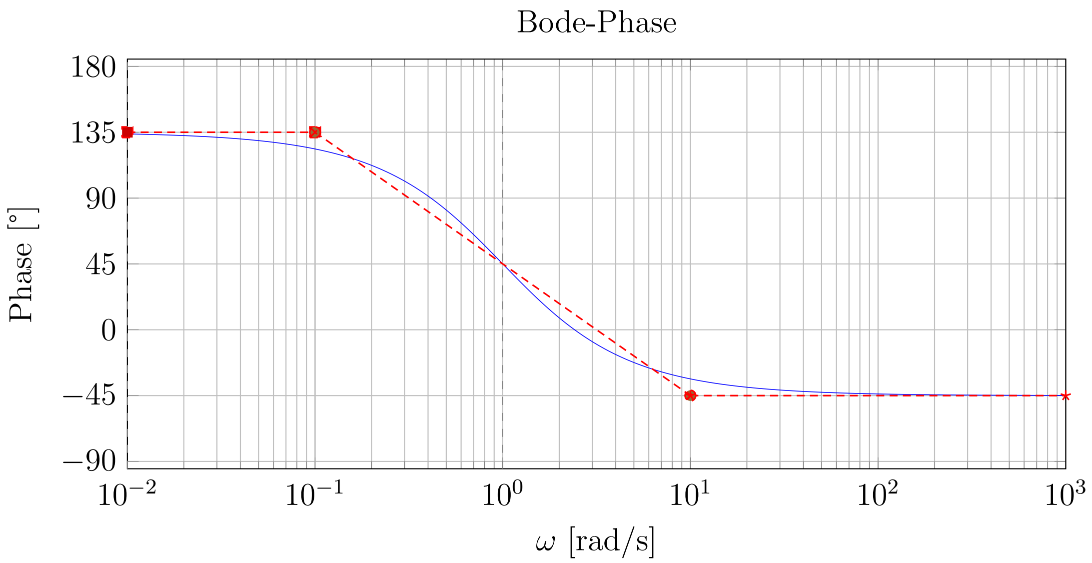
$$\varphi(\omega) \approx \begin{cases} 0^\circ, & \omega \leq 0.1, \\ -45^\circ - 45^\circ \log_{10}\omega, & 0.1 < \omega < 1, \\ -45^\circ - 90^\circ \log_{10}\omega, & 1 < \omega < 10, \\ -135^\circ - 45^\circ \log_{10}(\omega/10), & 10 < \omega < 100, \\ -180^\circ, & \omega \geq 100. \end{cases}$$

Aufgabe E)

$$H(s) = \frac{-1 + \mathrm{j}}{\sqrt{2}\,(s+1)^2}\,.$$

E.1 Bode-Diagramm





E.2 Erklärung

1. **Normalform herstellen.** Bringe die Übertragungsfunktion in die Standardform.

$$H(s) = \frac{K_0}{(1+sT_p)^2}, \qquad K_0 = \frac{-1+\mathrm{j}}{\sqrt{2}} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}135^\circ}, \quad T_p = 1, \quad r = 0.$$

   Zerlegung: $\underline{F}_1(s) = \frac{1}{(1+sT_p)^2}$ (reelles Polglied zweiter Ordnung, doppelt); konstanter Phasor K_0 mit $|K_0| = 1$, $\arg K_0 = +135^\circ$. Wir können K_0 behandeln als wäre es 1, aber müssen den gesamten Phasenplot um 135° verschieben.

2. **Eckfrequenz bestimmen und sortieren.**

$$\omega_p = \frac{1}{T_p} = 1\,\mathrm{rad/s}.$$

   Nur diese Eckfrequenz; Sortierung trivial.

3. **Startpunkt des Amplitudengangs festlegen (Geradennäherung).**

$$\omega_{\min} = \omega_p = 1, \quad F_{\mathrm{dB}}(\omega_{\min}) = 20\log_{10}\big(|K_0 \underline{F}^*_{ges}(0)| \cdot \omega^r_{\min}\big) = 0\,\mathrm{dB}.$$

   Anker für die Geradennäherung: 0 dB bei $\omega = 1$.

4. **Verlauf links vom Startpunkt zeichnen.** Für $\omega < \omega_{min}$ bleibt die Amplituden-Asymptote bei 0 dB konstant (Anfangssteigung $r \cdot 20\,\mathrm{dB} = 0$). Zeichne eine waagrechte Gerade links von der kleinsten Eckfrequenz.

5. **Steigungswechsel an der Eckfrequenz eintragen.** Doppelpol: ab $\omega = 1$ Steigungsänderung um $-40\,\mathrm{dB/dec}$. Geradennäherung rechts:

$$|H(j\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx -40\log_{10}\omega \quad (\omega \geq 1).$$

6. **Eckabrundung korrekt berücksichtigen.** Bei $\omega = \omega_p$ weicht der exakte Betrag um $-6\,\mathrm{dB}$ von der Asymptote ab (Summe zweier $-3\,\mathrm{dB}$, da Doppelpol):

$$|H(j1)|_{\mathrm{dB}} = -20\log_{10}(1+1) = -20\log_{10}2 \approx -6\,\mathrm{dB}.$$

7. **Phasenstartwert festlegen.** Konstanter Phasor K_0 liefert einen Offset $+135^\circ$. Für $\omega \to 0$: $\varphi(0) = +135^\circ$.

8. **Phasenänderung durch das Polglied eintragen.** Ein Doppelpol bewirkt insgesamt $-180°$ über die Dekade $[0.1, 10]$ (je $-90°$ pro einfachem Pol). Näherung:

$$\varphi(\omega) \approx \begin{cases} +135°, & \omega \leq 0.1, \\ 45° - 90° \log_{10} \omega, & 0.1 < \omega < 10, \\ -45°, & \omega \geq 10. \end{cases}$$

9. **Grenzwerte und Konsistenz prüfen.** DC: $|H(0)| = |K_0| = 1 \Rightarrow 0\,\mathrm{dB}$, $\varphi(0) = +135°$. HF: $|H(j\omega)| \sim 1/\omega^2 \Rightarrow -40 \log_{10} \omega\,\mathrm{dB}$, $\varphi(\infty) = +135° - 180° = -45°$. Pol-/Nullzählung: $m = 0$, $n = 2 \Rightarrow (m - n) \cdot 90° = -180°$ plus Offset $+135°$ durch K_0 ergibt $-45°$.

Stückweise Näherungen (für die Skizze)

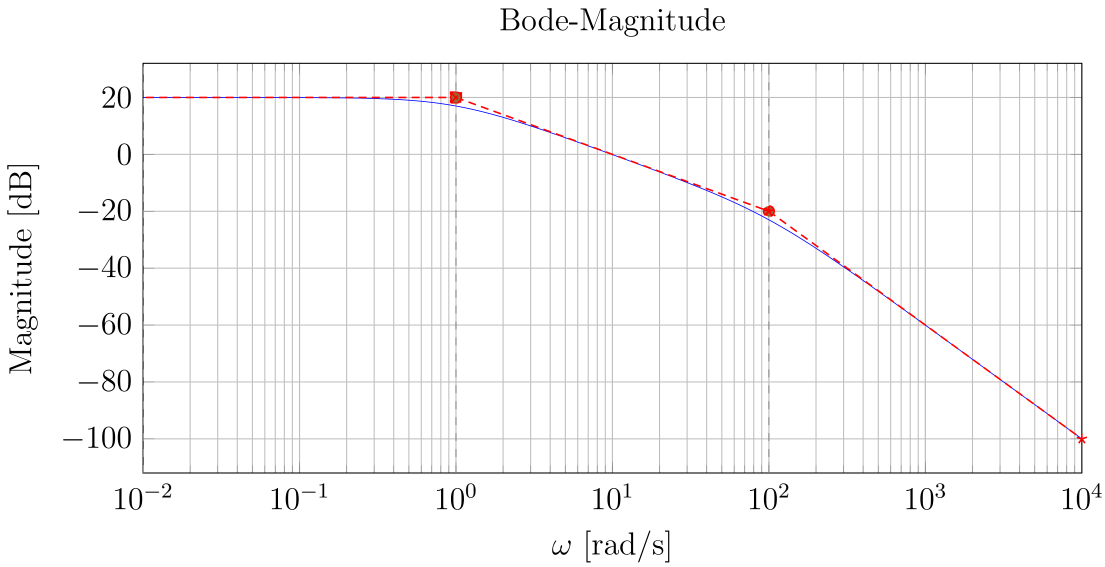
$$|H(j\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx \begin{cases} 0, & \omega \ll 1, \\ -20 \log_{10} 2, & \omega = 1, \\ -40 \log_{10} \omega, & \omega \gg 1, \end{cases}$$

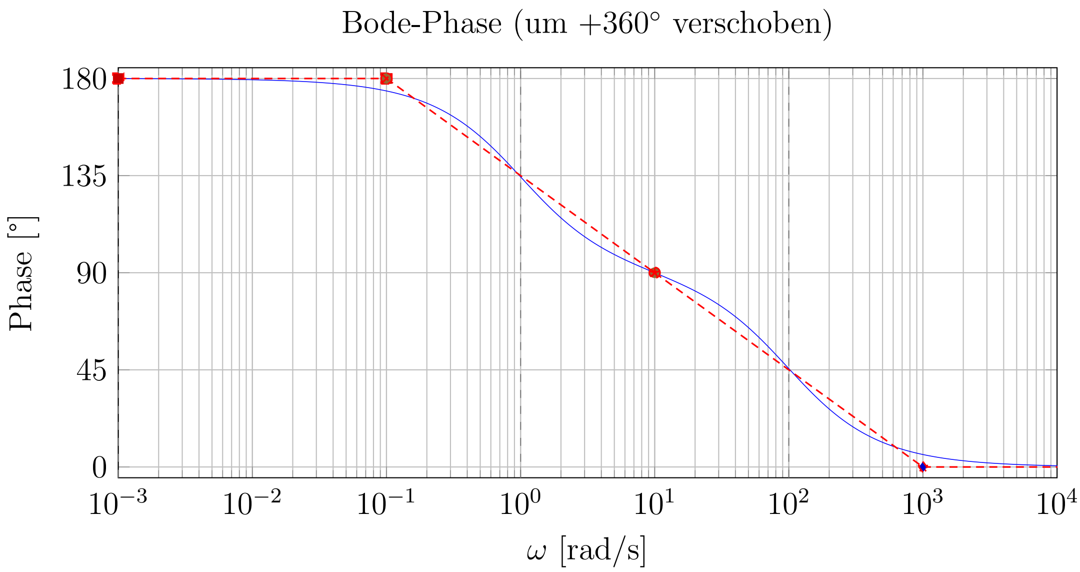
$$\varphi(\omega) \approx \begin{cases} +135°, & \omega \leq 0.1, \\ 45° - 90° \log_{10} \omega, & 0.1 < \omega < 10, \\ -45°, & \omega \geq 10. \end{cases}$$

Aufgabe F)

$$H(s) = \frac{-1000}{(s+1)(s+100)} \, .$$

F.1 Bode-Diagramm





F.2 Erklärung

1. Normalform herstellen.

$$H(s) = \frac{-1000}{(s+1)(s+100)} = \frac{K_0}{(1+sT_{p1})(1+sT_{p2})}$$

mit

$$K_0 = -10, \quad r = 0, \quad T_{p1} = 1, \quad T_{p2} = \tfrac{1}{100}.$$

$$\underline{F}_1(s) = \frac{1}{1+sT_{p1}} = \frac{1}{1+s}, \qquad \underline{F}_2(s) = \frac{1}{1+sT_{p2}} = \frac{1}{1+\frac{s}{100}}.$$

Konstantes Vorzeichen $K_0 < 0$: Phasenoffset $\pm 180°$ (hier Darstellung um $+360°$ verschoben).

2. Eckfrequenzen bestimmen und sortieren. Die ω-Eckfrequenzen lassen sich aus den T_n's bestimmen und müssen anschließend sortiert werden:

$$\omega_{p1} = \frac{1}{T_{p1}} = 1\,\mathrm{rad/s}, \qquad \omega_{p2} = \frac{1}{T_{p2}} = 100\,\mathrm{rad/s}, \qquad \omega_{p1} < \omega_{p2}.$$

3. Startpunkt des Amplitudengangs festlegen (Geradennäherung).

$$\omega_{\min} = \omega_{p1} = 1, \quad F_{\mathrm{dB}}(\omega_{\min}) = 20\log_{10}\big(|K_0 \underline{F}^*_{ges}(0)|\,\omega^r_{\min}\big) = 20\log_{10} 10 = 20\,\mathrm{dB}.$$

Unser Ankerpunkt ist: 20 dB bei $\omega = 1$.

4. Verlauf links vom Startpunkt zeichnen. Für $\omega < \omega_z$ bleibt die Amplituden-Asymptote bei 20 dB konstant (Anfangssteigung $r \cdot 20\,\mathrm{dB} = 0$). Zeichne eine waagrechte Gerade links von der kleinsten Eckfrequenz.

5. Steigungswechsel an den Eckfrequenzen eintragen. Ab $\omega = 1$: $-20\,\mathrm{dB/dec}$ (einfacher Pol). Ab $\omega = 100$: zusätzl. $-20\,\mathrm{dB/dec} \Rightarrow$ insgesamt $-40\,\mathrm{dB/dec}$. Geradennäherungen:

$$|H(j\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx \begin{cases} 20, & \omega \le 1, \\ 20 - 20\log_{10}\omega, & 1 < \omega \le 100, \\ -20 - 40\log_{10}(\omega/100), & \omega \ge 100. \end{cases}$$

6. Eckabrundungen korrekt berücksichtigen. Bei jedem einfachen Pol: $-3\,\mathrm{dB}$ am Knick.

$$|H(j1)|_{\mathrm{dB}} = 20 - 10\log_{10} 2 \approx 17\,\mathrm{dB}, \qquad |H(j100)|_{\mathrm{dB}} = -20 - 10\log_{10} 2 \approx -23\,\mathrm{dB}.$$

7. Phasenstartwert festlegen. Wegen $K_0 < 0$: Startphase $-180° + r \cdot 90° = -180°$. Darstellung um $+360°$ verschoben $\Rightarrow +180°$ für $\omega \ll 0.1$.

8. Phasenänderung durch die Polglieder eintragen. Jeder einfache Pol: $-90°$ über je eine Dekade. Näherung (verschobene Darstellung):

$$\varphi(\omega) \approx \begin{cases} 180°, & \omega \le 0.1, \\ 135° - 45° \log_{10} \omega, & 0.1 < \omega < 10, \\ 45° - 45° \log_{10}(\omega/100), & 10 < \omega < 1000, \\ 0°, & \omega \ge 1000. \end{cases}$$

9. Grenzwerte und Konsistenz prüfen. DC: $|H(0)| = 10 \Rightarrow 20\,\text{dB}$; Phase $-180°$ (hier als $+180°$ gezeigt). HF: $|H(j\omega)| \sim 10/\omega^2 \Rightarrow -40 \log_{10}(\omega/100) - 20\,\text{dB}$. Pol-/Nullzählung bestätigt die Endphase: $m = 0$, $n = 2 \Rightarrow (m - n) \cdot 90° = -180°$; plus negatives $K_0 \Rightarrow$ zusätzlich $-180°$; gesamte $-360° \equiv 0° \pmod{360°}$.

Stückweise Näherungen (für die Skizze)

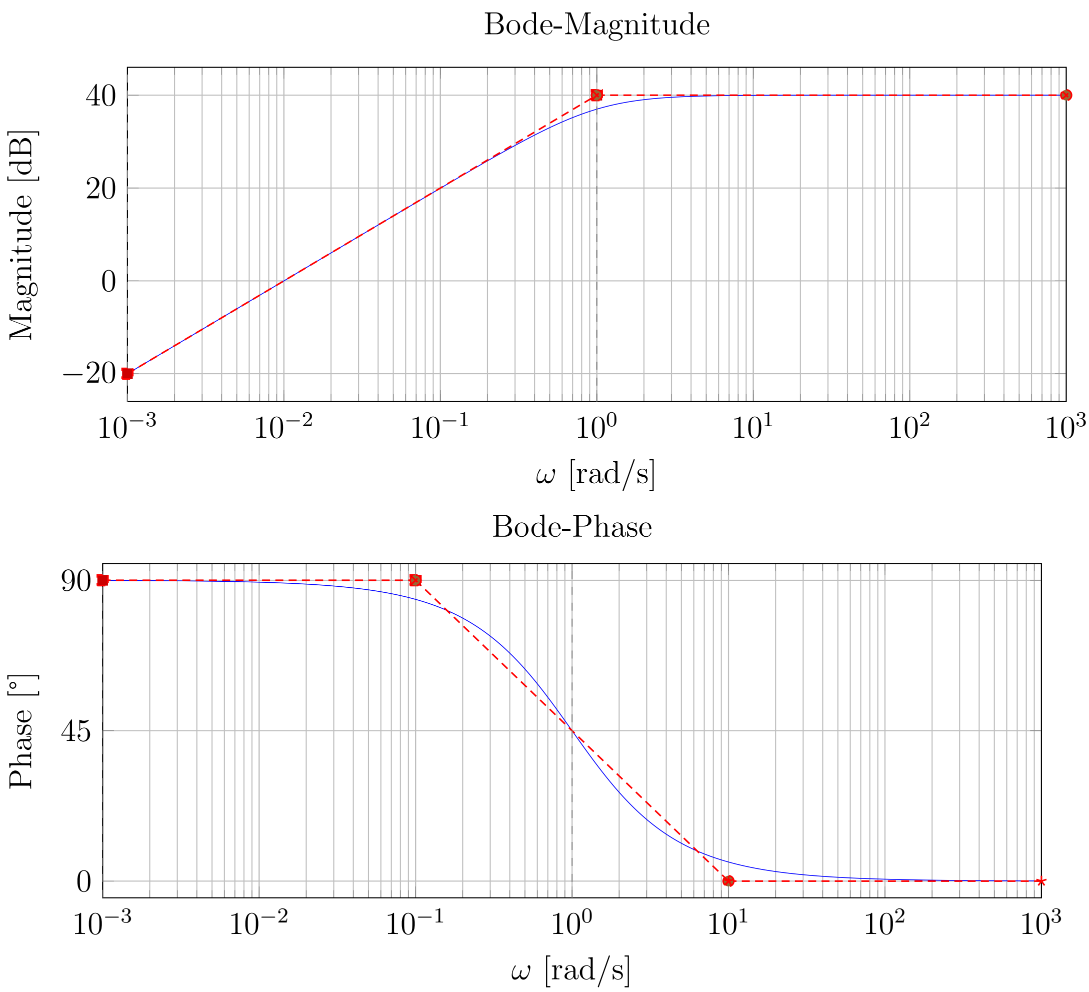
$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} \approx \begin{cases} 20, & \omega \ll 1, \\ 20 - 10 \log_{10} 2, & \omega = 1, \\ 20 - 20 \log_{10} \omega, & 1 \ll \omega \ll 100, \\ -20 - 10 \log_{10} 2, & \omega = 100, \\ -20 - 40 \log_{10}(\omega/100), & \omega \gg 100, \end{cases}$$

$$\varphi(\omega)\ (\text{um } +360°) \approx \begin{cases} 180°, & \omega \le 0.1, \\ 135° - 45° \log_{10} \omega, & 0.1 < \omega < 10, \\ 45° - 45° \log_{10}(\omega/100), & 10 < \omega < 1000, \\ 0°, & \omega \ge 1000. \end{cases}$$

Aufgabe G)

$$H(s) = \frac{100\, s}{s+1}\,.$$

G.1 Bode-Diagramm



G.2 Erklärung

1. **Normalform herstellen.** Bringe die Übertragungsfunktion exakt in die im Skript definierte Standardform für reelle Pol-/Nullstellen.

$$H(s) = \frac{100s}{s+1} = 100 \cdot s \cdot \frac{1}{(1+sT_p)}$$

Die Teilglieder und Variablen gemäß Skript sind:

$$\underline{F}_1(s) = \frac{1}{1+sT_p},\ T_p = 1,\ K_0 = 100 \text{ und } r = 1.$$

2. **Eckfrequenz bestimmen und sortieren.** Unsere einzige Eckfrequenz ist:

$$\omega_p = \frac{1}{T_p} = 1\,\text{rad/s}.$$

Da diese die einzige Eckfrequenz ist, ist eine Sortierung der Eckfrequenzen hier hinfällig.

3. **Startpunkt des Amplitudengangs festlegen (Geradennäherung).** Setze $\omega_{\min} = \omega_p = 1$. Gemäß Skript:

$$F_{\text{dB}}(\omega_{\min}) = 20\log_{10}\big(|K_0\, F^*_{ges}(0)|\, \omega^r_{\min}\big) = 20\log_{10}(100 \cdot 1 \cdot 1) = 40\,\text{dB}.$$

Anfangssteigung $r \cdot 20\,\text{dB/dec} = +20\,\text{dB/dec}$, da $r = 1$.

4. **Verlauf links vom Startpunkt zeichnen.** Für $\omega < \omega_{\min} = 1$ gilt die Geradennäherung mit Steigung $+20\,\text{dB/dec}$. Einzeichnen als Gerade mit Steigung $+20\,\text{dB/dec}$ durch den Punkt $(\omega_{\min}, 40\,\text{dB})$.

5. **Steigungswechsel an der Eckfrequenz eintragen.** $\underline{F}_1$ reduziert ab ω_p die Steigung um $20\,\text{dB/dec}$:

$$\omega < 1:\ +20\,\text{dB/dec}, \qquad \omega \geq 1:\ 0\,\text{dB/dec}.$$

6. **Eckabrundung korrekt berücksichtigen.**

$$|H(j\omega)| = \frac{100\,\omega}{\sqrt{1+\omega^2}}, \qquad |H(j\cdot 1)|_{\text{dB}} = 40 - 10\log_{10} 2 \approx 36.99\,\text{dB}.$$

Bei $\omega = 1$ liegt die Kurve etwa $3.01\,\text{dB}$ unter der rechten Asymptote.

7. Phasenstartwert festlegen. Da $K_0 F_{\text{ges}}(0) > 0$ und $r = 1$ gilt

$$\varphi(0) = \arg\bigl(K_0 F_{\text{ges}}(0)\bigr) + r \cdot 90^\circ = 0^\circ + 1 \cdot 90^\circ = +90^\circ.$$

8. Phasenänderung durch die Teilglieder eintragen. für $\omega \ll 0.1$: konstante $+90^\circ$. Durch $\underline{F}_1$ (Pol 1. Ordnung) sinkt die Phase von $90^\circ \to 0^\circ$ über $[0.1, 10]$ ab. Geradennäherung gesamt:

$$\varphi(\omega) \approx \begin{cases} +90^\circ, & \omega \leq 0.1, \\ 45^\circ - 45^\circ \log_{10} \omega, & 0.1 < \omega < 10, \\ 0^\circ, & \omega \geq 10. \end{cases}$$

9. Grenzwerte und Konsistenz prüfen. DC: $|H(0)| = 0 \mathrel{\widehat{=}} -\infty\,\text{dB}$, $\varphi(0) = 90^\circ$. HF: $|H(j\omega)| \to 100 \Rightarrow 40\,\text{dB}$.

Pol-/Nullzählung: Zählergrad $m = 1$, Nennergrad $n = 1 \Rightarrow \varphi(\infty) = (m - n) \cdot 90^\circ = 0^\circ$.

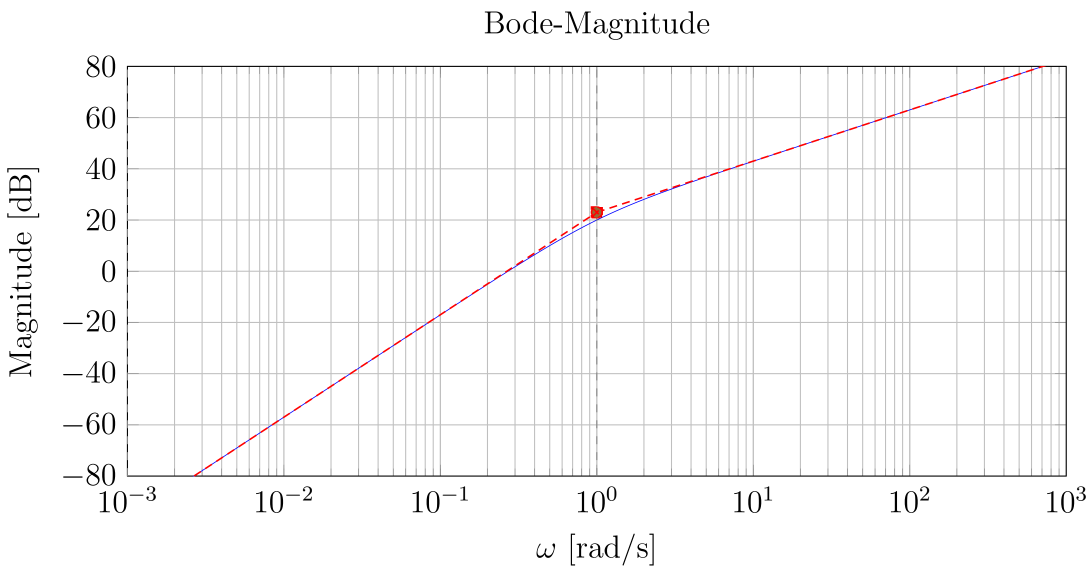
Stückweise Näherungen (für die Skizze)

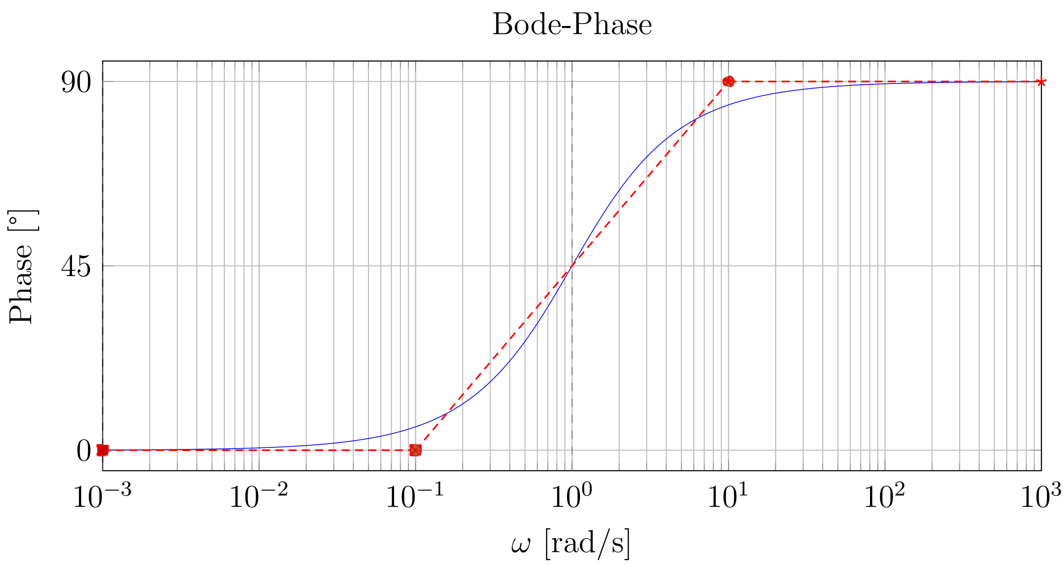
$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} \approx \begin{cases} 40 + 20 \log_{10} \omega, & \omega \ll 1, \\ 40 - 10 \log_{10} 2, & \omega = 1, \\ 40, & \omega \gg 1, \end{cases} \qquad \varphi(\omega) \approx \begin{cases} +90^\circ, & \omega \leq 0.1, \\ 45^\circ - 45^\circ \log_{10} \omega, & 0.1 < \omega < 10, \\ 0^\circ, & \omega \geq 10. \end{cases}$$

Aufgabe H)

$$H(s) = \frac{10\sqrt{2}\,s^2}{s-1}\,.$$

H.1 Bode-Diagramm





H.2 Erklärung

1. **Normalform herstellen.** Bringe die Übertragungsfunktion exakt in die im Skript definierte Standardform für reelle Pol-/Nullstellen.

$$H(s) = K_0 \cdot s^r \frac{1}{1 - sT_p} \quad \text{mit} \quad K_0 = -10\sqrt{2},\ r = 2,\ T_p = 1.$$

   Hier haben wir:

$$\underline{F}_1(s) = \frac{1}{1 - sT_p} \quad \text{und} \quad K_0 = -10\sqrt{2} \quad \text{und} \quad r = 2.$$

   Klassifizikation des ersten Teilglieds $\underline{F}_1$: reelles Polglied erster Ordnung (RHP).

2. **Eckfrequenz bestimmen und sortieren.** Bestimme die Eckfrequenz aus der Zeitkonstante:

$$\omega_p = \frac{1}{T_p} = 1\,\text{rad/s}.$$

   Es existiert nur diese Eckfrequenz; die aufsteigende Sortierung $\omega_1 < \omega_2 < \ldots$ ist damit trivial.

3. **Startpunkt des Amplitudengangs festlegen (Geradennäherung).** Setze die Startfrequenz gleich der kleinsten Eckfrequenz $\omega_{\min} = \omega_p = 1\,\text{rad/s}$. Verwende die Skript-Regel

$$F_{\text{dB}}(\omega_{\min}) = 20\log_{10}\Big(|K_0\, F^*_{ges}(0)| \cdot \omega^r_{\min}\Big) = 20 + 10\log_{10} 2 \approx 23\,\text{dB}.$$

   Dieser Punkt nützt uns als Anker für die Geradennäherung.

4. **Verlauf links vom Startpunkt zeichnen.** Für $\omega < \omega_{\min}$ verläuft die Amplituden-Asymptote mit Steigung $r \cdot 20\,\text{dB/dec} = 40\,\text{dB/dec}$. Trage also eine Gerade mit $+40\,\text{dB/dec}$ durch den Anker ein.

5. **Steigungswechsel an der Eckfrequenz eintragen.** Ein einfaches Polglied $1/(1 - sT_p)$ reduziert die Steigung ab ω_p um $20\,\text{dB/dec}$. Da bis jetzt die Steigung $+40\,\text{dB/dec}$ betrug, ist diese ab jetzt $+20\,\text{dB/dec}$. Zeichne rechts von ω_p die Gerade mit Steigung $+20\,\text{dB/dec}$. Die Formel für die Geradennäherung lautet:

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} \approx 20 + 10\log_{10} 2 + 20\log_{10}\omega \quad (\omega \geq 1).$$

   Mehrfachpole würden die Änderung mehrfach zählen; hier nicht nötig.

6. **Eckabrundung korrekt berücksichtigen.** Bei einfachen reellen Polen ergibt sich am Knickpunkt $\omega = \omega_p$ eine Abweichung von $-3\,\mathrm{dB}$ gegenüber der Gerade. Setze dort einen Stützpunkt:

$$|H(j\omega_p)|_{\mathrm{dB}} = 23\,\mathrm{dB} - 3\,\mathrm{dB} = 20\,\mathrm{dB}.$$

   Runde die Ecke entsprechend ab. Hätten wir einen Mehrfachpol bei ω_p (Beispielsweise $\left(\frac{1}{1\mp sT_p}\right)^t$), müsste man die Ecke um $t \cdot 3.\,\mathrm{dB}$ abrunden.

7. **Phasenstartwert festlegen.** Nutze die Regel für $\omega \to 0$: Da $K_0 F_{ges}(0) < 0$ und $r = 2$ (gerade), ist der Startwert der Phase

$$\varphi(0) = -180^\circ + r \cdot 90^\circ = 0^\circ.$$

8. **Phasenänderung durch das Polglied eintragen.** Ein reelles Polglied erster Ordnung (RHP) erzeugt insgesamt eine Phasenänderung von $+90^\circ$. Trage die Näherung ein:

$$\varphi(\omega) \approx \begin{cases} 0^\circ, & \omega \le 0.1\,\omega_p, \\ \text{linear mit Steigung } +45^\circ/\text{Dec}, & 0.1\,\omega_p < \omega < 10\,\omega_p, \\ +90^\circ, & \omega \ge 10\,\omega_p. \end{cases}$$

   Das lineare Zwischenstück kann Formelkonform als $\varphi(\omega) \approx 45^\circ + 45^\circ \log_{10} \omega$ dargestellt werden (hier mit $\omega_p = 1$).

9. **Grenzwerte und Konsistenz prüfen.** DC: $|H(0)| = 0 \Rightarrow -\infty\,\mathrm{dB}$, $\varphi(0) = 0^\circ$. HF: $|H(j\omega)| \sim 10\sqrt{2}\,\omega \Rightarrow 20 + 10\log_{10} 2 + 20\log_{10}\omega\,\mathrm{dB}$. Pol-/Nullzählung bestätigt die Endphase: Zählergrad $m = 2$, Nennergra $n = 1 \Rightarrow \varphi(\infty) = (m - n) \cdot 90^\circ = +90^\circ$.

Stückweise Näherungen (für die Skizze)

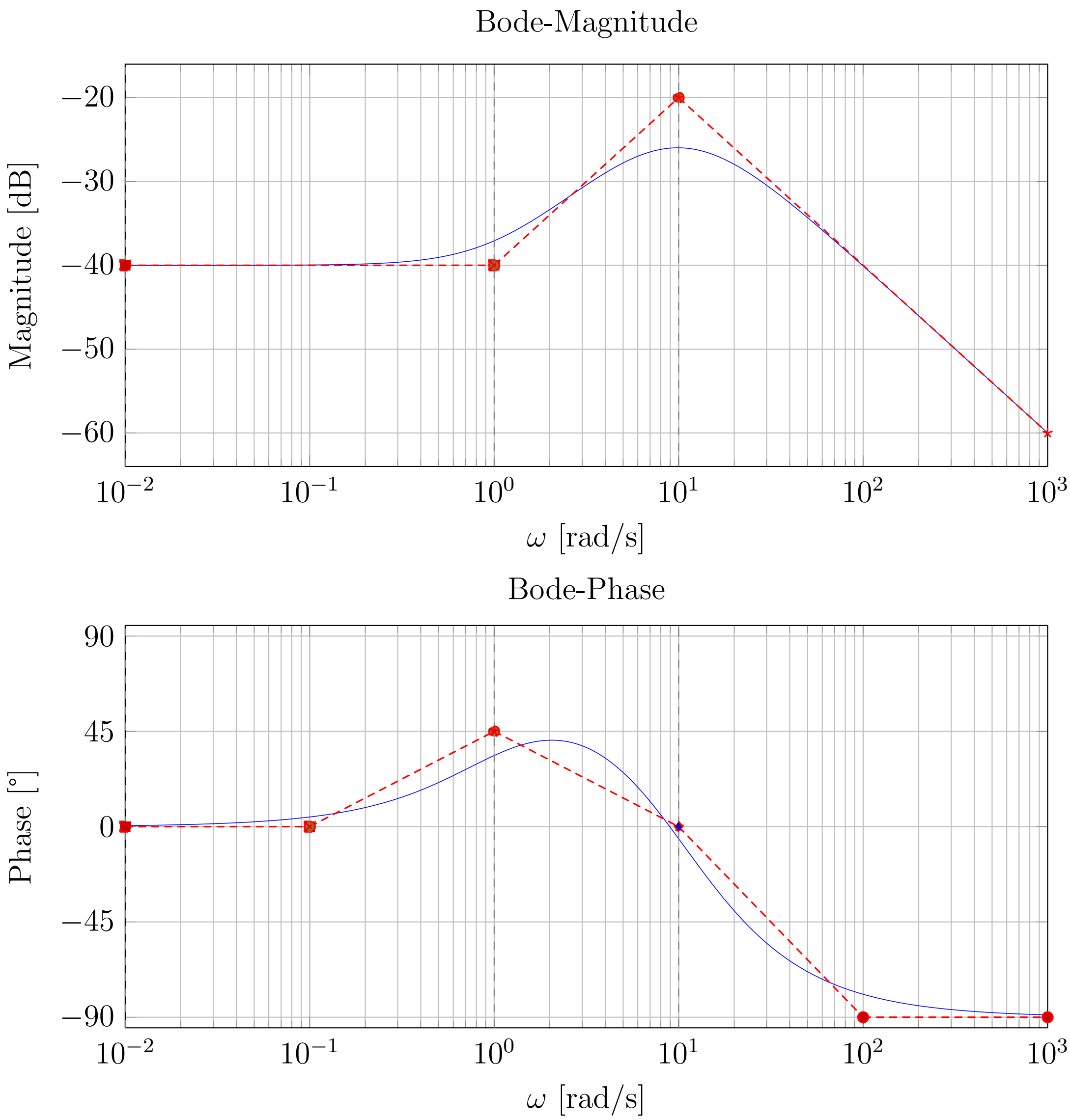
$$|H(j\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx \begin{cases} 20 + 10\log_{10} 2 + 40\log_{10}\omega, & \omega \ll 1, \\ 20, & \omega = 1, \\ 20 + 10\log_{10} 2 + 20\log_{10}\omega, & \omega \gg 1, \end{cases}$$

$$\varphi(\omega) \approx \begin{cases} 0^\circ, & \omega \le 0.1, \\ 45^\circ + 45^\circ \log_{10}\omega, & 0.1 < \omega < 10, \\ 90^\circ, & \omega \ge 10. \end{cases}$$

Aufgabe I)

$$H(s) = \frac{s+1}{(s+10)^2}\,.$$

I.1 Bode-Diagramm



I.2 Erklärung

1. **Normalform herstellen.** Bringe die Übertragungsfunktion exakt in die im Skript definierte Standardform.

$$H(s) = \frac{s+1}{(s+10)^2} = K_0 \cdot (1+sT_z) \cdot \frac{1}{(1+sT_p)^2}$$

mit

$$K_0 = \frac{1}{100}, \quad r = 0, \quad T_z = 1, \quad T_p = \tfrac{1}{10}.$$

$\underline{F}_1(s) = 1{+}sT_z$ (LHP-Nullstelle), $\underline{F}_2(s) = \dfrac{1}{(1+sT_p)^2}$ (Doppelpol).

2. **Eckfrequenzen bestimmen und sortieren.** Die ω-Eckfrequenzen lassen sich aus den T_n's bestimmen und müssen anschließend sortiert werden:

$$\omega_z = \frac{1}{T_z} = 1\,\text{rad/s}, \qquad \omega_p = \frac{1}{T_p} = 10\,\text{rad/s}, \qquad \omega_z < \omega_p.$$

3. **Startpunkt des Amplitudengangs festlegen (Geradennäherung).** Setze $\omega_{\min} = \omega_z = 1$.

$$F_{\text{dB}}(\omega_{\min}) = 20\log_{10}\Big(|K_0 F^*_{ges}(0)|\,\omega^r_{\min}\Big) = 20\log_{10}\Big(\frac{1}{100}\cdot 1 \cdot 1^0\Big) = -40\,\text{dB}.$$

Ankerpunkt: $-40\,\text{dB}$ bei $\omega = 1$.

4. **Verlauf links vom Startpunkt zeichnen.** Für $\omega < 1$: Anfangssteigung $r \cdot 20 = 0\,\text{dB/dec} \Rightarrow$ horizontale Asymptote bei $-40\,\text{dB}$.

5. **Steigungswechsel an den Eckfrequenzen eintragen.** Nullstelle bei $\omega_z = 1$: $+20\,\text{dB/dec}$ ab $\omega = 1$. Doppelpol bei $\omega_p = 10$: zusätzlich $-40\,\text{dB/dec}$ ab $\omega = 10$, also insgesamt $-20\,\text{dB/dec}$. Netto:

$$\begin{cases} -40\,\text{dB (flach)}, & \omega < 1, \\ -40 + 20\log_{10}\omega, & 1 \le \omega < 10 \text{ (Steigung } +20\,\text{dB/dec)}, \\ -20 - 20\log_{10}(\omega/10), & \omega \ge 10 \text{ (Steigung } -20\,\text{dB/dec)}. \end{cases}$$

6. **Eckabrundung korrekt berücksichtigen.** LHP-Nullstelle: bei $\omega = 1$ liegt der exakte Betrag um $+3\,\text{dB}$ über der Gerade:

$$|H(j1)|_{\text{dB}} = 10\log_{10} 2 - 20\log_{10} 101 \approx -37\,\text{dB}.$$

Doppelpol: bei $\omega = 10$ insgesamt $-6\,\text{dB}$ unter der Asymptote:

$$|H(j10)|_{\text{dB}} = 10\log_{10} 101 - 20\log_{10} 200 \approx -26\,\text{dB}.$$

7. **Phasenstartwert festlegen.** Da $K_0\underline{F}^*_{ges}(0) > 0$, $r = 0 \Rightarrow \varphi(0) = r \cdot 90^\circ = 0^\circ$.

8. **Phasenänderung durch Nullstelle und Doppelpol eintragen.** Nullstelle bewirkt eine Phasenänderung um $+90^\circ$ über $[0.1, 10]$. Jeder Pol -90° über $[1, 100]$ (zwei Pole $\Rightarrow -180^\circ$ total). Die Effekte überlappen sich in $[1, 10]$; dort addieren sich die Steigungen. Näherung:

$$\varphi(\omega) \approx \begin{cases} 0^\circ, & \omega \le 0.1, \\ 45^\circ + 45^\circ \log_{10}\omega, & 0.1 < \omega < 1, \\ 45^\circ - 45^\circ \log_{10}\omega, & 1 < \omega < 10, \\ -90^\circ \log_{10}(\omega/10), & 10 < \omega < 100, \\ -90^\circ, & \omega \ge 100. \end{cases}$$

9. **Grenzwerte und Konsistenz prüfen.** DC: $|H(0)| = \frac{1}{100} \Rightarrow -40\,\text{dB}$, $\varphi(0) = 0^\circ$. HF: $|H(j\omega)| \sim \omega/\omega^2 = 1/\omega \Rightarrow -20\log_{10}(\omega/10) - 20\,\text{dB}$. Pol-/Nullzählung: $m = 1$, $n = 2 \Rightarrow (m-n)\cdot 90^\circ = -90^\circ \Rightarrow \varphi(\infty) = -90^\circ$.

Stückweise Näherungen (für die Skizze)

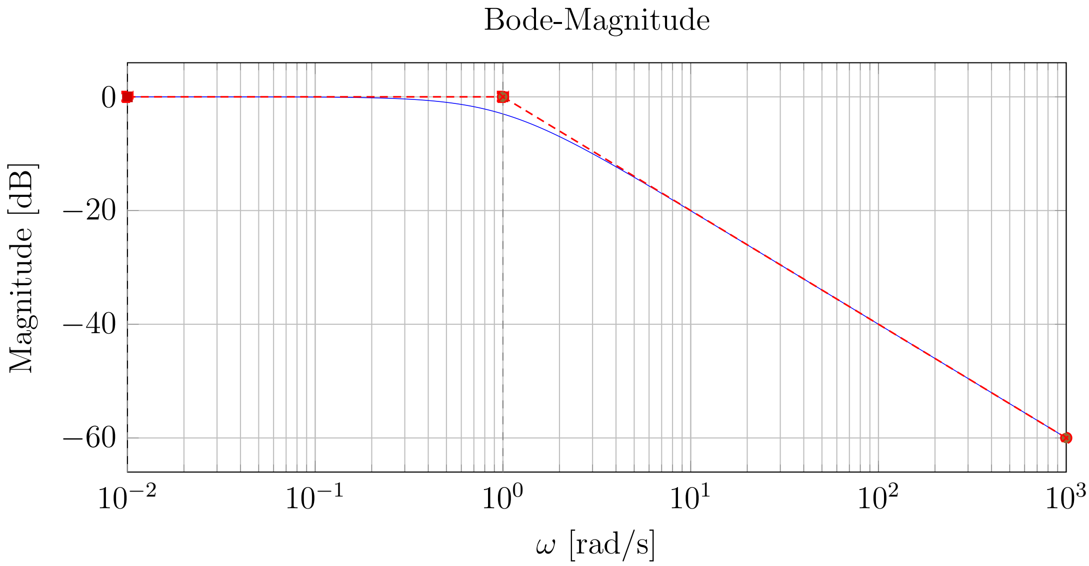
$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} \approx \begin{cases} -40, & \omega \ll 1, \\ -40 + 20\log_{10}\omega, & 1 \ll \omega \ll 10, \\ -20 - 20\log_{10}(\omega/10), & \omega \gg 10, \end{cases}$$

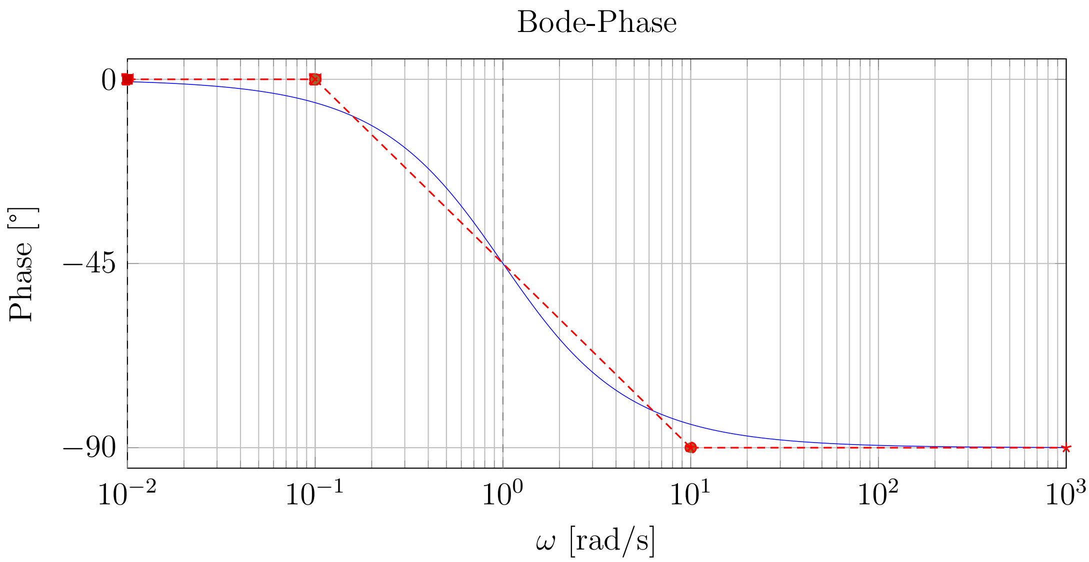
$$\varphi(\omega) \approx \begin{cases} 0^\circ, & \omega \le 0.1, \\ 45^\circ + 45^\circ \log_{10}\omega, & 0.1 < \omega < 1, \\ 45^\circ - 45^\circ \log_{10}\omega, & 1 < \omega < 10, \\ -90^\circ \log_{10}(\omega/10), & 10 < \omega < 100, \\ -90^\circ, & \omega \ge 100. \end{cases}$$

Aufgabe J)

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+1} = \frac{1}{s+1}\,.$$

J.1 Bode-Diagramm





J.2 Erklärung

1. **Normalform herstellen.** Bringe die Übertragungsfunktion exakt in die im Skript definierte Standardform.

$$H(s) = \frac{1}{s+1} = K_0 \cdot \frac{1}{1+sT_p}$$

mit

$$K_0 = 1, \quad r = 0, \quad T_p = 1.$$

$$\underline{F}_1(s) = \frac{1}{1+sT_p} = \frac{1}{1+s} \quad \text{(reelles Polglied 1. Ordnung).}$$

2. **Eckfrequenz bestimmen und sortieren.**

$$\omega_p = \frac{1}{T_p} = 1\,\mathrm{rad/s}.$$

Nur diese Eckfrequenz; Sortierung trivial.

3. **Startpunkt des Amplitudengangs festlegen (Geradennäherung).**

$$\omega_{\min} = \omega_p = 1, \qquad F_{\mathrm{dB}}(\omega_{\min}) = 20\log_{10}\big(|K_0 F^*_{ges}(0)|\,\omega^r_{\min}\big) = 0\,\mathrm{dB}.$$

Ankerpunkt bei $\omega = 1\,\mathrm{rad/s}$: $0\,\mathrm{dB}$.

4. **Verlauf links vom Startpunkt zeichnen.** Für $\omega < 1$ horizontale Asymptote bei $0\,\mathrm{dB}$ (Anfangssteigung $0\,\mathrm{dB/dec}$, da $r \cdot 20\,\mathrm{dB/dec} = 0$).

5. **Steigungswechsel an der Eckfrequenz eintragen.** Ein einfacher Pol bewirkt ab ω_p eine Steigungsänderung von $-20\,\mathrm{dB/dec}$.

$$|H(j\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx -20\log_{10}\omega \quad (\omega \geq 1).$$

$\rightarrow$ Zeichne eine Gerade mit Steigung $-20\,\mathrm{dB/dec}$ ab $\omega = 1\,\mathrm{rad/s}$

6. **Eckabrundung korrekt berücksichtigen.** Am Knick $\omega = \omega_p$ liegt der exakte Betrag um $-3\,\mathrm{dB}$ unter der Asymptote:

$$|H(j1)|_{\mathrm{dB}} = -10\log_{10}(1+1) = -10\log_{10}2 \approx -3\,\mathrm{dB}.$$

7. **Phasenstartwert festlegen.** $K_0 F_{ges}(0) > 0$, $r = 0 \Rightarrow \varphi(0) = r \cdot 90° = 0°$.

8. **Phasenänderung durch das Polglied eintragen.** Ein reelles Polglied 1. Ordnung erzeugt -90° über die Übergangsdekade.

$$\varphi(\omega) \approx \begin{cases} 0^\circ, & \omega \le 0.1, \\ -45^\circ - 45^\circ \log_{10} \omega, & 0.1 < \omega < 10, \\ -90^\circ, & \omega \ge 10. \end{cases}$$

9. **Grenzwerte und Konsistenz prüfen.** DC: $|H(0)| = 1 \Rightarrow 0\,\text{dB}$, $\varphi(0) = 0^\circ$. HF: $|H(j\omega)| \sim 1/\omega \Rightarrow -20\log_{10}\omega\,\text{dB}$, $\varphi(\infty) = -90^\circ$. Pol-/Nullzählung: $m = 0$, $n = 1 \Rightarrow (m-n)\cdot 90^\circ = -90^\circ$ konsistent.

Stückweise Näherungen (für die Skizze)

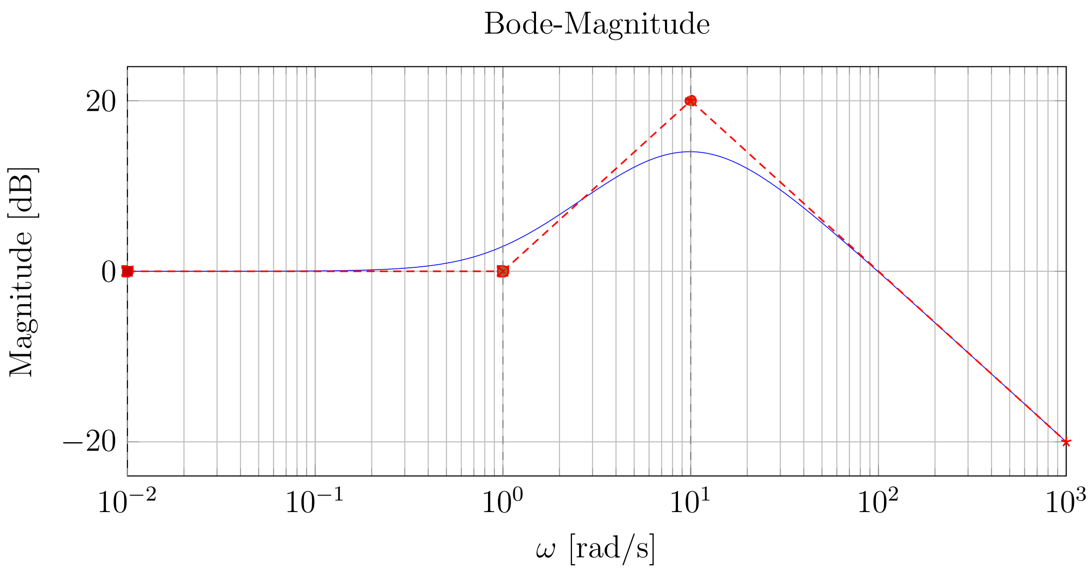
$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} \approx \begin{cases} 0, & \omega \ll 1, \\ -10\log_{10} 2, & \omega = 1, \\ -20\log_{10}\omega, & \omega \gg 1, \end{cases}$$

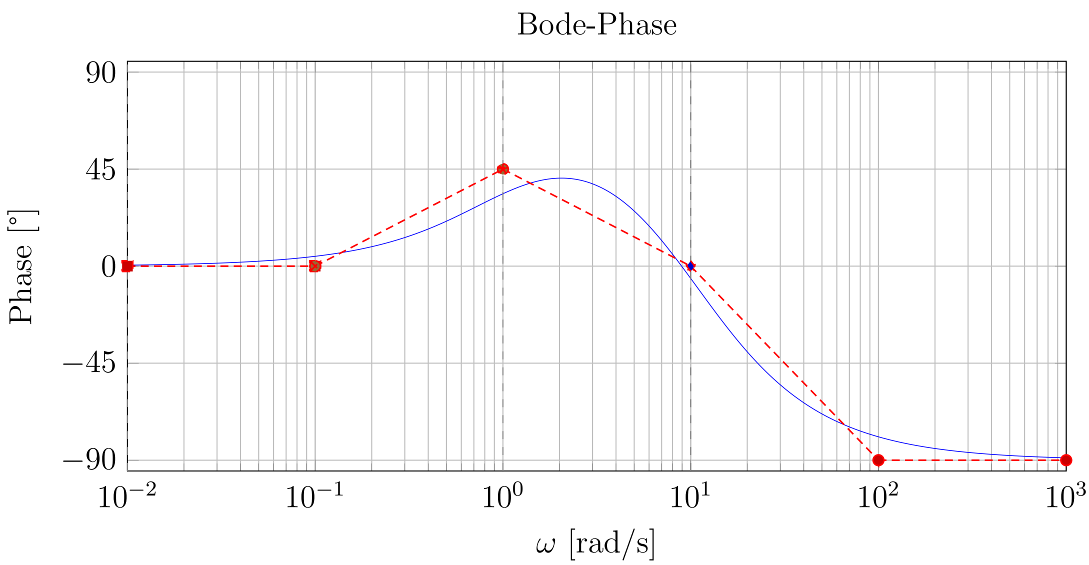
$$\varphi(\omega) \approx \begin{cases} 0^\circ, & \omega \le 0.1, \\ -45^\circ - 45^\circ \log_{10} \omega, & 0.1 < \omega < 10, \\ -90^\circ, & \omega \ge 10. \end{cases}$$

Aufgabe K)

$$H(s) = \frac{100\,(s+1)}{s^2+20s+100} = \frac{100\,(s+1)}{(s+10)^2}\,.$$

K.1 Bode-Diagramm





K.2 Erklärung

1. Normalform herstellen.

$$H(s) = \frac{100(s+1)}{(s+10)^2} = K_0 \cdot (1 + sT_z) \cdot \frac{1}{(1+sT_p)^2}$$

mit

$$K_0 = 1, \quad r = 0, \quad T_z = 1, \quad T_p = \tfrac{1}{10}.$$

$\underline{F}_1(s) = 1{+}sT_z$ (LHP-Nullstelle), $\underline{F}_2(s) = \dfrac{1}{(1+sT_p)^2}$ (Doppelpol).

2. Eckfrequenzen bestimmen und sortieren. Die ω-Eckfrequenzen aus den T_n bestimmen und sortieren:

$$\omega_z = \frac{1}{T_z} = 1\,\text{rad/s}, \qquad \omega_p = \frac{1}{T_p} = 10\,\text{rad/s}, \qquad \omega_z < \omega_p.$$

3. Startpunkt des Amplitudengangs festlegen (Geradennäherung). Setze $\omega_{\min} = \omega_z = 1$.

$$F_{\text{dB}}(\omega_{\min}) = 20\log_{10}\Big(|K_0 F^*_{ges}(0)|\,\omega^r_{\min}\Big) = 20\log_{10}(1) = 0\,\text{dB}.$$

Ankerpunkt: $0\,\text{dB}$ bei $\omega = 1$.

4. Verlauf links vom Startpunkt zeichnen. Für $\omega < 1$ bleibt die Amplituden-Asymptote bei $0\,\text{dB}$ konstant (Anfangssteigung $r{\cdot}20\,\text{dB/dec} = 0$). Zeichne links von der kleinsten Eckfrequenz eine waagrechte Gerade bei $0\,\text{dB}$.

5. Steigungswechsel an den Eckfrequenzen eintragen. Nullstelle bei $\omega_z = 1$ bewirkt eine Steigungsänderung um $+20\,\text{dB/dec}$ ab $\omega = 1$. Doppelpol bei $\omega_p = 10$ ändert die Magnitudensteigung um zusätzlich $-40\,\text{dB/dec}$ ab $\omega = 10$. Netto:

$$\begin{cases} 0\,\text{dB (flach)}, & \omega < 1, \\ 20\log_{10}\omega, & 1 \le \omega < 10 \text{ (Steigung } +20\,\text{dB/dec)}, \\ 20 - 20\log_{10}(\omega/10), & \omega \ge 10 \text{ (Steigung } -20\,\text{dB/dec)}. \end{cases}$$

6. Eckabrundungen korrekt berücksichtigen. Nullstelle (LHP): bei $\omega = 1\,\text{rad/s}$ $+3\,\text{dB}$ über Asymptote:

$$|H(j1)|_{\text{dB}} \approx +3\,\text{dB}.$$

Doppelpol: bei $\omega = 10$ $-6\,\text{dB}$ unter Asymptote:

$$|H(j10)|_{\text{dB}} \approx +14\,\text{dB}$$

7. **Phasenstartwert festlegen.** $K_0 > 0$, $r = 0 \Rightarrow \varphi(0) = r \cdot 90° = 0°$.

8. **Phasenänderung durch Nullstelle und Doppelpol eintragen.** Nullstelle: $+90°$ über $[0.1, 10]$. Zwei Polglieder: zusammen $-180°$ über $[1, 100]$. Im Interval $[1, 10]$ überlappen sich die Effekte/Änderungen und addieren sich zu einem Endeffekt. Näherung:

$$\varphi(\omega) \approx \begin{cases} 0°, & \omega \leq 0.1, \\ 45° + 45° \log_{10} \omega, & 0.1 < \omega < 1, \\ 45° - 45° \log_{10} \omega, & 1 < \omega < 10, \\ -90° \log_{10}(\omega/10), & 10 < \omega < 100, \\ -90°, & \omega \geq 100. \end{cases}$$

9. **Grenzwerte und Konsistenz prüfen.** DC: $|H(0)| = 1 \Rightarrow 0\,\mathrm{dB}$, $\varphi(0) = 0°$. HF: $|H(j\omega)| \sim 100\,\omega/\omega^2 = 100/\omega \Rightarrow 20 - 20\log_{10}(\omega/10)\,\mathrm{dB}$, $\varphi(\infty) = -90°$. Pol-/Nullzählung: $m = 1$, $n = 2 \Rightarrow (m-n) \cdot 90° = -90°$ konsistent.

Stückweise Näherungen (für die Skizze)

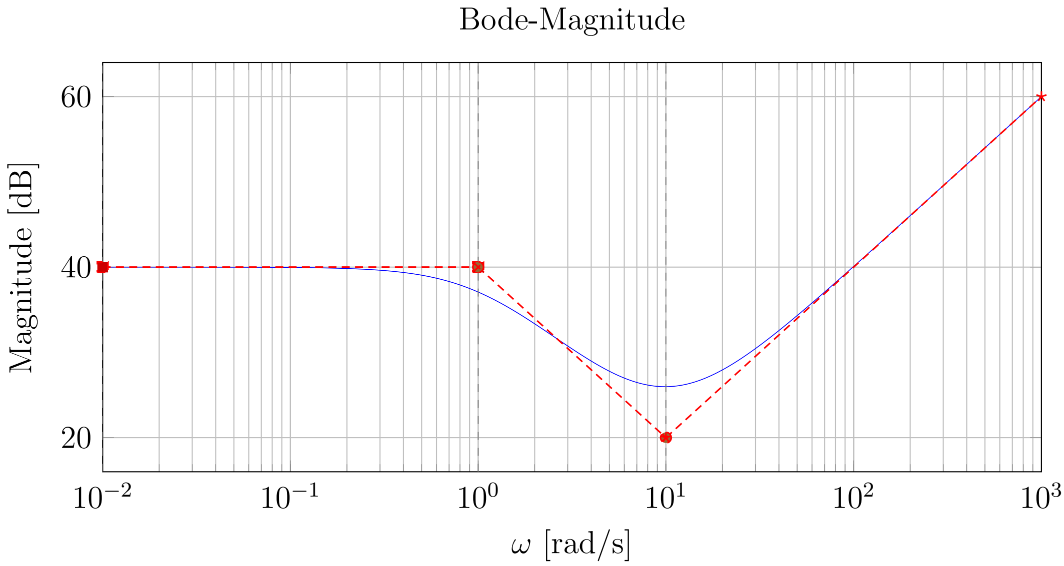
$$|H(j\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx \begin{cases} 0, & \omega \ll 1, \\ 20 \log_{10} \omega, & 1 \ll \omega \ll 10, \\ 20 - 20 \log_{10}(\omega/10), & \omega \gg 10, \end{cases}$$

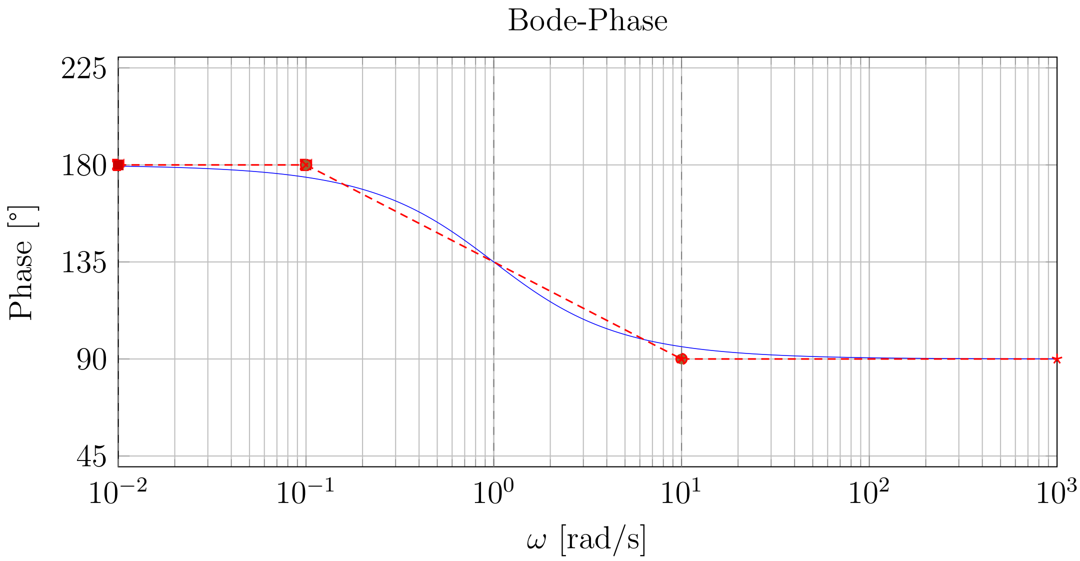
$$\varphi(\omega) \approx \begin{cases} 0°, & \omega \leq 0.1, \\ 45° + 45° \log_{10} \omega, & 0.1 < \omega < 1, \\ 45° - 45° \log_{10} \omega, & 1 < \omega < 10, \\ -90° \log_{10}(\omega/10), & 10 < \omega < 100, \\ -90°, & \omega \geq 100. \end{cases}$$

Aufgabe L)

$$H(s) = \frac{s^2 - 100}{s+1} = \frac{(s-10)(s+10)}{s+1}\,.$$

L.1 Bode-Diagramm





L.2 Erklärung

1. Normalform herstellen.

$$H(s) = \frac{(s-10)(s+10)}{s+1} = -100\,(1 - sT_{z1})\,(1 + sT_{z2}) \cdot \frac{1}{1+sT_p}$$

mit

$$K_0 = -100, \quad r = 0, \quad T_{z1} = \tfrac{1}{10}, \quad T_{z2} = \tfrac{1}{10}, \quad T_p = 1.$$
$$\underline{F}_1(s) = \big(1 - sT_{z1}\big) \text{ (RHP-Nullstelle)},$$
$$\underline{F}_2(s) = \big(1 + sT_{z2}\big) \text{ (LHP-Nullstelle)},$$
$$\underline{F}_3(s) = \tfrac{1}{1+sT_p} \text{ (Pol)}.$$

2. Eckfrequenzen bestimmen und sortieren.

$$\omega_p = 1\,\mathrm{rad/s}, \qquad \omega_{z1} = \omega_{z2} = 10\,\mathrm{rad/s}, \qquad \omega_p < \omega_z.$$

3. Startpunkt des Amplitudengangs festlegen (Geradennäherung). Setze $\omega_{\min} = \omega_p = 1$.

$$F_{\mathrm{dB}}(\omega_{\min}) = 20\log_{10}\!\big(|K_0\underline{F}^*_{ges}(0)|\,\omega_{\min}^r\big) = 20\log_{10}100 = 40\,\mathrm{dB}.$$

Ankerpunkt: $40\,\mathrm{dB}$ bei $\omega = 1$.

4. Verlauf links vom Startpunkt zeichnen. Für $\omega < 1$ horizontale Asymptote bei $40\,\mathrm{dB}$ (Anfangssteigung $r \cdot 20\,\mathrm{dB/dec} = 0$). Waagrechte Gerade links von der kleinsten Eckfrequenz eintragen.

5. Steigungswechsel an den Eckfrequenzen eintragen. Ab $\omega = 1$: Pol $\Rightarrow$ Steigungswechsel $-20\,\mathrm{dB/dec}$. Ab $\omega = 10$: zwei Nullstellen $\Rightarrow$ zusätzl. $+40\,\mathrm{dB/dec}$. Netto:

$$\begin{cases} 40\,\mathrm{dB}, & \omega < 1, \\ 40 - 20\log_{10}\omega, & 1 \le \omega < 10, \\ 20 + 20\log_{10}(\omega/10), & \omega \ge 10. \end{cases}$$

6. Eckabrundungen korrekt berücksichtigen. Einfacher Pol bei $\omega = 1$: $-3\,\mathrm{dB}$ am Knick $\Rightarrow |H(j1)|_{\mathrm{dB}} \approx 40 - 3 = 37\,\mathrm{dB}$. Zwei Nullstellen bei $\omega = 10$: $+6\,\mathrm{dB}$ am Knick $\Rightarrow |H(j10)|_{\mathrm{dB}} \approx 20 + 6 = 26\,\mathrm{dB}$.

7. Phasenstartwert festlegen. Verwende die Regel für $K_0\underline{F}^*_{ges}(0) < 0$:

$$\varphi(0) = -180^\circ + r \cdot 90^\circ = -180^\circ$$

(Darstellung im Plot um $+360^\circ$ verschoben $\Rightarrow$ Start bei $+180^\circ$).

8. Phasenänderung durch Pol und Nullstellen eintragen. Pol bei ω_p bewirkt eine Phasenänderung $-90°$ über $[0.1, 10]$. Nullstellen bei ω_z: LHP-Nullstelle $+90°$ und RHP-Nullstelle $-90°$, beide über $[1, 100]$. die $+90°$ und $-90°$ der beiden Nullstellen kompensieren sich zu $0°$. Netto wirkt in $[1, 10]$ nur der Pol. Näherung (mit Phasenverschiebung um $+360°$ gezeigt):

$$\varphi(\omega) \approx \begin{cases} 180°, & \omega \leq 0.1, \\ 135° - 45° \log_{10} \omega, & 0.1 < \omega < 10, \\ 90°, & \omega \geq 10. \end{cases}$$

9. Grenzwerte und Konsistenz prüfen. DC: $|H(0)| = 100 \Rightarrow 40\,\text{dB}$; $\varphi(0) = -180°$ (gezeigt als $+180°$). HF: $|H(j\omega)| \sim \omega^2/\omega = \omega \Rightarrow 20 \log_{10} \omega + 20\,\text{dB}$.

Stückweise Näherungen (für die Skizze)

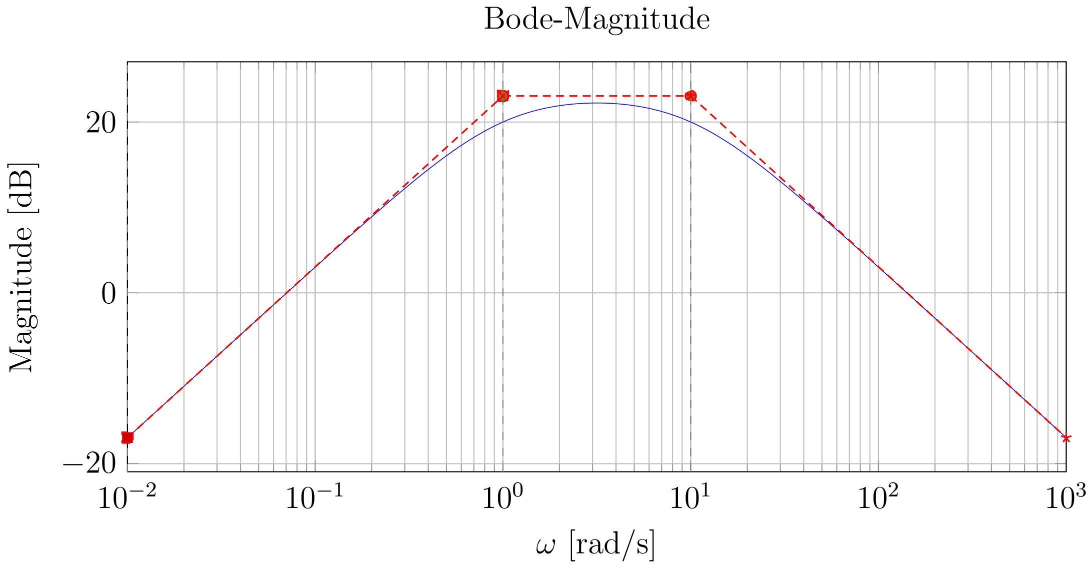
$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} \approx \begin{cases} 40, & \omega \ll 1, \\ 40 - 3, & \omega = 1, \\ 40 - 20 \log_{10} \omega, & 1 \ll \omega \ll 10, \\ 20 + 6, & \omega = 10, \\ 20 + 20 \log_{10}(\omega/10), & \omega \gg 10, \end{cases}$$

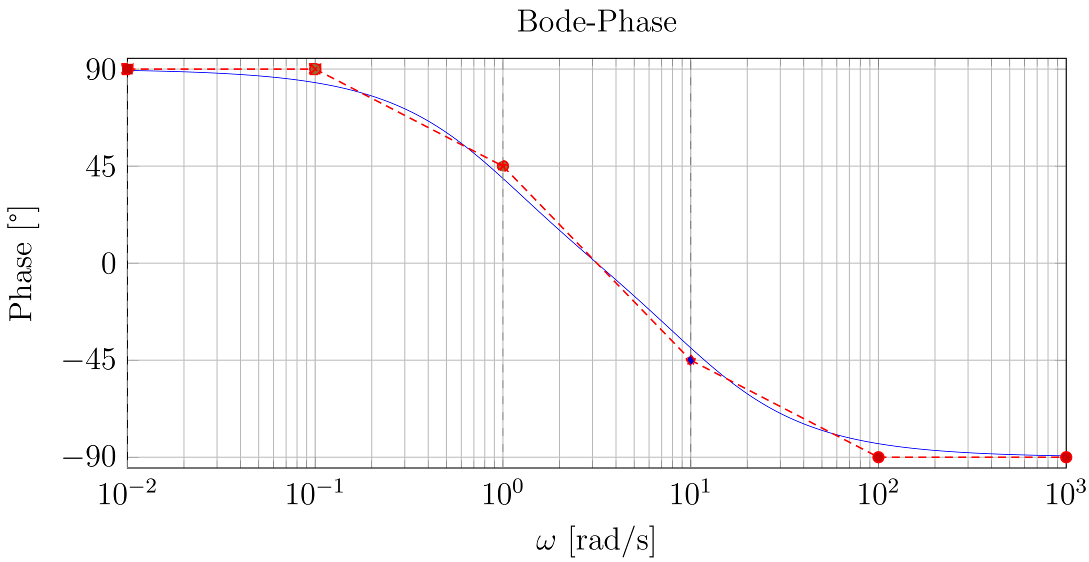
$$\varphi(\omega) \text{ (Darstellung } + 360°) \approx \begin{cases} 180°, & \omega \leq 0.1, \\ 135° - 45° \log_{10} \omega, & 0.1 < \omega < 10, \\ 90°, & \omega \geq 10. \end{cases}$$

Aufgabe M)

$$H(s) = \frac{10\sqrt{202}\, s}{(s+1)(s+10)}\,.$$

M.1 Bode-Diagramm





M.2 Erklärung

1. Normalform herstellen.

$$H(s) = \frac{10\sqrt{202}\,s}{(s+1)(s+10)} = K_0 \cdot s^{\,r} \cdot \frac{1}{(1+sT_{p1})(1+sT_{p2})}$$

mit

$$K_0 = \sqrt{202}, \quad r = 1, \quad T_{p1} = 1, \quad T_{p2} = \tfrac{1}{10}.$$

$$\underline{F}_1(s) = \frac{1}{1+sT_{p1}} = \frac{1}{1+s}, \qquad \underline{F}_2(s) = \frac{1}{1+sT_{p2}} = \frac{1}{1+\frac{s}{10}}$$

2. Eckfrequenzen bestimmen und sortieren.

$$\omega_{p1} = \frac{1}{T_{p1}} = 1\,\mathrm{rad/s}, \qquad \omega_{p2} = \frac{1}{T_{p2}} = 10\,\mathrm{rad/s}, \qquad \omega_{p1} < \omega_{p2}.$$

3. Startpunkt des Amplitudengangs festlegen (Geradennäherung). Setze $\omega_{\min} = \omega_{p1} = 1$.

$$F_{\mathrm{dB}}(\omega_{\min}) = 20\log_{10}\Big(|K_0\underline{F}^*_{ges}(0)|\,\omega^r_{\min}\Big) = 20\log_{10}(\sqrt{202}\cdot 1) \approx 23\,\mathrm{dB}.$$

Ankerpunkt: 23 dB bei $\omega = 1$.

4. Verlauf links vom Startpunkt zeichnen. Für $\omega < 1$: Anfangssteigung $r \cdot 20 = +20\,\mathrm{dB/dec}$. Zeichne links vom Startpunkt die Gerade mit +20 dB/dec durch den Ankerpunkt.

5. Steigungswechsel an den Eckfrequenzen eintragen. Pol bei $\omega_{p1} = 1$: Steigungsänderung $-20\,\mathrm{dB/dec} \Rightarrow$ Netto 0 dB/dec in $[1, 10]$ (betragsflach). Pol bei $\omega_{p2} = 10$: weitere $-20\,\mathrm{dB/dec} \Rightarrow$ Netto $-20\,\mathrm{dB/dec}$ für $\omega \gg 10$. Geradennäherung:

$$|H(j\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx \begin{cases} 10\log_{10}202 + 20\log_{10}\omega, & \omega \le 1, \\ 10\log_{10}202, & 1 < \omega \le 10, \\ 10\log_{10}202 - 20\log_{10}(\omega/10), & \omega \ge 10. \end{cases}$$

6. Eckabrundungen korrekt berücksichtigen. Jeder einfache Pol: $-3\,\mathrm{dB}$ unter der Geradennäherung am Knick.

$$|H(j1)|_{\mathrm{dB}} \approx 10\log_{10}202 - 3\ \mathrm{dB} \ \ (\approx 20\,\mathrm{dB}),$$

$$|H(j10)|_{\mathrm{dB}} \approx 10\log_{10}202 - 3\ \mathrm{dB} \ \ (\approx 20\,\mathrm{dB}).$$

7. Phasenstartwert festlegen. Verwende die Regel für $K_0 \underline{F}^*_{ges}(0) > 0$

$$\varphi(0) = r \cdot 90^\circ = 1 \cdot 90^\circ = +90^\circ.$$

8. Phasenänderung durch die Polglieder eintragen. Nullstelle im Ursprung liefert konstant $+90^\circ$. Pol bei 1: -90° über $[0.1, 10]$. Pol bei 10: -90° über $[1, 100]$. In $[1, 10]$ überlappen sich beide Polbeiträge und addieren sich (Netto-Steilheit = Summe der Einzelsteilheiten). Näherung:

$$\varphi(\omega) \approx \begin{cases} +90^\circ, & \omega \le 0.1, \\ 45^\circ - 45^\circ \log_{10} \omega + 90^\circ, & 0.1 < \omega < 1, \\ 45^\circ - 90^\circ \log_{10} \omega + 90^\circ, & 1 < \omega < 10, \\ -45^\circ - 45^\circ \log_{10}(\omega/10), & 10 < \omega < 100, \\ -90^\circ, & \omega \ge 100. \end{cases}$$

(vereinfacht im Plot als $90 - \arctan \omega - \arctan(\omega/10)$ gezeigt; Grenzwert $\varphi(\infty) = -90^\circ$).

9. Grenzwerte und Konsistenz prüfen. DC: $|H(0)| = 0 \Rightarrow -\infty\,\text{dB}$, $\varphi(0) = +90^\circ$. HF: $|H(j\omega)| \sim \sqrt{202}\,\frac{\omega}{\omega^2/10} = \sqrt{202} \cdot \frac{10}{\omega} \Rightarrow 10 \log_{10} 202 - 20 \log_{10}(\omega/10)\,\text{dB}$, $\varphi(\infty) = +90^\circ - 180^\circ = -90^\circ$. Pol-/Nullzählung: $m = 1$, $n = 2 \Rightarrow (m - n) \cdot 90^\circ = -90^\circ$ konsistent.

Stückweise Näherungen (für die Skizze)

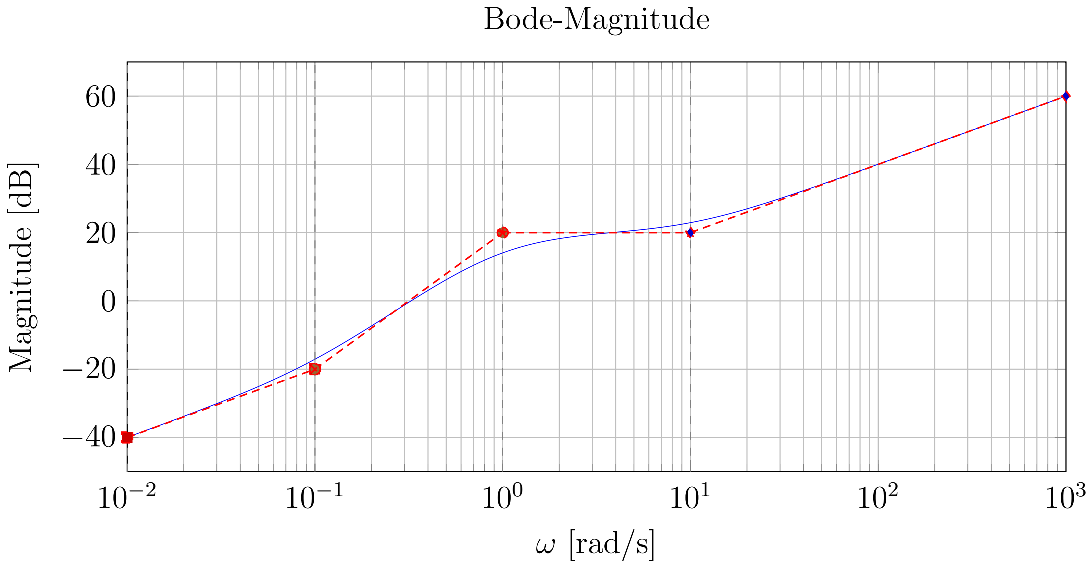
$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} \approx \begin{cases} 10 \log_{10} 202 + 20 \log_{10} \omega, & \omega \ll 1, \\ 10 \log_{10} 202 - 3, & \omega = 1, \\ 10 \log_{10} 202, & 1 \ll \omega \ll 10, \\ 10 \log_{10} 202 - 3, & \omega = 10, \\ 10 \log_{10} 202 - 20 \log_{10}(\omega/10), & \omega \gg 10, \end{cases}$$

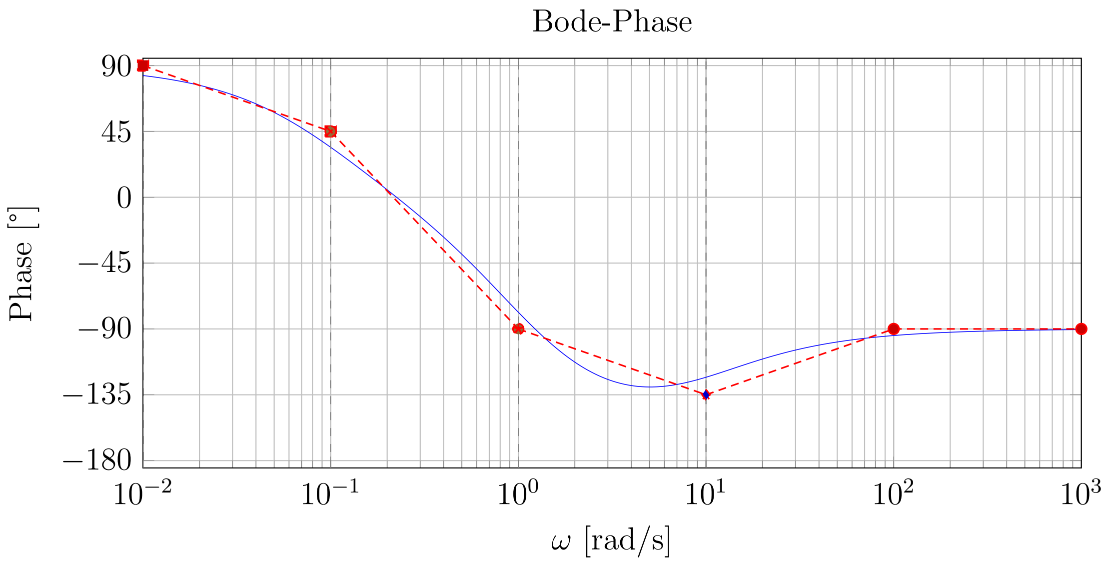
$$\varphi(\omega) \approx \begin{cases} +90^\circ, & \omega \le 0.1, \\ 45^\circ - 45^\circ \log_{10} \omega + 90^\circ, & 0.1 < \omega < 1, \\ 45^\circ - 90^\circ \log_{10} \omega + 90^\circ, & 1 < \omega < 10, \\ -45^\circ - 45^\circ \log_{10}(\omega/10), & 10 < \omega < 100, \\ -90^\circ, & \omega \ge 100. \end{cases}$$

Aufgabe N)

$$H(s) = \frac{s\,(0.1 - s)\,(s + 10)}{(s + 1)^2}\,.$$

N.1 Bode-Diagramm





N.2 Erklärung

1. Normalform herstellen. Bringe die Übertragungsfunktion in die Standardform.

$$H(s) = K_0 \cdot s^{\,r}\,(1 - sT_{z1})\,(1 + sT_{z2}) \cdot \frac{1}{(1 + sT_p)^2}$$

mit

$$K_0 = 1, \quad r = 1, \quad T_{z1} = 10, \quad T_{z2} = 0.1, \quad T_p = 1.$$

$$\begin{aligned} \underline{F}_2(s) &= (1 - sT_{z1}) \text{ (RHP-Nullstelle)}, \\ \underline{F}_3(s) &= (1 + sT_{z2}) \text{ (LHP-Nullstelle)}, \\ \underline{F}_4(s) &= \tfrac{1}{(1+sT_p)^2} \text{ (Doppelpol)}. \end{aligned}$$

2. Eckfrequenzen bestimmen und sortieren.

$$\omega_{z1} = \frac{1}{T_{z1}} = 0.1\,\mathrm{rad/s}\,, \quad \omega_p = \frac{1}{T_p} = 1\,\mathrm{rad/s}\ \text{(doppelt)}, \quad \omega_{z2} = \frac{1}{T_{z2}} = 10\,\mathrm{rad/s}$$

$$\omega_{zR} < \omega_p < \omega_{zL}$$

3. Startpunkt des Amplitudengangs festlegen (Geradennäherung). Setze $\omega_{\min} = \omega_{zR} = 0.1$.

$$F_{\mathrm{dB}}(\omega_{\min}) = 20\log_{10}\Big(|K_0 F^*_{\mathrm{ges}}(0)|\,\omega^r_{\min}\Big) = 20\log_{10}(0.1) = -20\,\mathrm{dB}.$$

Ankerpunkt: $-20\,\mathrm{dB}$ bei $\omega = 0.1$.

4. Verlauf links vom Startpunkt zeichnen. Für $\omega < 0.1$ Anfangssteigung $r \cdot 20 = +20\,\mathrm{dB/dec} \Rightarrow$ Gerade mit $+20\,\mathrm{dB/dec}$ durch den Ankerpunkt.

5. Steigungswechsel an den Eckfrequenzen eintragen. Nullstelle bei 0.1: $+20\,\mathrm{dB/dec} \Rightarrow$ Netto $+40\,\mathrm{dB/dec}$ in $[0.1, 1]$. Doppelpol bei 1: $-40\,\mathrm{dB/dec}$ $\Rightarrow$ Netto $0\,\mathrm{dB/dec}$ in $[1, 10]$. Nullstelle bei 10: $+20\,\mathrm{dB/dec} \Rightarrow$ Netto $+20\,\mathrm{dB/dec}$ für $\omega \gg 10$. Geradennäherung:

$$|H(j\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx \begin{cases} 20\log_{10}\omega, & \omega \le 0.1, \\ 40\log_{10}\omega + 20, & 0.1 < \omega \le 1, \\ 20, & 1 < \omega \le 10, \\ 20 + 20\log_{10}(\omega/10), & \omega \ge 10. \end{cases}$$

6. **Eckabrundungen korrekt berücksichtigen.** RHP-/LHP-Nullstelle: $+3\,\mathrm{dB}$ am Knick ($\omega = 0.1$ bzw. 10). Doppelpol ($\omega = 1$): $-6\,\mathrm{dB}$ am Knick.

7. **Phasenstartwert festlegen.** Da $K_0\, F^*_{\mathrm{ges}}(0) > 0$ und $r = 1$:

$$\varphi(0) = 0^\circ + r \cdot 90^\circ = +90^\circ.$$

8. **Phasenänderung durch Nullstellen und Pol eintragen.** Beiträge: RHP-Nullstelle -90° über $[0.01, 1]$; Doppelpol -180° über $[0.1, 10]$; LHP-Nullstelle $+90^\circ$ über $[1, 100]$. Überlappungen addieren sich im jeweiligen Bereich ($[0.1, 1]$ wirken RHP-Nullstelle und beide Pole gemeinsam; $[1, 10]$ wirken beide Pole und die LHP-Nullstelle gemeinsam)). Näherung:

9. **Grenzwerte und Konsistenz prüfen.** DC: $|H(0)| = 0 \Rightarrow -\infty\,\mathrm{dB}$, $\varphi(0) = +90^\circ$. HF: $|H(j\omega)| \sim \omega \cdot \omega \cdot \omega/\omega^2 = \omega \Rightarrow +\infty\,\mathrm{dB}$.

Stückweise Näherungen (für die Skizze)

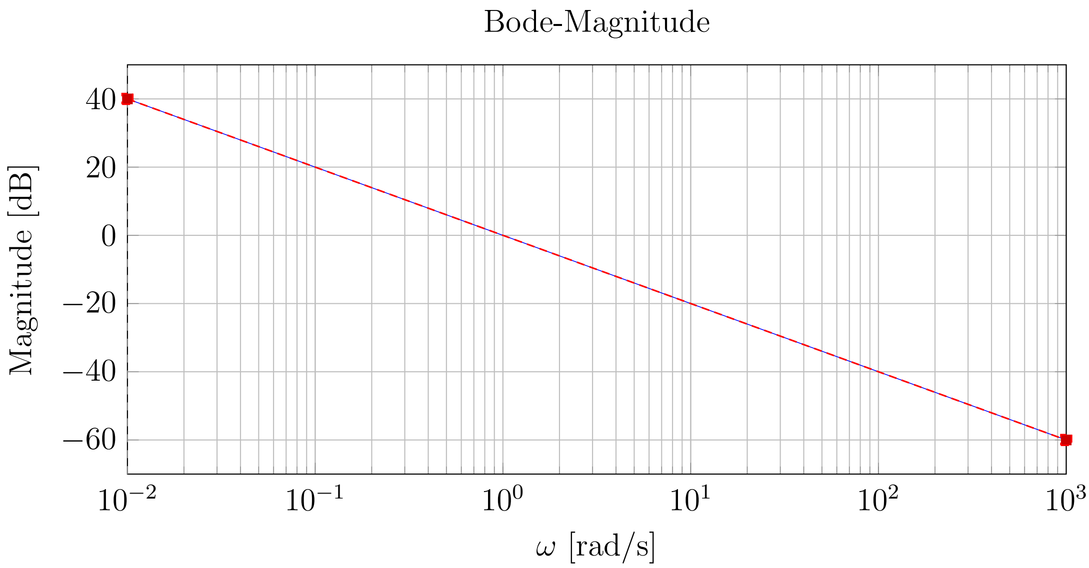
$$|H(j\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx \begin{cases} 20\log_{10}\omega, & \omega \ll 0.1, \\ 40\log_{10}\omega + 20, & 0.1 \ll \omega \ll 1, \\ 20, & 1 \ll \omega \ll 10, \\ 20 + 20\log_{10}(\omega/10), & \omega \gg 10, \end{cases}$$

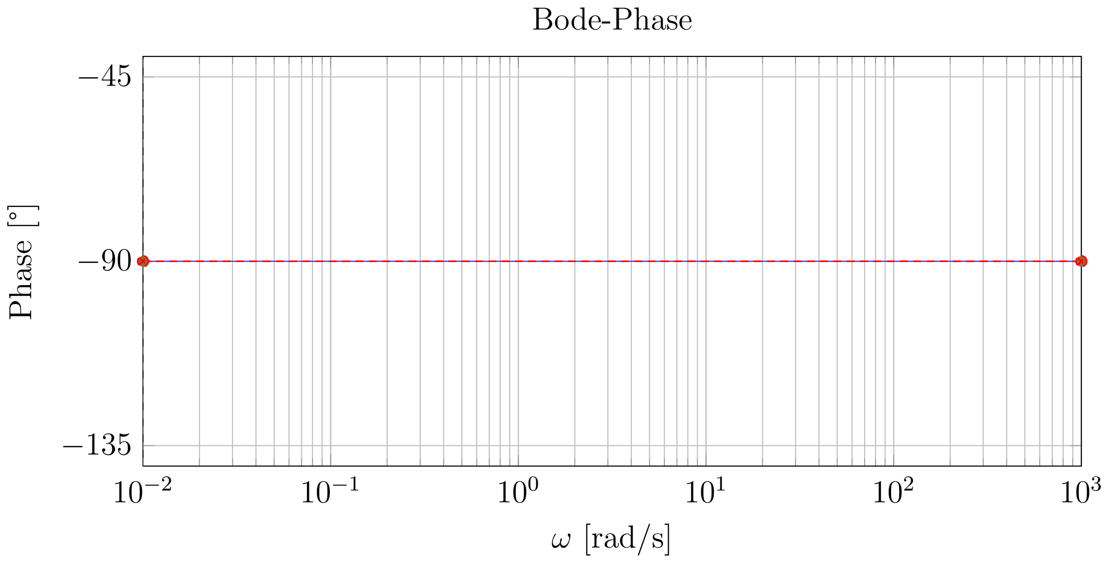
$$\varphi(\omega) \approx \begin{cases} +90^\circ, & \omega \le 0.01, \\ 45^\circ - 45^\circ\log_{10}(\omega/0.1), & 0.01 < \omega < 0.1, \\ 45^\circ - 135^\circ\log_{10}(\omega/0.1), & 0.1 < \omega < 1, \\ -90^\circ - 45^\circ\log_{10}\omega, & 1 < \omega < 10, \\ -135^\circ + 45^\circ\log_{10}(\omega/10), & 10 < \omega < 100, \\ -90^\circ, & \omega \ge 100. \end{cases}$$

Aufgabe O)

$$H(s) = \frac{1}{s}\,.$$

O.1 Bode-Diagramm





O.2 Erklärung

1. Normalform herstellen.

$$H(s) = \frac{1}{s} = K_0 \cdot s^r, \qquad K_0 = 1, \quad r = -1.$$

2. Eckfrequenzen bestimmen und sortieren. Keine endliche Eckfrequenz; nur Ursprungspol.

3. Startpunkt des Amplitudengangs festlegen (Geradennäherung). Wähle Referenz $\omega_{\text{ref}} = 1\,\text{rad/s}$ (Fixpunkt).

$$F_{\text{dB}}(\omega_{\text{ref}}) = 20\log_{10}\big(|K_0|\ \omega_{\text{ref}}^r\big) = 20\log_{10}(1^{-1}) = 0\,\text{dB}.$$

Ankerpunkt: $0\,\text{dB}$ bei $\omega = 1$.

4. Verlauf links vom Startpunkt zeichnen. Konstante Steigung $r{\cdot}20\,\text{dB/dec} = -20\,\text{dB/dec}$ über alle Frequenzen. Gerade durch den Ankerpunkt mit Steigung $-20\,\text{dB/dec}$.

5. Steigungswechsel an den Eckfrequenzen eintragen. Kein Steigungswechsel (keine endliche Ecke).

6. Eckabrundung korrekt berücksichtigen. Keine Ecken $\Rightarrow$ keine $\pm 3/6/9\,\text{dB}$-Korrekturen.

7. Phasenstartwert festlegen. Da $K_0\,F^*_{\text{ges}}(0) > 0$ und $r = -1$:

$$\varphi(0) = r \cdot 90^\circ = -90^\circ.$$

8. Phasenänderung durch Teilglieder eintragen. Nur Ursprungspol: Phase konstant -90°. Keine Überlappung, keine Addition weiterer Beiträge.

9. Grenzwerte und Konsistenz prüfen. DC: $|H(0)| \to \infty \Rightarrow +\infty\,\text{dB}$, $\varphi(0) = -90^\circ$. HF: $|H(j\omega)| = 1/\omega \Rightarrow -20\log_{10}\omega\,\text{dB}$, $\varphi(\infty) = -90^\circ$.

Stückweise Näherungen (für die Skizze)

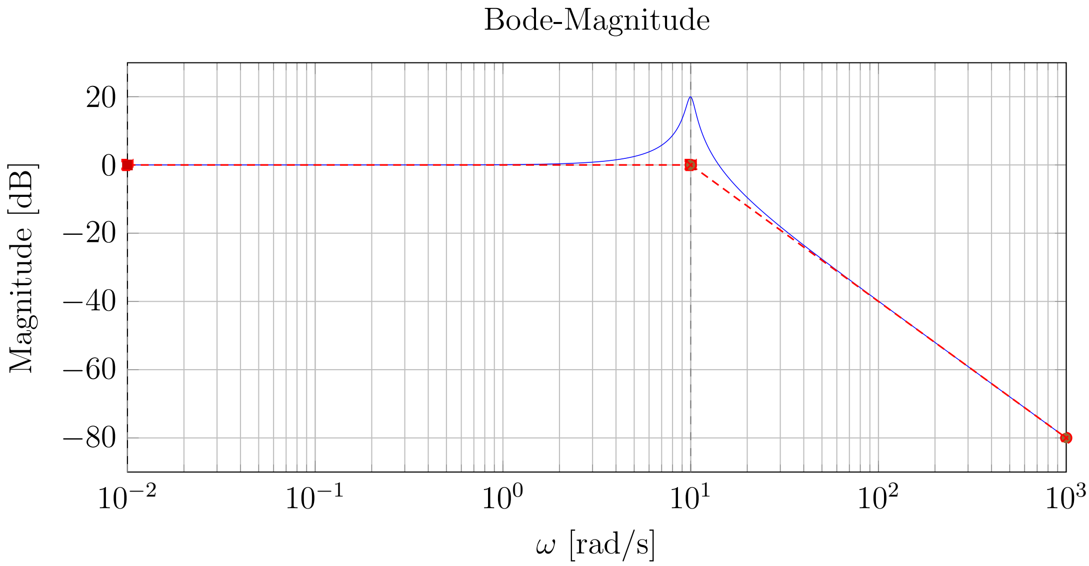
$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} \approx \begin{cases} -20\log_{10}\omega, & \omega \ll 1, \\ 0, & \omega = 1, \\ -20\log_{10}\omega, & \omega \gg 1, \end{cases}$$

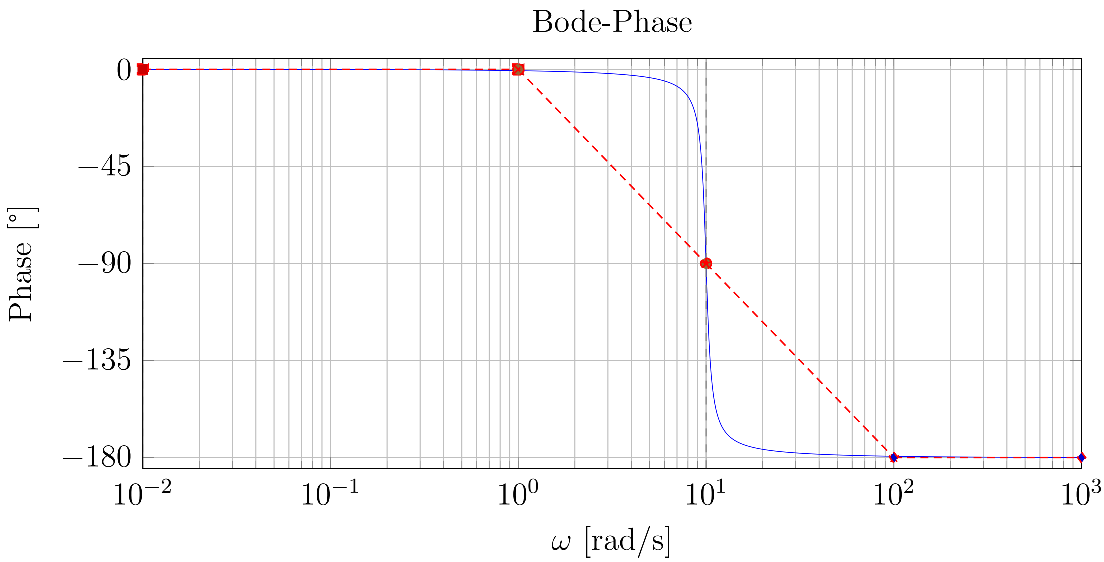
$$\varphi(\omega) \approx -90^\circ \text{ (für alle } \omega\text{)}.$$

Aufgabe P)

$$H(s) = \frac{100}{s^2 + s + 100}\,.$$

P.1 Bode-Diagramm





P.2 Erklärung

1. **Normalform herstellen.** Bringe die Übertragungsfunktion exakt in die im Skript definierte Standardform für reelle Pol-/Nullstellen.

$$H(s) = K_0 \cdot s^r \cdot \frac{1}{1 + 2d_n T_p \cdot s + T_p^2 \cdot s^2} \quad .$$

Hier haben wir:

$$\underline{F}_1(s) = \frac{1}{1 + 2d_n T_p \cdot s + T_p^2 \cdot s^2}, \quad K_0 = \frac{100}{100} = 1,$$

$$T_p = \frac{1}{10}, \quad d_n = \frac{1}{20} \quad \text{und} \quad r = 0.$$

Klassifizikation des ersten Teilglieds $\underline{F}_1$: konjugiertes komplexes Polpaar zweiter Ordnung.

2. **Eckfrequenz bestimmen und sortieren.** Bestimme die Eckfrequenz aus der Normform:

$$\omega_n = \frac{1}{T_p} = 10\,\mathrm{rad/s}$$

Es existiert nur diese charakteristische Frequenz; die aufsteigende Sortierung $\omega_1 < \omega_2 < \ldots$ ist damit trivial.

3. **Startpunkt des Amplitudengangs festlegen (Geradennäherung).** Setze die Startfrequenz gleich der kleinsten Eckfrequenz $\omega_{\min} = \omega_n = 10\,\mathrm{rad/s}$. Verwende die Regel im Skript

$$F_{\mathrm{dB}}(\omega_{\min}) = 20 \log_{10}\Big(|K_0\, F^*_{ges}(0)| \cdot \omega^r_{\min}\Big) = 20 \log_{10}(1) = 0\,\mathrm{dB}.$$

Dieser Punkt dient als Anker für die Geradennäherung (ohne Resonanzüberhöhung).

4. **Verlauf links vom Startpunkt zeichnen.** Für $\omega < \omega_{\min}$ bleibt die Amplituden-Asymptote waagrecht, denn die Anfangssteigung beträgt $r \cdot 20\,\mathrm{dB/dec} = 0$. Trage also eine horizontale Linie bei $0\,\mathrm{dB}$ ein.

5. **Steigungswechsel an der Eckfrequenz eintragen.** Ein konjugiertes Polpaar zweiter Ordnung reduziert die Steigung ab ω_n um $40\,\mathrm{dB/dec}$. Da bis jetzt die Steigung $0\,\mathrm{dB/dec}$ betrug, ist diese ab jetzt $-40\,\mathrm{dB/dec}$. Zeichne rechts von ω_n die Gerade mit Steigung $-40\,\mathrm{dB/dec}$. Die Formel für die Geradennäherung lautet:

$$|H(j\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx -40 \log_{10}\Big(\frac{\omega}{\omega_n}\Big) \quad (\omega \geq \omega_n = 10).$$

6. **Eckabrundung korrekt berücksichtigen.** Da $d_n \ll \frac{1}{2}$ müssen wir beim Abrunden eine Resonanzüberhöhung mit einbeziehen. Laut Skript erreicht der Magnitudengang bei $\omega = \omega_n$ eine Überhöhung von

$$-20\log_{10}(2d_n) = -20\log_{10}(\tfrac{1}{10}) = 20\,\text{dB}$$

über der asymptotischen 0 dB-Gerade. Trage dort einen Stützpunkt und runde die Ecke mit Resonanz entsprechend aus.

7. **Phasenstartwert festlegen.** Da $K_0 F_{ges}(0) > 0$ und $r = 0$, ist der Startwert der Phase

$$\varphi(0) = r \cdot 90° = 0°.$$

8. **Phasenänderung durch das Polpaar eintragen.** Ein komplexes Polpaar zweiter Ordnung erzeugt insgesamt eine Phasenänderung von $-180°$. Trage die Näherung ein:

$$\varphi(\omega) \approx \begin{cases} 0°, & \omega \leq 10^{-1}\omega_n \ (= 1), \\ \text{linear } -90°/\text{Dec}, & 10^{-1}\omega_n < \omega < \omega_n, \\ \text{linear } -90°/\text{Dec}, & \omega_n < \omega < 10\,\omega_n, \\ -180°, & \omega \geq 10\,\omega_n \ (= 100). \end{cases}$$

Das lineare Zwischenstück kann formelkonform als $\varphi(\omega) \approx -90° \log_{10}\omega$ in $[1, 10]$ und $\varphi(\omega) \approx -90° - 90° \log_{10}(\omega/10)$ in $[10, 100]$ dargestellt werden.

9. **Grenzwerte und Konsistenz prüfen.** DC: $|H(0)| = 1 \Rightarrow 0\,\text{dB}$, $\varphi(0) = 0°$. HF: $|H(j\omega)| \sim 100/\omega^2 \Rightarrow -40\log_{10}(\omega/10)\,\text{dB}$. Pol-/Nullzählung bestätigt die Endphase: Zählergrad $m = 0$, Nennergrad $n = 2 \Rightarrow \varphi(\infty) = (m - n) \cdot 90° = -180°$.

Stückweise Näherungen (für die Skizze)

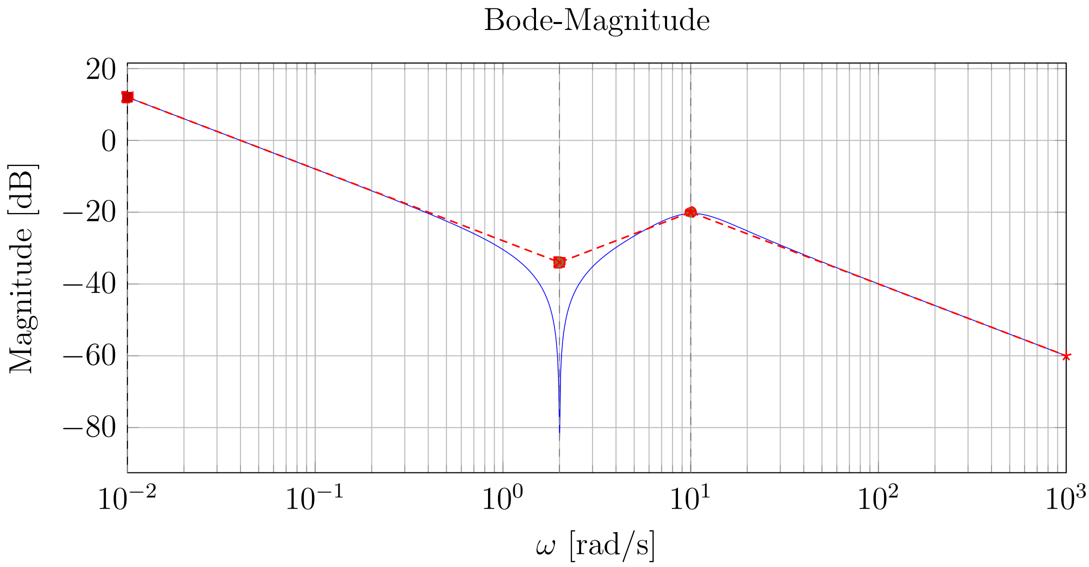
$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} \approx \begin{cases} 0, & \omega \ll 10, \\ +20, & \omega = 10, \\ -40\log_{10}(\omega/10), & \omega \gg 10, \end{cases}$$

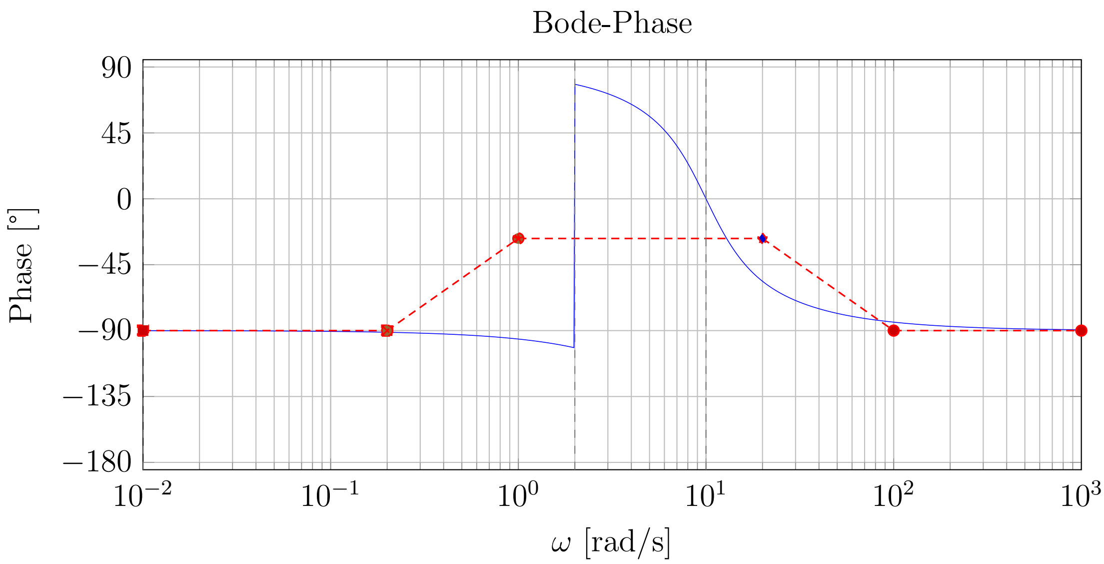
$$\varphi(\omega) \approx \begin{cases} 0°, & \omega \leq 1, \\ -90° \log_{10}\omega, & 1 < \omega < 10, \\ -90° - 90° \log_{10}(\omega/10), & 10 < \omega < 100, \\ -180°, & \omega \geq 100. \end{cases}$$

Aufgabe Q)

$$H(s) = \frac{s^2 + 4}{s\,(s^2 + 10s + 100)}\,.$$

Q.1 Bode-Diagramm





Q.2 Erklärung

Schritt 1 Struktur: Integrator $1/s$, konjugiertes Polpaar mit $\omega_n = 10$, $\zeta = 0.5$, und Doppelnullen auf der imaginären Achse bei $\omega_z = 2$. Für $\omega \ll 2$: $|H(\mathrm{j}\omega)| \approx \dfrac{4}{100\,\omega} = 0.04/\omega \Rightarrow$ Slope $-20\,\mathrm{dB/dec}$ um Niveau $20\log_{10} 0.04 \approx -20\,\mathrm{dB}$ bei $\omega = 0.4$; Phase $\approx -90°$.

Schritt 2 Doppelnullen bei $\omega_z = 2$: Betrag hat dort ein exaktes Null ($|H(\mathrm{j}2)| = 0$). Asymptotisch steigt die Slope vor $\omega = 2$ bei $-20\,\mathrm{dB/dec}$ (Nach $\omega = 2$ netto bei $-20 + 40 \to +20\,\mathrm{dB/dec}$). Phasenbeitrag der Zählerdoppelnull ist exakt ein Sprung um $+180°$ (von $0°$ auf $180°$); in der Geradennäherung als $+180°$ über zwei Dekaden $[0.2, 20]$ modelliert.

Schritt 3 Polpaar bei $\omega_n = 10$, $\zeta = 0.5$: ab $\omega = 10$ Slope-Änderung $-40\,\mathrm{dB/dec}$ (Netto $+20 \to -20\,\mathrm{dB/dec}$). Exakt bei $\omega = 10$: $|H(\mathrm{j}10)| = \dfrac{|4-100|}{10\cdot 100} = \dfrac{96}{1000} \approx -20\,\mathrm{dB}$. Phasenbeitrag des Polpaares $-180°$ über $[1, 100]$, wodurch die Gesamtsumme nach dem temporären Anheben durch die Zählernullen wieder zurück auf $-90°$ fällt[1].

Schritt 4 Resonanz korrekt: Das Zählerpolynom $s^2 + 4$ liefert reelle zwei Nullstellen auf der imaginären Achse bei $\omega_z = 2$. Folge: $|H(\mathrm{j}2)| = 0$; in Dezibel $-\infty\,\mathrm{dB}$. Das Polpaar $s^2 + 10s + 100$ hat $\omega_n = 10$ und $\zeta = 0.5$ ($Q = 1$). ζ ist recht groß und Q unterdrückt Resonanz; konkret $|H(\mathrm{j}10)| = \frac{|4-100|}{10\cdot 100} = 0.096 \Rightarrow \approx -20\,\mathrm{dB}$.

Stückweise Näherung

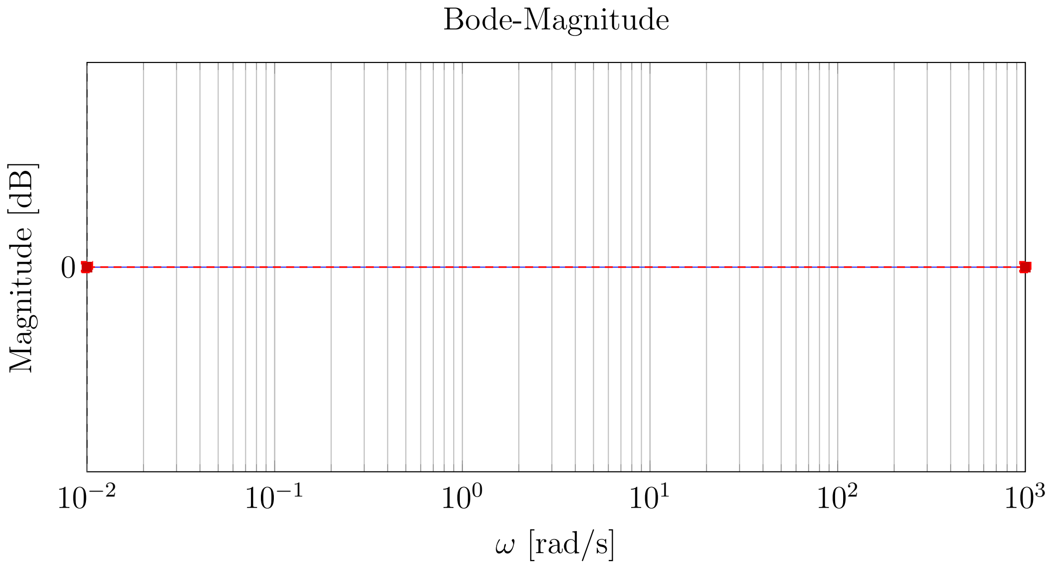
$$|H(\mathrm{j}\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx \begin{cases} 20\log_{10}(0.04) - 20\log_{10}\omega, & \omega \ll 2, \\ -\infty, & \omega = 2, \\ -40 + 20\log_{10}\omega, & 2 \ll \omega \ll 10, \\ -20 - 20\log_{10}(\omega/10), & \omega \gg 10, \end{cases}$$

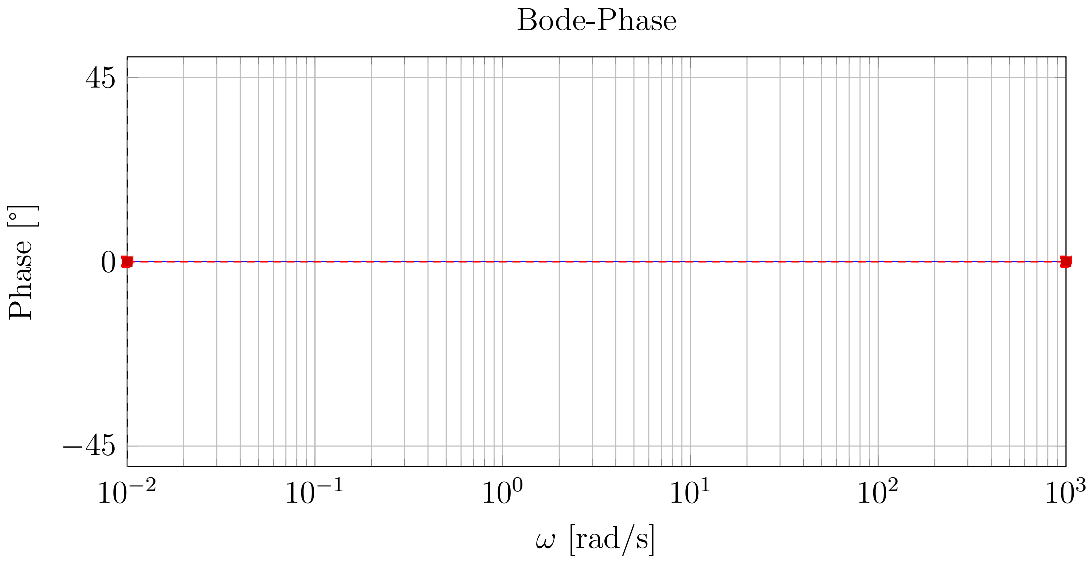
[1] Aufgrund der sehr kleinen Dämpfung ζ wirkt der Phasenverlauf "chaotisch". Tatsächlich überlagern sich zwei 180°-Übergänge: zuerst der abrupte Sprung des Nullstellenpaares, direkt danach der vergleichsweise sanfte Abfall des Polpaares.

Aufgabe R)

$$H(s) = \frac{s^2 + 2s + 10}{s^2 + 2s + 10} = 1\,.$$

R.1 Bode-Diagramm





R.2 Erklärung

Schritt 1 Kürzung: Zähler und Nenner sind identisch, daher $H(s) \equiv 1$. DC-Faktor $1 \Rightarrow |H|_{\mathrm{DC}} = 0\,\mathrm{dB}$; Anfangssteigung $0\,\mathrm{dB/dec}$; Phase $0°$.

Schritt 2 Keine Ecken: keine endlichen Pole/Nullstellen nach Kürzung, daher keine Eckfrequenzen und keine Phasen- und Magnitudenänderungen. Die Geradennäherungen decken sich exakt mit dem exakten Verlauf.

Schritt 3 Grenzverhalten: für $\omega \to 0$ und $\omega \to \infty$ bleibt $|H(\mathrm{j}\omega)| = 1$ und $\angle H(\mathrm{j}\omega) = 0°$; das gesamte Bode-Diagramm ist konstant.

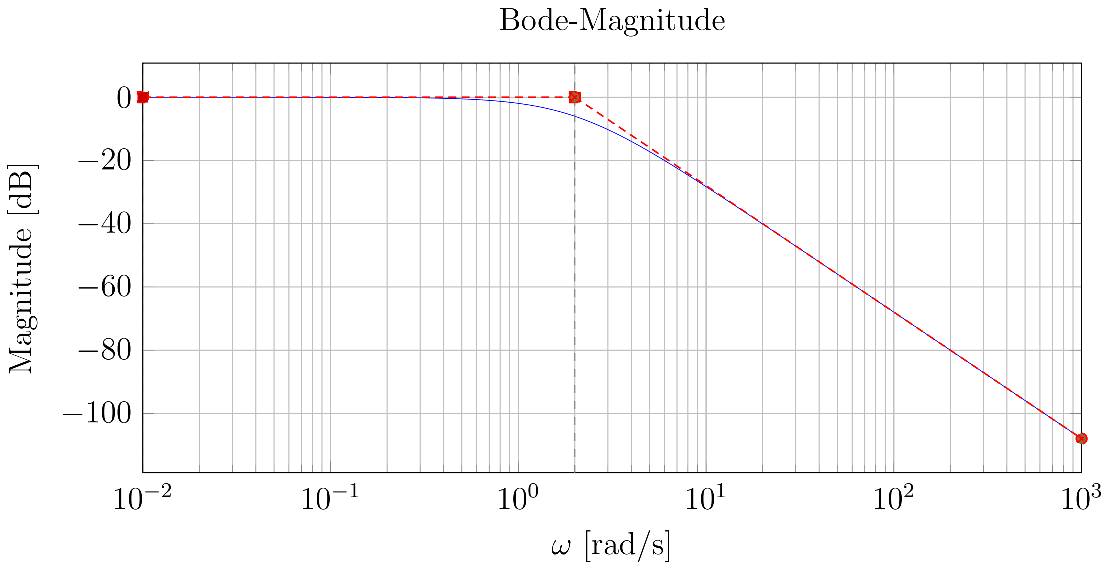
Stückweise Näherung

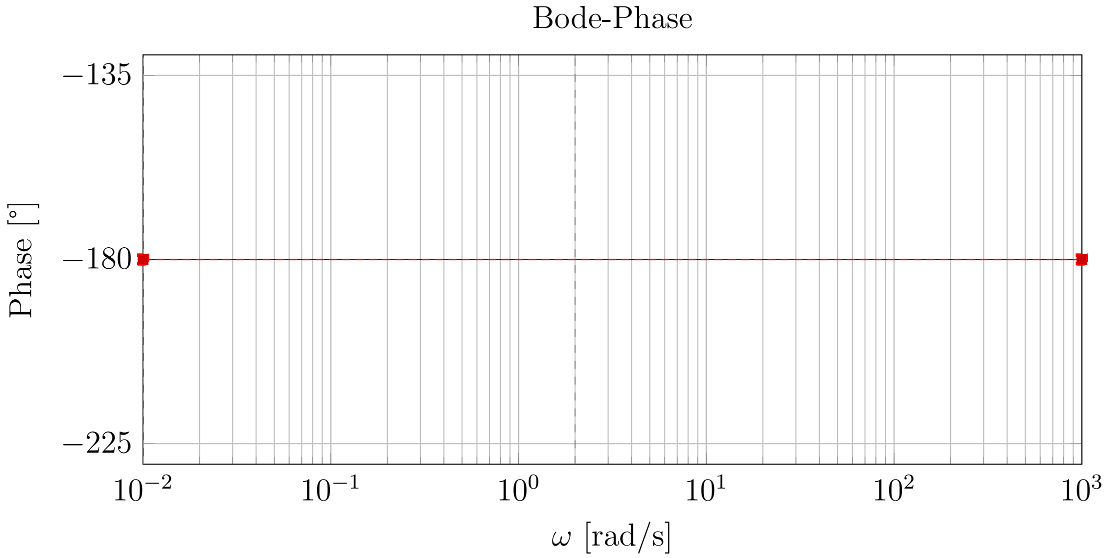
$$|H(\mathrm{j}\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx \begin{cases} 0, & \omega \ll 1, \\ 0, & \omega = 1, \\ 0, & \omega \gg 1, \end{cases}$$

Aufgabe S)

$$H(s) = \frac{4}{s^2 - 4} = \frac{4}{(s-2)(s+2)}\,.$$

S.1 Bode-Diagramm





S.2 Erklärung

1. **Normalform herstellen.**

$$H(s) = \frac{4}{(s-2)(s+2)} = K_0 \cdot \frac{1}{(1-sT_{p1})} \cdot \frac{1}{(1+sT_{p2})}$$

mit

$$K_0 = -1, \quad r = 0, \quad T_{p1} = \tfrac{1}{2}, \quad T_{p2} = \tfrac{1}{2}.$$

2. **Eckfrequenz bestimmen und sortieren.**

$$\omega_{p1} = \tfrac{1}{T_{p1}} = \omega_{p2} = \tfrac{1}{T_{p2}} = 2\,\text{rad/s}$$

3. **Startpunkt des Amplitudengangs festlegen.** Setze $\omega_{\min} = \omega_p = 2$.

$$F_{\text{dB}}(\omega_{\min}) = 20\log_{10}\bigl(|K_0\,\underline{F}^*_{\text{ges}}(0)|\,\omega^r_{\min}\bigr) = 20\log_{10}(1) = 0\,\text{dB}.$$

Ankerpunkt: $0\,\text{dB}$ bei $\omega = 2$.

4. **Verlauf links vom Startpunkt zeichnen.** Für $\omega < 2$: Anfangssteigung $r \cdot 20 = 0\,\text{dB/dec} \Rightarrow$ horizontale Asymptote bei $0\,\text{dB}$.

5. **Steigungswechsel an der Eckfrequenz eintragen.** Ab $\omega = 2$: zwei einfache Pole (RHP & LHP) $\Rightarrow$ zusätzliche $-40\,\text{dB/dec}$. Netto:

$$\begin{cases} 0\,\text{dB}, & \omega < 2, \\ -40\log_{10}(\omega/2), & \omega \geq 2. \end{cases}$$

6. **Eckabrundung korrekt berücksichtigen.** Am Knick $\omega = 2$: Summe zweier $-3\,\text{dB} \Rightarrow -6\,\text{dB}$ unter der Geraden:

$$|H(j2)|_{\text{dB}} \approx -6\,\text{dB}.$$

(Dies gilt hier trotz RHP/LHP-Mischung, da es um den *Betrag* geht.)

7. **Phasenstartwert festlegen.** Da $K_0\,\underline{F}^*_{\text{ges}}(0) < 0$ und $r = 0$,

$$\varphi(0) = -180^\circ + r \cdot 90^\circ = -180^\circ.$$

8. **Phasenänderung durch die Polglieder (Überlappung/Kompensation).** Ein LHP-Pol trägt -90° über seine Übergangsdekade $[0.2, 20]$ bei, ein RHP-Pol gleicher Lage trägt $+90^\circ$ über $[0.2, 20]$ bei. Diese Beiträge überlappen vollständig und kompensieren sich zu 0°; daher bleibt die Phase für alle ω konstant bei -180° (der durch $K_0 < 0$ vorgegebene Offset).

9. **Grenzwerte und Konsistenz prüfen.** DC: $|H(0)| = 1 \Rightarrow 0\,\text{dB}$, $\varphi(0) = -180^\circ$. HF: $|H(j\omega)| = \frac{4}{\omega^2+4} \sim \frac{4}{\omega^2} \Rightarrow -40\log_{10}(\omega/2)\,\text{dB}$, $\varphi(\infty) = -180^\circ$.

Stückweise Näherungen (für die Skizze)

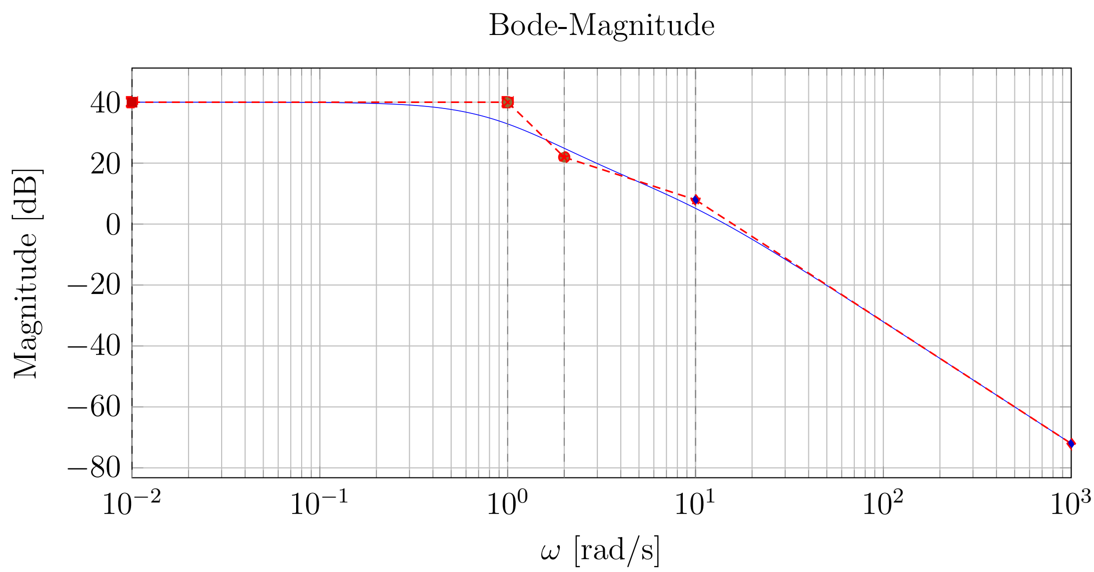
$$|H(j\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx \begin{cases} 0, & \omega \ll 2, \\ -6, & \omega = 2, \\ -40\log_{10}(\omega/2), & \omega \gg 2, \end{cases}$$

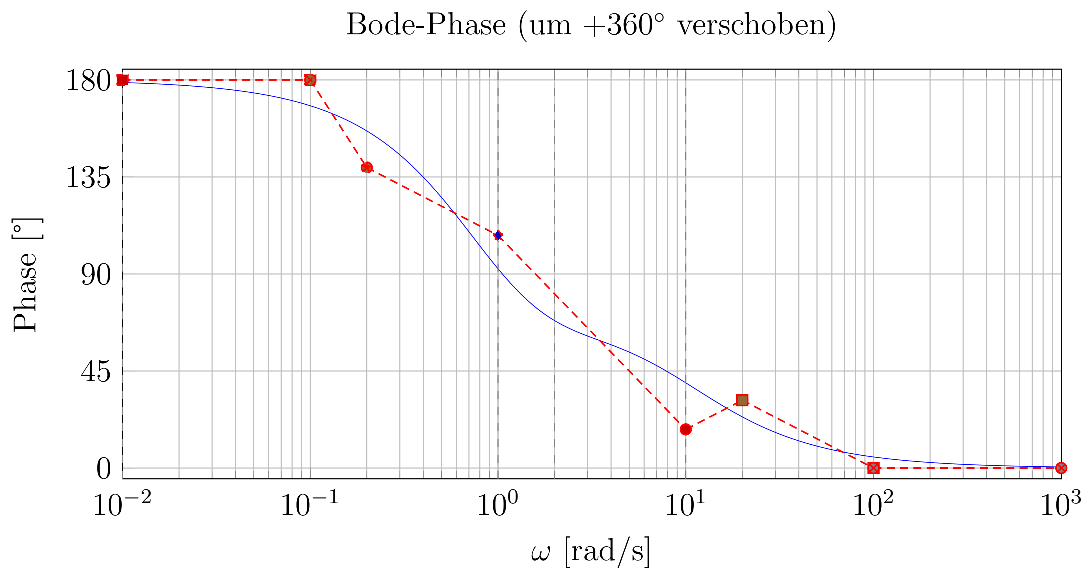
$$\varphi(\omega) \approx \begin{cases} -180^\circ, & \text{für alle } \omega. \end{cases}$$

Aufgabe T)

$$H(s) = \frac{-1000\,(s+2)^2}{4\,(s+1)^3\,(s+10)} = -250\,\frac{(s+2)^2}{(s+1)^3\,(s+10)}\,.$$

T.1 Bode-Diagramm





T.2 Erklärung

1. Normalform herstellen.

$$H(s) = -250\,\frac{(1+sT_z)^2}{(1+sT_{p1})^3\,(1+sT_{p2})}, \quad T_z = \tfrac{1}{2},\ T_{p1} = 1,\ T_{p2} = \tfrac{1}{10}.$$

Konstanten:

$$K_0 = -250, \quad r = 0.$$

Einzelteile der Übertragungsfunktion: Doppelnullstelle (LHP) bei $\omega_z = 2$, Dreifachpol (LHP) bei $\omega_{p1} = 1$, einfacher Pol (LHP) bei $\omega_{p2} = 10$.

2. Eckfrequenzen bestimmen und sortieren.

$$\omega_{p1} = 1 \text{ rad/s} < \omega_z = 2 \text{ rad/s} < \omega_{p2} = 10 \text{ rad/s}.$$

3. Startpunkt des Amplitudengangs festlegen (Geradennäherung). Setze $\omega_{\min} = \omega_{p1} = 1$.

$$F_{\mathrm{dB}}(\omega_{\min}) = 20\log_{10}\bigl(|K_0\,\underline{F}^*_{ges}(0)|\,\omega^r_{\min}\bigr) = 20\log_{10}(250/2.5) = 40\,\mathrm{dB}.$$

Ankerpunkt: 40 dB bei $\omega = 1$.

4. Verlauf links vom Startpunkt zeichnen. Für $\omega < 1$: Anfangssteigung $r \cdot 20 = 0\,\mathrm{dB/dec} \Rightarrow$ horizontale Asymptote bei 40 dB.

5. Steigungswechsel an den Eckfrequenzen eintragen. Ab $\omega = 1$: $3 \cdot (-20\,\mathrm{dB/dec}) = -60\,\mathrm{dB/dec}$ (Tripelpol).
Ab $\omega = 2$ kommt zusätzlich hinzu: $2 \cdot 20\,\mathrm{dB/dec} = +40\,\mathrm{dB/dec}$ (Doppelnull) $\Rightarrow$ netto $-20\,\mathrm{dB/dec}$ in $[2, 10]$.
Ab $\omega = 10$: $-20\,\mathrm{dB/dec}$ (Pol) $\Rightarrow$ netto $-40\,\mathrm{dB/dec}$ für $\omega \gg 10$. Geradennäherung:

$$|H(j\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx \begin{cases} 40, & \omega < 1, \\ 40 - 60\log_{10}\omega, & 1 \le \omega < 2, \\ 40 - 60\log_{10}2 - 20\log_{10}(\omega/2), & 2 \le \omega < 10, \\ 40 - 60\log_{10}2 - 20\log_{10}5 - 40\log_{10}(\omega/10), & \omega \ge 10. \end{cases}$$

6. Eckabrundungen korrekt berücksichtigen. $\omega = 1$ (Tripelpol): $-3 \cdot 3\,\mathrm{dB} = -9\,\mathrm{dB}$ unter der Geradennäherung.
$\omega = 2$ (Doppelnull): $+2 \cdot 3\,\mathrm{dB} = +6\,\mathrm{dB}$ über der Geradennäherung.
$\omega = 10$ (einfacher Pol): $-3\,\mathrm{dB}$ unter der Geradennäherung.

7. **Phasenstartwert festlegen.** Da $K_0\,\underline{F}^*_{ges}(0) < 0$ und $r = 0$,

$$\varphi(0) = -180^\circ + r \cdot 90^\circ = -180^\circ$$

(Plot um $+360^\circ$ verschoben $\Rightarrow$ Start bei $+180^\circ$).

8. **Phasenänderung durch Nullstellen und Pole eintragen.** Die Phasenlage ergibt sich als Summe der Beiträge aller Glieder und verläuft über die jeweiligen Übergangsdekaden additiv. Zunächst setzt der *Tripelpol* bei $\omega = 1$ ein: er liefert insgesamt -270° verteilt über die Dekade $[0.1, 10]$, d. h. in seiner aktiven Zone fällt die Phase mit einer Steigung von -135°/dec (pro einfachem Pol -45°/dec). Bei $\omega = 2$ beginnt zusätzlich die *Doppelnullstelle* zu wirken, die über $[0.2, 20]$ in Summe $+180^\circ$ beisteuert, also $+90^\circ$/dec in ihrer Übergangszone. Schließlich senkt der *einfache Pol* bei $\omega = 10$ die Phase über $[1, 100]$ um weitere -90° (Steigung -90°/dec in seiner aktiven Dekade).

   Überlappung/Addierung: In den überlappenden Bereichen addieren sich die Steigungen: Zwischen $[0.2, 1]$ wirken Tripelpol (-135°/dec) und Doppelnull ($+90^\circ$/dec) gleichzeitig, sodass netto -45°/dec entsteht. Im Intervall $[2, 10]$ überlagern sich Tripelpol (-270° gesamt) und Doppelnull ($+180^\circ$ gesamt); die resultierende Steigung ist dort netto -90°/dec. Sobald ab $\omega = 10$ der zusätzliche Pol aktiv wird, bleibt die Null über $[10, 20]$ noch wirksam: $+90^\circ$/dec (Null) und -90°/dec (neuer Pol) heben sich auf, sodass netto $+90^\circ$/dec in $[10, 20]$ resultiert.

9. **Grenzwerte und Konsistenz prüfen.** DC: $|H(0)| = |-250 \cdot 4/(1^3 \cdot 10)| = 100 \Rightarrow 40\,\mathrm{dB}$; $\varphi(0) = -180^\circ$ (gezeigt als $+180^\circ$).
   HF: $|H(j\omega)| \sim 250\,\frac{\omega^2}{\omega^4} = 250/\omega^2 \Rightarrow -40\log_{10}(\omega/10) - 20\log_{10} 5\,\mathrm{dB}$; $\varphi(\infty) = 0^\circ$ (mod 360°).

Stückweise Näherungen (für die Skizze)

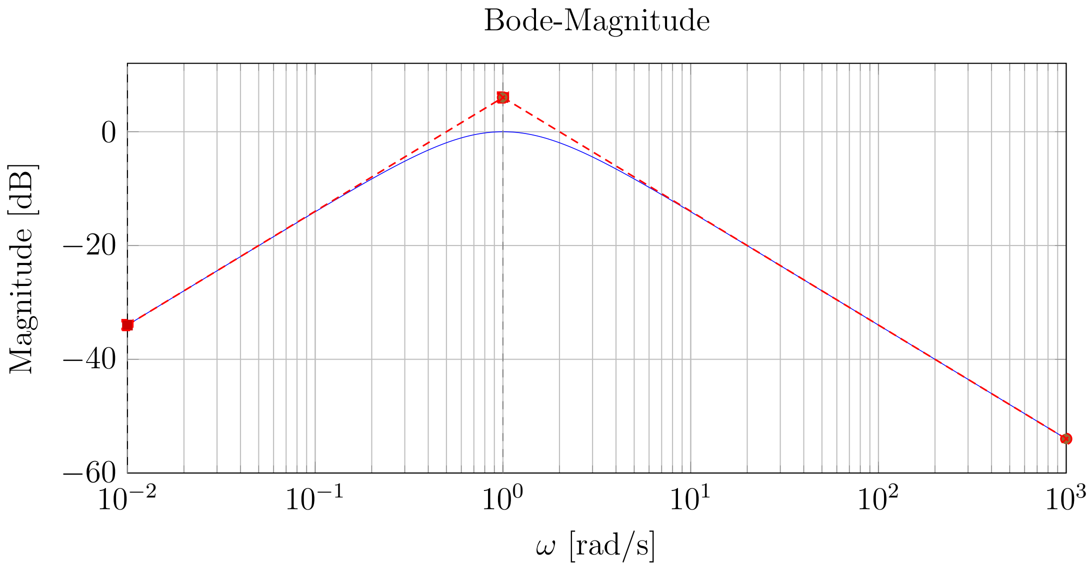
$$|H(j\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx \begin{cases} 40, & \omega \ll 1, \\ 40 - 60\log_{10}\omega, & 1 \ll \omega \ll 2, \\ 40 - 60\log_{10} 2 - 20\log_{10}(\omega/2), & 2 \ll \omega \ll 10, \\ 40 - 60\log_{10} 2 - 20\log_{10} 5 - 40\log_{10}(\omega/10), & \omega \gg 10, \end{cases}$$

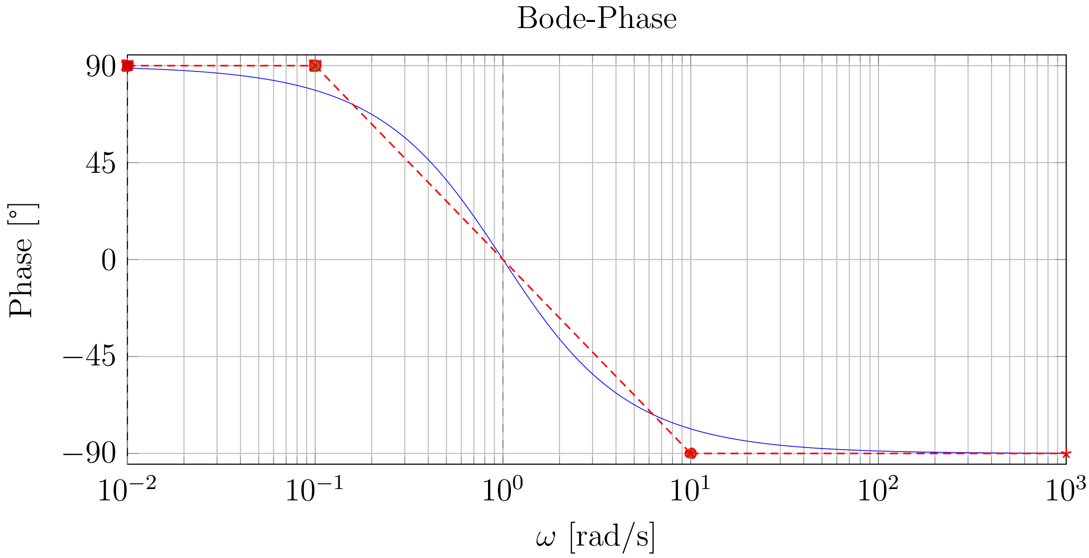
$$\varphi(\omega) \approx \begin{cases} 180^\circ, & \omega \leq 0.1, \\ 180^\circ - 135^\circ \log_{10}(\omega/0.1), & 0.1 < \omega < 0.2, \\ 180^\circ - 135^\circ \log_{10} 2 - 45^\circ \log_{10}(\omega/0.2), & 0.2 < \omega < 1, \\ 135^\circ - 90^\circ \log_{10}(\omega/2), & 2 < \omega < 10, \\ 135^\circ - 90^\circ \log_{10} 5 + 90^\circ \log_{10}(\omega/10), & 10 < \omega < 20, \\ 0^\circ - 90^\circ \log_{10}(\omega/20), & 20 < \omega < 100, \\ 0^\circ, & \omega \geq 100. \end{cases}$$

Aufgabe U)

$$H(s) = \frac{2\,s}{s^2 + 2s + 1} = \frac{2\,s}{(s+1)^2}\,.$$

U.1 Bode-Diagramm





U.2 Erklärung

1. Normalform herstellen.

$$H(s) = \frac{2s}{(s+1)^2} = K_0 \cdot s^r \cdot \frac{1}{(1+sT_p)^2}$$

mit

$K_0 = 2, \quad r = 1$ (Nullstelle im Ursprung), $\quad T_p = 1$ (Doppelpol bei $\omega_p = 1$).

Teilglieder: $\underline{F}_1(s) = \frac{1}{(1+s)^2}$ (reelles Polglied 2. Ordnung).

2. Eckfrequenz bestimmen und sortieren.

$$\omega_p = \frac{1}{T_p} = 1\,\text{rad/s}.$$

Nur diese Eckfrequenz; Sortierung trivial.

3. Startpunkt des Amplitudengangs festlegen (Geradennäherung). Setze $\omega_{\min} = \omega_p = 1$. Skript-Regel:

$$F_{\text{dB}}(\omega_{\min}) = 20\log_{10}\big(|K_0\,\underline{F}^*_{ges}(0)|\cdot\omega^r_{\min}\big) = 20\log_{10}(2\cdot1\cdot1) = 20\log_{10}2 \approx +6\,\text{dB}.$$

Ankerpunkt der Geraden: $+6$ dB bei $\omega = 1$.

4. Verlauf links vom Startpunkt zeichnen. Für $\omega < 1$ gilt Anfangssteigung $r \cdot 20$ dB/dec $= +20$ dB/dec (Nullstelle im Ursprung). Zeichne links vom Ankerpunkt eine Gerade mit $+20$ dB/dec.

5. Steigungswechsel an der Eckfrequenz eintragen. Doppelpol bei $\omega = 1$ bewirkt -40 dB/dec ab $\omega = 1$. Netto-Steigung:

$$\begin{cases} +20\,\text{dB/dec}, & \omega < 1, \\ -20\,\text{dB/dec}, & \omega > 1 \end{cases}$$

(d. h. zwischen 1 und ∞ fällt die Gerade mit -20 dB/dec).

6. Eckabrundung korrekt berücksichtigen. Am Knick eines Doppelpols: -6 dB unter der Geradennäherung.

$$|H(\text{j}1)|_{\text{dB}} \approx \underbrace{20\log_{10}2}_{\approx+6} - 6 = 0\,\text{dB}.$$

7. Phasenstartwert festlegen. Regel mit Vorzeichen und Ursprungsnull:

$$K_0\,\underline{F}^*_{ges}(0) > 0, \quad r = 1 \;\Rightarrow\; \varphi(0) = r \cdot 90^\circ = 1 \cdot 90^\circ = +90^\circ.$$

8. Phasenänderung durch Nullstelle und Doppelpol eintragen. Die Nullstelle im Ursprung liefert einen *konstanten* Offset von $+90^\circ$. Der Doppelpol bewirkt -180° über die zwei Dekaden $[0.1, 10]$ (je Pol -90°). **Überlappung/Addierung:** In der Übergangszone $[0.1, 10]$ wirken beide Polbeiträge gleichzeitig und addieren ihre Steigungen (insgesamt -90°/dec). Der Offset $+90^\circ$ der Ursprungsnull bleibt währenddessen konstant. Damit fällt die Phase von $+90^\circ$ (für $\omega \ll 0.1$) über 0° (bei $\omega \approx 1$) weiter auf -90° (für $\omega \gg 10$). Näherung:

$$\varphi(\omega) \approx \begin{cases} +90^\circ, & \omega \le 0.1, \\ \;0^\circ - 90^\circ \log_{10}\omega, & 0.1 < \omega < 10, \\ -90^\circ, & \omega \ge 10. \end{cases}$$

9. Grenzwerte und Konsistenz prüfen. DC: $|H(0)| = 0 \Rightarrow -\infty\,\text{dB}$, $\varphi(0) = +90^\circ$. HF: $|H(\text{j}\omega)| \sim 2/\omega \Rightarrow 20\log_{10}2 - 20\log_{10}\omega\,\text{dB}$, $\varphi(\infty) = (r-2)\cdot 90^\circ = (1-2)\cdot 90^\circ = -90^\circ$ (Pol-/Nullzählung konsistent).

Stückweise Näherungen (für die Skizze)

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} \approx \begin{cases} 20\log_{10}2 + 20\log_{10}\omega, & \omega \ll 1, \\ \big(20\log_{10}2\big) - 6 = 0, & \omega = 1, \\ 20\log_{10}2 - 20\log_{10}\omega, & \omega \gg 1, \end{cases}$$

$$\varphi(\omega) \approx \begin{cases} +90^\circ, & \omega \le 0.1, \\ 0^\circ - 90^\circ \log_{10}\omega, & 0.1 < \omega < 10, \\ -90^\circ, & \omega \ge 10. \end{cases}$$