



Eidgenössische Technische Hochschule Zürich  
Swiss Federal Institute of Technology Zurich



Laboratory for High  
Power Electronic Systems

# Netzwerke und Schaltungen II, D-ITET

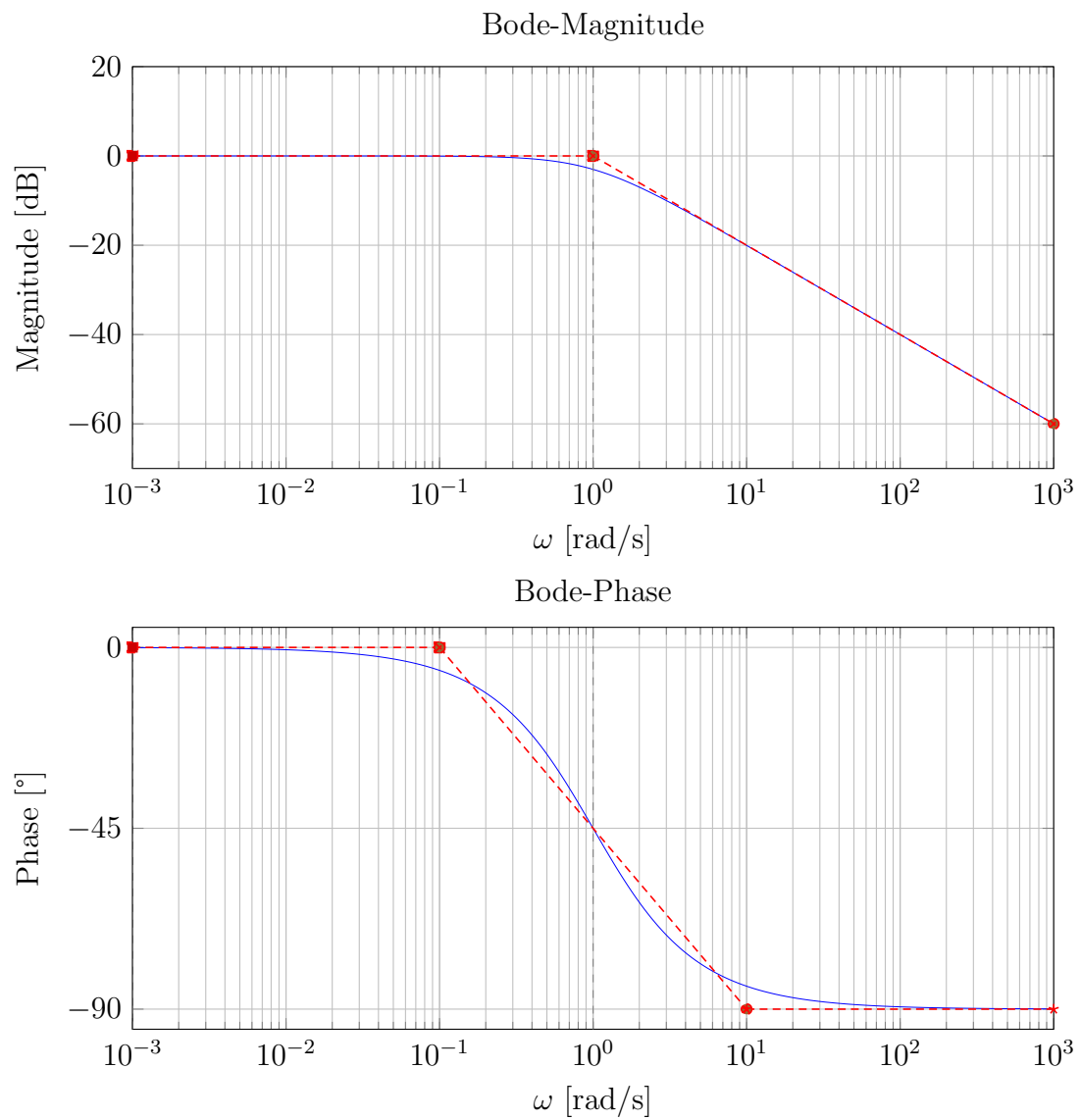
## Bodeplots — Musterlösung

Version: October 20, 2025

## Aufgabe A)

$$H(s) = \frac{1}{s+1}.$$

### A.1 Bode-Diagramm



## A.2 Erklärung

**Schritt 1** DC-Faktor = 1: für  $\omega \ll 1$  ist  $|H(j\omega)| \approx 1$ ; Betrag liegt bei 0 dB ohne Anfangssteigung, Phase  $\approx 0^\circ$ .

**Schritt 2** Einfacher Pol bei  $\omega_p = 1$  rad/s: ab  $\omega = 1$  ändert die Magnitudensteigung um  $-20$  dB/dec; bei  $\omega = 1$  liegt die exakte Dämpfung bei  $-10 \log_{10} 2 \approx -3.01$  dB.

**Schritt 3** Grenzverhalten: für  $\omega \gg 1$  folgt  $|H(j\omega)|_{\text{dB}} \approx -20 \log_{10} \omega$ ; die Phase fällt in der Übergangsdekade  $\omega_l = 0.1$  rad/s bis  $\omega_h = 10$  rad/s von  $0^\circ$  auf  $-90^\circ$  (lineare Näherung:  $-45^\circ - 45 \log_{10} \omega$  bei  $\omega \in [0.1, 10]$ ), mit  $\angle H(j\omega) = -45^\circ$  bei  $\omega = 1$ .

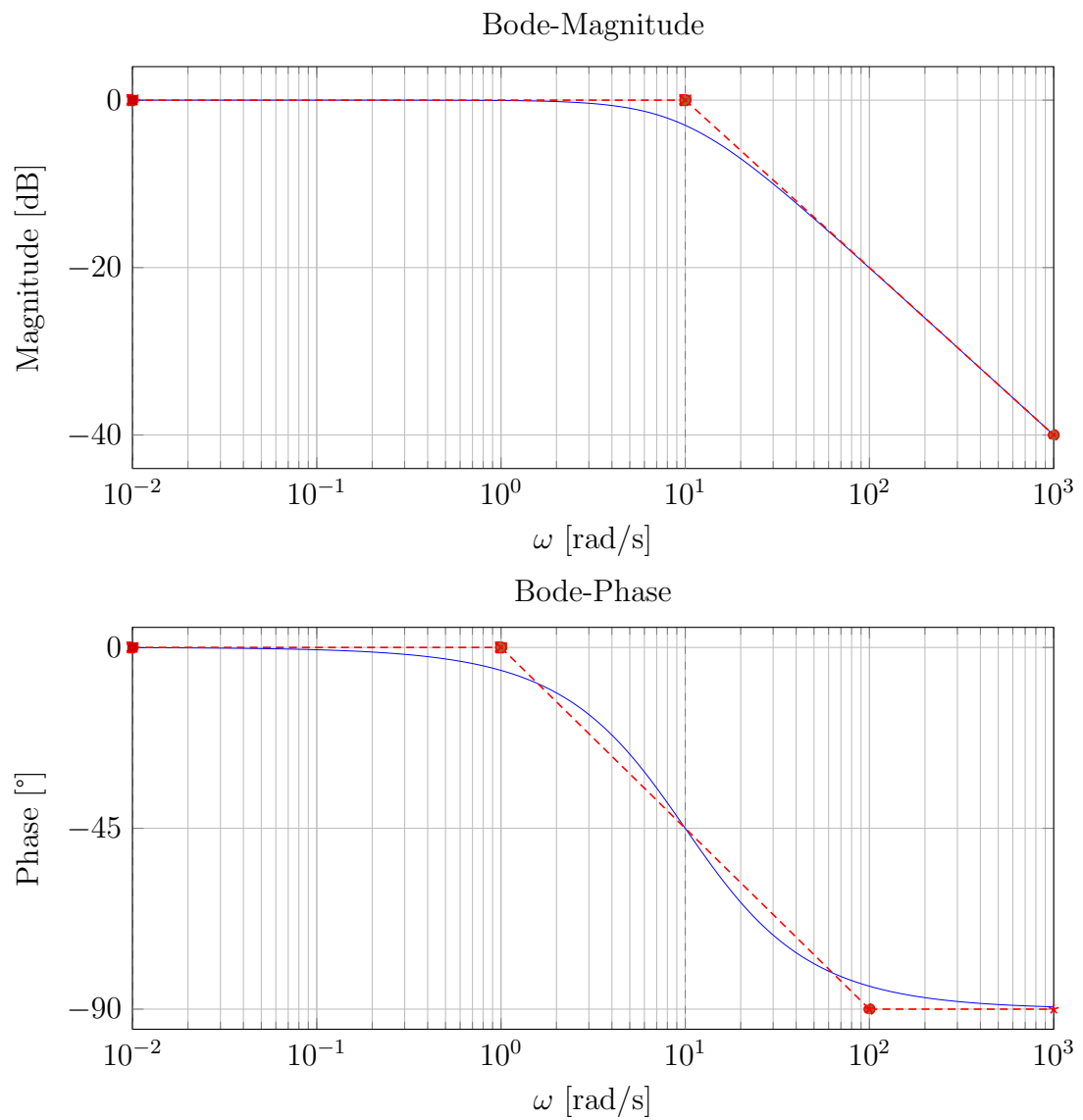
### Stückweise Näherung

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} \approx \begin{cases} 0, & \omega \ll 1, \\ -10 \log_{10} 2, & \omega = 1, \\ -20 \log_{10} \omega, & \omega \gg 1, \end{cases}$$

## Aufgabe B)

$$H(s) = \frac{10}{s + 10}.$$

### B.1 Bode-Diagramm



## B.2 Erklärung

**Schritt 1** DC-Faktor 1:  $H(s) = \frac{10}{s+10} = \frac{1}{1+s/10}$ , daher für  $\omega \ll 10$  gilt  $|H(j\omega)| \approx 1$ ; Betrag liegt bei 0 dB ohne Anfangssteigung, Phase  $\approx 0^\circ$ .

**Schritt 2** Einfacher Pol bei  $\omega_p = 10$  rad/s: ab  $\omega = 10$  wechselt die Magnitudensteigung um  $-20$  dB/dec; die exakte Dämpfung am Eckpunkt beträgt  $-10 \log_{10} 2 \approx -3.01$  dB. Die Phasenübergangsdekade liegt zwischen  $\omega_l = 1$  und  $\omega_h = 100$  rad/s.

**Schritt 3** Grenzverhalten: für  $\omega \gg 10$  folgt  $|H(j\omega)|_{\text{dB}} \approx -20 \log_{10}(\omega/10)$ ; die Phase fällt in der Übergangsdekade linearisiert von  $0^\circ$  nach  $-90^\circ$  (Näherung:  $-45^\circ - 45 \log_{10}(\omega/10)$ ), mit  $\angle H(j\omega) = -45^\circ$  bei  $\omega = 10$ .

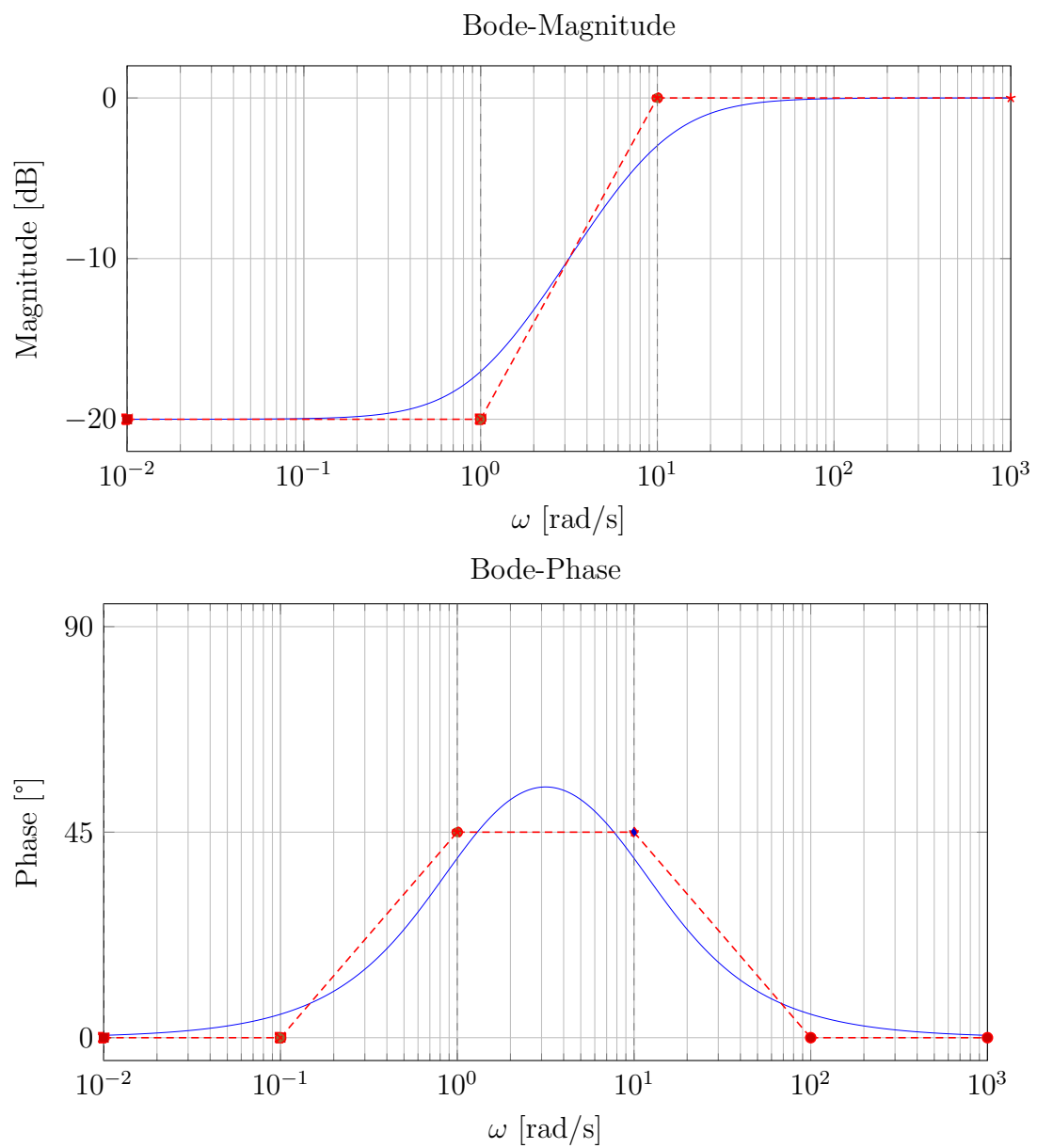
### Stückweise Näherung

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} \approx \begin{cases} 0, & \omega \ll 10, \\ -10 \log_{10} 2, & \omega = 10, \\ -20 \log_{10}(\omega/10), & \omega \gg 10, \end{cases}$$

## Aufgabe C)

$$H(s) = \frac{s+1}{s+10}.$$

### C.1 Bode-Diagramm



## C.2 Erklärung

**Schritt 1** DC-Faktor  $\frac{1}{10}$ :  $H(s) = \frac{s+1}{s+10} = \frac{1+s}{10(1+s/10)}$ . Für  $\omega \ll 1$  dominiert der DC-Anteil:  $|H(j\omega)| \approx \frac{1}{10}$ , daher Betrag  $-20$  dB ohne Startsteigung; Startphase  $\approx 0^\circ$ .

**Schritt 2** Nullstelle bei  $\omega_z = 1$  rad/s: ab  $\omega = 1$  steigt die Magnitude mit  $+20$  dB/dec; zwischen  $\omega_l = 0.1$  und  $\omega_h = 10$  wächst die Phasenbeitrag der Nullstelle näherungsweise linear von  $0^\circ$  auf  $+90^\circ$  (Geradennäherung:  $+45^\circ + 45 \log_{10} \omega$  in  $[0.1, 10]$ ), sodass bei  $\omega = 1$  etwa  $+45^\circ$  erreicht werden.

**Schritt 3** Pol bei  $\omega_p = 10$  rad/s: ab  $\omega = 10$  kommt ein Steigungswechsel von  $-20$  dB/dec hinzu; dadurch wird die Gesamtslope wieder  $0$  dB/dec und der Betrag konvergiert gegen  $0$  dB für  $\omega \gg 10$ . Der Pol führt in  $[1, 100]$  zu einer Phasenabnahme um  $90^\circ$  (Geradennäherung:  $+45^\circ - 45 \log_{10}(\omega/10)$ ), sodass die Gesamtphase für  $\omega \gg 100$  wieder gegen  $0^\circ$  fällt. Das Zwischenband  $1 \leq \omega \leq 10$  ist somit nahezu phasenflach bei  $\approx +45^\circ$  und weist eine Betrags-Slope von  $+20$  dB/dec auf.

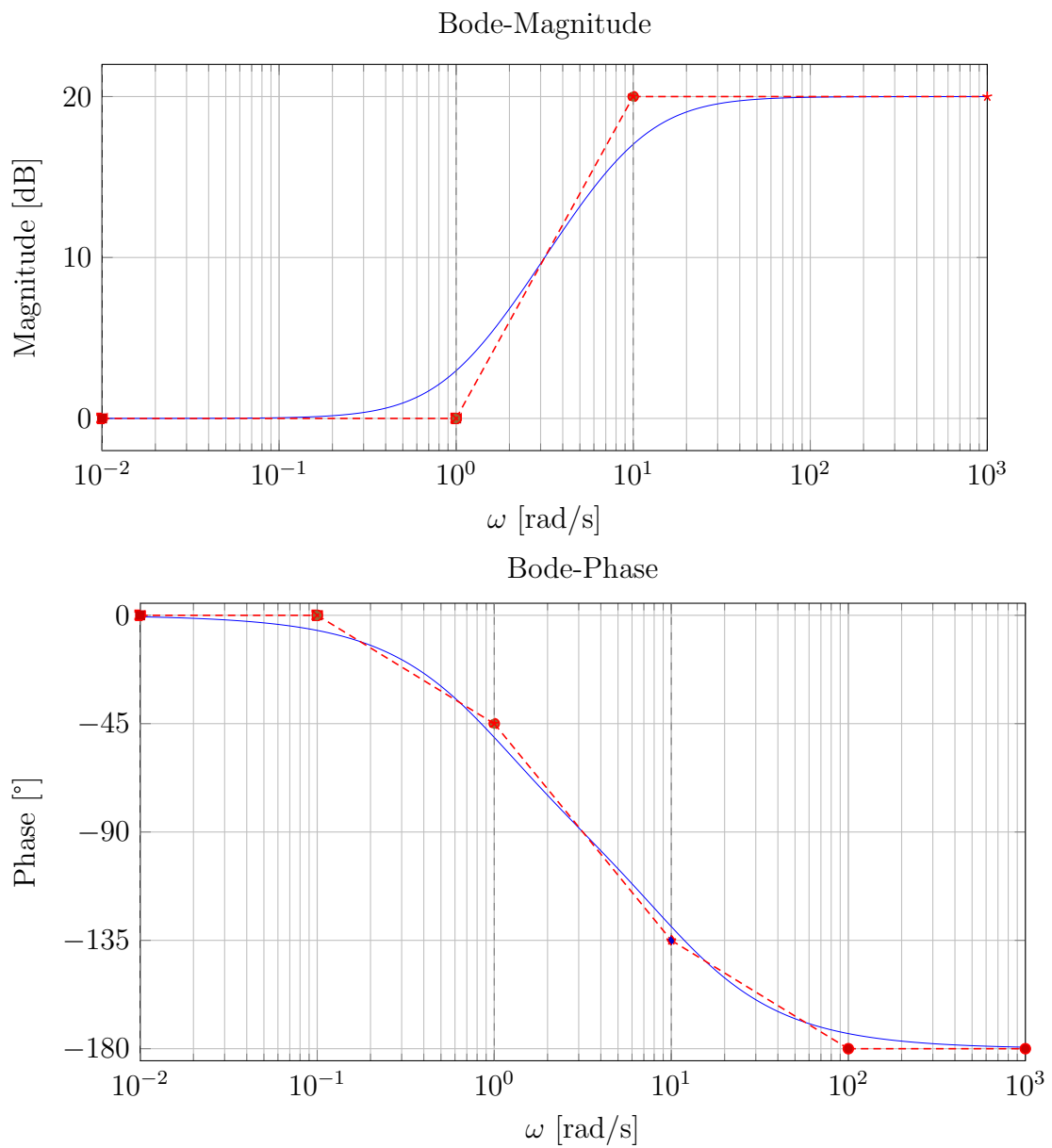
### Stückweise Näherung

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} \approx \begin{cases} -20, & \omega \ll 1, \\ -20 + 20 \log_{10} \omega, & 1 \ll \omega \ll 10, \\ 0, & \omega \gg 10, \end{cases}$$

## Aufgabe D)

$$H(s) = \frac{10(1-s)}{s+10}.$$

### D.1 Bode-Diagramm





## D.2 Erklärung

**Schritt 1** DC-Faktor 1:  $H(0) = 1 \Rightarrow |H|_{\text{DC}} = 0 \text{ dB}$  ohne Anfangssteigung; Phase  $\approx 0^\circ$ .

**Schritt 2** Nullstelle bei  $\omega_z = 1 \text{ rad/s}$  in der rechten Halbebene  $\Rightarrow$  ab  $\omega = 1$  Anstieg um  $+20 \text{ dB/dec}$ . Übergang  $0^\circ \rightarrow -90^\circ$  über  $\omega \in [0.1, 10]$ ; Geradennäherung  $-45^\circ - 45 \log_{10} \omega$  liefert  $\angle H(1) \approx -45^\circ$ . Exakt liegt die Magnitude bei  $\omega = 1$  bei  $20 + 10 \log_{10} 2 - 10 \log_{10} 101 \approx +3 \text{ dB}$ .

**Schritt 3** Pol bei  $\omega_p = 10 \text{ rad/s}$ : ab  $\omega = 10$  Steigungswechsel um  $-20 \text{ dB/dec}$ ; für  $\omega \gg 10$  ergibt sich konstanter Betrag  $\approx +20 \text{ dB}$ . Phasenabfall des Pols um weitere  $90^\circ$  über  $\omega \in [1, 100]$ ; Geradennäherung  $-45^\circ - 45 \log_{10}(\omega/10)$ . Zusammengesetzt: Phase  $\approx 0^\circ$  für  $\omega \ll 0.1$ ,  $\approx -45^\circ$  um  $\omega \approx 1$ ,  $\approx -135^\circ$  um  $\omega \approx 10$  und  $\approx -180^\circ$  für  $\omega \gg 100$ .

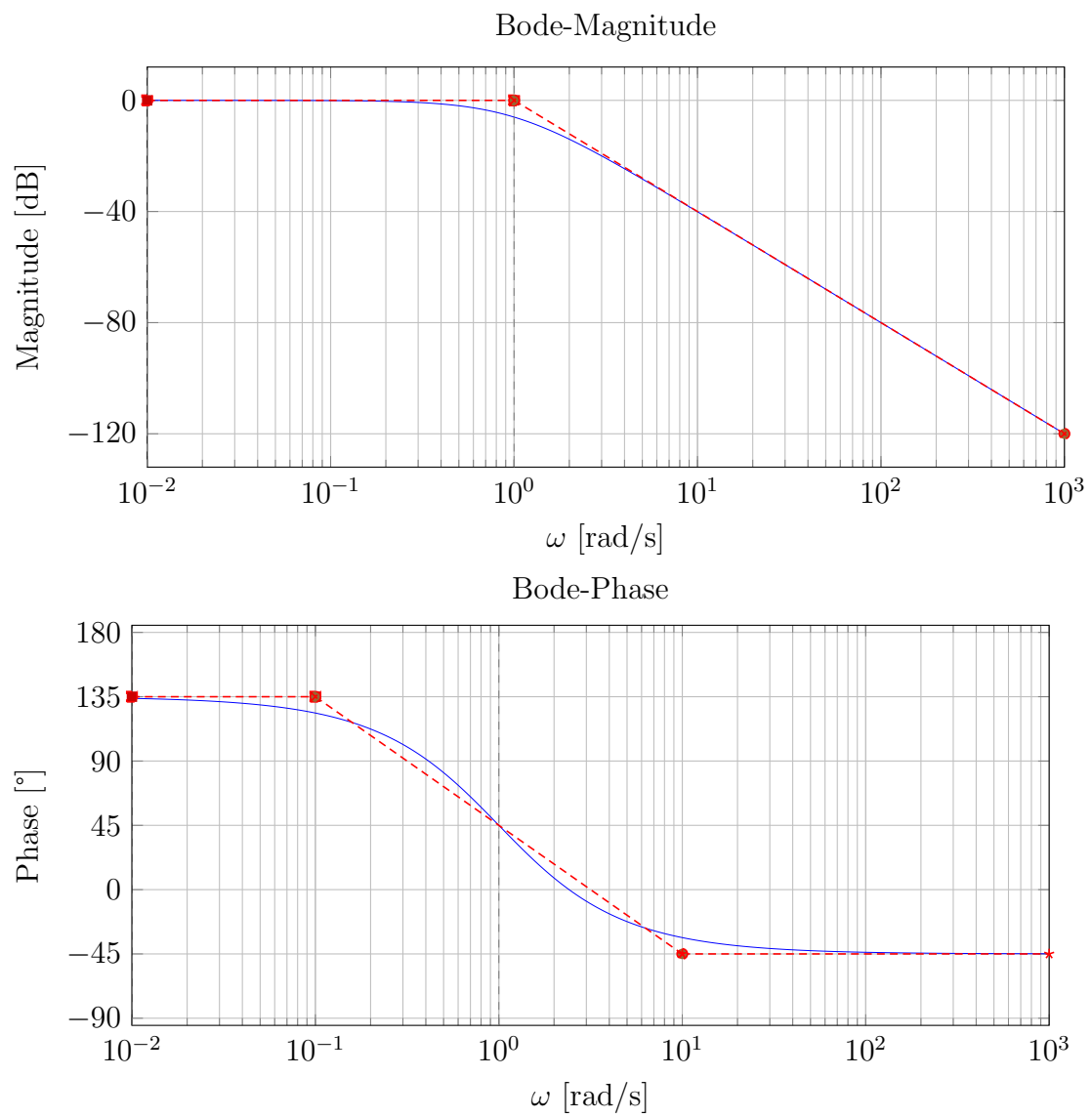
### Stückweise Näherung

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} \approx \begin{cases} 0, & \omega \ll 1, \\ 20 \log_{10} \omega, & 1 \ll \omega \ll 10, \\ 20, & \omega \gg 10, \end{cases}$$

## Aufgabe E)

$$H(s) = \frac{-1 + j}{\sqrt{2}(s + 1)^2}.$$

### E.1 Bode-Diagramm



## E.2 Erklärung

**Schritt 1** Konstanter Faktor  $(-1 + j)/\sqrt{2} = e^{j135^\circ}$ : Betrag 1  $\Rightarrow$  Start bei 0 dB ohne Anfangssteigung; die Phase "fängt" bei  $+135^\circ$  an (reiner Phasor, kein Einfluss auf die Magnitude).

**Schritt 2** Doppelpol bei  $\omega_p = 1$  rad/s: ab  $\omega = 1$  sinkt die Magnitude mit  $-40$  dB/dec; am Eckpunkt beträgt die exakte Dämpfung  $-20 \log_{10}(1 + 1) = -20 \log_{10} 2 \approx -6$  dB (Summe aus zwei  $-3.01$  dB). Die Phase der beiden gleichliegenden Pole fällt zusammen in der Übergangsdakade  $\omega \in [0.1, 10]$  insgesamt um  $180^\circ$ ; lineare Geradennäherung:  $135^\circ \rightarrow -45^\circ$  mit  $\varphi_{\text{approx}}(\omega) = 45^\circ - 90^\circ \log_{10} \omega$  für  $\omega \in [0.1, 10]$ .

**Schritt 3** Grenzverhalten: für  $\omega \ll 1$  gilt  $|H(j\omega)|_{\text{dB}} \approx 0$  dB und  $\angle H \approx +135^\circ$  für  $\omega \ll 0.1$ ; für  $\omega \gg 1$  folgt  $|H(j\omega)|_{\text{dB}} \approx -40 \log_{10} \omega$  und die Phase nähert sich  $+135^\circ - 2 \cdot 90^\circ = -45^\circ$  an.

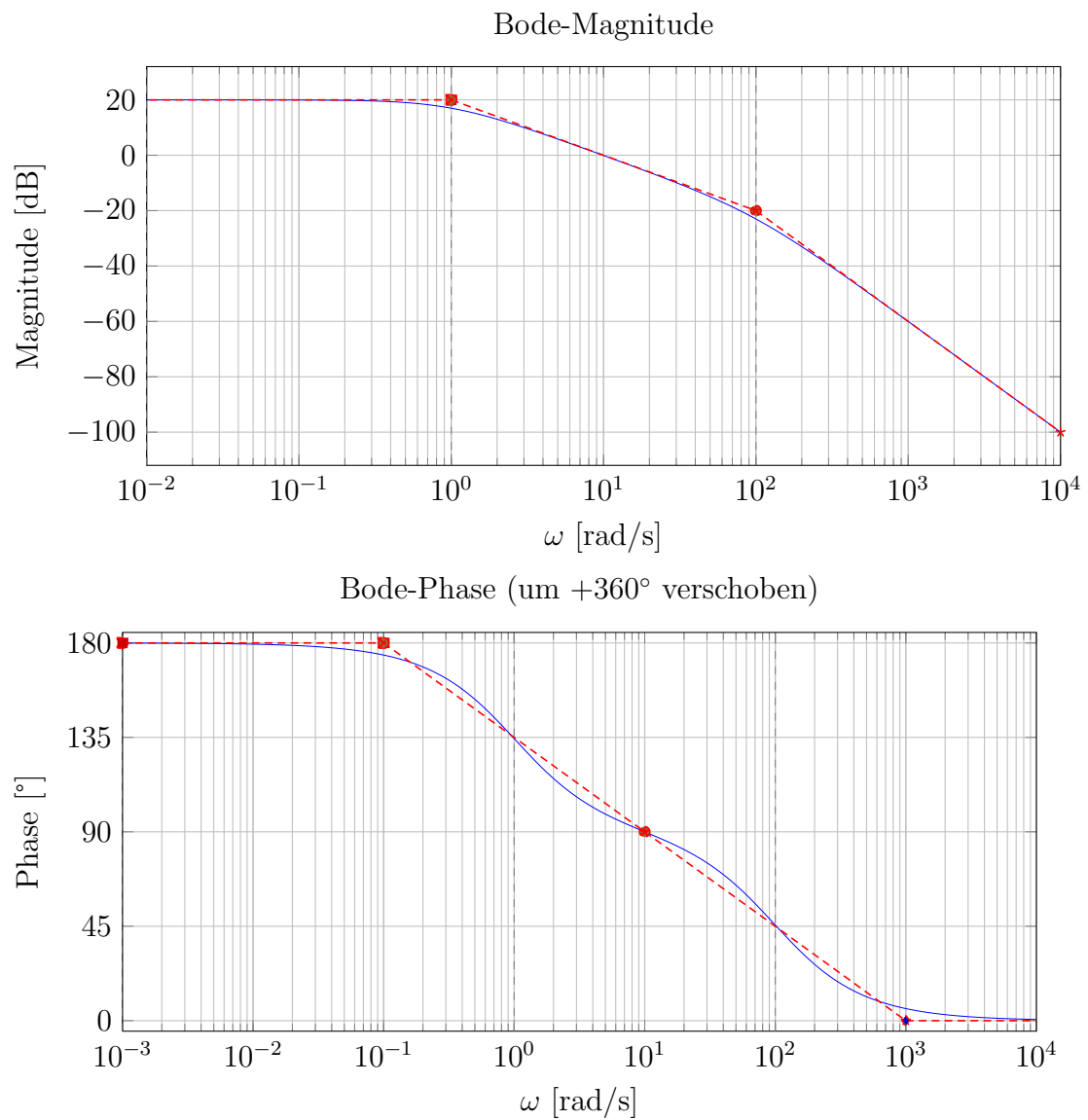
### Stückweise Näherung

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} \approx \begin{cases} 0, & \omega \ll 1, \\ -20 \log_{10} 2, & \omega = 1, \\ -40 \log_{10} \omega, & \omega \gg 1, \end{cases}$$

## Aufgabe F)

$$H(s) = \frac{-1000}{(s+1)(s+100)}.$$

### F.1 Bode-Diagramm



## F.2 Erklärung

**Schritt 1** Konstante und Normierung:  $H(s) = \dots = -10 \frac{1}{(1+s)(1+s/100)}$ .

DC-Wert  $H(0) = -10 \Rightarrow |H|_{\text{DC}} = 20 \text{ dB}$ . Das negative Vorzeichen bewirkt eine konstante Zusatzphase; hier wird die Phase, aus Darstellungsgründen, um  $+360^\circ$  angehoben, sodass sie von  $180^\circ$  (für  $\omega \ll 1$ ) nach  $0^\circ$  (für  $\omega \gg 100$ ) verläuft.

**Schritt 2** Pol bei  $\omega_{p1} = 1 \text{ rad/s}$ : ab  $\omega = 1$  sinkt die Magnitude mit  $-20 \text{ dB/dec}$ .

Exakt: Zusatzdämpfung  $-10 \log_{10} 2 \approx -3 \text{ dB}$ . Phasenanteil (verschoben):

Geradennäherung  $135^\circ - 45^\circ \log_{10} \omega$  über  $[0.1, 10]$  zu  $90^\circ$ .

**Schritt 3** Pol bei  $\omega_{p2} = 100 \text{ rad/s}$ : ab  $\omega = 100$  weitere Steigungsänderung

$-20 \text{ dB/dec} \Rightarrow$  Gesamtslope  $-40 \text{ dB/dec}$  für  $\omega \gg 100$ . Phasenanteil (verschoben):  $45^\circ - 45^\circ \log_{10}(\omega/100)$  über  $[10, 10^5]$ . Grenzwerte:  $|H(j\omega)|_{\text{dB}} \sim -40 \log_{10}(\omega/100) + 20$ ;  $\angle H(j\omega) \rightarrow 0^\circ$  für  $\omega \rightarrow 10^5$ .

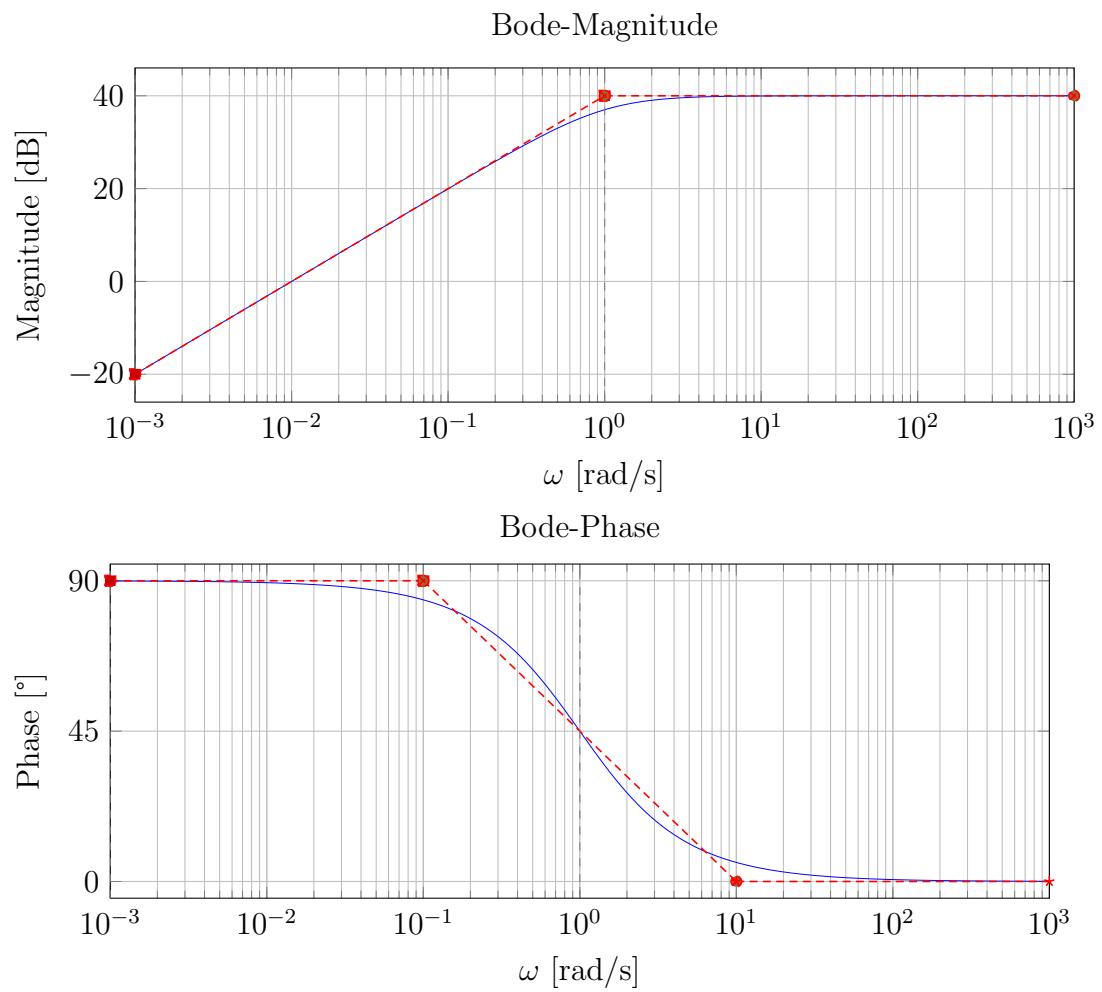
### Stückweise Näherung

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} \approx \begin{cases} 20, & \omega \ll 1, \\ 20 - 10 \log_{10} 2, & \omega = 1, \\ 20 - 20 \log_{10} \omega, & 1 \ll \omega \ll 100, \\ -20 - 10 \log_{10} 2, & \omega = 100, \\ -20 - 40 \log_{10}(\omega/100), & \omega \gg 100, \end{cases}$$

## Aufgabe G)

$$H(s) = \frac{100 s}{s + 1}.$$

### G.1 Bode-Diagramm



## G.2 Erklärung

**Schritt 1** DC-Faktor 100: Betrag global um +40 dB verschoben; die konstante (reell-positive) Verstärkung ändert die Steigung nicht und fügt keine zusätzliche Phase hinzu. Referenzniveau der Geradennäherung damit bei 40 dB.

**Schritt 2** Nullstelle im Ursprung: Startsteigung +20 dB/dec für  $\omega \ll 1$ , da  $|H(j\omega)| \sim 100\omega$ ; Startphase  $\approx +90^\circ$  (idealer Integrator). In der Magnituden-Näherung ergibt sich links der Ecke die Gerade  $40 + 20 \log_{10} \omega$ .

**Schritt 3** Pol bei  $\omega_p = 1$  rad/s: ab  $\omega = 1$  Steigungswechsel um  $-20$  dB/dec; resultierend flacht die Magnitude auf 0 dB/dec ab und nähert sich für  $\omega \gg 1$  dem konstanten Niveau  $\approx 40$  dB. Exakter Eckpunkt:  $40 - 10 \log_{10} 2 \approx 37$  dB. Die Phase fällt über die Übergangsdekade  $\omega_l = 0.1$  bis  $\omega_h = 10$  rad/s von  $\approx +90^\circ$  gegen  $0^\circ$  (Geradennäherung:  $45^\circ - 45^\circ \log_{10} \omega$  in  $[0.1, 10]$ ).

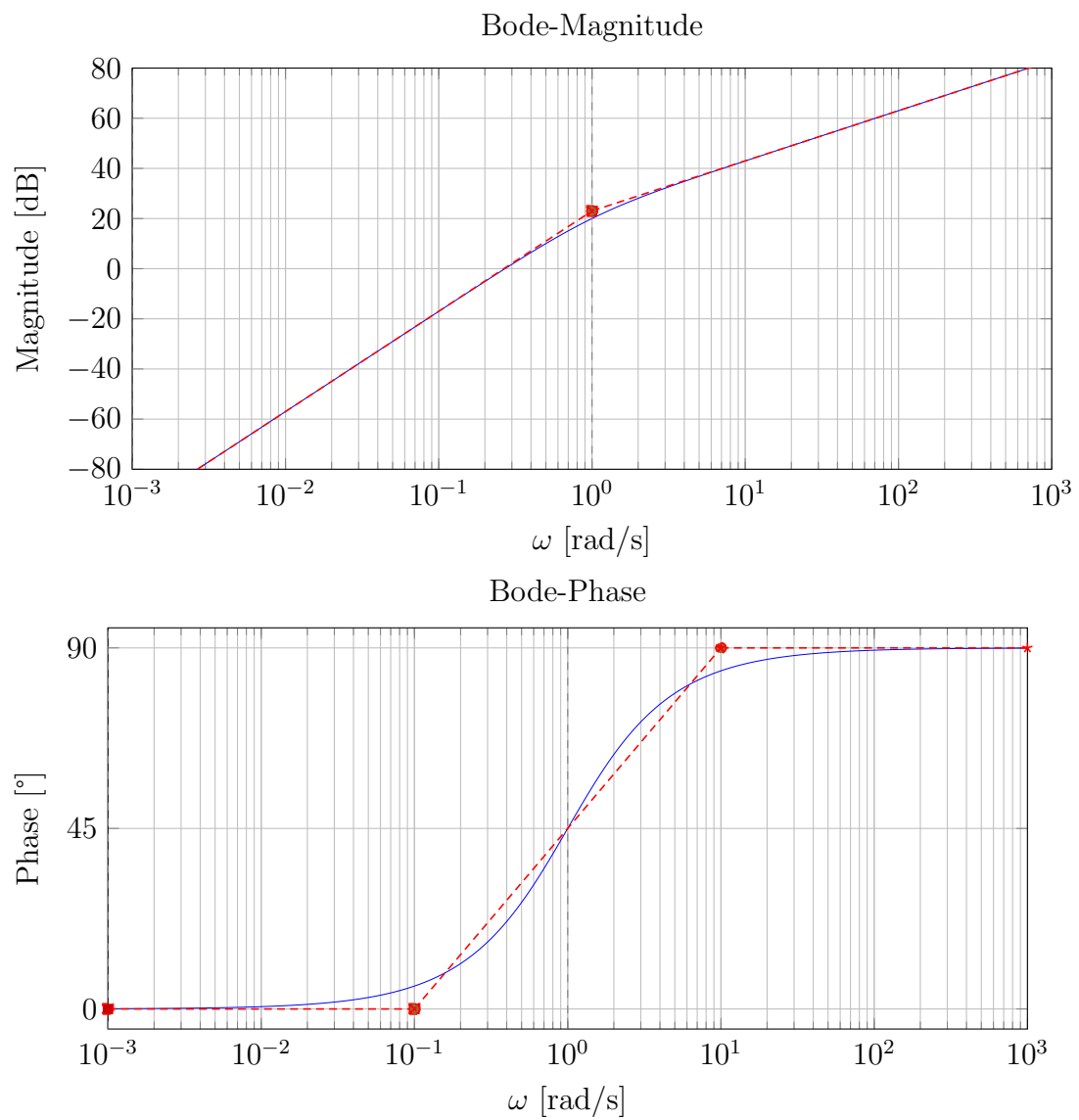
### Stückweise Näherung

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} \approx \begin{cases} 40 + 20 \log_{10} \omega, & \omega \ll 1, \\ 40 - 10 \log_{10} 2, & \omega = 1, \\ 40, & \omega \gg 1, \end{cases}$$

## Aufgabe H)

$$H(s) = \frac{10\sqrt{2} s^2}{s - 1}.$$

### H.1 Bode-Diagramm





## H.2 Erklärung

**Schritt 1** Doppelnulstelle im Ursprung: Startsteigung  $+40 \text{ dB/dec}$ ; Startphase  $0^\circ$ .

**Schritt 2** RHP-Pol bei  $\omega_p = 1 \text{ rad/s}$ : ab  $\omega = 1$  Steigungsänderung  $-20 \text{ dB/dec}$ ; Netto  $+20 \text{ dB/dec}$  für  $\omega \gg 1$ . Phasen-Geradennäherung in  $45^\circ$ -Schritten:  $0^\circ$  für  $\omega \leq 0.1$ ,  $45^\circ + 45 \log_{10} \omega$  in  $[0.1, 10]$ ,  $90^\circ$  für  $\omega \geq 10$ .

**Schritt 3** Grenzwerte:  $|H|_{\text{dB}} \approx 20 + 10 \log_{10} 2 + 40 \log_{10} \omega$  für  $\omega \ll 1$ , und  $20 + 10 \log_{10} 2 + 20 \log_{10} \omega$  für  $\omega \gg 1$ ;  $\angle H \rightarrow 90^\circ$  für große  $\omega$ .

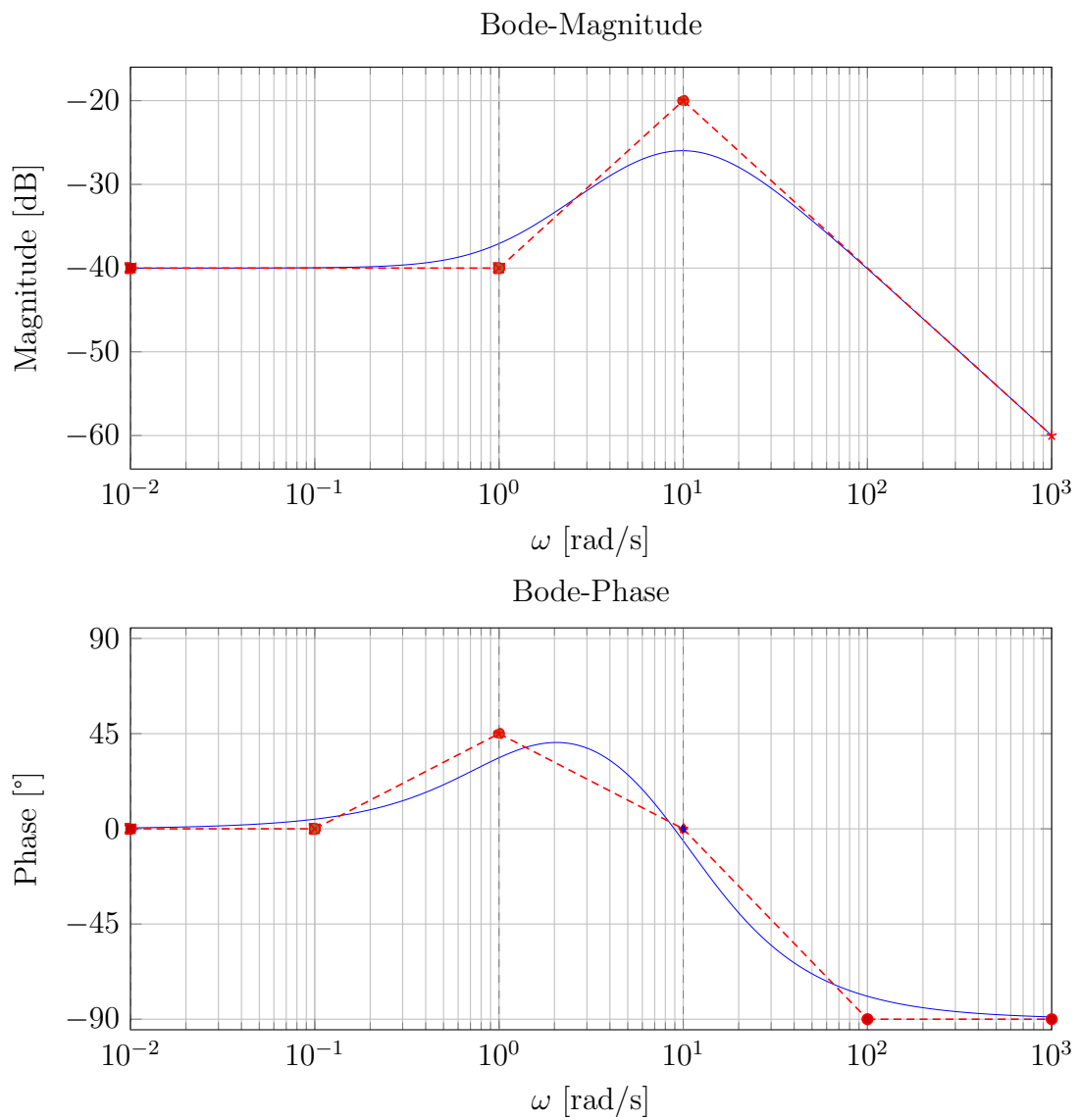
### Stückweise Näherung

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} \approx \begin{cases} 20 + 10 \log_{10} 2 + 40 \log_{10} \omega, & \omega \ll 1, \\ 20, & \omega = 1, \\ 20 + 10 \log_{10} 2 + 20 \log_{10} \omega, & \omega \gg 1, \end{cases}$$

## Aufgabe I)

$$H(s) = \frac{s + 1}{(s + 10)^2}.$$

### I.1 Bode-Diagramm



## I.2 Erklärung

**Schritt 1** DC-Faktor  $\frac{1}{100}$ :  $H(s) = \frac{s+1}{(s+10)^2}$  liefert  $H(0) = \frac{1}{100}$ , daher Startniveau  $-40$  dB ohne Anfangssteigung; Startphase  $\angle H(j\omega) \approx 0^\circ$  für  $\omega \ll 1$ .

**Schritt 2** Nullstelle bei  $\omega_z = 1$  rad/s: ab  $\omega = 1$  steigt die Magnitude mit  $+20$  dB/dec; bei  $\omega = 1$  liegt der exakte Betrag um  $+10 \log_{10} 2 \approx +3$  dB über der Geradennäherung ( $|H(j1)|_{\text{dB}} \approx -37.0$  dB). Phasenbeitrag der LHP-Nullstelle: Übergang  $0^\circ \rightarrow +90^\circ$  über  $\omega \in [0.1, 10]$ ; Geradennäherung  $+45^\circ + 45^\circ \log_{10} \omega$  in  $[0.1, 1]$ .

**Schritt 3** Doppelpol bei  $\omega_p = 10$  rad/s: ab  $\omega = 10$  zusätzliche Steigungsänderung um  $-40$  dB/dec; Netto-Slope damit  $-20$  dB/dec für  $\omega \gg 10$  (asymptotisch  $|H| \sim \omega/\omega^2 = 1/\omega$ ). Exakt bei  $\omega = 10$ :  $|H(j10)|_{\text{dB}} = -20 - 20 \log_{10} 2 \approx -26$  dB (d.h.  $-6$  dB unter der Geradennäherung). Phasenbeitrag der beiden Pole: gemeinsamer Abfall um  $180^\circ$  über  $\omega \in [1, 100]$ ; lineare Summe zweier Beiträge ( $-45^\circ - 45^\circ \log_{10}(\omega/10)$ ) ergibt die roten Segmente  $45^\circ - 45^\circ \log_{10} \omega$  für  $\omega \in [1, 10]$  und  $-90^\circ \log_{10}(\omega/10)$  für  $\omega \in [10, 100]$ . Grenzwerte:  $\angle H \rightarrow 0^\circ$  für  $\omega \ll 0.1$  und  $\angle H \rightarrow -90^\circ$  für  $\omega \gg 100$ .

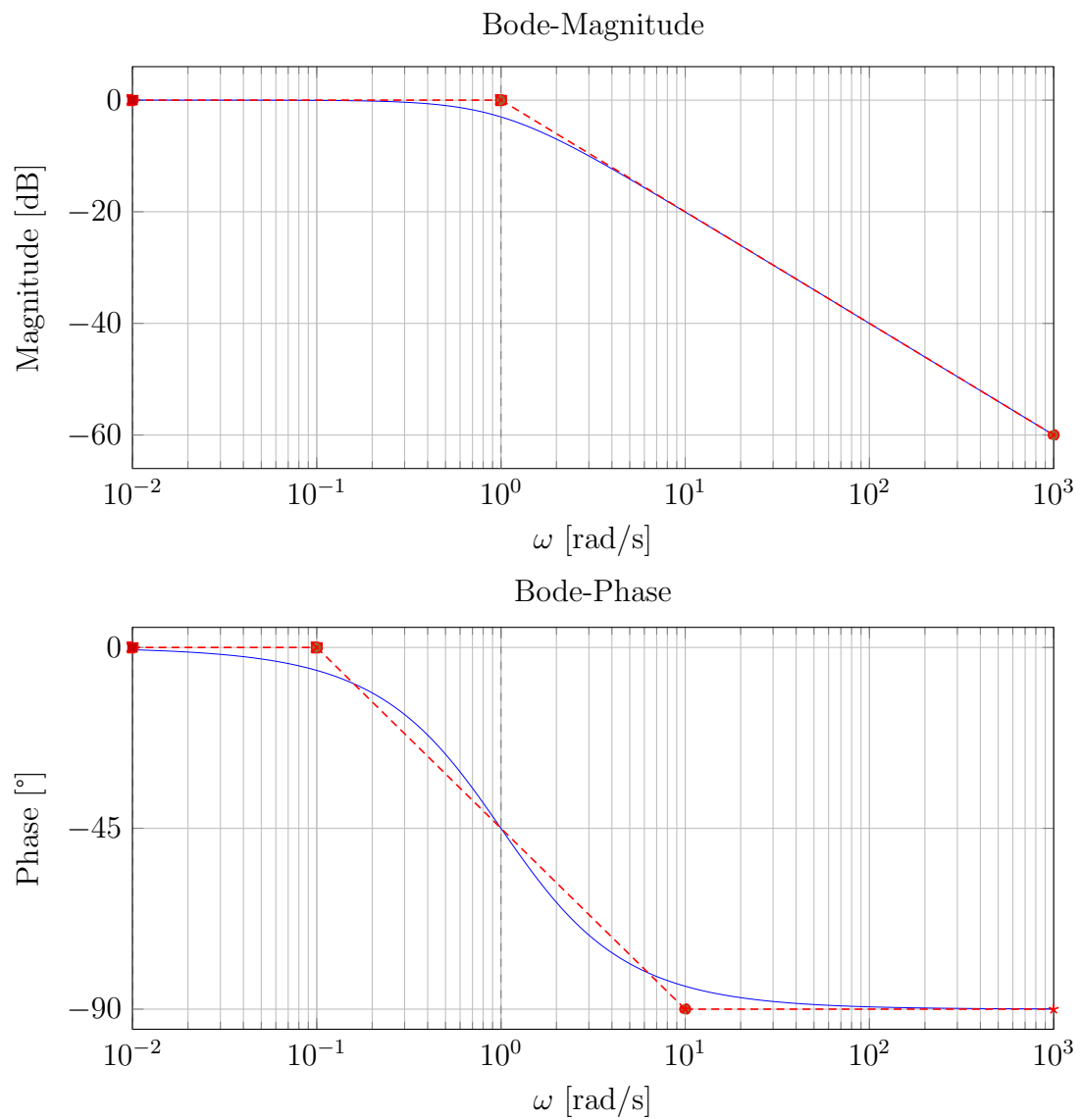
### Stückweise Näherung

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} \approx \begin{cases} -40, & \omega \ll 1, \\ -40 + 20 \log_{10} \omega, & 1 \ll \omega \ll 10, \\ -20 - 20 \log_{10}(\omega/10), & \omega \gg 10, \end{cases}$$

## Aufgabe J)

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+1} = \frac{1}{s+1}.$$

### J.1 Bode-Diagramm



## J.2 Erklärung

**Schritt 1** Kürzung:  $s^2 + 2s + 1 = (s + 1)^2 \Rightarrow H(s) = \frac{s + 1}{(s + 1)^2} = \frac{1}{s + 1}$ . DC-Faktor 1: für  $\omega \ll 1$  gilt  $|H(j\omega)| \approx 1$ ; Betrag 0 dB ohne Anfangssteigung, Phase  $\approx 0^\circ$ .

**Schritt 2** Einfacher Pol bei  $\omega_p = 1$  rad/s: ab  $\omega = 1$  wechselt die Magnitudensteigung um  $-20$  dB/dec. Am Eckpunkt beträgt die exakte Dämpfung  $-10 \log_{10} 2 \approx -3$  dB relativ zur Geraden. Phasenübergang über  $\omega \in [0.1, 10]$  von  $0^\circ$  nach  $-90^\circ$ ; Geradennäherung:  $-45^\circ - 45 \log_{10} \omega$ .

**Schritt 3** Grenzverhalten: für  $\omega \gg 1$  folgt  $|H(j\omega)|_{\text{dB}} \approx -20 \log_{10} \omega$ ; die Phase nähert sich  $-90^\circ$ . Für  $\omega \ll 1$  bleibt  $|H| \approx 1$  und  $\angle H \approx 0^\circ$ .

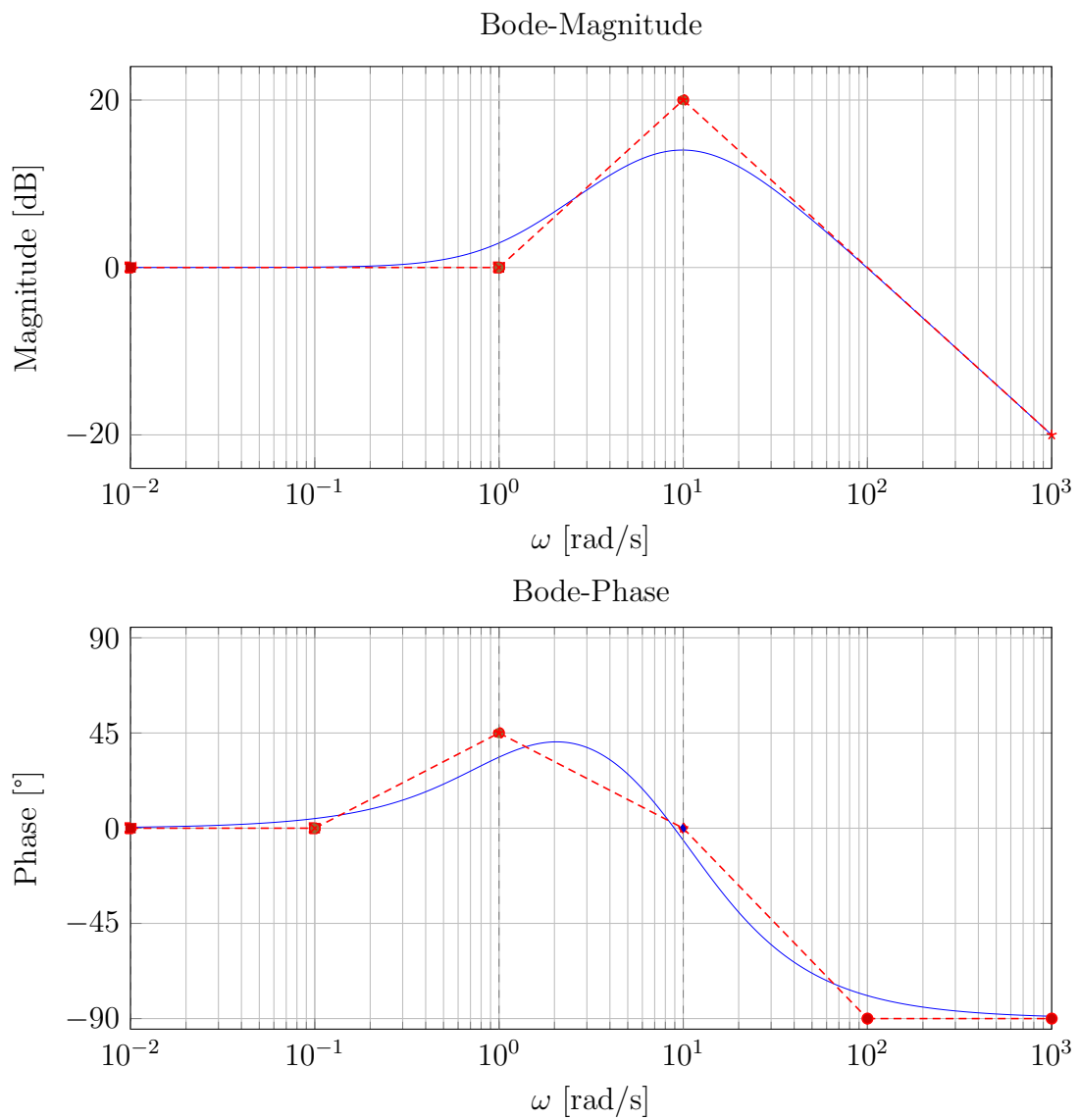
### Stückweise Näherung

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} \approx \begin{cases} 0, & \omega \ll 1, \\ -10 \log_{10} 2, & \omega = 1, \\ -20 \log_{10} \omega, & \omega \gg 1, \end{cases}$$

## Aufgabe K)

$$H(s) = \frac{100(s+1)}{s^2 + 20s + 100} = \frac{100(s+1)}{(s+10)^2}.$$

### K.1 Bode-Diagramm



## K.2 Erklärung

**Schritt 1** Faktorisierung:  $s^2+20s+100 = (s+10)^2 \Rightarrow H(s) = 100 \frac{s+1}{(s+10)^2}$ .

DC-Wert  $H(0) = 1 \Rightarrow |H|_{\text{DC}} = 0 \text{ dB}$ ; Anfangssteigung  $0 \text{ dB/dec}$ , Startphase  $\approx 0^\circ$ .

**Schritt 2** Nullstelle bei  $\omega_z = 1 \text{ rad/s}$ : ab  $\omega = 1$  steigt die Magnitude mit  $+20 \text{ dB/dec}$  (rote Gerade  $20 \log_{10} \omega$ ). Exakt bei  $\omega = 1$ :  $|H(j1)| \approx \frac{100\sqrt{2}}{101} \Rightarrow |H|_{\text{dB}} \approx +3 \text{ dB}$  über der Geraden. Phasenbeitrag der LHP-Nullstelle: Übergang  $0^\circ \rightarrow +90^\circ$  über  $\omega \in [0.1, 10]$  (Geradennäherung:  $45^\circ + 45 \log_{10} \omega$ ).

**Schritt 3** Doppelpol bei  $\omega_p = 10 \text{ rad/s}$ : ab  $\omega = 10$  zusätzliche Steigungsänderung um  $-40 \text{ dB/dec}$ ; Netto-Slope für  $\omega \gg 10$  ist  $-20 \text{ dB/dec}$  (asymptotisch  $|H| \sim 100 \omega / \omega^2 = 100/\omega$ ). Am Eckpunkt  $\omega = 10$  liegt die exakte Magnitude bei  $\approx 14.0 \text{ dB}$ , d.h. etwa  $-6 \text{ dB}$  unter der Mittellinie. Phasenabfall der beiden Pole gesamt  $180^\circ$  über  $\omega \in [1, 100]$ ; Geradennäherung: zunächst  $45^\circ - 45 \log_{10} \omega$  für  $\omega \in [1, 10]$  (netto zurück Richtung  $0^\circ$ ), danach  $-90 \log_{10}(\omega/10)$  für  $\omega \in [10, 100]$  (netto bis  $-90^\circ$ ).

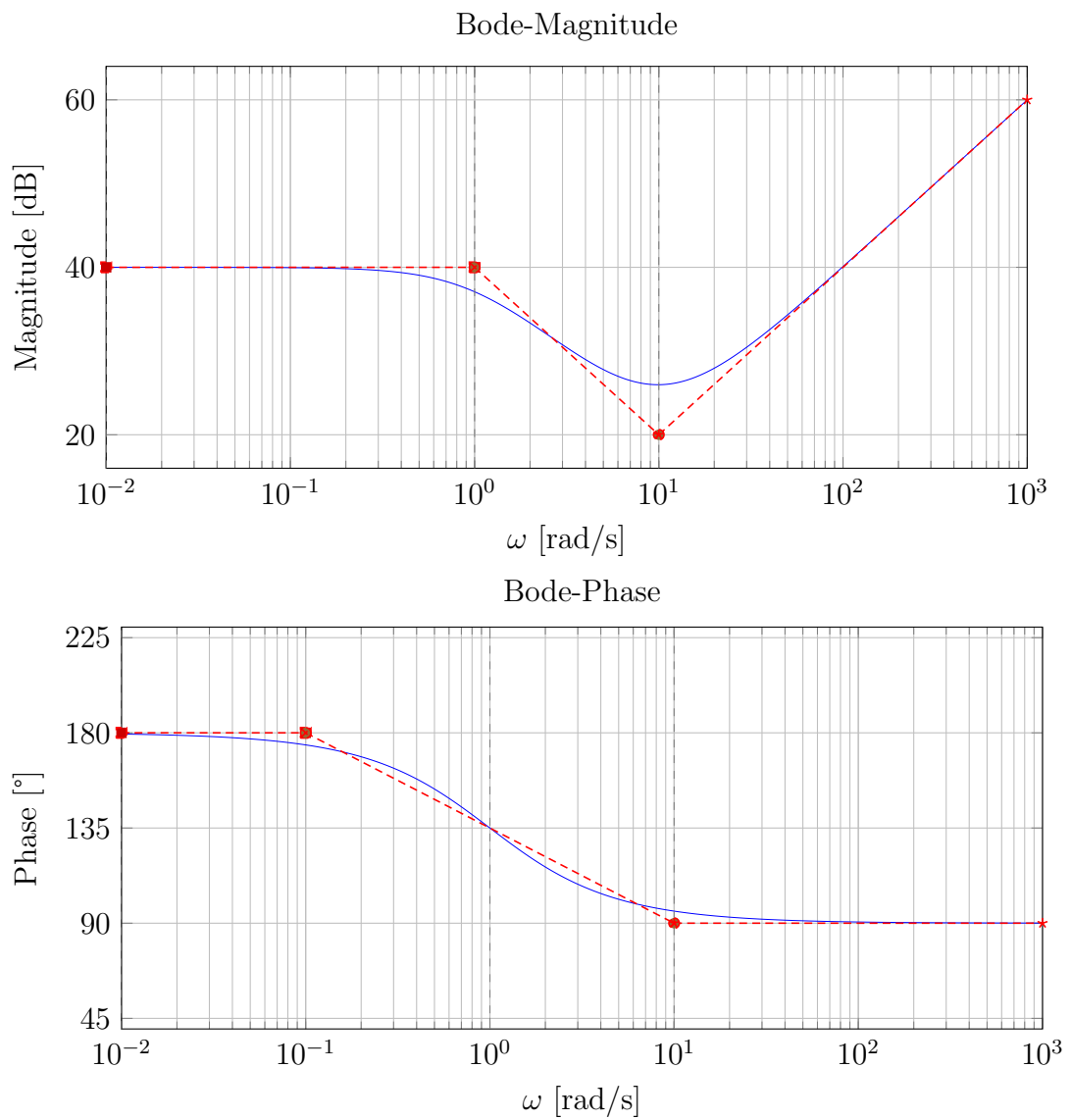
### Stückweise Näherung

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} \approx \begin{cases} 0, & \omega \ll 1, \\ 20 \log_{10} \omega, & 1 \ll \omega \ll 10, \\ 20 - 20 \log_{10}(\omega/10), & \omega \gg 10, \end{cases}$$

## Aufgabe L)

$$H(s) = \frac{s^2 - 100}{s + 1} = \frac{(s - 10)(s + 10)}{s + 1}.$$

### L.1 Bode-Diagramm





## L.2 Erklärung

**Schritt 1** Struktur:  $H(s) = \frac{(s-10)(s+10)}{s+1}$ . Für  $\omega \ll 1$  ist  $|H(j\omega)| \approx \frac{100}{1} = 100 \Rightarrow 40 \text{ dB}$  ohne Startsteigung.  $H(0) = -100 = 100e^{+j180^\circ} \Rightarrow$  konstante Phasenlage  $+180^\circ$ .

**Schritt 2** Pol bei  $\omega_p = 1 \text{ rad/s}$ : ab  $\omega = 1$  Steigungswechsel um  $-20 \text{ dB/dec}$ ; am Eckpunkt exakte Dämpfung  $-10 \log_{10} 2 \approx -3 \text{ dB}$  gegenüber der linken Geraden. Phasenabnahme des Pols um  $90^\circ$  über  $\omega \in [0.1, 10]$ ; Geradennäherung  $135^\circ - 45^\circ \log_{10} \omega$  (von  $180^\circ$  auf  $90^\circ$ ).

**Schritt 3** Nullstellen bei  $\omega_z = 10 \text{ rad/s}$  (eine LHP, eine RHP): Magnitudenbeitrag von zwei Nullstellen  $\Rightarrow$  zusätzliche  $+40 \text{ dB/dec}$  ab  $\omega = 10$ ; Netto-Gesamtslope wird  $+20 \text{ dB/dec}$  für  $\omega \gg 10$ . Am Eckpunkt  $\omega = 10$  liegt  $|H(j10)|_{\text{dB}} \approx 20 + 6 = 26.0 \text{ dB}$ . Die Phasenänderungen der LHP- und RHP-Nullstelle heben sich gegenseitig auf; Netto entsteht an  $\omega = 10$  keine zusätzliche Phasenänderung (die konstanten  $+180^\circ$  sind bereits berücksichtigt).

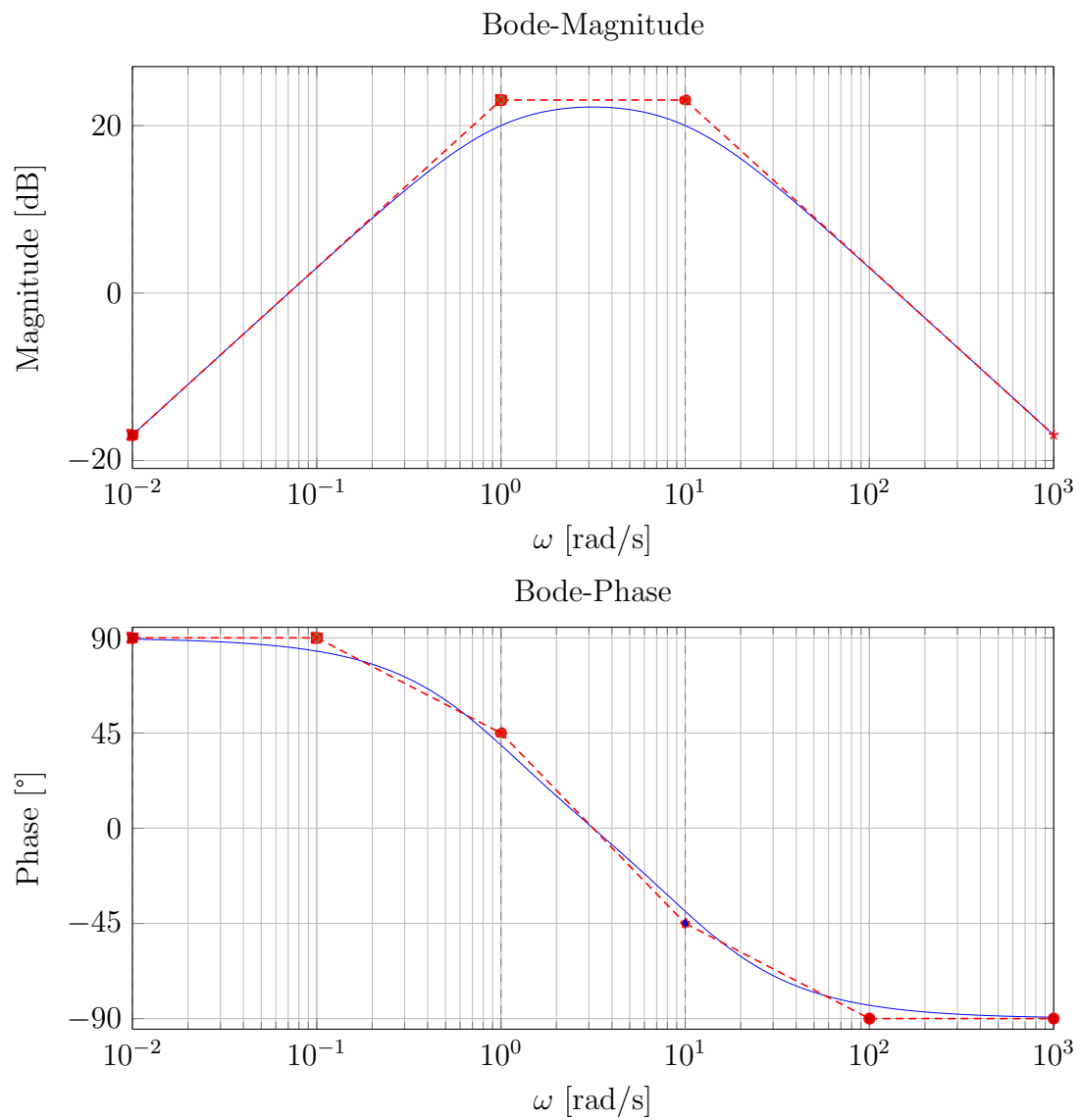
### Stückweise Näherung

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} \approx \begin{cases} 40, & \omega \ll 1, \\ 40 - 10 \log_{10} 2, & \omega = 1, \\ 40 - 20 \log_{10} \omega, & 1 \ll \omega \ll 10, \\ 20 + 20 \log_{10}(\omega/10), & \omega \gg 10, \end{cases}$$

## Aufgabe M)

$$H(s) = \frac{10\sqrt{202}s}{(s+1)(s+10)}.$$

### M.1 Bode-Diagramm



## M.2 Erklärung

**Schritt 1** Nullstelle im Ursprung:  $H(s) = 10\sqrt{202} \frac{s}{(s+1)(s+10)}$ . Für  $\omega \ll 1$  gilt  $|H(j\omega)| \approx \sqrt{202}\omega$ ; Startsteigung  $+20$  dB/dec mit Fixniveau<sup>1</sup>  $10 \log_{10} 202$  dB = 23 dB bei  $\omega = 5$ . Startphase  $\approx +90^\circ$ .

**Schritt 2** Pol bei  $\omega_{p1} = 1$  rad/s: ab  $\omega = 1$  Steigungswechsel um  $-20$  dB/dec; Zwischenbereich  $[1, 10]$  ist betragsflach. Exakt  $|H(j1)| = \frac{10\sqrt{202}}{\sqrt{2}\sqrt{101}} = 10 \Rightarrow 20$  dB (symmetrische Ecklage). Phasenabfall um  $90^\circ$  über  $\omega \in [0.1, 10]$ ; Geradennäherung  $45^\circ - 45^\circ \log_{10} \omega$ .

**Schritt 3** Pol bei  $\omega_{p2} = 10$  rad/s: ab  $\omega = 10$  weiterer Steigungswechsel um  $-20$  dB/dec; Gesamtslope  $-20$  dB/dec für  $\omega \gg 10$ . Auch hier  $|H(j10)| = \frac{100\sqrt{202}}{\sqrt{101}\sqrt{200}} = 10 \Rightarrow 20$  dB. Der zweite Pol senkt die Phase um weitere  $90^\circ$  in  $\omega \in [1, 100]$ ; Geradennäherung  $-45^\circ \log_{10}(\omega/10)$ , Grenzwert  $\angle H \rightarrow -90^\circ$ .

### Stückweise Näherung

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} \approx \begin{cases} 10 \log_{10} 202 + 20 \log_{10} \omega, & \omega \ll 1, \\ 20, & \omega = 1, \\ 10 \log_{10} 202, & 1 \ll \omega \ll 10, \\ 20, & \omega = 10, \\ 10 \log_{10} 202 - 20 \log_{10}(\omega/10), & \omega \gg 10, \end{cases}$$

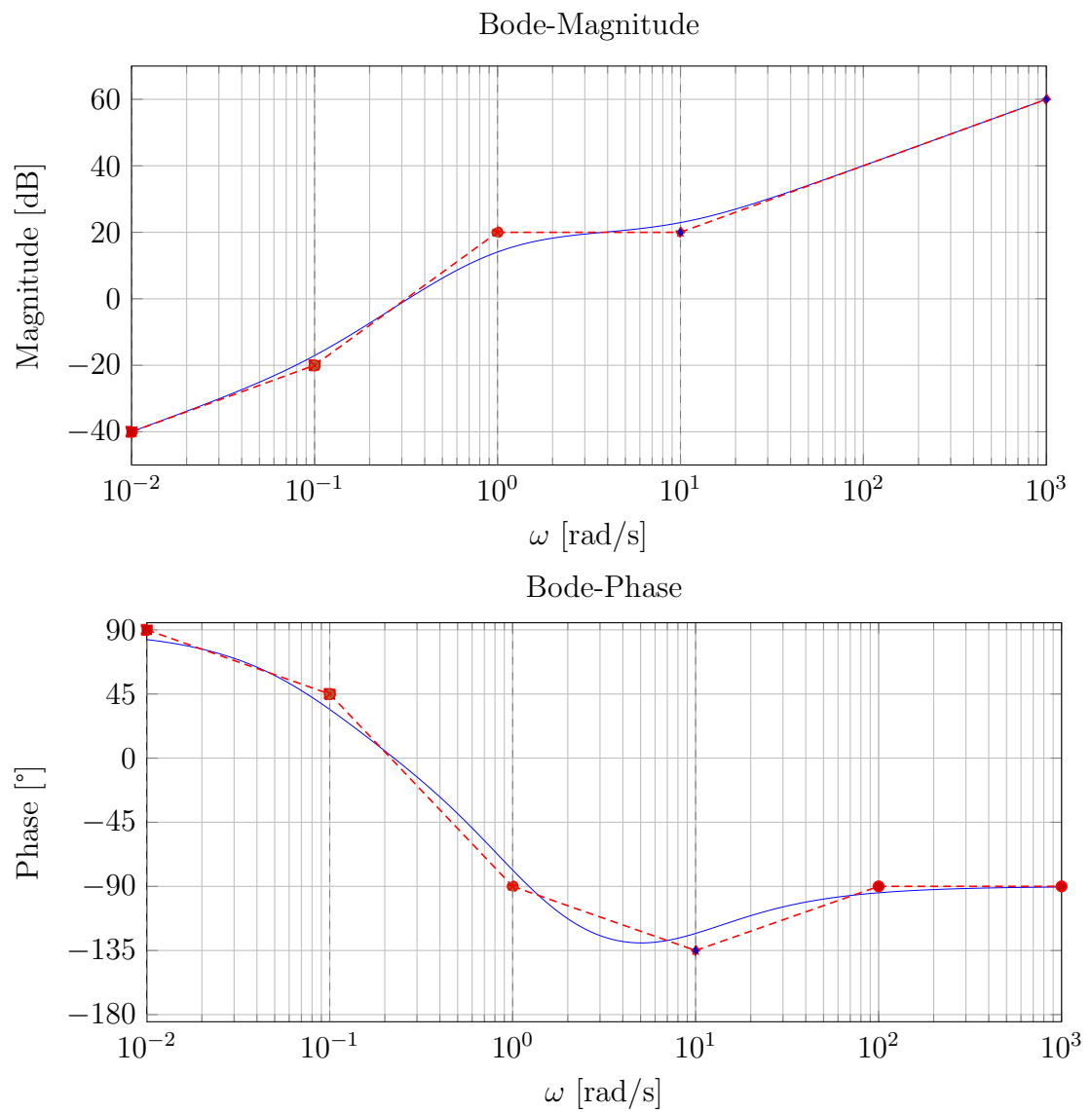
---

<sup>1</sup>Die Festlegung der ersten Geradennäherung gestaltet sich hier schwierig. Alternativ kann man die Verstärkung bei der Eckfrequenz  $\omega = 1$  ansetzen; dabei ist zu beachten, dass man den exakten Wert der blauen Kurve berechnet und dieser etwa 3 dB unter der Geradennäherung liegt, welche man dann einzeichnen muss.

## Aufgabe N)

$$H(s) = \frac{s(0.1 - s)(s + 10)}{(s + 1)^2}.$$

### N.1 Bode-Diagramm



## N.2 Erklärung

**Schritt 1** Struktur und Startverhalten:  $H(s) = \frac{s(0.1 - s)(s + 10)}{(s + 1)^2}$ . Für  $\omega \ll 0.1$  gilt  $|H(j\omega)| \approx \omega \cdot 0.1 \cdot 10/1 = \omega \Rightarrow$  Startsteigung  $+20$  dB/dec; Startphase aus  $j\omega$  ist  $\approx +90^\circ$  (keine Übergänge aktiv).

**Schritt 2** RHP-Nullstelle bei  $\omega_z = 0.1$  rad/s: Magnitude-Beitrag wie LHP-Nullstelle  $\Rightarrow$  zusätzlicher Anstieg  $+20$  dB/dec ab  $\omega = 0.1$ ; Nettoslope ist  $+40$  dB/dec Phase hingegen fällt um  $90^\circ$  über  $\omega \in [0.01, 1]$  (Geradennäherung:  $45^\circ - 45^\circ \log_{10}(\omega/0.1)$  bis  $45^\circ - 135^\circ \log_{10}(\omega/0.1)$ ).

**Schritt 3** Doppelpol bei  $\omega_p = 1$  rad/s und LHP-Nullstelle bei  $\omega_z = 10$  rad/s: Der Doppelpol reduziert die Slope um  $-40$  dB/dec  $\Rightarrow$  Netto  $0$  dB/dec in  $[1, 10]$  (Betrag  $\approx 20$  dB als Geraden-Niveau); die LHP-Nullstelle hebt ab  $\omega = 10$  die Slope wieder auf  $+20$  dB/dec. Phasenbild: der Doppelpol liefert insgesamt  $-180^\circ$  über  $\omega \in [0.1, 10]$ ; die LHP-Nullstelle addiert  $+90^\circ$  über  $\omega \in [1, 100]$ . Daraus resultieren die roten Segmente:  $+90^\circ \rightarrow +45^\circ$  ( $[0.01, 0.1]$ ), weiter bis  $\approx -90^\circ$  ( $[0.1, 1]$ ), in  $[1, 10]$  Abfall bis  $\approx -135^\circ$ , anschließend Anstieg zurück gegen  $\approx -90^\circ$  für  $\omega \gg 100$ .

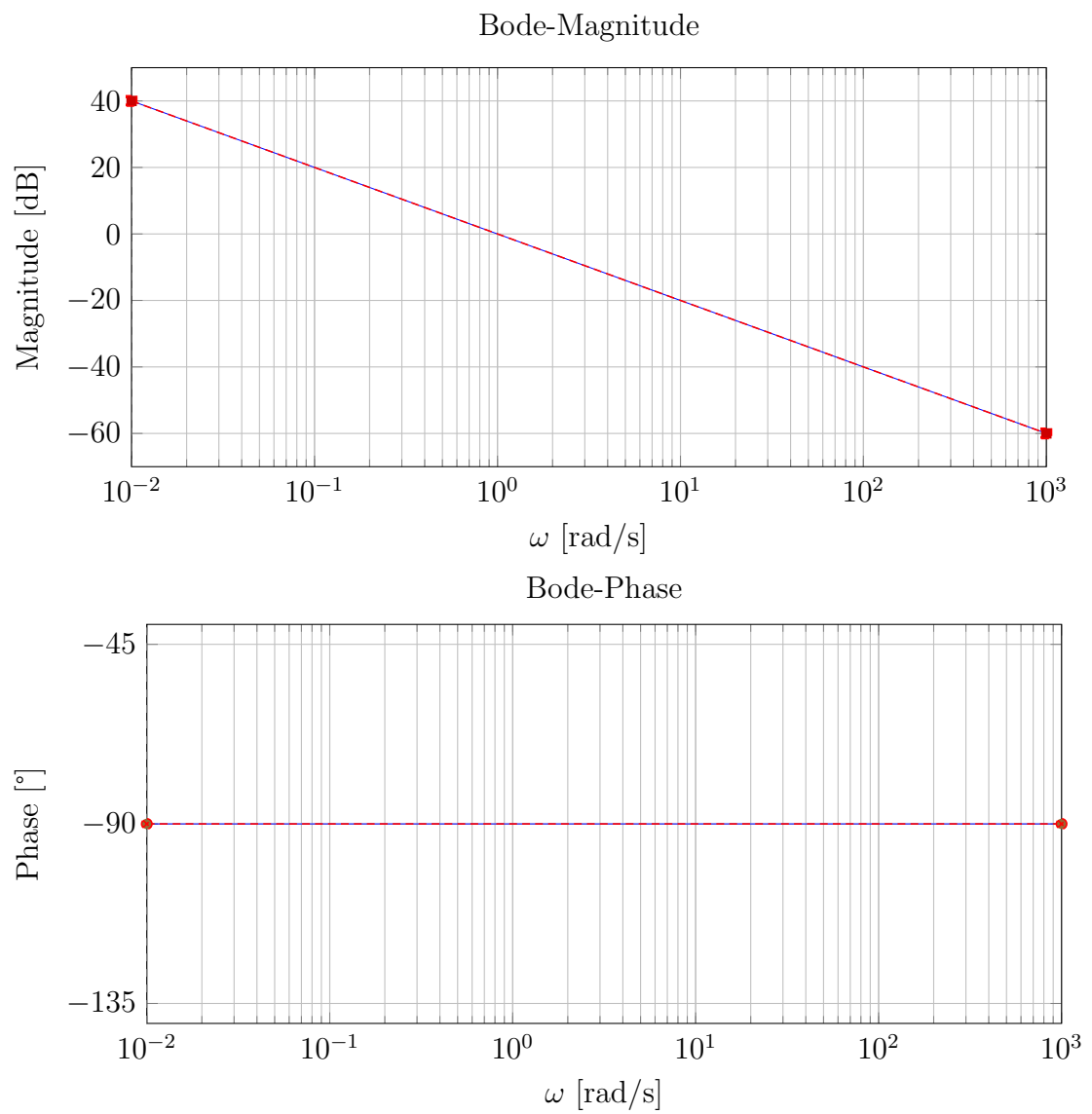
### Stückweise Näherung

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} \approx \begin{cases} 20 \log_{10} \omega, & \omega \ll 0.1, \\ 40 \log_{10} \omega + 20, & 0.1 \ll \omega \ll 1, \\ 20, & 1 \ll \omega \ll 10, \\ 20 + 20 \log_{10}(\omega/10), & \omega \gg 10, \end{cases}$$

## Aufgabe O)

$$H(s) = \frac{1}{s}.$$

### O.1 Bode-Diagramm



## O.2 Erklärung

**Schritt 1** Pol im Ursprung:  $H(s) = 1/s$  liefert für alle  $\omega > 0$  die Betragsasymptote  $|H(j\omega)|_{\text{dB}} = -20 \log_{10} \omega$  mit konstanter Steigung  $-20 \text{ dB/dec}$ ; keine endliche Eckfrequenz. Wir benötigen ein Fixpunkt und wählen diesen beliebig bei  $\omega = 1 \rightarrow |H(1)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10}(1) \text{ dB} = 0 \text{ dB}$

**Schritt 2** Phase:  $\angle(1/j\omega) = -90^\circ$  für alle Frequenzen; keine Übergangsdakaden, daher rote Geradennäherung deckungsgleich mit dem exakten Verlauf.

**Schritt 3** Grenzfälle:  $\omega \rightarrow 0^+ \Rightarrow |H| \rightarrow \infty$  (Integrator),  $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow |H| \rightarrow 0$ ; Phase bleibt stets  $-90^\circ$ .

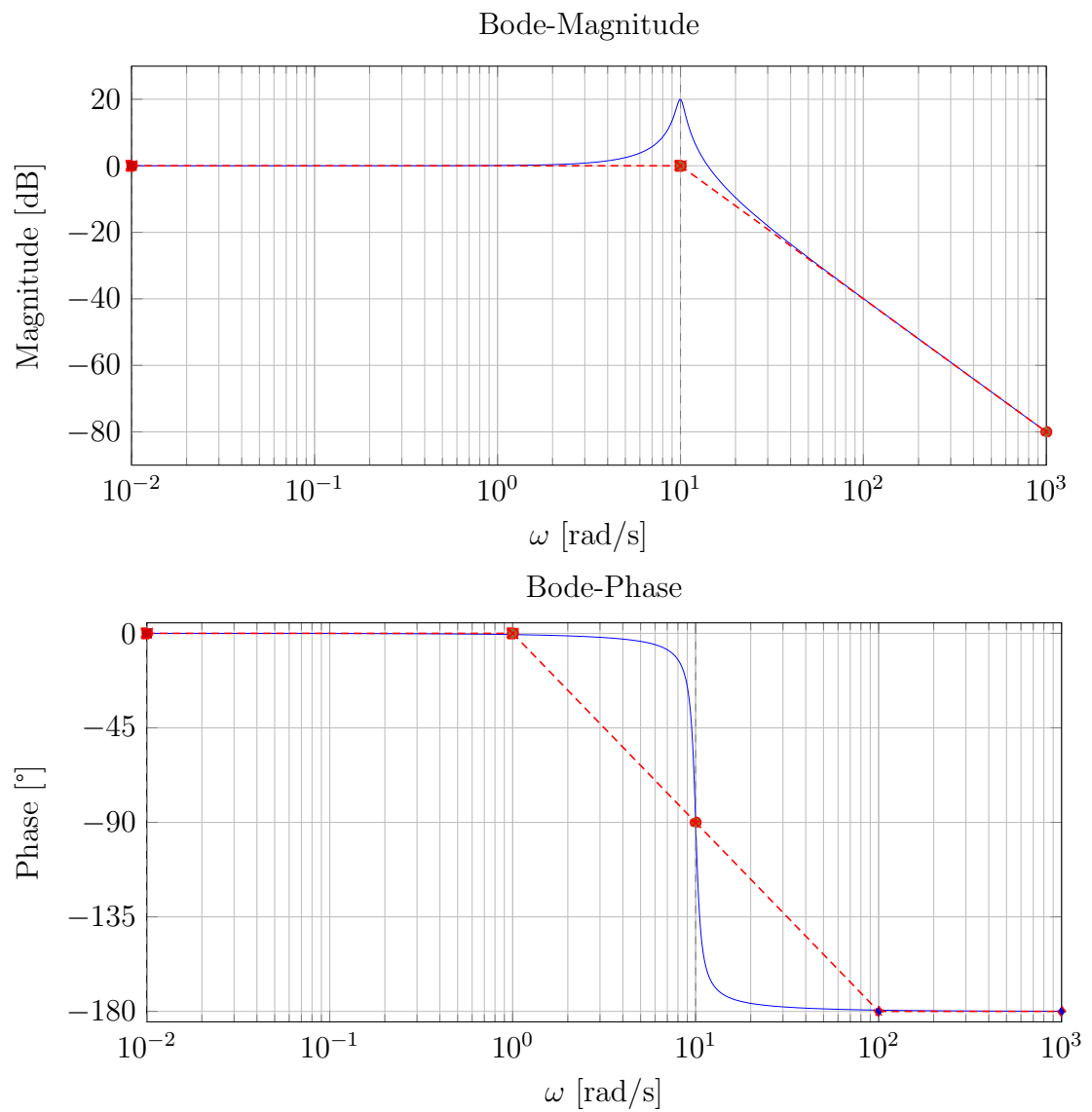
### Stückweise Näherung

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} \approx \begin{cases} -20 \log_{10} \omega, & \omega \ll 1, \\ 0, & \omega = 1, \\ -20 \log_{10} \omega, & \omega \gg 1, \end{cases}$$

## Aufgabe P)

$$H(s) = \frac{100}{s^2 + s + 100}.$$

### P.1 Bode-Diagramm





## P.2 Erklärung

**Schritt 1** Normform:  $s^2 + s + 100 = \omega_n^2 \left[ \left( \frac{s}{\omega_n} \right)^2 + 2\zeta \left( \frac{s}{\omega_n} \right) + 1 \right]$  mit  $\omega_n = 10$  und  $\zeta = \frac{1}{2\omega_n} = 0.05$ . DC-Faktor  $100/100 = 1 \Rightarrow 0 \text{ dB}$  ohne Anfangssteigung; Startphase  $\approx 0^\circ$ .

**Schritt 2** Konjugiertes Polpaar: Resonanz bei  $\omega_n = 10$ . Asymptote  $0 \text{ dB}$  für  $\omega \ll 10$ , ab  $\omega = 10$  Slope  $-40 \text{ dB/dec}$ . Exakt liegt die Verstärkung bei Resonanz bei  $|H(j\omega_n)| = \frac{1}{2\zeta} = 10 \Rightarrow 20 \text{ dB}$ .

**Schritt 3** Phase: Gesamtabfall<sup>2</sup> um  $180^\circ$  um  $\omega_n$ , für die Geradennäherung über zwei Dekaden verteilt ( $[1, 100]$ ):  $0^\circ \rightarrow -90^\circ$  in  $[1, 10]$ , weiter  $-90^\circ \rightarrow -180^\circ$  in  $[10, 100]$ . Für  $\omega \gg 10$  nähert sich  $\angle H \rightarrow -180^\circ$ .

### Stückweise Näherung

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} \approx \begin{cases} 0, & \omega \ll 10, \\ +20, & \omega = 10, \\ -40 \log_{10}(\omega/10), & \omega \gg 10, \end{cases}$$

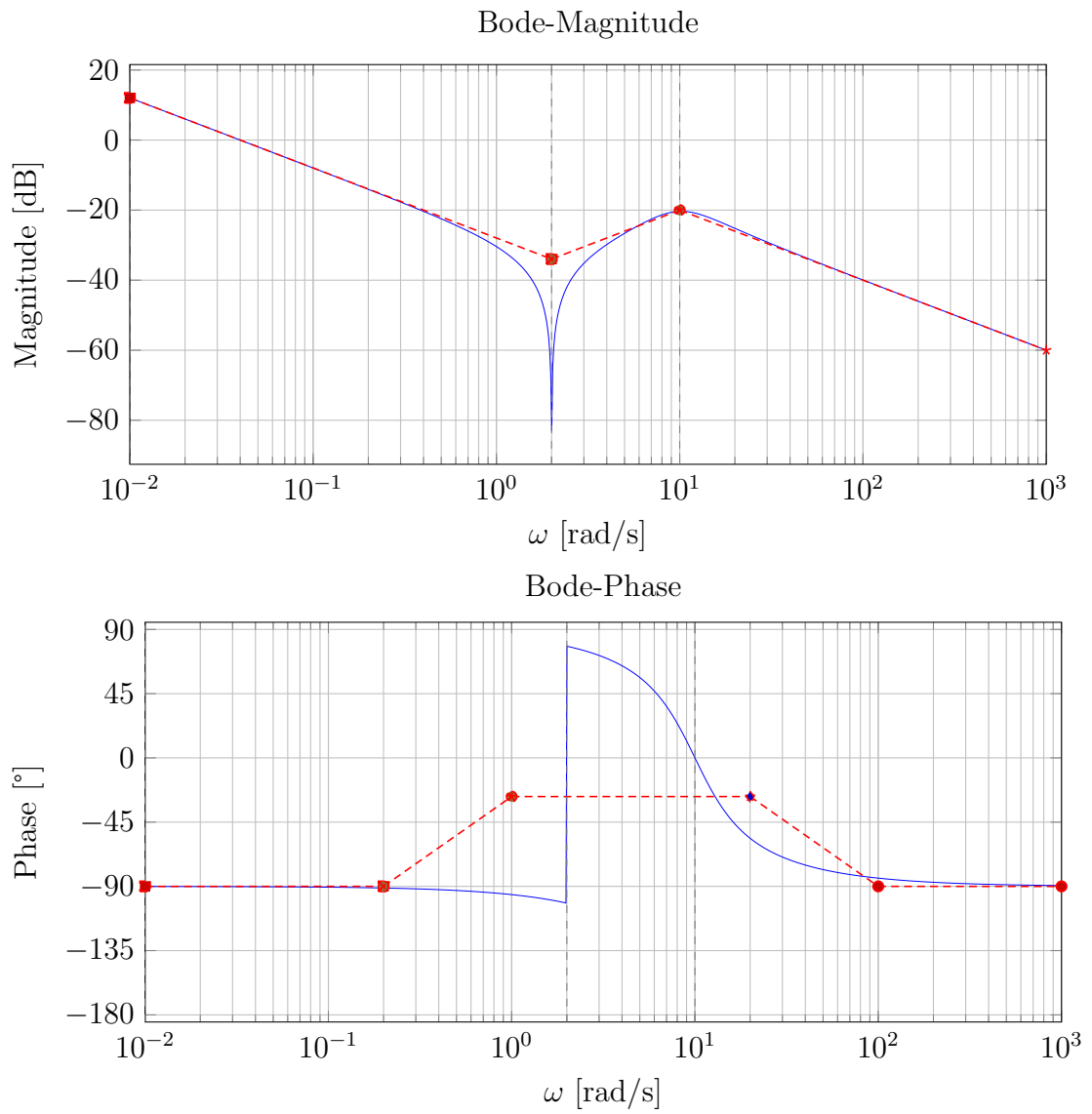
---

<sup>2</sup>Im exakten Verlauf kippt die Phase schneller als von der Geradennäherung prognostiziert; Ursache ist das sehr kleine  $\zeta$ . Je kleiner  $\zeta$ , desto abrupter der Phasenübergang und desto schmaler sowie ausgeprägter die Resonanz im Magnitudenplot. Die handschriftliche Bode-Näherung ist hier grob; die genaue Lage der roten Segmente bleibt eine Abschätzung.

## Aufgabe Q)

$$H(s) = \frac{s^2 + 4}{s(s^2 + 10s + 100)}.$$

### Q.1 Bode-Diagramm



## Q.2 Erklärung

**Schritt 1** Struktur: Integrator  $1/s$ , konjugiertes Polpaar mit  $\omega_n = 10$ ,  $\zeta = 0.5$ , und Doppelnullen auf der imaginären Achse bei  $\omega_z = 2$ . Für  $\omega \ll 2$ :  $|H(j\omega)| \approx \frac{4}{100\omega} = 0.04/\omega \Rightarrow$  Slope  $-20$  dB/dec um Niveau  $20 \log_{10} 0.04 \approx -20$  dB bei  $\omega = 0.4$ ; Phase  $\approx -90^\circ$ .

**Schritt 2** Doppelnullen bei  $\omega_z = 2$ : Betrag hat dort ein exaktes Null ( $|H(j2)| = 0$ ). Asymptotisch steigt die Slope vor  $\omega = 2$  bei  $-20$  dB/dec (Nach  $\omega = 2$  netto bei  $-20 + 40 \rightarrow +20$  dB/dec). Phasenbeitrag der Zählerdoppelnull ist exakt ein Sprung um  $+180^\circ$  (von  $0^\circ$  auf  $180^\circ$ ); in der Geradennäherung als  $+180^\circ$  über zwei Dekaden  $[0.2, 20]$  modelliert.

**Schritt 3** Polpaar bei  $\omega_n = 10$ ,  $\zeta = 0.5$ : ab  $\omega = 10$  Slope-Änderung  $-40$  dB/dec (Netto  $+20 \rightarrow -20$  dB/dec). Exakt bei  $\omega = 10$ :  $|H(j10)| = \frac{|4 - 100|}{10 \cdot 100} = \frac{96}{1000} \approx -20$  dB. Phasenbeitrag des Polpaares  $-180^\circ$  über  $[1, 100]$ , wodurch die Gesamtsumme nach dem temporären Anheben durch die Zählernullen wieder zurück auf  $-90^\circ$  fällt<sup>3</sup>.

**Schritt 4** Resonanz korrekt: Das Zählerpolynom  $s^2 + 4$  liefert reelle zwei Nullstellen auf der imaginären Achse bei  $\omega_z = 2$ . Folge:  $|H(j2)| = 0$ ; in Dezibel  $-\infty$  dB. Das Polpaar  $s^2 + 10s + 100$  hat  $\omega_n = 10$  und  $\zeta = 0.5$  ( $Q = 1$ ).  $\zeta$  ist recht groß und  $Q$  unterdrückt Resonanz; konkret  $|H(j10)| = \frac{|4-100|}{10 \cdot 100} = 0.096 \Rightarrow \approx -20$  dB.

### Stückweise Näherung

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} \approx \begin{cases} 20 \log_{10}(0.04) - 20 \log_{10} \omega, & \omega \ll 2, \\ -\infty, & \omega = 2, \\ -40 + 20 \log_{10} \omega, & 2 \ll \omega \ll 10, \\ -20 - 20 \log_{10}(\omega/10), & \omega \gg 10, \end{cases}$$

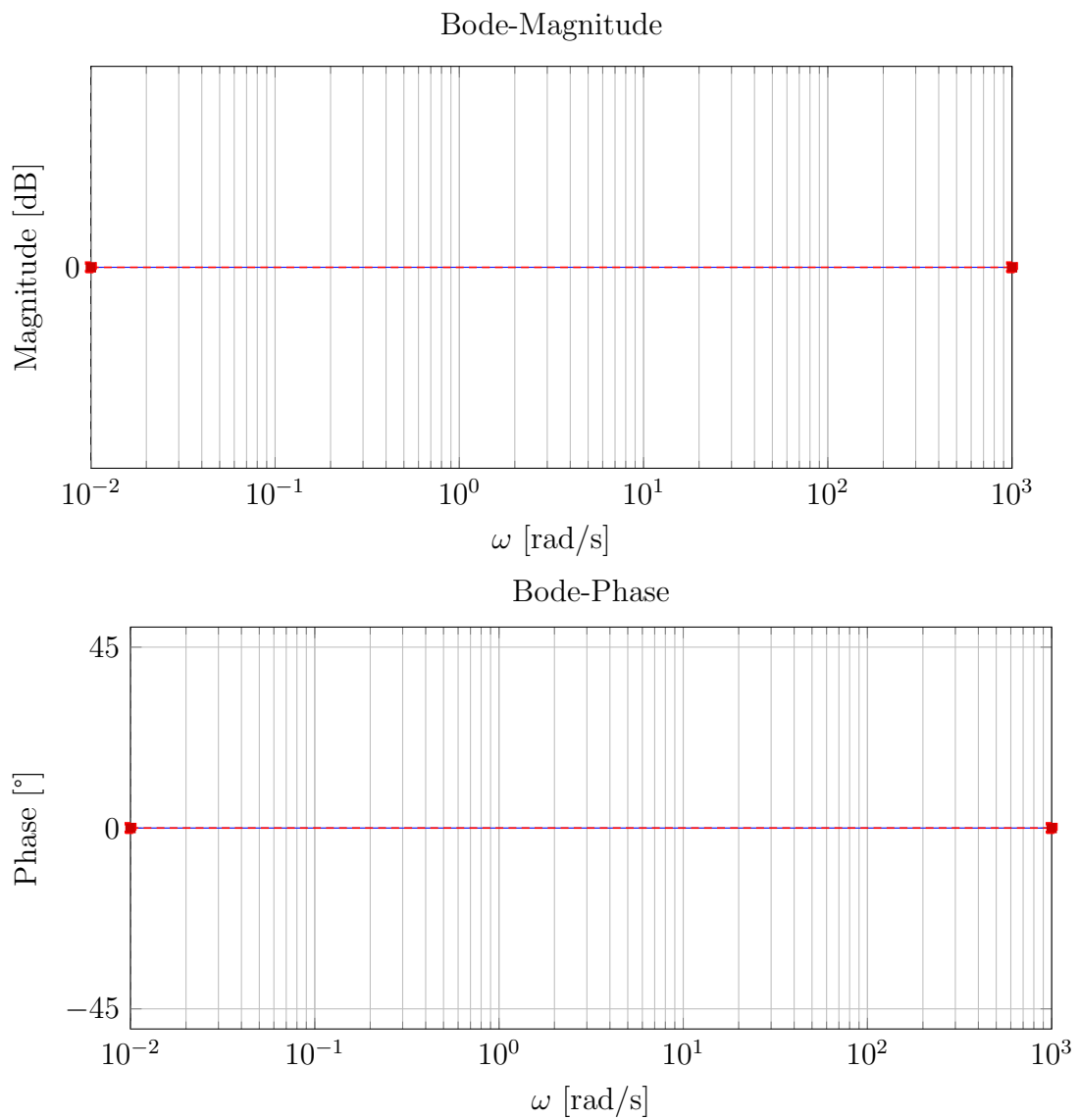
---

<sup>3</sup>Aufgrund der sehr kleinen Dämpfung  $\zeta$  wirkt der Phasenverlauf "chaotisch". Tatsächlich überlagern sich zwei  $180^\circ$ -Übergänge: zuerst der abrupte Sprung des Nullstellenpaares, direkt danach der vergleichsweise sanfte Abfall des Polpaares.

## Aufgabe R)

$$H(s) = \frac{s^2 + 2s + 10}{s^2 + 2s + 10} = 1.$$

### R.1 Bode-Diagramm



## R.2 Erklärung

**Schritt 1** Kürzung: Zähler und Nenner sind identisch, daher  $H(s) \equiv 1$ .  
DC-Faktor 1  $\Rightarrow |H|_{\text{DC}} = 0 \text{ dB}$ ; Anfangssteigung  $0 \text{ dB/dec}$ ; Phase  $0^\circ$ .

**Schritt 2** Keine Ecken: keine endlichen Pole/Nullstellen nach Kürzung, daher keine Eckfrequenzen und keine Phasen- und Magnitudenänderungen.  
Die Geradennäherungen decken sich exakt mit dem exakten Verlauf.

**Schritt 3** Grenzverhalten: für  $\omega \rightarrow 0$  und  $\omega \rightarrow \infty$  bleibt  $|H(j\omega)| = 1$  und  $\angle H(j\omega) = 0^\circ$ ; das gesamte Bode-Diagramm ist konstant.

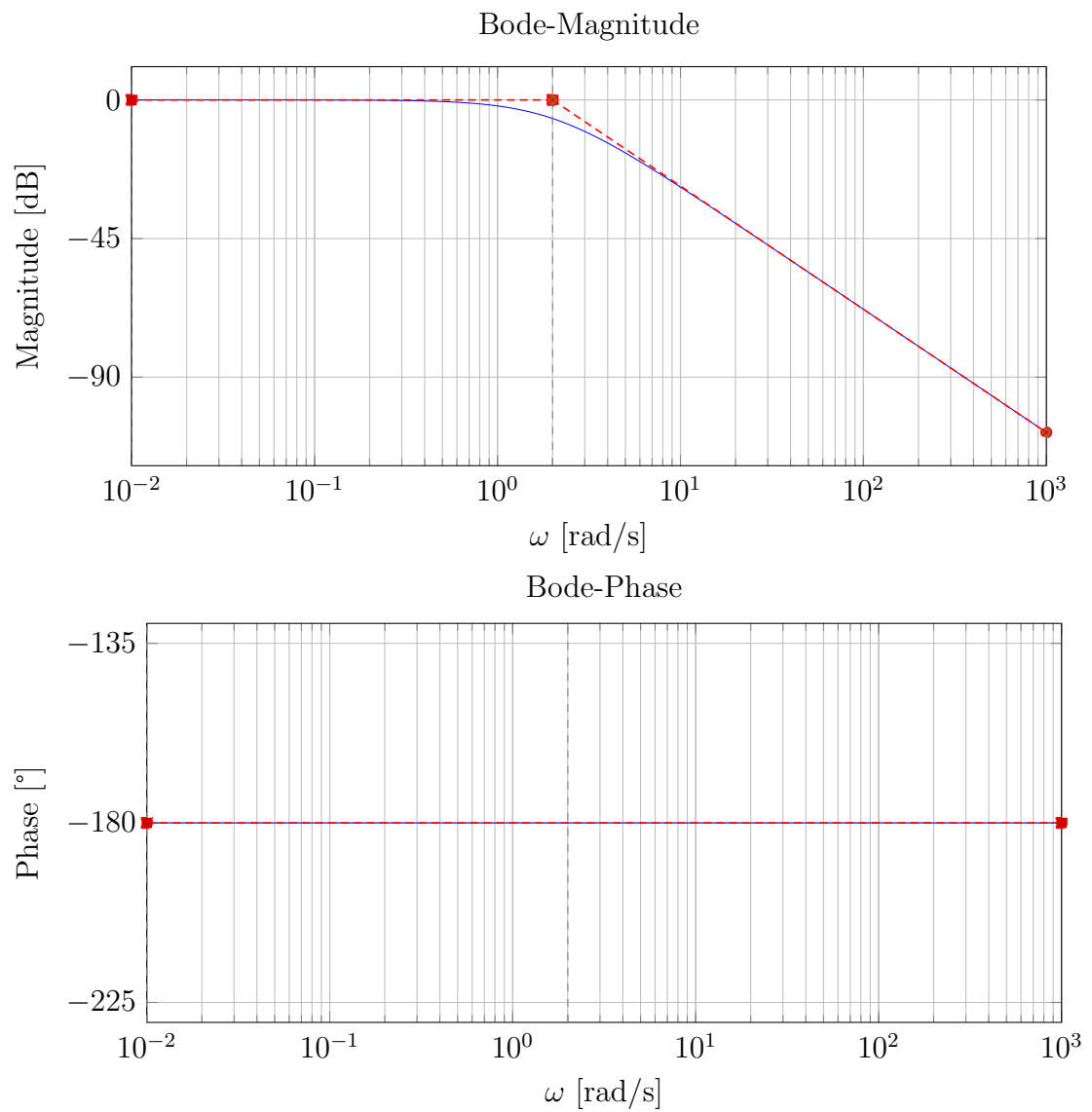
### Stückweise Näherung

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} \approx \begin{cases} 0, & \omega \ll 1, \\ 0, & \omega = 1, \\ 0, & \omega \gg 1, \end{cases}$$

## Aufgabe S)

$$H(s) = \frac{4}{s^2 - 4} = \frac{4}{(s - 2)(s + 2)}.$$

### S.1 Bode-Diagramm



## S.2 Erklärung

**Schritt 1** Faktorisierung:  $H(s) = \frac{4}{(s-2)(s+2)}$ . DC-Wert  $H(0) = -1 \Rightarrow |H|_{\text{DC}} = 0 \text{ dB}$ ; das negative Vorzeichen liefert eine konstante Phase von  $-180^\circ$ . Anfangssteigung  $0 \text{ dB/dec}$ .

**Schritt 2** Pole bei  $\omega_p = 2 \text{ rad/s}$  (einer RHP, einer LHP): Magnitudenbeitrag entspricht einem Doppelpol bei  $\omega = 2 \Rightarrow$  ab  $\omega = 2$  Slope  $-40 \text{ dB/dec}$ . Am Eckpunkt exakte Dämpfung  $-20 \log_{10} 2 \approx -6 \text{ dB}$ . Phasenverlauf: die entgegengesetzten Beiträge der LHP- und RHP-Polphase heben sich auf; netto bleibt die Phase für alle  $\omega$  konstant  $-180^\circ$ .

**Schritt 3** Grenzverhalten: für  $\omega \ll 2$  bleibt  $|H(j\omega)| \approx 1$ ; für  $\omega \gg 2$  folgt  $|H(j\omega)|_{\text{dB}} \approx -40 \log_{10}(\omega/2)$ ; die Phase bleibt über das gesamte Spektrum bei  $-180^\circ$ .

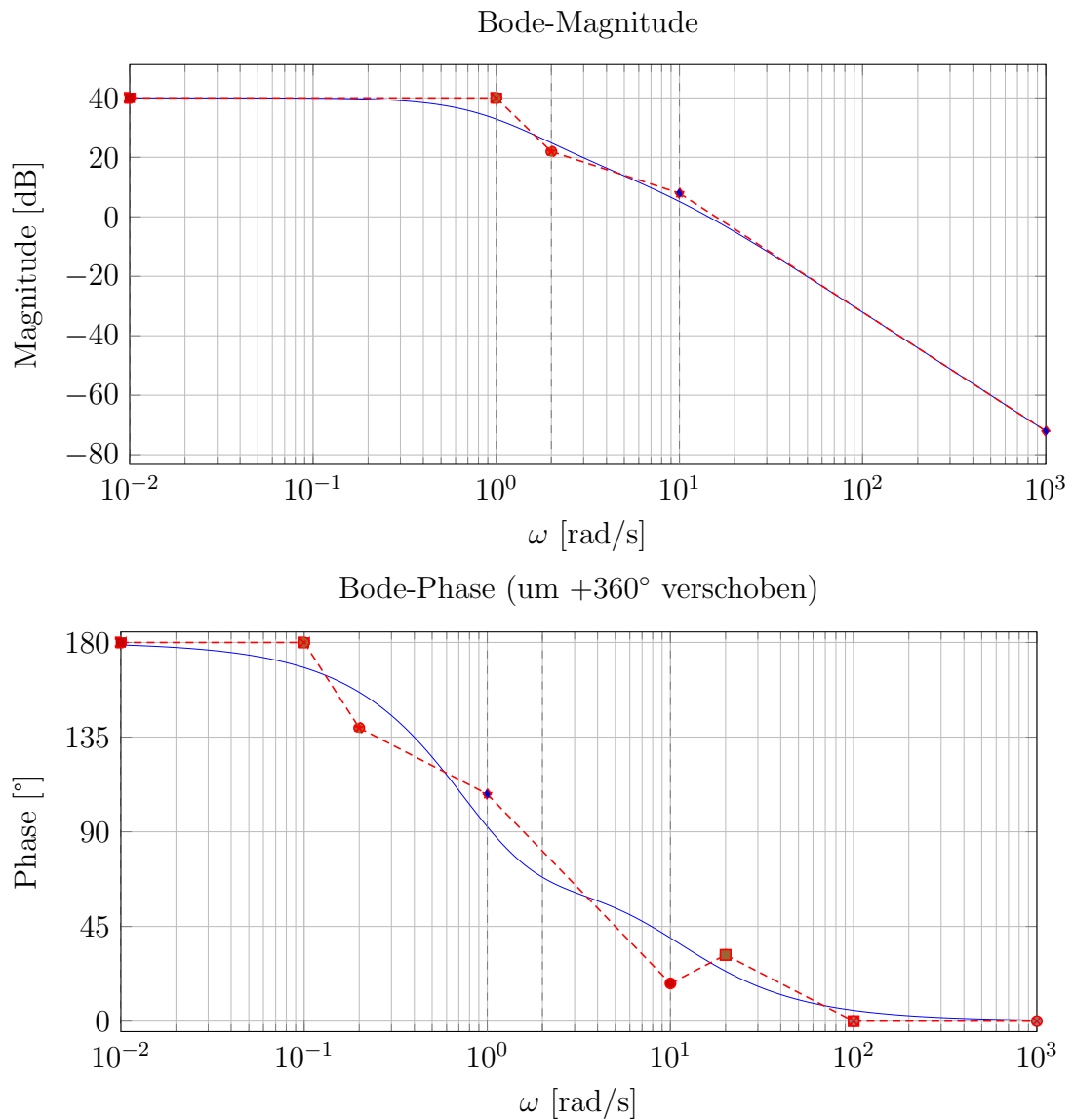
### Stückweise Näherung

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} \approx \begin{cases} 0, & \omega \ll 2, \\ -20 \log_{10} 2, & \omega = 2, \\ -40 \log_{10}(\omega/2), & \omega \gg 2, \end{cases}$$

## Aufgabe T)

$$H(s) = \frac{-1000 (s + 2)^2}{4 (s + 1)^3 (s + 10)} = -250 \frac{(s + 2)^2}{(s + 1)^3 (s + 10)} .$$

### T.1 Bode-Diagramm





## T.2 Erklärung

**Schritt 1** Konstante & Vorzeichen:  $H(0) = -100 \Rightarrow |H|_{\text{DC}} = 40 \text{ dB}$ , Anfangssteigung  $0 \text{ dB/dec}$ . Die Darstellung ist um  $+360^\circ$  verschoben: Startphase  $180^\circ$  (das negative Vorzeichen).

**Schritt 2** Dreifachpol bei  $\omega = 1 \text{ rad/s}$ : ab  $\omega = 1$  Steigungsänderung um  $-60 \text{ dB/dec}$ ; Exakte Abweichung ggü. Geradennäherung  $-3 \cdot 10 \log_{10} 2 \approx -9 \text{ dB}$ . Phasenabfall dieses Poltripels über  $\omega \in [0.1, 10]$  um  $270^\circ$ .

**Schritt 3** Doppelnullstelle bei  $\omega = 2 \text{ rad/s}$  und Pol bei  $\omega = 10 \text{ rad/s}$ : die Doppelnull hebt die Slope ab  $\omega = 2$  um  $+40 \text{ dB/dec}$  (Netto  $-20 \text{ dB/dec}$  in  $(2, 10)$ ), der Pol bei  $\omega = 10$  senkt sie um weitere  $-20 \text{ dB/dec}$  (Netto  $-40 \text{ dB/dec}$  für  $\omega \gg 10$ ). Phasenbeiträge:  $+180^\circ$  der Doppelnullstelle über  $[0.2, 20]$ ,  $-90^\circ$  des Pols bei  $10$  über  $[1, 100]$ ; Die Phase verläuft von  $180^\circ$  ( $\omega \ll 0.1$ ) gegen  $0^\circ$  ( $100 \ll \omega$ ).

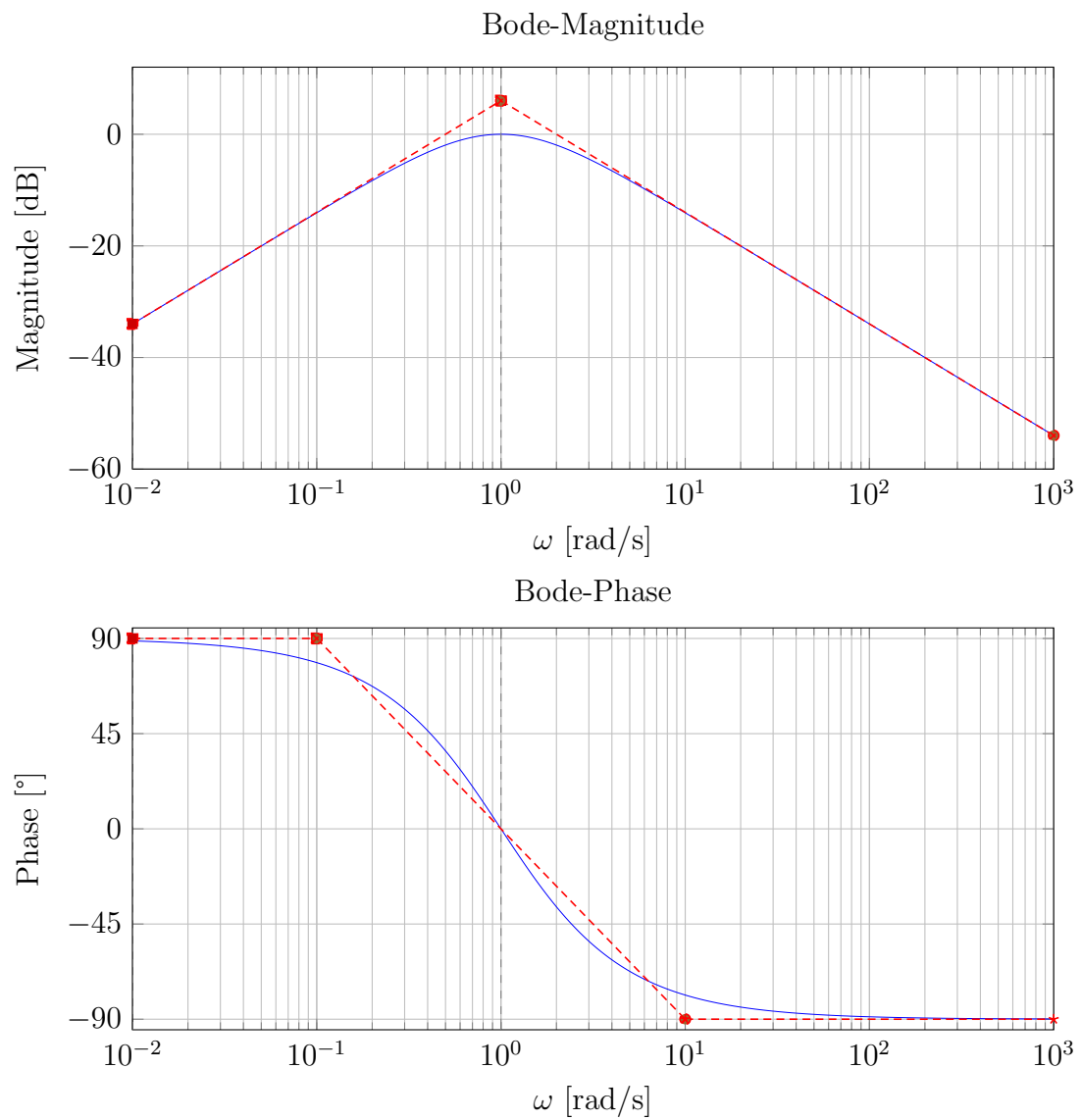
### Stückweise Näherung

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} \approx \begin{cases} 40, & \omega \ll 1, \\ 40 - 60 \log_{10} \omega, & 1 \ll \omega \ll 2, \\ 40 - 60 \log_{10} 2 - 20 \log_{10}(\omega/2), & 2 \ll \omega \ll 10, \\ 40 - 60 \log_{10} 2 - 20 \log_{10} 5 - 40 \log_{10}(\omega/10), & \omega \gg 10, \end{cases}$$

## Aufgabe U)

$$H(s) = \frac{2s}{s^2 + 2s + 1} = \frac{2s}{(s+1)^2}.$$

### U.1 Bode-Diagramm



## U.2 Erklärung

**Schritt 1** Nullstelle im Ursprung und Faktor 2: für  $\omega \ll 1$  gilt  $|H(j\omega)| \approx 2\omega$   
 $\Rightarrow$  Startsteigung  $+20 \text{ dB/dec}$ , Fixpunkt bei  $|H(1j)|_{dB} = 20 \log_{10} 1 \approx 0 \text{ dB}$ ;  
Fixpunkt für Geradennäherung liegt ca.  $6 \text{ dB}$  über exakten Fixpunkt  $0 \text{ dB}$ .  
Startphase  $\approx +90^\circ$ .

**Schritt 2** Doppelter Pol bei  $\omega = 1 \text{ rad/s}$ : ab  $\omega = 1$  zusätzliche Steigungsänderung  
um  $-40 \text{ dB/dec}$ ; Netto-Slope für  $\omega \gg 1$  ist  $-20 \text{ dB/dec}$  ( $|H| \sim 2/\omega$ ).  
Phasenabfall der beiden Pole zusammen  $180^\circ$  über  $\omega \in [0.1, 10]$ ; Näherung:  
 $45^\circ - 90^\circ \log_{10} \omega$ .

**Schritt 3** Grenzverhalten:  $\omega \ll 1 \Rightarrow |H|_{dB} \approx 20 \log_{10} 2 + 20 \log_{10} \omega$ ,  $\angle H \approx +90^\circ$ ;  
 $\omega \gg 1 \Rightarrow |H|_{dB} \approx 20 \log_{10} 2 - 20 \log_{10} \omega$ ,  $\angle H \rightarrow -90^\circ$ .

### Stückweise Näherung

$$|H(j\omega)|_{dB} \approx \begin{cases} 20 \log_{10} 2 + 20 \log_{10} \omega, & \omega \ll 1, \\ 20 \log_{10} 2 - 20 \log_{10} 2 = 0, & \omega = 1, \\ 20 \log_{10} 2 - 20 \log_{10} \omega, & \omega \gg 1, \end{cases}$$