Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Laboratory for High
Power Electronic Systems

Netzwerke und Schaltungen II, D-ITET

Bodeplots — Musterlösung

Hinweise

– Phasenverläufe können aus ästhetischen Gründen um 360° verschoben sein; eine Verschiebung um 360° ändert die Aussage nicht.
– Magnitudenplots sind auf der y-Achse standardmäßig in 20-dB-Schritten beschriftet; falls es sich ästhetisch anbietet, sind auch 10-dB-Schritte zulässig.
– Mit dem MATLAB-Skript kann man selbst experimentieren, die Plots exakt berechnen und alle Ergebnisse nachprüfen.
– Die Teilaufgaben a, b, g, h und p sind ausführlicher erklärt als die übrigen.

Version: October 26, 2025

Einleitung: s und $j\omega$

Warum sind manche Übertragungsfunktionen manchmal abhängig von s und manchmal von jω*?*

Für sinusförmige stationäre Signale ist die Laplace- mit der Fourier-Transformierten auf der imaginären Achse äquivalent; eine Abklinghülle ist nicht nötig, daher setzt man $\sigma = 0$ und damit

$$s = j\omega.$$

Der Frequenzgang wird zwar als $H(j\omega)$ ausgewertet, aber die Schreibweise in s ist kompakter und, wie wir gesehen haben, äquivalent: Standardformen wie $1 + sT$, $1/(1 + sT)$, sL, $1/(sC)$ sind sofort lesbar und einfacher zu faktorisieren. Es bietet sich an in s zu modellieren und faktorisieren und um Magnituden/Phasen explitizit auszurechnen, am Ende $s \to j\omega$ einsetzen und mit den Gesetzen der komplexen Zahlen zu arbeiten.

Beispiele

$$H(s) = \frac{1}{1 + sT} \qquad \Leftrightarrow \qquad H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$$

$$H(s) = \frac{sT}{1 + sT} \qquad \Leftrightarrow \qquad H(j\omega) = \frac{j\omega T}{1 + j\omega T}$$

$$H(s) = \frac{1}{sT} \qquad \Leftrightarrow \qquad H(j\omega) = \frac{1}{j\omega T}$$

$$H(s) = sT \qquad \Leftrightarrow \qquad H(j\omega) = j\omega T$$

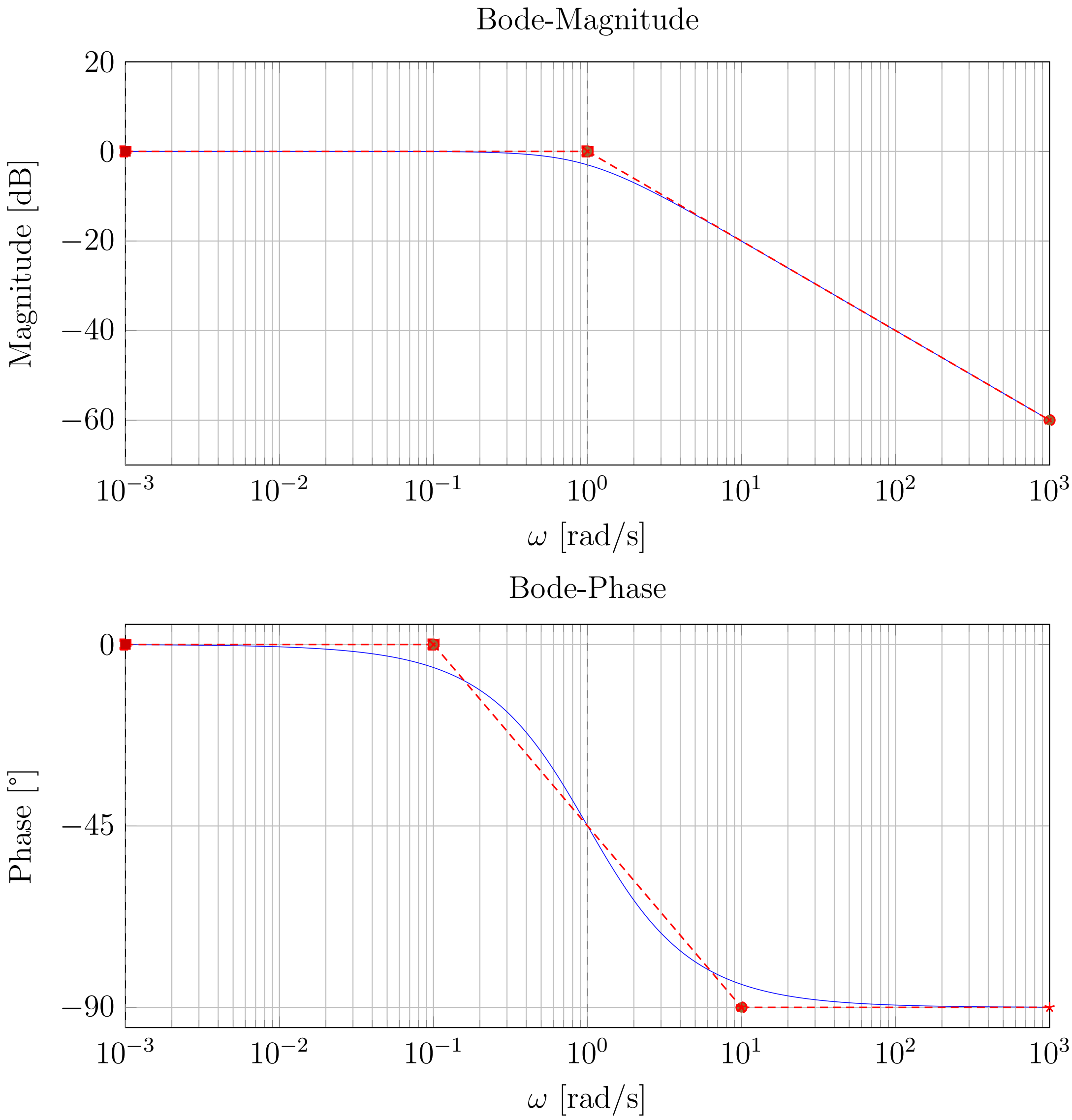
$$H(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad H(j\omega) = \frac{\omega_0^2}{-\omega^2 + j\,2\zeta\omega_0\omega + \omega_0^2}$$

$$H(s) = \frac{1 + sT_z}{1 + sT_p} \qquad \Leftrightarrow \qquad H(j\omega) = \frac{1 + j\omega T_z}{1 + j\omega T_p}$$

Aufgabe A)

$$H(s) = \frac{1}{s+1}\,.$$

A.1 Bode-Diagramm



A.2 Erklärung (ausführlich)

1. **Normalform herstellen.** Bringe die Übertragungsfunktion exakt in die im Skript definierte Standardform für reelle Pol-/Nullstellen.

$$H(s) = \frac{1}{1 + sT_p} \quad \text{mit} \quad T_p = 1.$$

   Hier haben wir:

$$\underline{F}_1(s) = \frac{1}{1 + sT_p} \quad \text{und} \quad K_0 = 1 \quad \text{und} \quad r = 0.$$

   Klassifizikation des ersten Teilglieds $\underline{F}_1$: reelles Polglied erster Ordnung.

2. **Eckfrequenz bestimmen und sortieren.** Bestimme die Eckfrequenz aus der Zeitkonstante:

$$\omega_p = \frac{1}{T_p} = 1\,\text{rad/s}.$$

   Es existiert nur diese Eckfrequenz; die aufsteigende Sortierung $\omega_1 < \omega_2 < \ldots$ ist damit trivial.

3. **Startpunkt des Amplitudengangs festlegen (Geradennäherung).** Setze die Startfrequenz gleich der kleinsten Eckfrequenz $\omega_{\min} = \omega_p = 1\,\text{rad/s}$. Verwende die Skript-Regel

$$F_{\text{dB}}(\omega_{\min}) = 20\log_{10}\Big(|K_0\, F^*_{ges}(0)| \cdot \omega^r_{\min}\Big) = 20\log_{10}(1) = 0\,\text{dB}$$

   Hier gilt $K_0 = 1$, $r = 0$ und $F^*_{ges}(0) = 1 \Rightarrow F_{\text{dB}}(\omega_{\min}) = 0\,\text{dB}$. Dieser Punkt nützt uns als Anker für die Geradennäherung.

4. **Verlauf links vom Startpunkt zeichnen.** Für $\omega < \omega_{\min}$ bleibt die Amplituden-Asymptote waagrecht, denn die Anfangssteigung beträgt $r \cdot 20\,\text{dB/dec} = 0$. Trage also eine horizontale Linie bei 0 dB ein.

5. **Steigungswechsel an der Eckfrequenz eintragen.** Ein einfaches Polglied $1/(1+sT_p)$ reduziert die Steigung ab ω_p um 20 dB/dec. Da bist jetzt die Steigung 0 dB/dec betrug, ist diese ab jetzt $-20\,\text{dB/dec}$. Zeichne rechts von ω_p die Gerade mit Steigung $-20\,\text{dB/dec}$. Die Formel für die Geradennäherung lautet:

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} \approx -20\log_{10}\omega \quad (\omega \geq 1).$$

   Mehrfachpole würden die Änderung mehrfach zählen; hier nicht nötig.

6. **Eckabrundung korrekt berücksichtigen.** Bei einfachen reellen Polen ergibt sich am Knickpunkt $\omega = \omega_p$ eine Abweichung von $-3\,\mathrm{dB}$ gegenüber der Gerade. Setze dort einen Stützpunkt:

$$|H(j\omega_p)|_{\mathrm{dB}} = -10\log_{10}(1+1^2) = -10\log_{10}2 \approx -3.01\,\mathrm{dB}.$$

   Runde die Ecke entsprechend ab. Hätten wir einen Mehrfachpol bei ω_p (Beispielsweise $\left(\frac{1}{1+sT_p}\right)^t$), müsste man die Ecke um $t \cdot 3.01\,\mathrm{dB}$ abrunden.

7. **Phasenstartwert festlegen.** Nutze die Regel für $\omega \to 0$: Da $K_0F_{ges}(0) > 0$ und $r = 0$, ist der Startwert der Phase

$$\varphi(0) = 0°.$$

8. **Phasenänderung durch das Polglied eintragen.** Ein reelles Polglied erster Ordnung erzeugt insgesamt eine Phasenänderung von $-90°$. Trage die Näherung ein:

$$\varphi(\omega) \approx \begin{cases} 0°, & \omega \le 0.1\,\omega_p, \\ \text{linear mit Steigung } -45°/\text{Dec}, & 0.1\,\omega_p < \omega < 10\,\omega_p, \\ -90°, & \omega \ge 10\,\omega_p. \end{cases}$$

   Das lineare Zwischenstück kann Formelkonform als $\varphi(\omega) \approx -45° - 45°\log_{10}\omega$ dargestellt werden (hier mit $\omega_p = 1$).

9. **Grenzwerte und Konsistenz prüfen.** DC: $|H(0)| = 1 \Rightarrow 0\,\mathrm{dB}$, $\varphi(0) = 0°$. HF: $|H(j\omega)| \sim 1/\omega \Rightarrow -20\log_{10}\omega\,\mathrm{dB}$). Pol-/Nullzählung bestätigt die Endphase: Zählergrad $m = 0$, Nennergra $n = 1 \Rightarrow \varphi(\infty) = (m-n)\cdot 90° = -90°$.

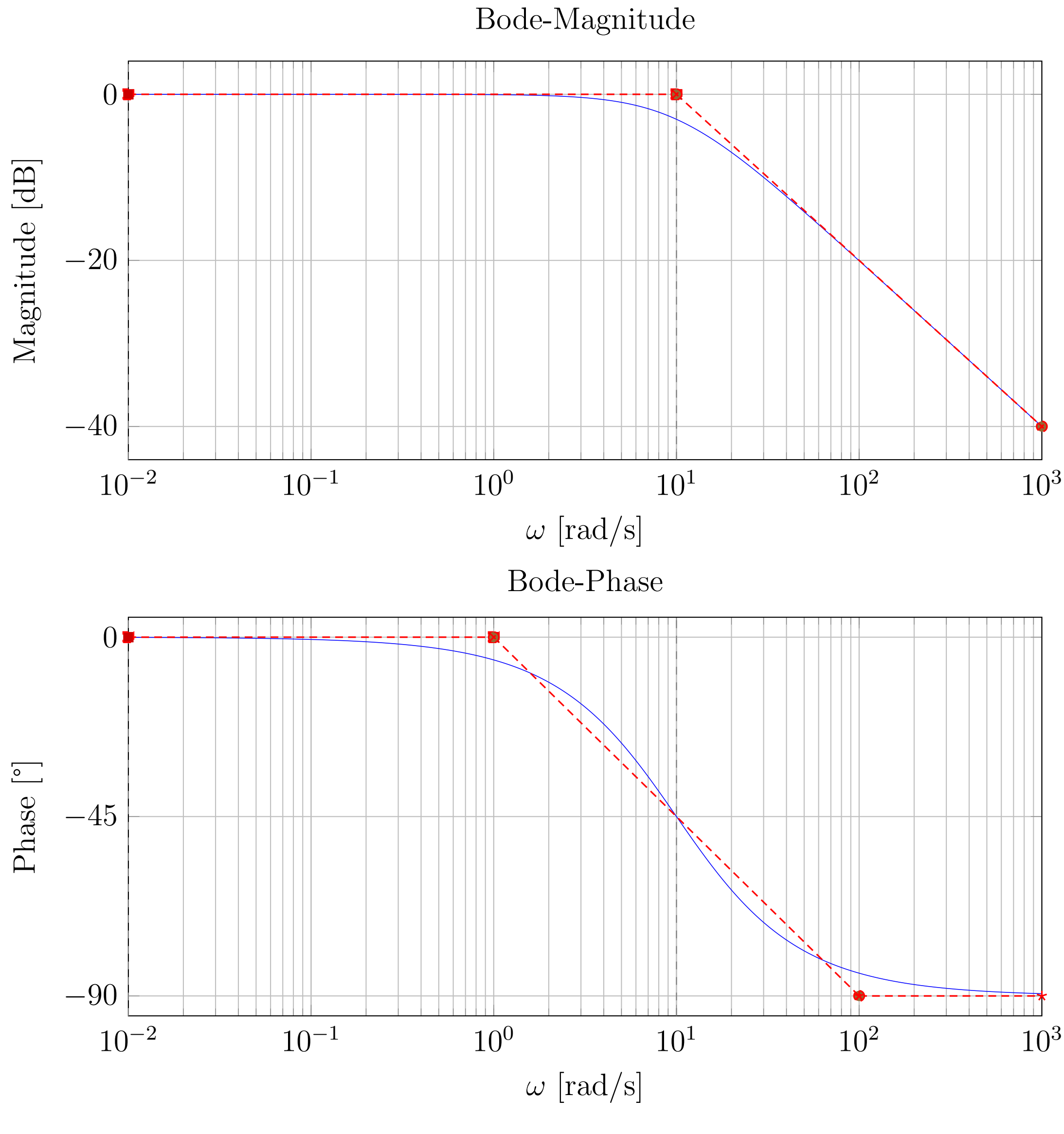
Stückweise Näherungen (für die Skizze)

$$|H(j\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx \begin{cases} 0, & \omega \ll 1, \\ -10\log_{10}2, & \omega = 1, \\ -20\log_{10}\omega, & \omega \gg 1, \end{cases} \qquad \varphi(\omega) \approx \begin{cases} 0°, & \omega \le 0.1, \\ -45° - 45°\log_{10}\omega, & 0.1 < \omega < 10, \\ -90°, & \omega \ge 10. \end{cases}$$

Aufgabe B)

$$H(s) = \frac{10}{s+10}\,.$$

B.1 Bode-Diagramm



B.2 Erklärung

Schritt 1 DC-Faktor 1: $H(s) = \frac{10}{s+10} = \frac{1}{1+s/10}$, daher für $\omega \ll 10$ gilt $|H(\mathrm{j}\omega)| \approx 1$; Betrag liegt bei $0\,\mathrm{dB}$ ohne Anfangssteigung, Phase $\approx 0°$.

Schritt 2 Einfacher Pol bei $\omega_p = 10\,\mathrm{rad/s}$: ab $\omega = 10$ wechselt die Magnituden-Steigung um $-20\,\mathrm{dB/dec}$; die exakte Dämpfung am Eckpunkt beträgt $-10\log_{10} 2 \approx -3.01\,\mathrm{dB}$. Die Phasenübergangsdekade liegt zwischen $\omega_l = 1$ und $\omega_h = 100\,\mathrm{rad/s}$.

Schritt 3 Grenzverhalten: für $\omega \gg 10$ folgt $|H(\mathrm{j}\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx -20\log_{10}(\omega/10)$; die Phase fällt in der Übergangsdekade linearisiert von $0°$ nach $-90°$ (Näherung: $-45° - 45\log_{10}(\omega/10)$), mit $\angle H(\mathrm{j}\omega) = -45°$ bei $\omega = 10$.

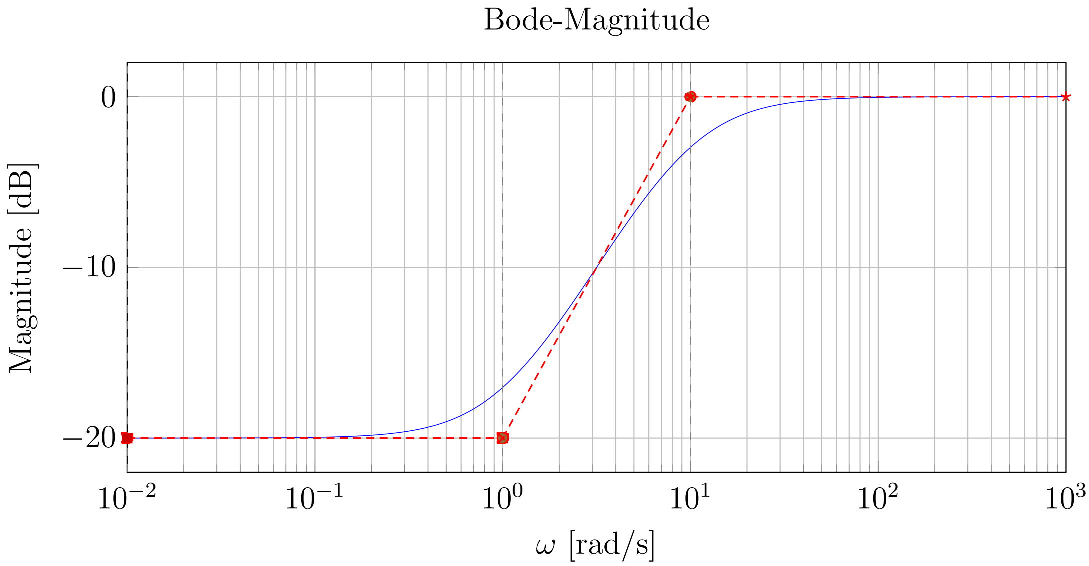
Stückweise Näherung

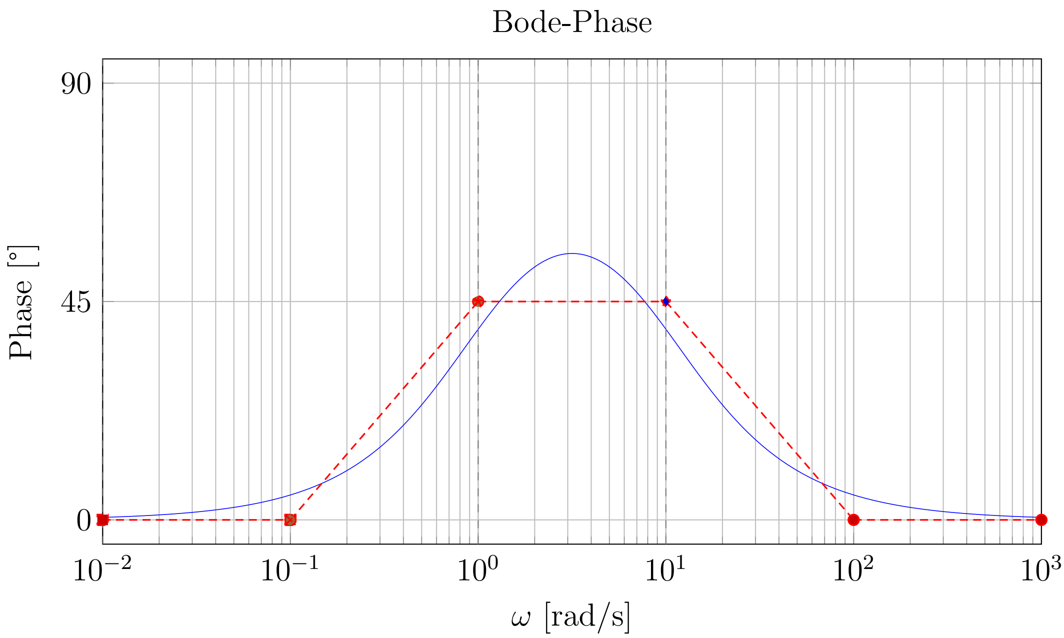
$$|H(\mathrm{j}\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx \begin{cases} 0, & \omega \ll 10, \\ -10\log_{10} 2, & \omega = 10, \\ -20\log_{10}(\omega/10), & \omega \gg 10, \end{cases}$$

Aufgabe C)

$$H(s) = \frac{s+1}{s+10}\,.$$

C.1 Bode-Diagramm





C.2 Erklärung (ausführlich)

1. Zuerst Normalform herstellen.

$$H(s) = \frac{s+1}{s+10} = \frac{1+sT_z}{10\,(1+sT_p)}$$

Die Teilglieder und Variablen gemäß Skript sind:

$$\underline{F}_1(s) = \frac{1}{1+s\frac{1}{10}},\ \underline{F}_2(s) = 1+s, \quad T_z = 1,\ T_p = \tfrac{1}{10},\ K_0 = \tfrac{1}{10} \text{ und } r = 0.$$

reelle Nullstelle erster Ordnung bei $\omega_z = 1/T_z = 1\,\text{rad/s}$; reeller Pol erster Ordnung bei $\omega_p = 1/T_p = 10\,\text{rad/s}$.

2. Danach Eckfrequenzen bestimmen und sortieren.

$$\omega_z = 1\,\text{rad/s}, \qquad \omega_p = 10\,\text{rad/s}, \qquad \omega_z < \omega_p.$$

3. Startpunkt des Amplitudengangs (Geradennäherung). Setze $\omega_{\min} = \omega_z = 1$.

$$F_{\text{dB}}(\omega_{\min}) = 20\log_{10}\!\big(|K_0\,F^*_{ges}(0)|\,\omega^r_{\min}\big) = 20\log_{10}\!\big(\tfrac{1}{10}\big) = -20\,\text{dB}.$$

Anfangssteigung $r \cdot 20\,\text{dB/dec} = 0$.

4. Verlauf links vom Startpunkt. Für $\omega < 1$ bleibt die Magnitude-Asymptote horizontal bei $-20\,\text{dB}$, da $r = 0$.

5. Steigungswechsel an den Ecken. Die Nullstelle bei $\omega_z = 1$ erhöht die Steigung um $+20\,\text{dB/dec}$. Der Pol bei $\omega_p = 10$ senkt sie wieder um $-20\,\text{dB/dec}$. Damit:

$$\begin{cases} \omega < 1: \quad 0\,\text{dB/dec}, \\ 1 \le \omega < 10: \quad +20\,\text{dB/dec}, \\ \omega \ge 10: \quad 0\,\text{dB/dec}. \end{cases}$$

6. Eckabrundung (exakte Stützpunkte).

$$|H(j\omega)| = \frac{\sqrt{1+\omega^2}}{\sqrt{100+\omega^2}}, \qquad |H(j\cdot 1)|_{\text{dB}} = 10\log_{10}\!\left(\frac{2}{101}\right) \approx -17.03\,\text{dB},$$

$$|H(j\cdot 10)|_{\text{dB}} = 10\log_{10}\!\left(\frac{101}{200}\right) \approx -2.97\,\text{dB}.$$

Bei $\omega = 1$ liegt die Kurve $\approx 3\,\text{dB}$ über der Geradennäherung, bei $\omega = 10$ $\approx 3\,\text{dB}$ darunter. Auch hier gilt: Mehrfachpole/-nullstellen sorgen für eine Rundung um $t \cdot 3\,\text{dB}$

7. Phasenstartwert. Da $K_0 F_{ges}(0) > 0$ gilt:

$$\varphi(0) = r \cdot 90^\circ = 0^\circ.$$

8. Phasenänderung durch Nullstelle und Pol. Reelle Nullstelle 1. Ordnung: $0^\circ \to +90^\circ$ über $[0.1, 10]$. Reeller Pol 1. Ordnung: $0^\circ \to -90^\circ$ über $[1, 100]$. Die Phasensteigungs und -senkungseffekte überschneiden sich in $[10, 100]$ und addieren sich dort. In diesem Interval bleibt also die Phase gleich Die Geradennäherung lautet also:

$$\varphi(\omega) \approx \begin{cases} 0^\circ, & \omega \le 0.1, \\ +45^\circ + 45^\circ \log_{10} \omega, & 0.1 < \omega < 1, \\ +45^\circ, & 1 \le \omega \le 10, \\ +45^\circ - 45^\circ \log_{10}(\omega/10), & 10 < \omega < 100, \\ 0^\circ, & \omega \ge 100. \end{cases}$$

9. Exakte Stützstellen (Kontrolle).

$$\varphi(\omega) = \arctan(\omega) - \arctan\left(\frac{\omega}{10}\right) \, [^\circ].$$

Praktische Punkte:

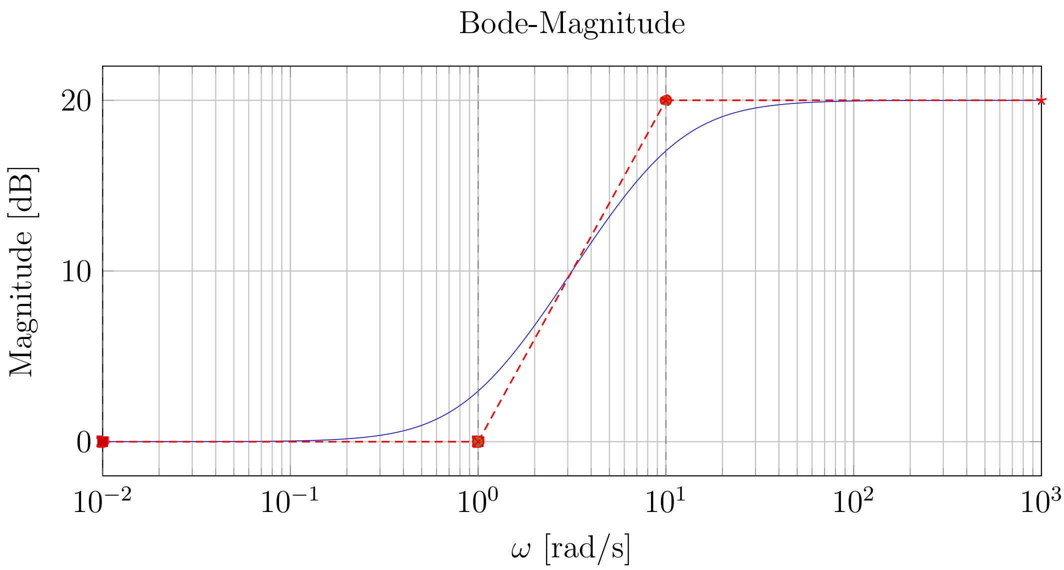
$$\begin{aligned} \omega = 0.1 : \quad & |H|_{\mathrm{dB}} \approx -19.96, \quad \varphi \approx +5.14^\circ, \\ \omega = 1 : \quad & |H|_{\mathrm{dB}} \approx -17.03, \quad \varphi \approx +39.29^\circ, \\ \omega = 10 : \quad & |H|_{\mathrm{dB}} \approx -2.97, \quad \varphi \approx +39.29^\circ, \\ \omega = 100 : \quad & |H|_{\mathrm{dB}} \approx -0.04, \quad \varphi \approx +5.14^\circ. \end{aligned}$$

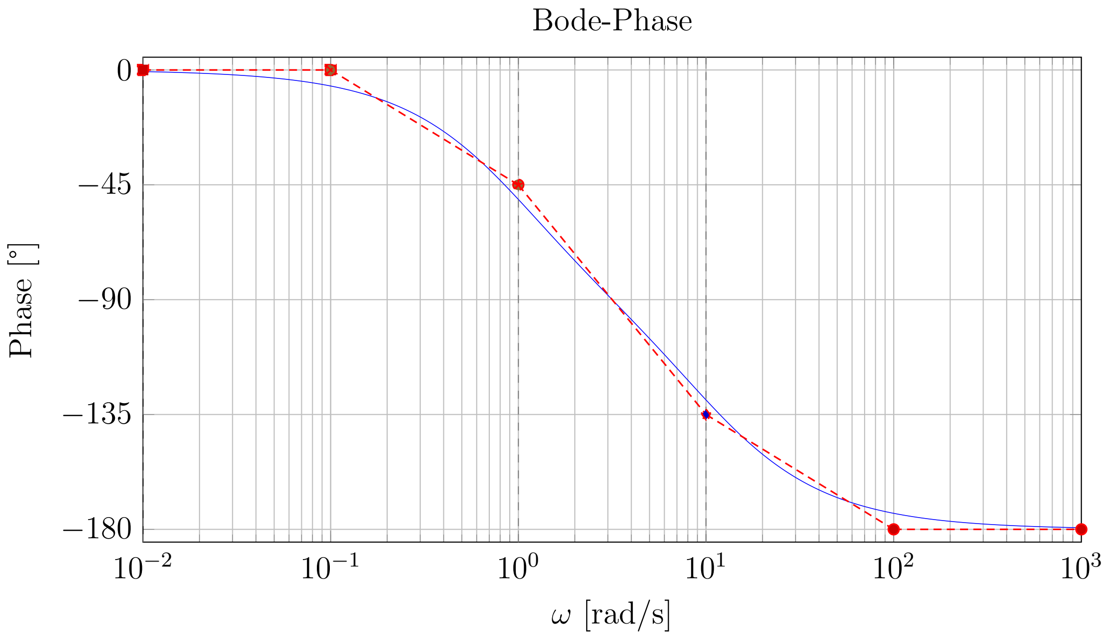
10. Grenzwerte und Konsistenz. DC: $|H(0)| = \frac{1}{10} \Rightarrow -20\,\mathrm{dB}$, $\varphi(0) = 0^\circ$. Für $\omega \to \infty$: $|H(j\omega)| \to 1 \Rightarrow 0\,\mathrm{dB}$. Pol-/Nullzählung: $m = n = 1 \Rightarrow \varphi(\infty) = (m - n) \cdot 90^\circ = 0^\circ$.

Aufgabe D)

$$H(s) = \frac{10\,(1-s)}{s+10}\,.$$

D.1 Bode-Diagramm





D.2 Erklärung

Schritt 1 DC-Faktor 1: $H(0) = 1 \Rightarrow |H|_{\mathrm{DC}} = 0\,\mathrm{dB}$ ohne Anfangssteigung; Phase $\approx 0°$.

Schritt 2 Nullstelle bei $\omega_z = 1\,\mathrm{rad/s}$ in der rechten Halbebene $\Rightarrow$ ab $\omega = 1$ Anstieg um $+20\,\mathrm{dB/dec}$. Übergang $0° \to -90°$ über $\omega \in [0.1, 10]$; Geradennäherung $-45° - 45\log_{10}\omega$ liefert $\angle H(1) \approx -45°$. Exakt liegt die Magnitude bei $\omega = 1$ bei $20 + 10\log_{10}2 - 10\log_{10}101 \approx +3\,\mathrm{dB}$.

Schritt 3 Pol bei $\omega_p = 10\,\mathrm{rad/s}$: ab $\omega = 10$ Steigungswechsel um $-20\,\mathrm{dB/dec}$; für $\omega \gg 10$ ergibt sich konstanter Betrag $\approx +20\,\mathrm{dB}$. Phasenabfall des Pols um weitere $90°$ über $\omega \in [1, 100]$; Geradennäherung $-45° - 45\log_{10}(\omega/10)$. Zusammengesetzt: Phase $\approx 0°$ für $\omega \ll 0.1$, $\approx -45°$ um $\omega \approx 1$, $\approx -135°$ um $\omega \approx 10$ und $\approx -180°$ für $\omega \gg 100$.

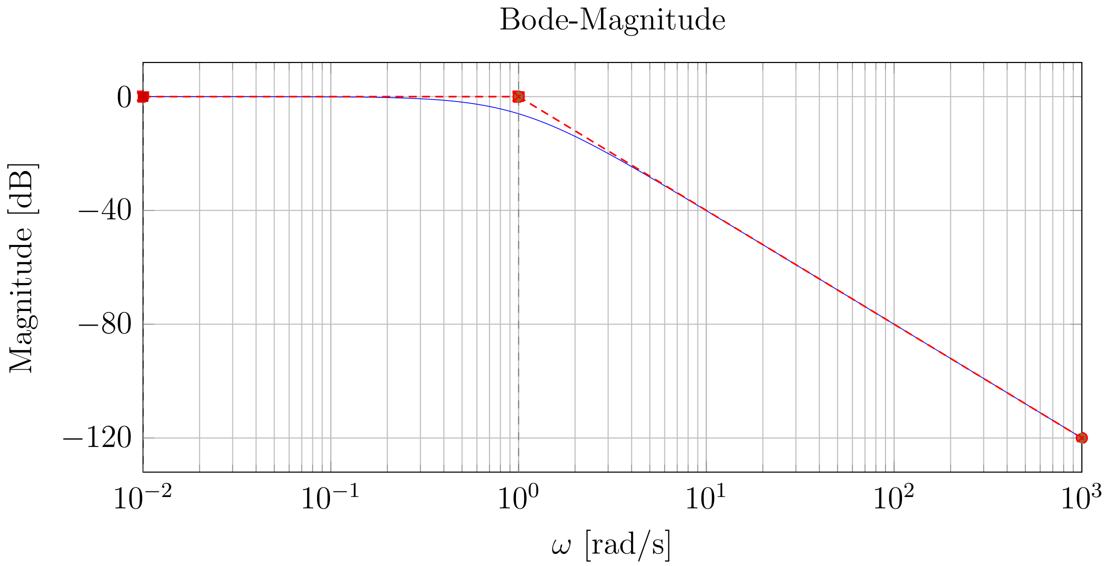
Stückweise Näherung

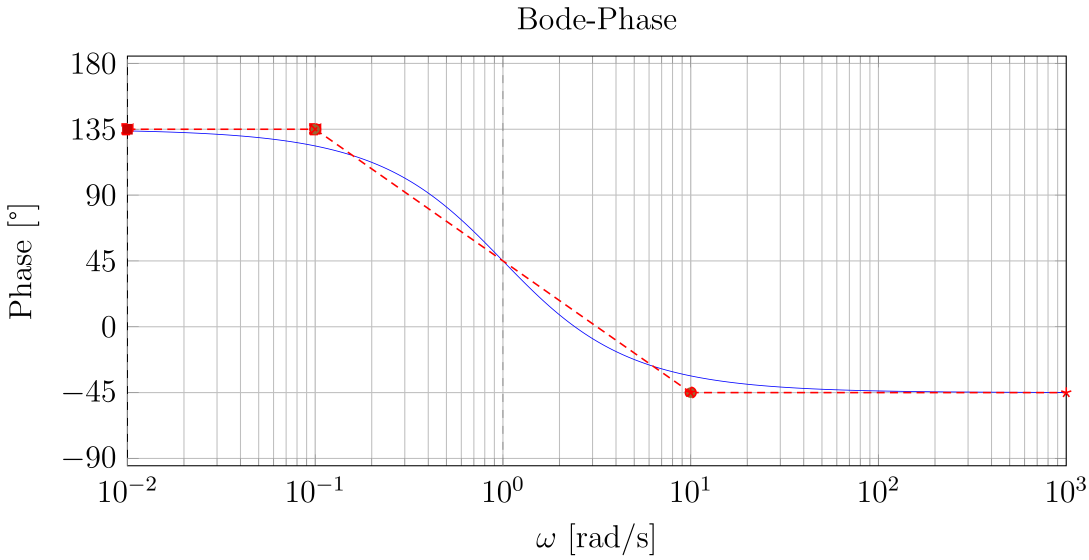
$$|H(\mathrm{j}\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx \begin{cases} 0, & \omega \ll 1, \\ 20\log_{10}\omega, & 1 \ll \omega \ll 10, \\ 20, & \omega \gg 10, \end{cases}$$

Aufgabe E)

$$H(s) = \frac{-1 + \mathrm{j}}{\sqrt{2}\,(s+1)^2}\,.$$

E.1 Bode-Diagramm





E.2 Erklärung

Schritt 1 Konstanter Faktor $(-1 + \mathrm{j})/\sqrt{2} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}135°}$: Betrag 1 $\Rightarrow$ Start bei 0 dB ohne Anfangssteigung; die Phase "fängt" bei $+135°$ an (reiner Phasor, kein Einfluss auf die Magnitude).

Schritt 2 Doppelpol bei $\omega_p = 1\,\mathrm{rad/s}$: ab $\omega = 1$ sinkt die Magnitude mit $-40\,\mathrm{dB/dec}$; am Eckpunkt beträgt die exakte Dämpfung $-20\log_{10}(1+1) = -20\log_{10}2 \approx -6\,\mathrm{dB}$ (Summe aus zwei $-3.01\,\mathrm{dB}$). Die Phase der beiden gleichliegenden Pole fällt zusammen in der Übergangsdekade $\omega \in [0.1, 10]$ insgesamt um 180°; lineare Geradennäherung: $135° \to -45°$ mit $\varphi_{\mathrm{approx}}(\omega) = 45° - 90°\log_{10}\omega$ für $\omega \in [0.1, 10]$.

Schritt 3 Grenzverhalten: für $\omega \ll 1$ gilt $|H(\mathrm{j}\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx 0\,\mathrm{dB}$ und $\angle H \approx +135°$ für $\omega \ll 0.1$; für $\omega \gg 1$ folgt $|H(\mathrm{j}\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx -40\log_{10}\omega$ und die Phase nähert sich $+135° - 2\cdot 90° = -45°$ an.

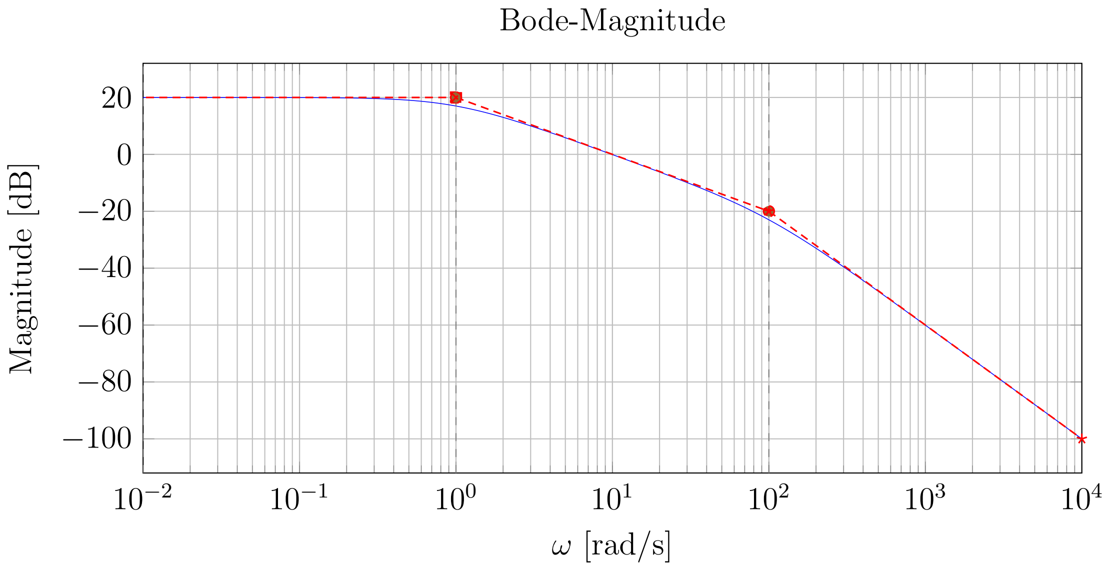
Stückweise Näherung

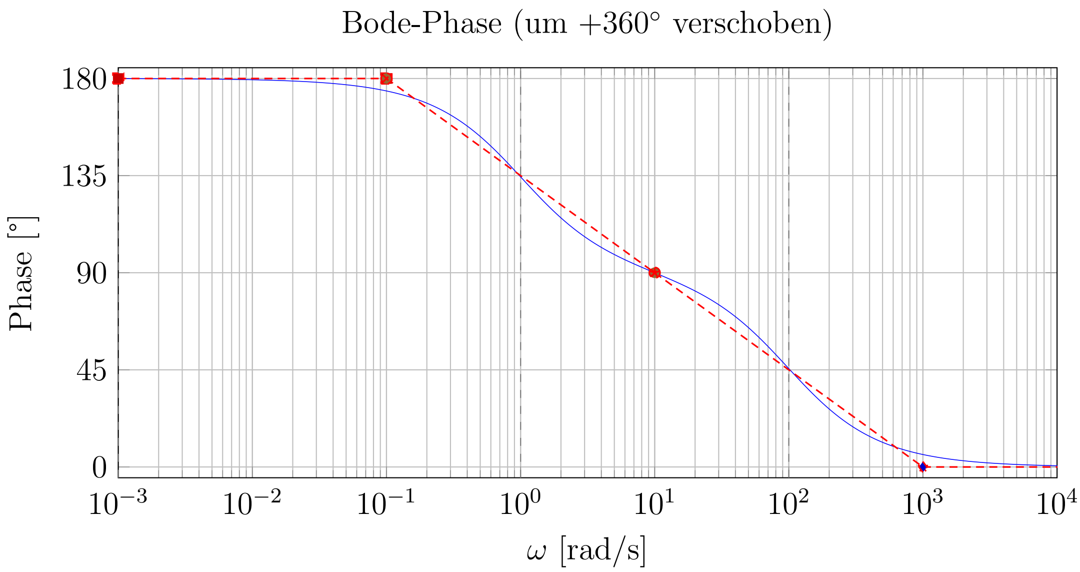
$$|H(\mathrm{j}\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx \begin{cases} 0, & \omega \ll 1, \\ -20\log_{10}2, & \omega = 1, \\ -40\log_{10}\omega, & \omega \gg 1, \end{cases}$$

Aufgabe F)

$$H(s) = \frac{-1000}{(s+1)(s+100)}\,.$$

F.1 Bode-Diagramm





F.2 Erklärung

Schritt 1 Konstante und Normierung: $H(s) = ... = -10\,\dfrac{1}{(1+s)(1+s/100)}$. DC-Wert $H(0) = -10 \Rightarrow |H|_{\mathrm{DC}} = 20\,\mathrm{dB}$. Das negative Vorzeichen bewirkt eine konstante Zusatzphase; hier wird die Phase, aus Darstellungsgründen, um $+360°$ angehoben, sodass sie von $180°$ (für $\omega \ll 1$) nach $0°$ (für $\omega \gg 100$) verläuft.

Schritt 2 Pol bei $\omega_{p1} = 1\,\mathrm{rad/s}$: ab $\omega = 1$ sinkt die Magnitude mit $-20\,\mathrm{dB/dec}$. Exakt: Zusatzdämpfung $-10\log_{10} 2 \approx -3\,\mathrm{dB}$. Phasenanteil (verschoben): Geradennäherung $135° - 45° \log_{10}\omega$ über $[0.1, 10]$ zu $90°$.

Schritt 3 Pol bei $\omega_{p2} = 100\,\mathrm{rad/s}$: ab $\omega = 100$ weitere Steigungsänderung $-20\,\mathrm{dB/dec}\Rightarrow$ Gesamtslope $-40\,\mathrm{dB/dec}$ für $\omega \gg 100$. Phasenanteil (verschoben): $45° - 45° \log_{10}(\omega/100)$ über $[10, 10^5]$. Grenzwerte: $|H(\mathrm{j}\omega)|_{\mathrm{dB}} \sim -40\log_{10}(\omega/100) + 20$; $\angle H(\mathrm{j}\omega) \to 0°$ für $\omega \to 10^5$.

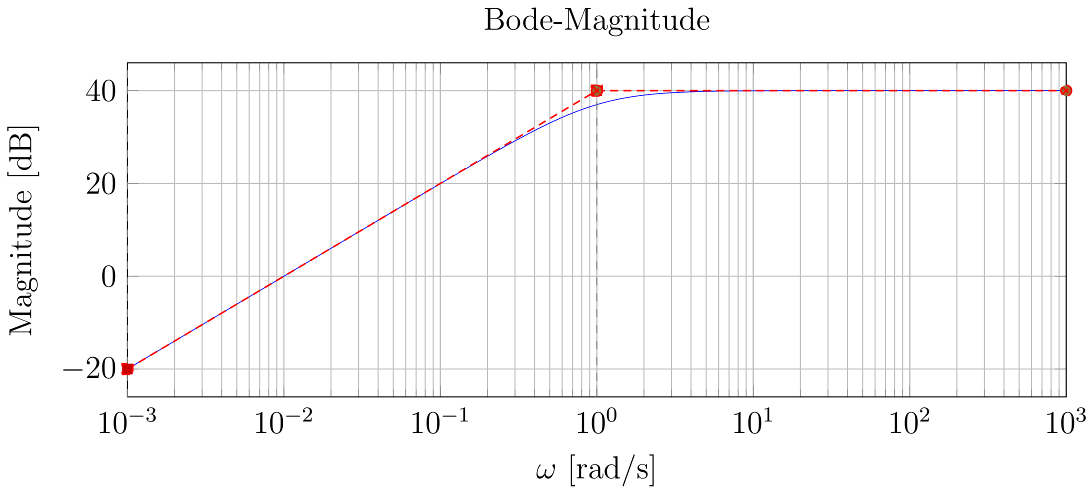
Stückweise Näherung

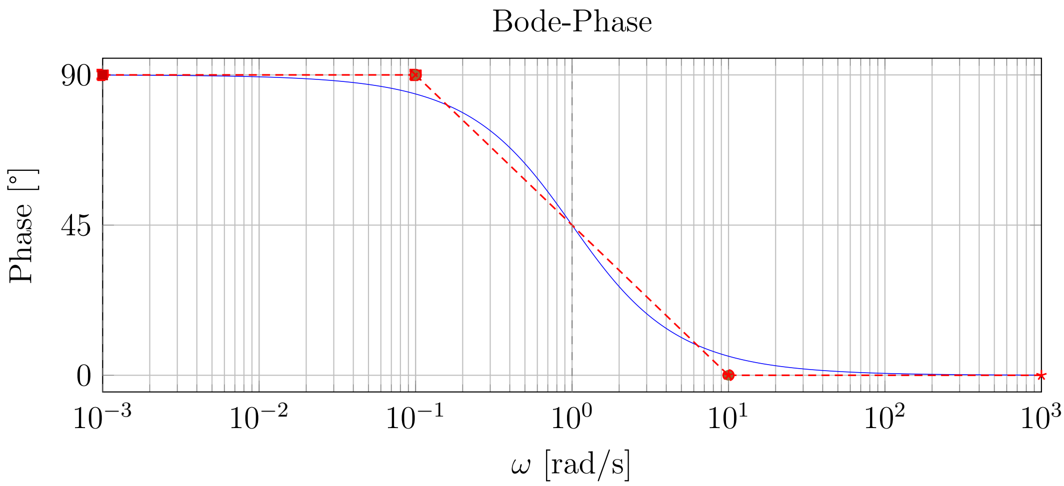
$$|H(\mathrm{j}\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx \begin{cases} 20, & \omega \ll 1, \\ 20 - 10\log_{10} 2, & \omega = 1, \\ 20 - 20\log_{10}\omega, & 1 \ll \omega \ll 100, \\ -20 - 10\log_{10} 2, & \omega = 100, \\ -20 - 40\log_{10}(\omega/100), & \omega \gg 100, \end{cases}$$

Aufgabe G)

$$H(s) = \frac{100\,s}{s+1}\,.$$

G.1 Bode-Diagramm





G.2 Erklärung (ausführlich)

1. **Normalform herstellen.** Bringe die Übertragungsfunktion exakt in die im Skript definierte Standardform für reelle Pol-/Nullstellen.

$$H(s) = \frac{100s}{s+1} = 100 \cdot s \cdot \frac{1}{(1+sT_p)}$$

Die Teilglieder und Variablen gemäß Skript sind:

$$\underline{F}_1(s) = \frac{1}{1+sT_p},\ T_p = 1,\ K_0 = 100 \text{ und } r = 1.$$

2. **Eckfrequenz bestimmen und sortieren.** Unsere einzige Eckfrequenz ist:

$$\omega_p = \frac{1}{T_p} = 1\,\text{rad/s}.$$

Da diese die einzige Eckfrequenz ist, ist eine Sortierung der Eckfrequenzen hier hinfällig.

3. **Startpunkt des Amplitudengangs festlegen (Geradennäherung).** Setze $\omega_{\min} = \omega_p = 1$. Gemäß Skript:

$$F_{\text{dB}}(\omega_{\min}) = 20\log_{10}\big(|K_0\, F^*_{ges}(0)|\, \omega^r_{\min}\big) = 20\log_{10}(100 \cdot 1 \cdot 1) = 40\,\text{dB}.$$

Anfangssteigung $r \cdot 20\,\text{dB/dec} = +20\,\text{dB/dec}$, da $r = 1$.

4. **Verlauf links vom Startpunkt zeichnen.** Für $\omega < \omega_{\min} = 1$ gilt die Geradennäherung mit Steigung $+20\,\text{dB/dec}$. Einzeichnen als Gerade mit Steigung $+20\,\text{dB/dec}$ durch den Punkt $(\omega_{\min}, 40\,\text{dB})$.

5. **Steigungswechsel an der Eckfrequenz eintragen.** $\underline{F}_1$ reduziert ab ω_p die Steigung um $20\,\text{dB/dec}$:

$$\omega < 1:\ +20\,\text{dB/dec}, \qquad \omega \geq 1:\ 0\,\text{dB/dec}.$$

6. **Eckabrundung korrekt berücksichtigen.**

$$|H(j\omega)| = \frac{100\,\omega}{\sqrt{1+\omega^2}}, \qquad |H(j \cdot 1)|_{\text{dB}} = 40 - 10\log_{10} 2 \approx 36.99\,\text{dB}.$$

Bei $\omega = 1$ liegt die Kurve etwa $3.01\,\text{dB}$ unter der rechten Asymptote.

7. Phasenstartwert festlegen. Da $K_0 F_{\text{ges}}(0) > 0$ und $r = 1$ gilt

$$\varphi(0) = \arg\big(K_0 F_{\text{ges}}(0)\big) + r \cdot 90^\circ = 0^\circ + 1 \cdot 90^\circ = +90^\circ.$$

8. Phasenänderung durch die Teilglieder eintragen. für $\omega \ll 0.1$: konstante $+90^\circ$. Durch $\underline{F}_1$ (Pol 1. Ordnung) sinkt die Phase von $90^\circ \to 0^\circ$ über $[0.1, 10]$ ab. Geradennäherung gesamt:

$$\varphi(\omega) \approx \begin{cases} +90^\circ, & \omega \leq 0.1, \\ 45^\circ - 45^\circ \log_{10} \omega, & 0.1 < \omega < 10, \\ 0^\circ, & \omega \geq 10. \end{cases}$$

9. Grenzwerte und Konsistenz prüfen. DC: $|H(0)| = 0 \mathrel{\widehat{=}} -\infty\,\text{dB}$, $\varphi(0) = 90^\circ$. HF: $|H(j\omega)| \to 100 \Rightarrow 40\,\text{dB}$.

Pol-/Nullzählung: Zählergrad $m = 1$, Nennergrad $n = 1 \Rightarrow \varphi(\infty) = (m - n) \cdot 90^\circ = 0^\circ$.

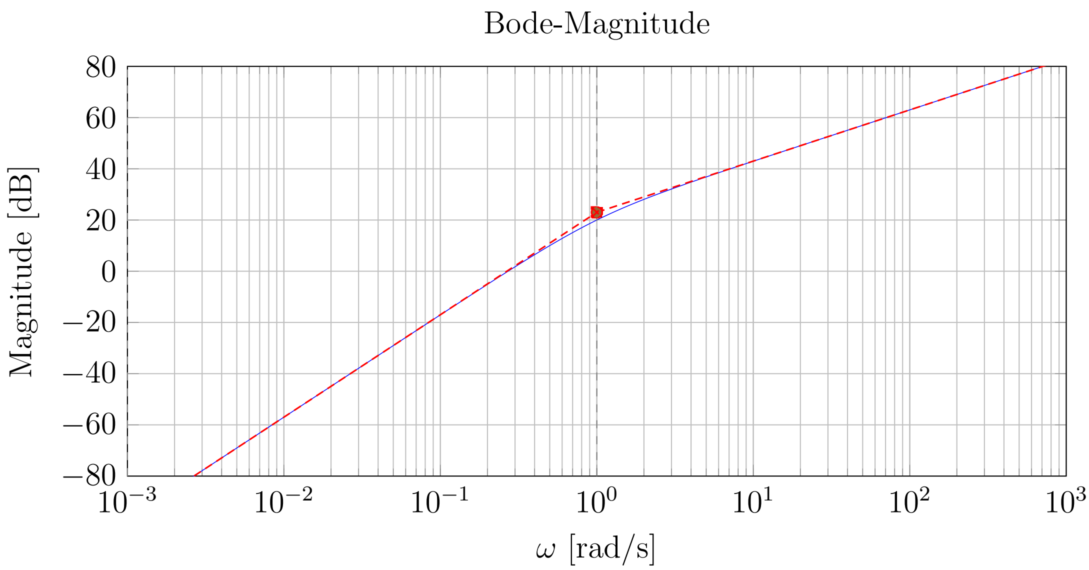
Stückweise Näherungen (für die Skizze)

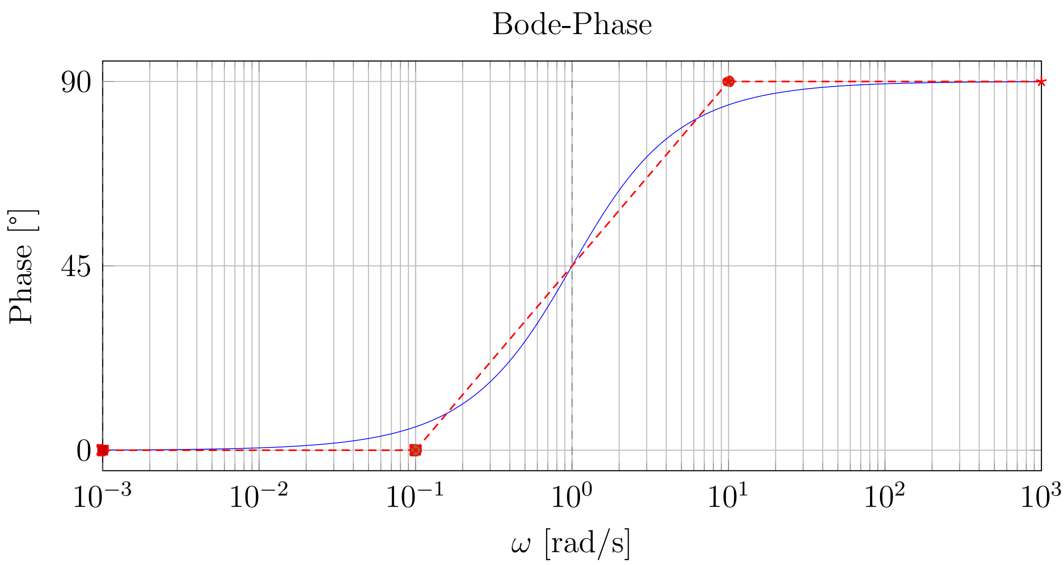
$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} \approx \begin{cases} 40 + 20 \log_{10} \omega, & \omega \ll 1, \\ 40 - 10 \log_{10} 2, & \omega = 1, \\ 40, & \omega \gg 1, \end{cases} \qquad \varphi(\omega) \approx \begin{cases} +90^\circ, & \omega \leq 0.1, \\ 45^\circ - 45^\circ \log_{10} \omega, & 0.1 < \omega < 10, \\ 0^\circ, & \omega \geq 10. \end{cases}$$

Aufgabe H)

$$H(s) = \frac{10\sqrt{2}\,s^2}{s-1}\,.$$

H.1 Bode-Diagramm





H.2 Erklärung (ausführlich)

1. **Normalform herstellen.** Bringe die Übertragungsfunktion exakt in die im Skript definierte Standardform für reelle Pol-/Nullstellen.

$$H(s) = K_0 \cdot s^r \frac{1}{1 - sT_p} \quad \text{mit} \quad K_0 = -10\sqrt{2},\ r = 2,\ T_p = 1.$$

   Hier haben wir:

$$\underline{F}_1(s) = \frac{1}{1 - sT_p} \quad \text{und} \quad K_0 = -10\sqrt{2} \quad \text{und} \quad r = 2.$$

   Klassifizikation des ersten Teilglieds $\underline{F}_1$: reelles Polglied erster Ordnung (RHP).

2. **Eckfrequenz bestimmen und sortieren.** Bestimme die Eckfrequenz aus der Zeitkonstante:

$$\omega_p = \frac{1}{T_p} = 1\,\text{rad/s}.$$

   Es existiert nur diese Eckfrequenz; die aufsteigende Sortierung $\omega_1 < \omega_2 < \ldots$ ist damit trivial.

3. **Startpunkt des Amplitudengangs festlegen (Geradennäherung).** Setze die Startfrequenz gleich der kleinsten Eckfrequenz $\omega_{\min} = \omega_p = 1\,\text{rad/s}$. Verwende die Skript-Regel

$$F_{\text{dB}}(\omega_{\min}) = 20\log_{10}\Big(|K_0\, F^*_{ges}(0)| \cdot \omega^r_{\min}\Big) = 20 + 10\log_{10} 2 \approx 23\,\text{dB}.$$

   Dieser Punkt nützt uns als Anker für die Geradennäherung.

4. **Verlauf links vom Startpunkt zeichnen.** Für $\omega < \omega_{\min}$ verläuft die Amplituden-Asymptote mit Steigung $r \cdot 20\,\text{dB/dec} = 40\,\text{dB/dec}$. Trage also eine Gerade mit $+40\,\text{dB/dec}$ durch den Anker ein.

5. **Steigungswechsel an der Eckfrequenz eintragen.** Ein einfaches Polglied $1/(1 - sT_p)$ reduziert die Steigung ab ω_p um $20\,\text{dB/dec}$. Da bis jetzt die Steigung $+40\,\text{dB/dec}$ betrug, ist diese ab jetzt $+20\,\text{dB/dec}$. Zeichne rechts von ω_p die Gerade mit Steigung $+20\,\text{dB/dec}$. Die Formel für die Geradennäherung lautet:

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} \approx 20 + 10\log_{10} 2 + 20\log_{10}\omega \quad (\omega \geq 1).$$

   Mehrfachpole würden die Änderung mehrfach zählen; hier nicht nötig.

6. **Eckabrundung korrekt berücksichtigen.** Bei einfachen reellen Polen ergibt sich am Knickpunkt $\omega = \omega_p$ eine Abweichung von $-3\,\mathrm{dB}$ gegenüber der Gerade. Setze dort einen Stützpunkt:

$$|H(j\omega_p)|_{\mathrm{dB}} = 23\,\mathrm{dB} - 3\,\mathrm{dB} = 20\,\mathrm{dB}.$$

   Runde die Ecke entsprechend ab. Hätten wir einen Mehrfachpol bei ω_p (Beispielsweise $\left(\frac{1}{1\mp sT_p}\right)^t$), müsste man die Ecke um $t \cdot 3.\,\mathrm{dB}$ abrunden.

7. **Phasenstartwert festlegen.** Nutze die Regel für $\omega \to 0$: Da $K_0 F_{ges}(0) < 0$ und $r = 2$ (gerade), ist der Startwert der Phase

$$\varphi(0) = -180^\circ + r \cdot 90^\circ = 0^\circ.$$

8. **Phasenänderung durch das Polglied eintragen.** Ein reelles Polglied erster Ordnung (RHP) erzeugt insgesamt eine Phasenänderung von $+90^\circ$. Trage die Näherung ein:

$$\varphi(\omega) \approx \begin{cases} 0^\circ, & \omega \le 0.1\,\omega_p, \\ \text{linear mit Steigung } +45^\circ/\text{Dec}, & 0.1\,\omega_p < \omega < 10\,\omega_p, \\ +90^\circ, & \omega \ge 10\,\omega_p. \end{cases}$$

   Das lineare Zwischenstück kann Formelkonform als $\varphi(\omega) \approx 45^\circ + 45^\circ \log_{10}\omega$ dargestellt werden (hier mit $\omega_p = 1$).

9. **Grenzwerte und Konsistenz prüfen.** DC: $|H(0)| = 0 \Rightarrow -\infty\,\mathrm{dB}$, $\varphi(0) = 0^\circ$. HF: $|H(j\omega)| \sim 10\sqrt{2}\,\omega \Rightarrow 20 + 10\log_{10} 2 + 20\log_{10}\omega\,\mathrm{dB}$. Pol-/Nullzählung bestätigt die Endphase: Zählergrad $m = 2$, Nennergra $n = 1 \Rightarrow \varphi(\infty) = (m - n) \cdot 90^\circ = +90^\circ$.

Stückweise Näherungen (für die Skizze)

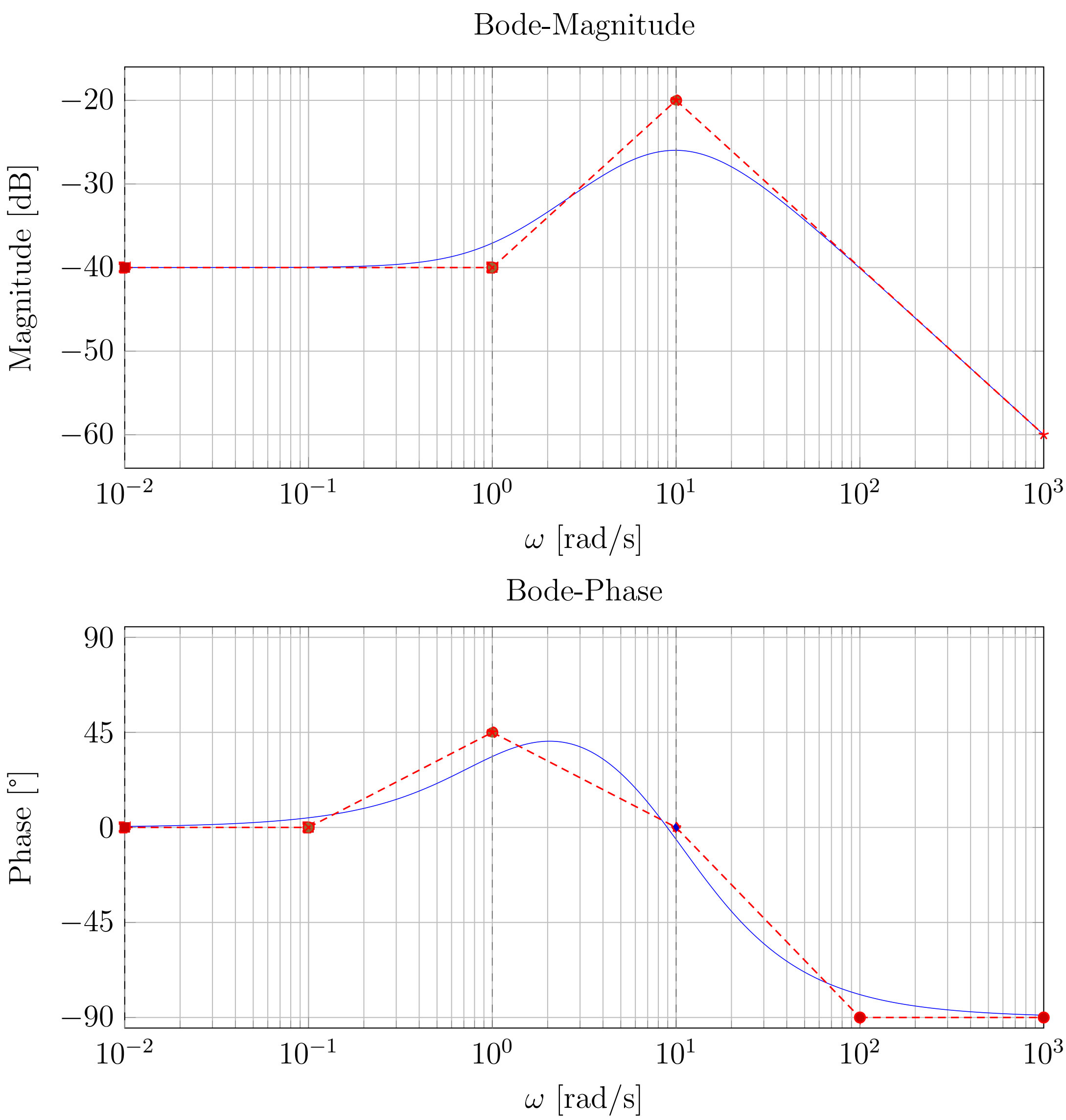
$$|H(j\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx \begin{cases} 20 + 10\log_{10} 2 + 40\log_{10}\omega, & \omega \ll 1, \\ 20, & \omega = 1, \\ 20 + 10\log_{10} 2 + 20\log_{10}\omega, & \omega \gg 1, \end{cases}$$

$$\varphi(\omega) \approx \begin{cases} 0^\circ, & \omega \le 0.1, \\ 45^\circ + 45^\circ \log_{10}\omega, & 0.1 < \omega < 10, \\ 90^\circ, & \omega \ge 10. \end{cases}$$

Aufgabe I)

$$H(s) = \frac{s+1}{(s+10)^2}\,.$$

I.1 Bode-Diagramm



I.2 Erklärung

Schritt 1 DC-Faktor $\frac{1}{100}$: $H(s) = \dfrac{s+1}{(s+10)^2}$ liefert $H(0) = \frac{1}{100}$, daher Startniveau $-40\,\mathrm{dB}$ ohne Anfangssteigung; Startphase $\angle H(\mathrm{j}\omega) \approx 0^\circ$ für $\omega \ll 1$.

Schritt 2 Nullstelle bei $\omega_z = 1\,\mathrm{rad/s}$: ab $\omega = 1$ steigt die Magnitude mit $+20\,\mathrm{dB/dec}$; bei $\omega = 1$ liegt der exakte Betrag um $+10\log_{10} 2 \approx +3\,\mathrm{dB}$ über der Geradennäherung ($|H(\mathrm{j}1)|_{\mathrm{dB}} \approx -37.0\,\mathrm{dB}$). Phasenbeitrag der LHP-Nullstelle: Übergang $0^\circ \to +90^\circ$ über $\omega \in [0.1, 10]$; Geradennäherung $+45^\circ + 45^\circ \log_{10}\omega$ in $[0.1, 1]$.

Schritt 3 Doppelpol bei $\omega_p = 10\,\mathrm{rad/s}$: ab $\omega = 10$ zusätzliche Steigungsänderung um $-40\,\mathrm{dB/dec}$; Netto-Slope damit $-20\,\mathrm{dB/dec}$ für $\omega \gg 10$ (asymptotisch $|H| \sim \omega/\omega^2 = 1/\omega$). Exakt bei $\omega = 10$: $|H(\mathrm{j}10)|_{\mathrm{dB}} = -20 - 20\log_{10} 2 \approx -26\,\mathrm{dB}$ (d. h. $-6\,\mathrm{dB}$ unter der Geradennäherung). Phasenbeitrag der beiden Pole: gemeinsamer Abfall um 180° über $\omega \in [1, 100]$; lineare Summe zweier Beiträge ($-45^\circ - 45^\circ \log_{10}(\omega/10)$) ergibt die roten Segmente $45^\circ - 45^\circ \log_{10}\omega$ für $\omega \in [1, 10]$ und $-90^\circ \log_{10}(\omega/10)$ für $\omega \in [10, 100]$. Grenzwerte: $\angle H \to 0^\circ$ für $\omega \ll 0.1$ und $\angle H \to -90^\circ$ für $\omega \gg 100$.

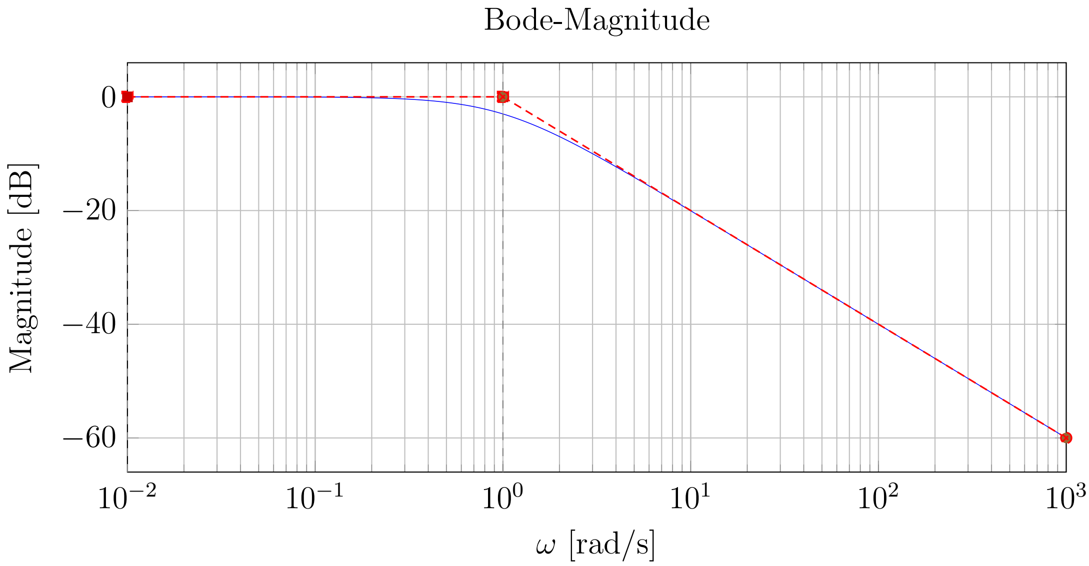
Stückweise Näherung

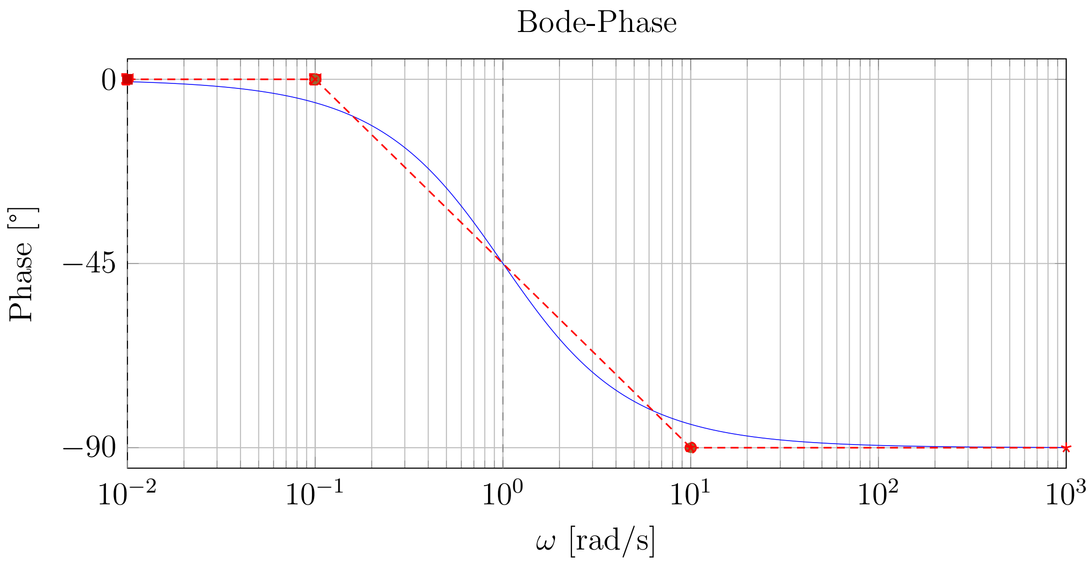
$$|H(\mathrm{j}\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx \begin{cases} -40, & \omega \ll 1, \\ -40 + 20\log_{10}\omega, & 1 \ll \omega \ll 10, \\ -20 - 20\log_{10}(\omega/10), & \omega \gg 10, \end{cases}$$

Aufgabe J)

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+1} = \frac{1}{s+1} \,.$$

J.1 Bode-Diagramm





J.2 Erklärung

Schritt 1 Kürzung: $s^2+2s+1=(s+1)^2 \Rightarrow H(s)=\dfrac{s+1}{(s+1)^2}=\dfrac{1}{s+1}$. DC-Faktor 1: für $\omega \ll 1$ gilt $|H(\mathrm{j}\omega)| \approx 1$; Betrag 0 dB ohne Anfangssteigung, Phase $\approx 0°$.

Schritt 2 Einfacher Pol bei $\omega_p = 1\,\mathrm{rad/s}$: ab $\omega = 1$ wechselt die Magnituden-Steigung um $-20\,\mathrm{dB/dec}$. Am Eckpunkt beträgt die exakte Dämpfung $-10\log_{10} 2 \approx -3\,\mathrm{dB}$ relativ zur Geraden. Phasenübergang über $\omega \in [0.1, 10]$ von $0°$ nach $-90°$; Geradennäherung: $-45° - 45\log_{10}\omega$.

Schritt 3 Grenzverhalten: für $\omega \gg 1$ folgt $|H(\mathrm{j}\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx -20\log_{10}\omega$; die Phase nähert sich $-90°$. Für $\omega \ll 1$ bleibt $|H| \approx 1$ und $\angle H \approx 0°$.

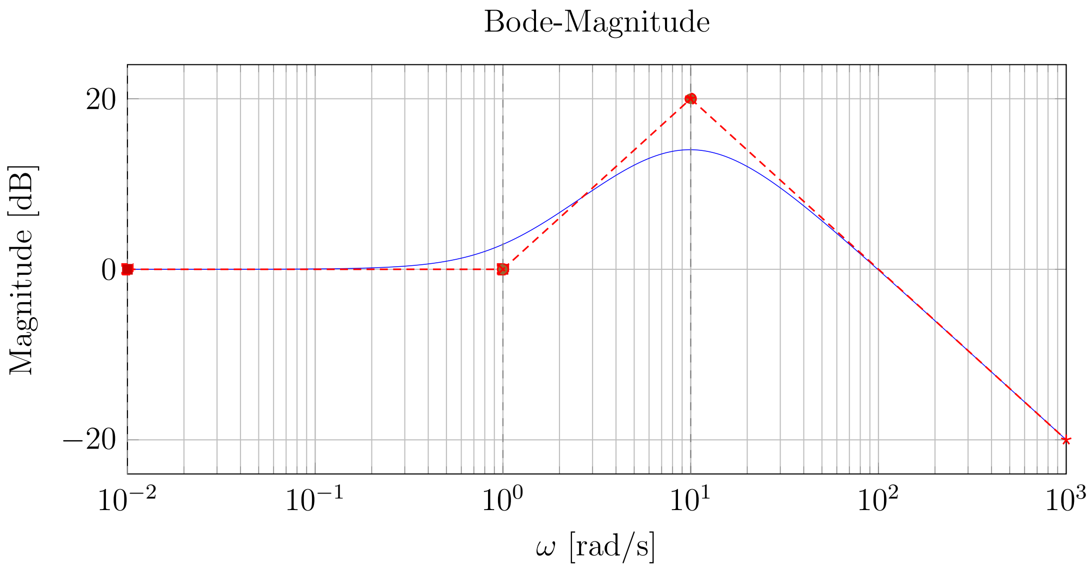
Stückweise Näherung

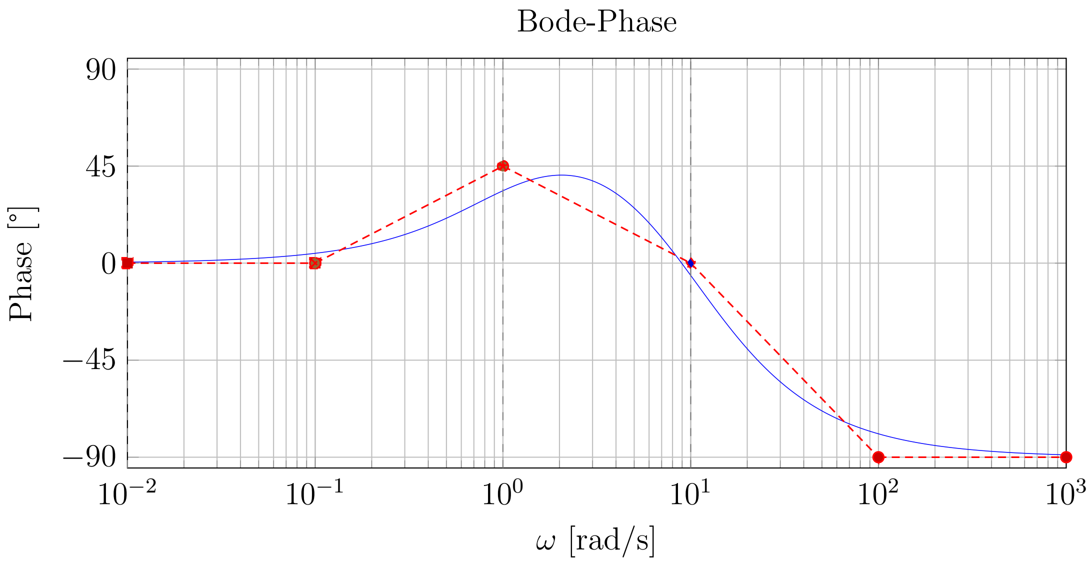
$$|H(\mathrm{j}\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx \begin{cases} 0, & \omega \ll 1, \\ -10\log_{10} 2, & \omega = 1, \\ -20\log_{10}\omega, & \omega \gg 1, \end{cases}$$

Aufgabe K)

$$H(s) = \frac{100\,(s+1)}{s^2+20s+100} = \frac{100\,(s+1)}{(s+10)^2}\,.$$

K.1 Bode-Diagramm





K.2 Erklärung

Schritt 1 Faktorisierung: $s^2+20s+100 = (s+10)^2 \Rightarrow H(s) = 100\,\dfrac{s+1}{(s+10)^2}$. DC-Wert $H(0) = 1 \Rightarrow |H|_{\mathrm{DC}} = 0\,\mathrm{dB}$; Anfangssteigung $0\,\mathrm{dB/dec}$, Startphase $\approx 0°$.

Schritt 2 Nullstelle bei $\omega_z = 1\,\mathrm{rad/s}$: ab $\omega = 1$ steigt die Magnitude mit $+20\,\mathrm{dB/dec}$ (rote Gerade $20\log_{10}\omega$). Exakt bei $\omega = 1$: $|H(\mathrm{j}1)| \approx \frac{100\sqrt{2}}{101} \Rightarrow |H|_{\mathrm{dB}} \approx +3\,\mathrm{dB}$ über der Geraden. Phasenbeitrag der LHP-Nullstelle: Übergang $0° \to +90°$ über $\omega \in [0.1, 10]$ (Geradennäherung: $45° + 45\log_{10}\omega$).

Schritt 3 Doppelpol bei $\omega_p = 10\,\mathrm{rad/s}$: ab $\omega = 10$ zusätzliche Steigungsänderung um $-40\,\mathrm{dB/dec}$; Netto-Slope für $\omega \gg 10$ ist $-20\,\mathrm{dB/dec}$ (asymptotisch $|H| \sim 100\,\omega/\omega^2 = 100/\omega$). Am Eckpunkt $\omega = 10$ liegt die exakte Magnitude bei $\approx 14.0\,\mathrm{dB}$, d. h. etwa $-6\,\mathrm{dB}$ unter der Mittellinie. Phasenabfall der beiden Pole gesamt $180°$ über $\omega \in [1, 100]$; Geradennäherung: zunächst $45° - 45\log_{10}\omega$ für $\omega \in [1, 10]$ (netto zurück Richtung $0°$), danach $-90\log_{10}(\omega/10)$ für $\omega \in [10, 100]$ (netto bis $-90°$).

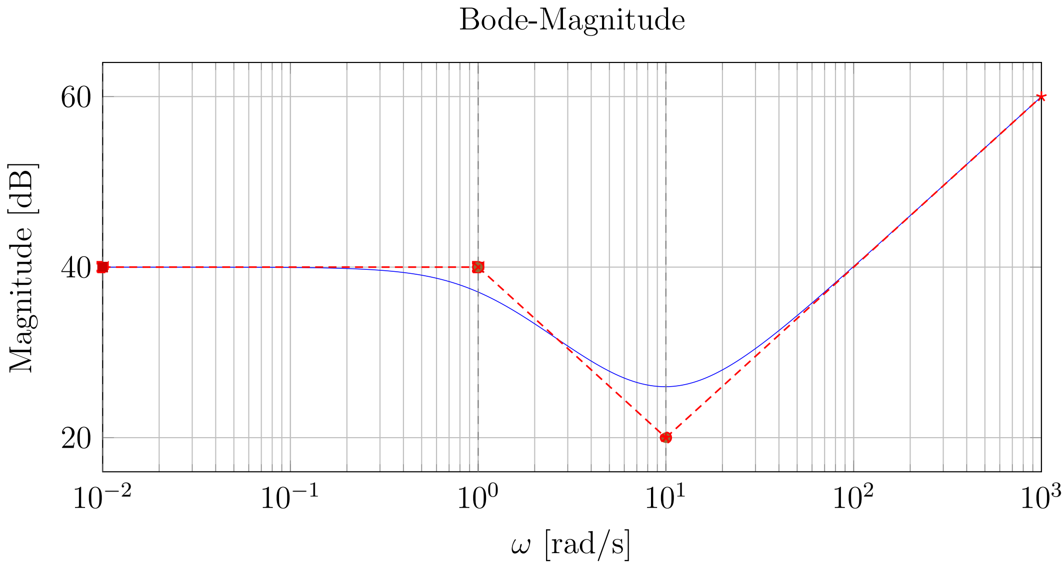
Stückweise Näherung

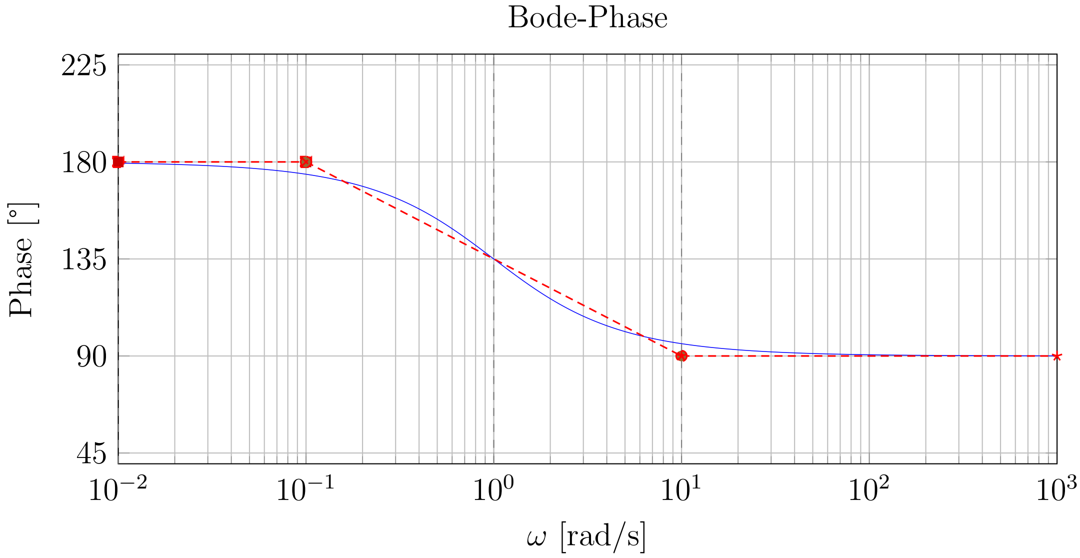
$$|H(\mathrm{j}\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx \begin{cases} 0, & \omega \ll 1, \\ 20\log_{10}\omega, & 1 \ll \omega \ll 10, \\ 20 - 20\log_{10}(\omega/10), & \omega \gg 10, \end{cases}$$

Aufgabe L)

$$H(s) = \frac{s^2 - 100}{s + 1} = \frac{(s-10)(s+10)}{s+1}\,.$$

L.1 Bode-Diagramm





L.2 Erklärung

Schritt 1 Struktur: $H(s) = \dfrac{(s-10)(s+10)}{s+1}$. Für $\omega \ll 1$ ist $|H(\mathrm{j}\omega)| \approx \dfrac{100}{1} = 100 \Rightarrow 40\,\mathrm{dB}$ ohne Startsteigung. $H(0) = -100 = 100e^{+j180^\circ} \Rightarrow$ konstante Phasenlage $+180^\circ$.

Schritt 2 Pol bei $\omega_p = 1\,\mathrm{rad/s}$: ab $\omega = 1$ Steigungswechsel um $-20\,\mathrm{dB/dec}$; am Eckpunkt exakte Dämpfung $-10\log_{10} 2 \approx -3\,\mathrm{dB}$ gegenüber der linken Geraden. Phasenabnahme des Pols um 90° über $\omega \in [0.1, 10]$; Geradennäherung $135^\circ - 45^\circ \log_{10}\omega$ (von 180° auf 90°).

Schritt 3 Nullstellen bei $\omega_z = 10\,\mathrm{rad/s}$ (eine LHP, eine RHP): Magnitudenbeitrag von zwei Nullstellen $\Rightarrow$ zusätzliche $+40\,\mathrm{dB/dec}$ ab $\omega = 10$; Netto-Gesamtslope wird $+20\,\mathrm{dB/dec}$ für $\omega \gg 10$. Am Eckpunkt $\omega = 10$ liegt $|H(\mathrm{j}10)|_{\mathrm{dB}} \approx 20 + 6 = 26.0\,\mathrm{dB}$. Die Phasenänderungen der LHP- und RHP-Nullstelle heben sich gegenseitig auf; Netto entsteht an $\omega = 10$ keine zusätzliche Phasenänderung (die konstanten $+180^\circ$ sind bereits berücksichtigt).

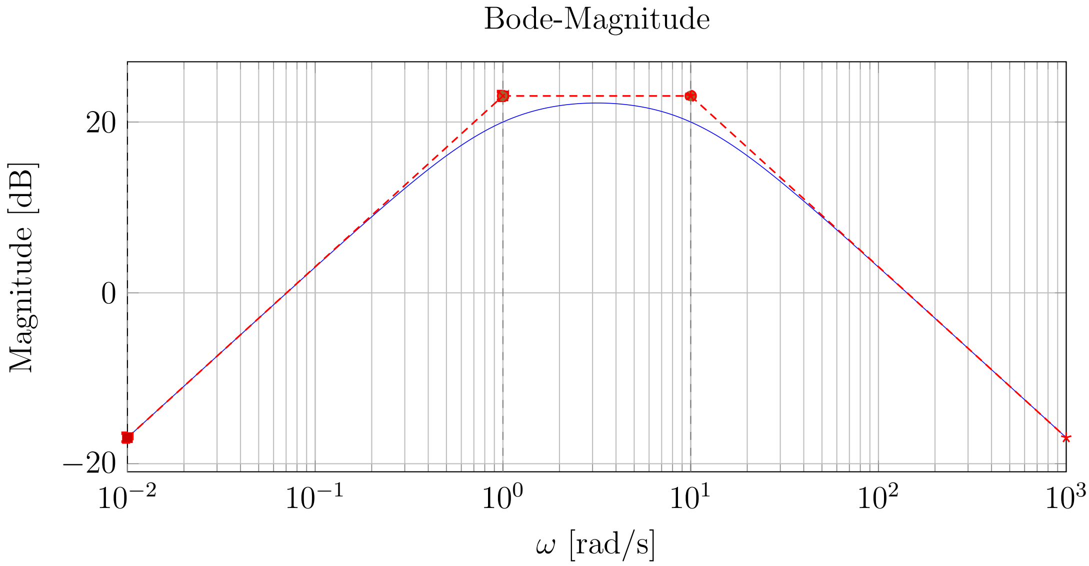
Stückweise Näherung

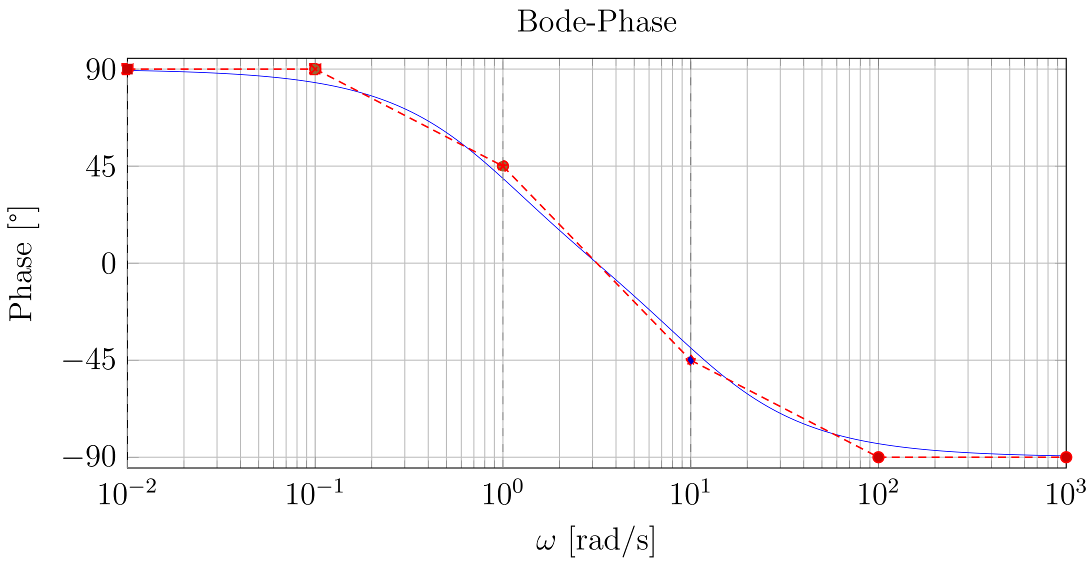
$$|H(\mathrm{j}\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx \begin{cases} 40, & \omega \ll 1, \\ 40 - 10\log_{10} 2, & \omega = 1, \\ 40 - 20\log_{10}\omega, & 1 \ll \omega \ll 10, \\ 20 + 20\log_{10}(\omega/10), & \omega \gg 10, \end{cases}$$

Aufgabe M)

$$H(s) = \frac{10\sqrt{202}\,s}{(s+1)(s+10)}\,.$$

M.1 Bode-Diagramm





M.2 Erklärung

Schritt 1 Nullstelle im Ursprung: $H(s) = 10\sqrt{202}\,\dfrac{s}{(s+1)(s+10)}$. Für $\omega \ll 1$ gilt $|H(\mathrm{j}\omega)| \approx \sqrt{202}\,\omega$; Startsteigung $+20\,\mathrm{dB/dec}$ mit Fixniveau[1] $10\log_{10} 202\,\mathrm{dB} = 23\,\mathrm{dB}$ bei $\omega = 5$. Startphase $\approx +90°$.

Schritt 2 Pol bei $\omega_{p1} = 1\,\mathrm{rad/s}$: ab $\omega = 1$ Steigungswechsel um $-20\,\mathrm{dB/dec}$; Zwischenbereich $[1, 10]$ ist betragsflach. Exakt $|H(\mathrm{j}1)| = \dfrac{10\sqrt{202}}{\sqrt{2}\sqrt{101}} = 10 \Rightarrow 20\,\mathrm{dB}$ (symmetrische Ecklage). Phasenabfall um $90°$ über $\omega \in [0.1, 10]$; Geradennäherung $45° - 45°\log_{10}\omega$.

Schritt 3 Pol bei $\omega_{p2} = 10\,\mathrm{rad/s}$: ab $\omega = 10$ weiterer Steigungswechsel um $-20\,\mathrm{dB/dec}$; Gesamtslope $-20\,\mathrm{dB/dec}$ für $\omega \gg 10$. Auch hier $|H(\mathrm{j}10)| = \dfrac{100\sqrt{202}}{\sqrt{101}\sqrt{200}} = 10 \Rightarrow 20\,\mathrm{dB}$. Der zweite Pol senkt die Phase um weitere $90°$ in $\omega \in [1, 100]$; Geradennäherung $-45°\log_{10}(\omega/10)$, Grenzwert $\angle H \to -90°$.

Stückweise Näherung

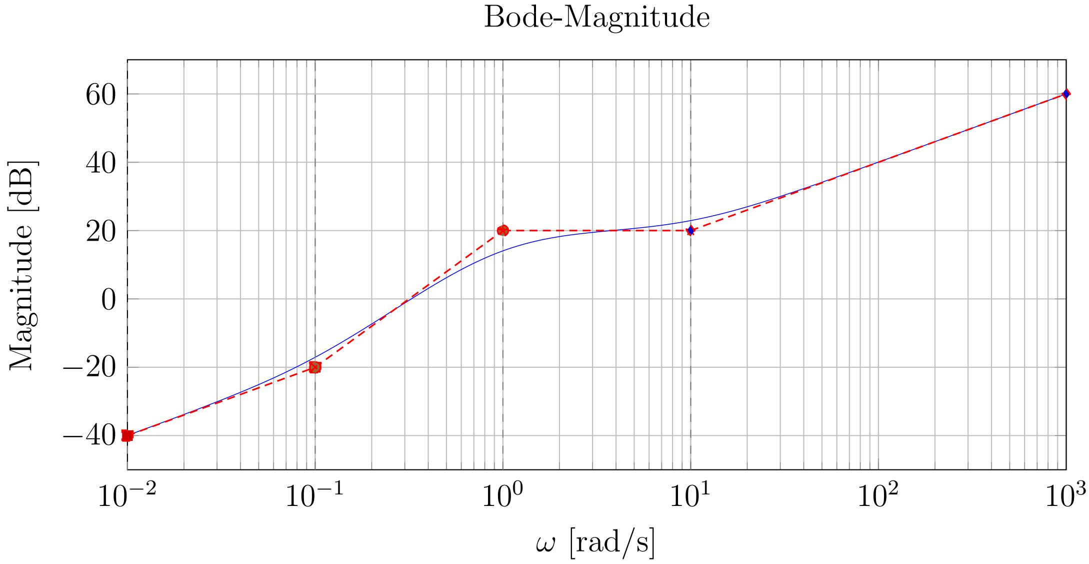
$$|H(\mathrm{j}\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx \begin{cases} 10\log_{10} 202 + 20\log_{10}\omega, & \omega \ll 1, \\ 20, & \omega = 1, \\ 10\log_{10} 202, & 1 \ll \omega \ll 10, \\ 20, & \omega = 10, \\ 10\log_{10} 202 - 20\log_{10}(\omega/10), & \omega \gg 10, \end{cases}$$

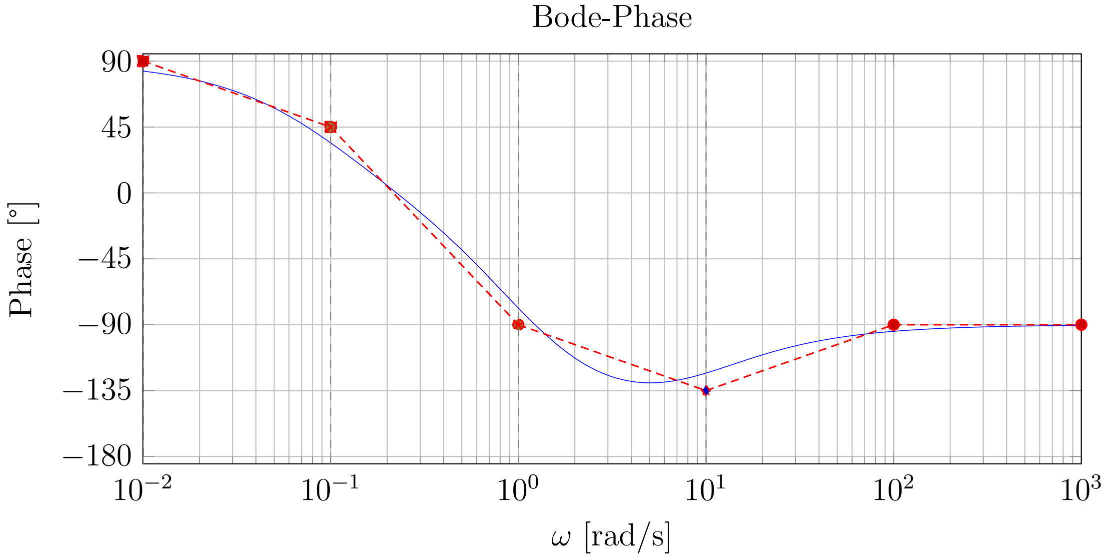
[1] Die Festlegung der ersten Geradennäherung gestaltet sich hier schwierig. Alternativ kann man die Verstärkung bei der Eckfrequenz $\omega = 1$ ansetzen; dabei ist zu beachten, dass man den exakten Wert der blauen Kurve berechnet und dieser etwa $3\,\mathrm{dB}$ unter der Geradennäherung liegt, welche man dann einzeichnen muss.

Aufgabe N)

$$H(s) = \frac{s\,(0.1 - s)\,(s + 10)}{(s + 1)^2}\,.$$

N.1 Bode-Diagramm





N.2 Erklärung

Schritt 1 Struktur und Startverhalten: $H(s) = \dfrac{s(0.1-s)(s+10)}{(s+1)^2}$. Für $\omega \ll 0.1$ gilt $|H(\mathrm{j}\omega)| \approx \omega \cdot 0.1 \cdot 10/1 = \omega \Rightarrow$ Startsteigung $+20\,\mathrm{dB/dec}$; Startphase aus $\mathrm{j}\omega$ ist $\approx +90^\circ$ (keine Übergänge aktiv).

Schritt 2 RHP-Nullstelle bei $\omega_z = 0.1\,\mathrm{rad/s}$: Magnitude-Beitrag wie LHP-Nullstelle $\Rightarrow$ zusätzlicher Anstieg $+20\,\mathrm{dB/dec}$ ab $\omega = 0.1$; Nettoslope ist $+40\,\mathrm{dB/dec}$ Phase hingegen fällt um 90° über $\omega \in [0.01, 1]$ (Geradennäherung: $45^\circ - 45^\circ \log_{10}(\omega/0.1)$ bis $45^\circ - 135^\circ \log_{10}(\omega/0.1)$).

Schritt 3 Doppelpol bei $\omega_p = 1\,\mathrm{rad/s}$ und LHP-Nullstelle bei $\omega_z = 10\,\mathrm{rad/s}$: Der Doppelpol reduziert die Slope um $-40\,\mathrm{dB/dec} \Rightarrow$ Netto $0\,\mathrm{dB/dec}$ in $[1, 10]$ (Betrag $\approx 20\,\mathrm{dB}$ als Geraden-Niveau); die LHP-Nullstelle hebt ab $\omega = 10$ die Slope wieder auf $+20\,\mathrm{dB/dec}$. Phasenbild: der Doppelpol liefert insgesamt -180° über $\omega \in [0.1, 10]$; die LHP-Nullstelle addiert $+90^\circ$ über $\omega \in [1, 100]$. Daraus resultieren die roten Segmente: $+90^\circ \to +45^\circ$ ($[0.01, 0.1]$), weiter bis $\approx -90^\circ$ ($[0.1, 1]$), in $[1, 10]$ Abfall bis $\approx -135^\circ$, anschließend Anstieg zurück gegen $\approx -90^\circ$ für $\omega \gg 100$.

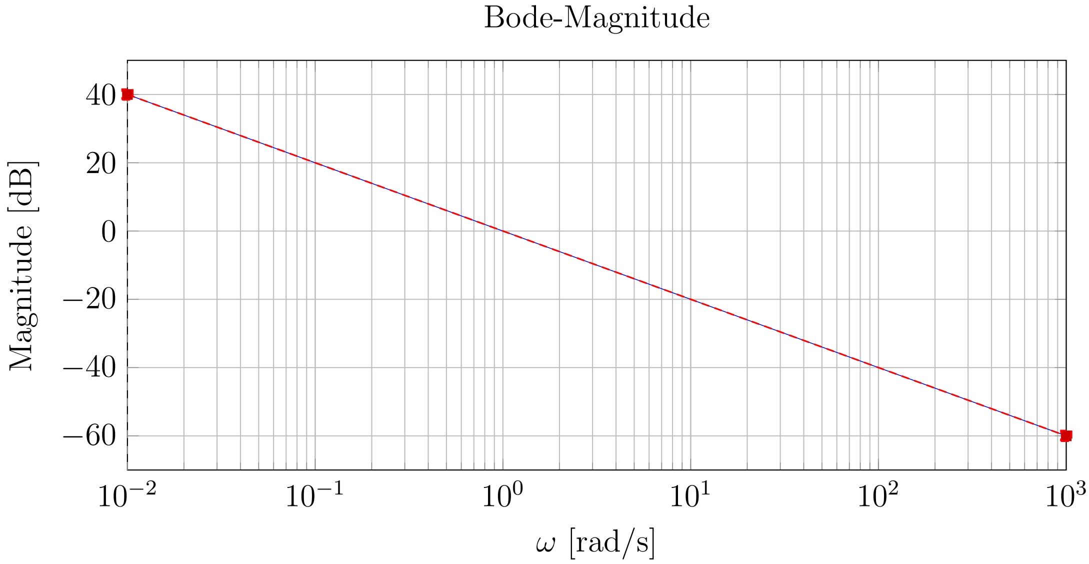
Stückweise Näherung

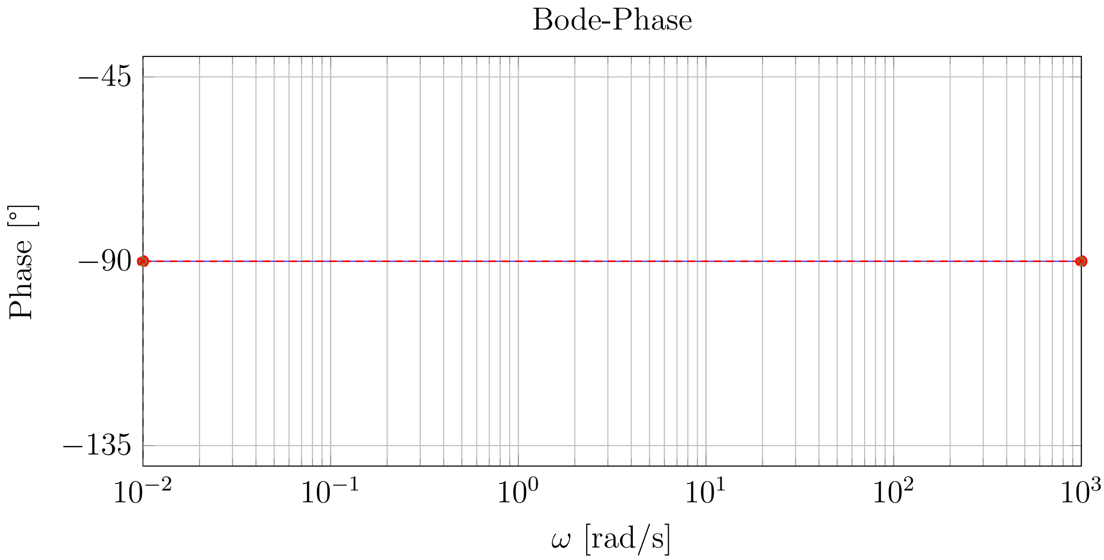
$$|H(\mathrm{j}\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx \begin{cases} 20\log_{10}\omega, & \omega \ll 0.1, \\ 40\log_{10}\omega + 20, & 0.1 \ll \omega \ll 1, \\ 20, & 1 \ll \omega \ll 10, \\ 20 + 20\log_{10}(\omega/10), & \omega \gg 10, \end{cases}$$

Aufgabe O)

$$H(s) = \frac{1}{s}\,.$$

O.1 Bode-Diagramm





O.2 Erklärung

Schritt 1 Pol im Ursprung: $H(s) = 1/s$ liefert für alle $\omega > 0$ die Betragsasymptote $|H(\mathrm{j}\omega)|_{\mathrm{dB}} = -20\log_{10}\omega$ mit konstanter Steigung $-20\,\mathrm{dB/dec}$; keine endliche Eckfrequenz. Wir benötigen ein Fixpunkt und wählen diesen beliebig bei $\omega = 1 \to |H(1)|_{dB} = 20log_{10}(1)\,\mathrm{dB} = 0\,\mathrm{dB}$

Schritt 2 Phase: $\angle(1/\,\mathrm{j}\omega) = -90^\circ$ für alle Frequenzen; keine Übergangsdekaden, daher rote Geradennäherung deckungsgleich mit dem exakten Verlauf.

Schritt 3 Grenzfälle: $\omega \to 0^+ \Rightarrow |H| \to \infty$ (Integrator), $\omega \to \infty \Rightarrow |H| \to 0$; Phase bleibt stets -90°.

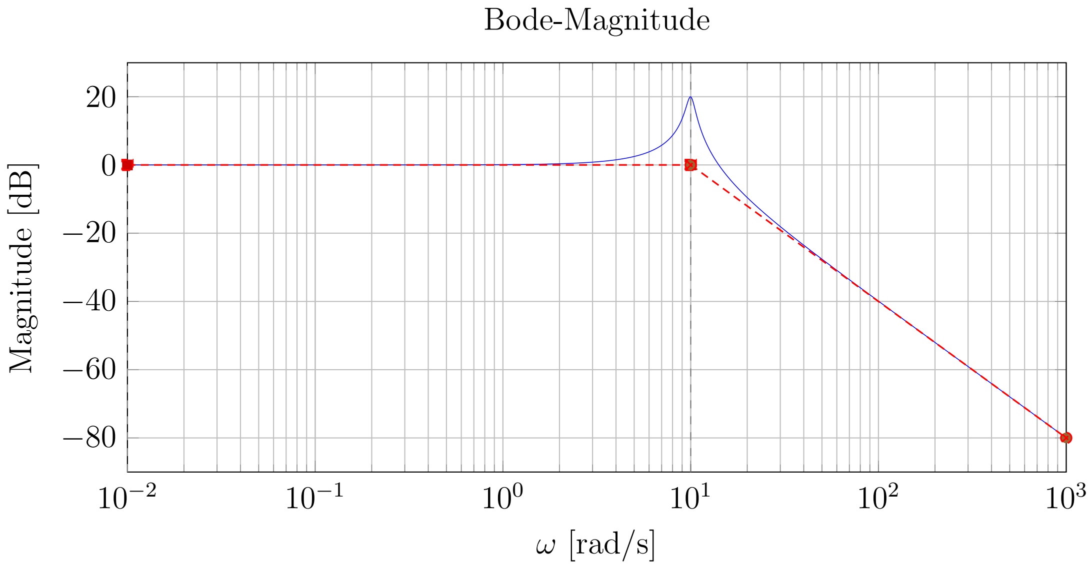
Stückweise Näherung

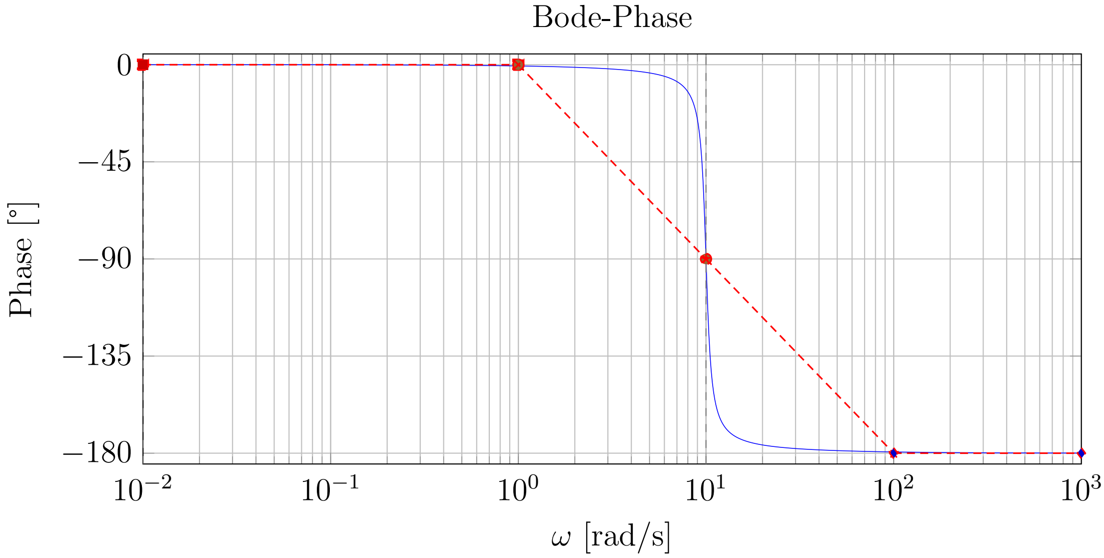
$$|H(\mathrm{j}\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx \begin{cases} -20\log_{10}\omega, & \omega \ll 1, \\ 0, & \omega = 1, \\ -20\log_{10}\omega, & \omega \gg 1, \end{cases}$$

Aufgabe P)

$$H(s) = \frac{100}{s^2 + s + 100}\,.$$

P.1 Bode-Diagramm





P.2 Erklärung (ausführlich)

1. **Normalform herstellen.** Bringe die Übertragungsfunktion exakt in die im Skript definierte Standardform für reelle Pol-/Nullstellen.

$$H(s) = K_0 \cdot s^r \cdot \frac{1}{1 + 2d_n T_p \cdot s + T_p^2 \cdot s^2} \quad .$$

   Hier haben wir:

$$\underline{F}_1(s) = \frac{1}{1 + 2d_n T_p \cdot s + T_p^2 \cdot s^2}, \quad K_0 = \frac{100}{100} = 1,$$

$$T_p = \frac{1}{10}, \quad d_n = \frac{1}{20} \quad \text{und} \quad r = 0.$$

   Klassifizikation des ersten Teilglieds $\underline{F}_1$: konjugiertes komplexes Polpaar zweiter Ordnung.

2. **Eckfrequenz bestimmen und sortieren.** Bestimme die Eckfrequenz aus der Normform:

$$\omega_n = \frac{1}{T_p} = 10\,\mathrm{rad/s}$$

   Es existiert nur diese charakteristische Frequenz; die aufsteigende Sortierung $\omega_1 < \omega_2 < \ldots$ ist damit trivial.

3. **Startpunkt des Amplitudengangs festlegen (Geradennäherung).** Setze die Startfrequenz gleich der kleinsten Eckfrequenz $\omega_{\min} = \omega_n = 10\,\mathrm{rad/s}$. Verwende die Regel im Skript

$$F_{\mathrm{dB}}(\omega_{\min}) = 20\log_{10}\Big(|K_0\, F^*_{ges}(0)| \cdot \omega^r_{\min}\Big) = 20\log_{10}(1) = 0\,\mathrm{dB}.$$

   Dieser Punkt dient als Anker für die Geradennäherung (ohne Resonanzüberhöhung).

4. **Verlauf links vom Startpunkt zeichnen.** Für $\omega < \omega_{\min}$ bleibt die Amplituden-Asymptote waagrecht, denn die Anfangssteigung beträgt $r \cdot 20\,\mathrm{dB/dec} = 0$. Trage also eine horizontale Linie bei $0\,\mathrm{dB}$ ein.

5. **Steigungswechsel an der Eckfrequenz eintragen.** Ein konjugiertes Polpaar zweiter Ordnung reduziert die Steigung ab ω_n um $40\,\mathrm{dB/dec}$. Da bis jetzt die Steigung $0\,\mathrm{dB/dec}$ betrug, ist diese ab jetzt $-40\,\mathrm{dB/dec}$. Zeichne rechts von ω_n die Gerade mit Steigung $-40\,\mathrm{dB/dec}$. Die Formel für die Geradennäherung lautet:

$$|H(j\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx -40\log_{10}\Big(\frac{\omega}{\omega_n}\Big) \quad (\omega \geq \omega_n = 10).$$

6. **Eckabrundung korrekt berücksichtigen.** Da $d_n \ll \frac{1}{2}$ müssen wir beim Abrunden eine Resonanzüberhöhung mit einbeziehen. Laut Skript erreicht der Magnitudengang bei $\omega = \omega_n$ eine Überhöhung von

$$-20\log_{10}(2d_n) = -20\log_{10}(\tfrac{1}{10}) = 20\,\text{dB}$$

über der asymptotischen 0 dB-Gerade. Trage dort einen Stützpunkt und runde die Ecke mit Resonanz entsprechend aus.

7. **Phasenstartwert festlegen.** Da $K_0 F_{ges}(0) > 0$ und $r = 0$, ist der Startwert der Phase

$$\varphi(0) = r \cdot 90^\circ = 0^\circ.$$

8. **Phasenänderung durch das Polpaar eintragen.** Ein komplexes Polpaar zweiter Ordnung erzeugt insgesamt eine Phasenänderung von -180°. Trage die Näherung ein:

$$\varphi(\omega) \approx \begin{cases} 0^\circ, & \omega \leq 10^{-1}\omega_n \ (=1), \\ \text{linear } -90^\circ/\text{Dec}, & 10^{-1}\omega_n < \omega < \omega_n, \\ \text{linear } -90^\circ/\text{Dec}, & \omega_n < \omega < 10\,\omega_n, \\ -180^\circ, & \omega \geq 10\,\omega_n \ (=100). \end{cases}$$

Das lineare Zwischenstück kann formelkonform als $\varphi(\omega) \approx -90^\circ \log_{10}\omega$ in $[1, 10]$ und $\varphi(\omega) \approx -90^\circ - 90^\circ \log_{10}(\omega/10)$ in $[10, 100]$ dargestellt werden.

9. **Grenzwerte und Konsistenz prüfen.** DC: $|H(0)| = 1 \Rightarrow 0\,\text{dB}$, $\varphi(0) = 0^\circ$. HF: $|H(j\omega)| \sim 100/\omega^2 \Rightarrow -40\log_{10}(\omega/10)\,\text{dB}$. Pol-/Nullzählung bestätigt die Endphase: Zählergrad $m = 0$, Nennergrad $n = 2 \Rightarrow \varphi(\infty) = (m-n)\cdot 90^\circ = -180^\circ$.

Stückweise Näherungen (für die Skizze)

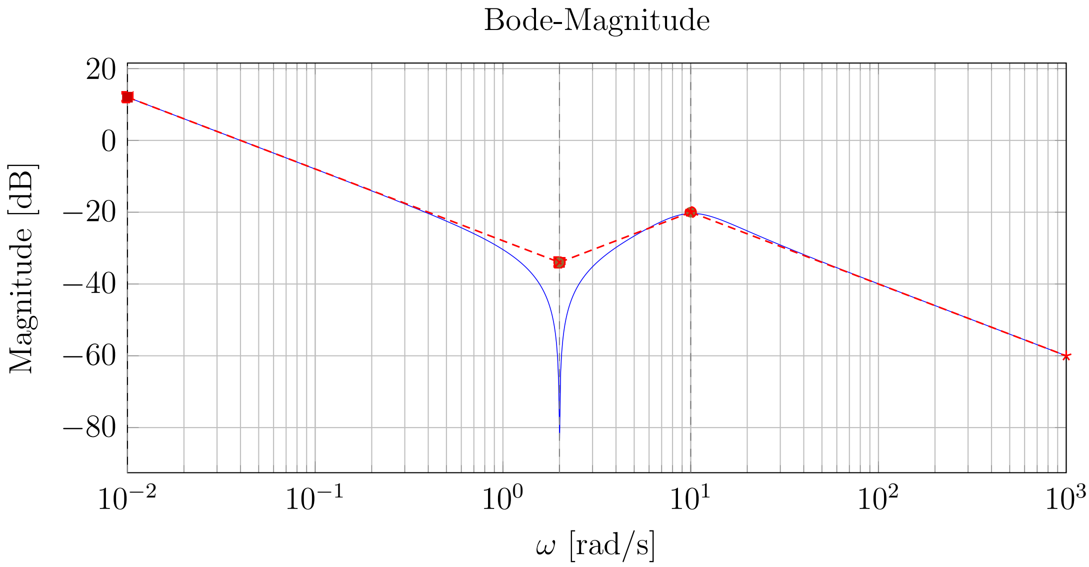
$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} \approx \begin{cases} 0, & \omega \ll 10, \\ +20, & \omega = 10, \\ -40\log_{10}(\omega/10), & \omega \gg 10, \end{cases}$$

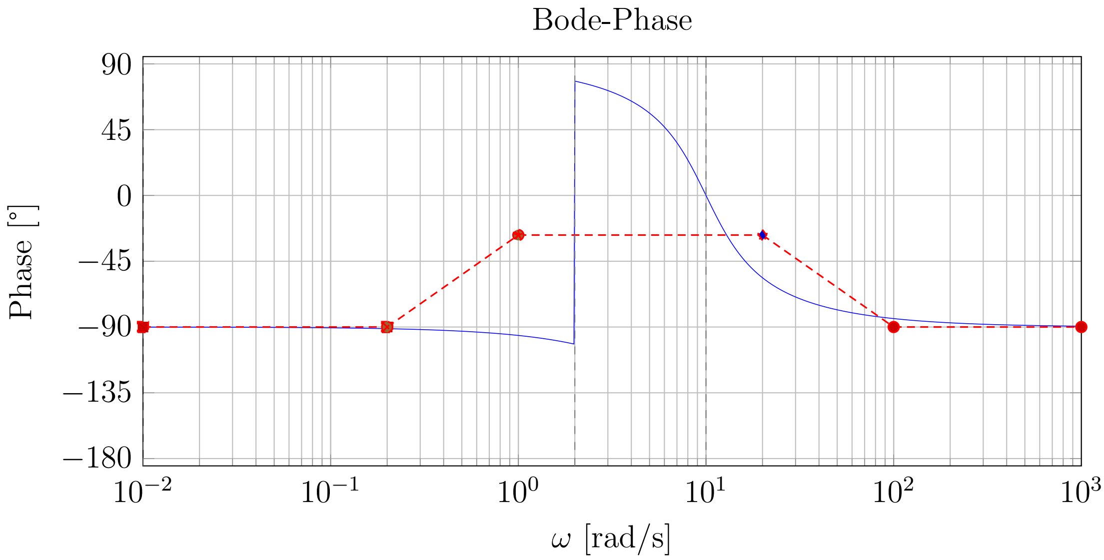
$$\varphi(\omega) \approx \begin{cases} 0^\circ, & \omega \leq 1, \\ -90^\circ \log_{10}\omega, & 1 < \omega < 10, \\ -90^\circ - 90^\circ \log_{10}(\omega/10), & 10 < \omega < 100, \\ -180^\circ, & \omega \geq 100. \end{cases}$$

Aufgabe Q)

$$H(s) = \frac{s^2 + 4}{s\,(s^2 + 10s + 100)}\,.$$

Q.1 Bode-Diagramm





Q.2 Erklärung

Schritt 1 Struktur: Integrator $1/s$, konjugiertes Polpaar mit $\omega_n = 10$, $\zeta = 0.5$, und Doppelnullen auf der imaginären Achse bei $\omega_z = 2$. Für $\omega \ll 2$: $|H(\mathrm{j}\omega)| \approx \dfrac{4}{100\,\omega} = 0.04/\omega \Rightarrow$ Slope $-20\,\mathrm{dB/dec}$ um Niveau $20\log_{10} 0.04 \approx -20\,\mathrm{dB}$ bei $\omega = 0.4$; Phase $\approx -90°$.

Schritt 2 Doppelnullen bei $\omega_z = 2$: Betrag hat dort ein exaktes Null ($|H(\mathrm{j}2)| = 0$). Asymptotisch steigt die Slope vor $\omega = 2$ bei $-20\,\mathrm{dB/dec}$ (Nach $\omega = 2$ netto bei $-20 + 40 \to +20\,\mathrm{dB/dec}$). Phasenbeitrag der Zählerdoppelnull ist exakt ein Sprung um $+180°$ (von $0°$ auf $180°$); in der Geradennäherung als $+180°$ über zwei Dekaden $[0.2, 20]$ modelliert.

Schritt 3 Polpaar bei $\omega_n = 10$, $\zeta = 0.5$: ab $\omega = 10$ Slope-Änderung $-40\,\mathrm{dB/dec}$ (Netto $+20 \to -20\,\mathrm{dB/dec}$). Exakt bei $\omega = 10$: $|H(\mathrm{j}10)| = \dfrac{|4-100|}{10 \cdot 100} = \dfrac{96}{1000} \approx -20\,\mathrm{dB}$. Phasenbeitrag des Polpaares $-180°$ über $[1, 100]$, wodurch die Gesamtsumme nach dem temporären Anheben durch die Zählernullen wieder zurück auf $-90°$ fällt[2].

Schritt 4 Resonanz korrekt: Das Zählerpolynom $s^2 + 4$ liefert reelle zwei Nullstellen auf der imaginären Achse bei $\omega_z = 2$. Folge: $|H(\mathrm{j}2)| = 0$; in Dezibel $-\infty\,\mathrm{dB}$. Das Polpaar $s^2 + 10s + 100$ hat $\omega_n = 10$ und $\zeta = 0.5$ ($Q = 1$). ζ ist recht groß und Q unterdrückt Resonanz; konkret $|H(\mathrm{j}10)| = \frac{|4-100|}{10 \cdot 100} = 0.096 \Rightarrow \approx -20\,\mathrm{dB}$.

Stückweise Näherung

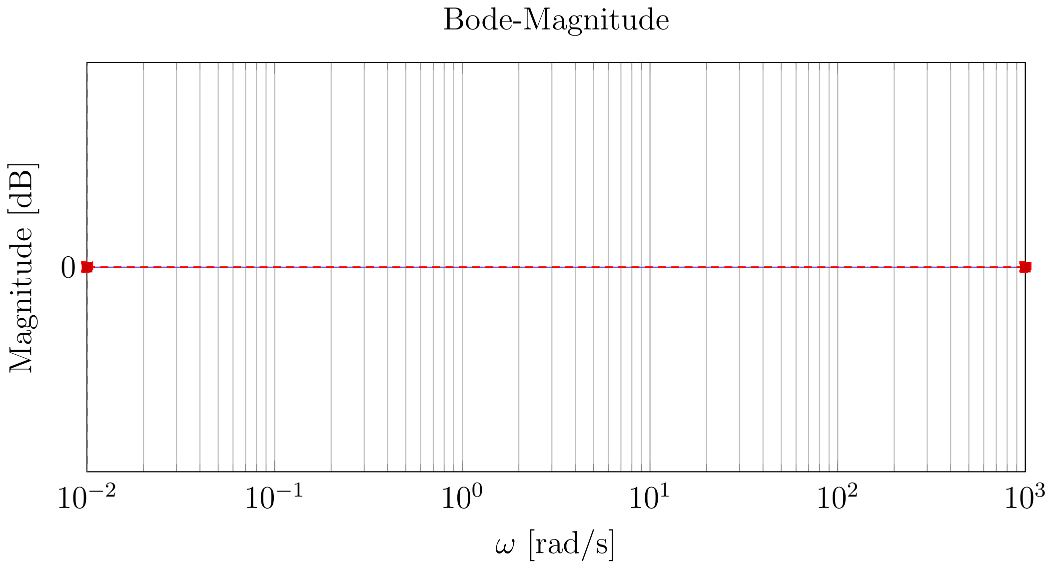
$$|H(\mathrm{j}\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx \begin{cases} 20\log_{10}(0.04) - 20\log_{10}\omega, & \omega \ll 2, \\ -\infty, & \omega = 2, \\ -40 + 20\log_{10}\omega, & 2 \ll \omega \ll 10, \\ -20 - 20\log_{10}(\omega/10), & \omega \gg 10, \end{cases}$$

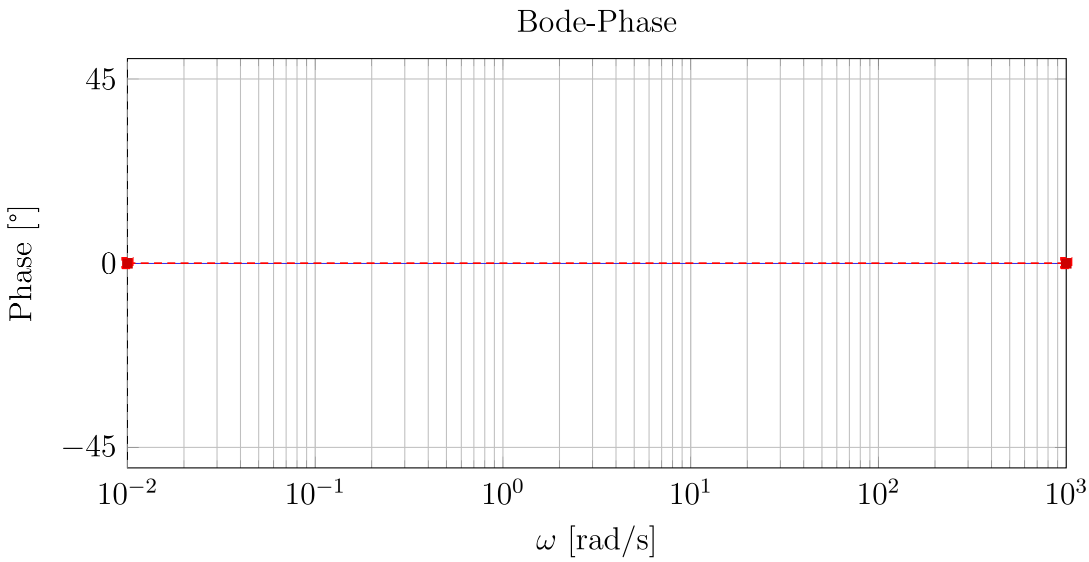
[2] Aufgrund der sehr kleinen Dämpfung ζ wirkt der Phasenverlauf "chaotisch". Tatsächlich überlagern sich zwei 180°-Übergänge: zuerst der abrupte Sprung des Nullstellenpaares, direkt danach der vergleichsweise sanfte Abfall des Polpaares.

Aufgabe R)

$$H(s) = \frac{s^2 + 2s + 10}{s^2 + 2s + 10} = 1\,.$$

R.1 Bode-Diagramm





R.2 Erklärung

Schritt 1 Kürzung: Zähler und Nenner sind identisch, daher $H(s) \equiv 1$. DC-Faktor $1 \Rightarrow |H|_{\mathrm{DC}} = 0\,\mathrm{dB}$; Anfangssteigung $0\,\mathrm{dB/dec}$; Phase $0°$.

Schritt 2 Keine Ecken: keine endlichen Pole/Nullstellen nach Kürzung, daher keine Eckfrequenzen und keine Phasen- und Magnitudenänderungen. Die Geradennäherungen decken sich exakt mit dem exakten Verlauf.

Schritt 3 Grenzverhalten: für $\omega \to 0$ und $\omega \to \infty$ bleibt $|H(\mathrm{j}\omega)| = 1$ und $\angle H(\mathrm{j}\omega) = 0°$; das gesamte Bode-Diagramm ist konstant.

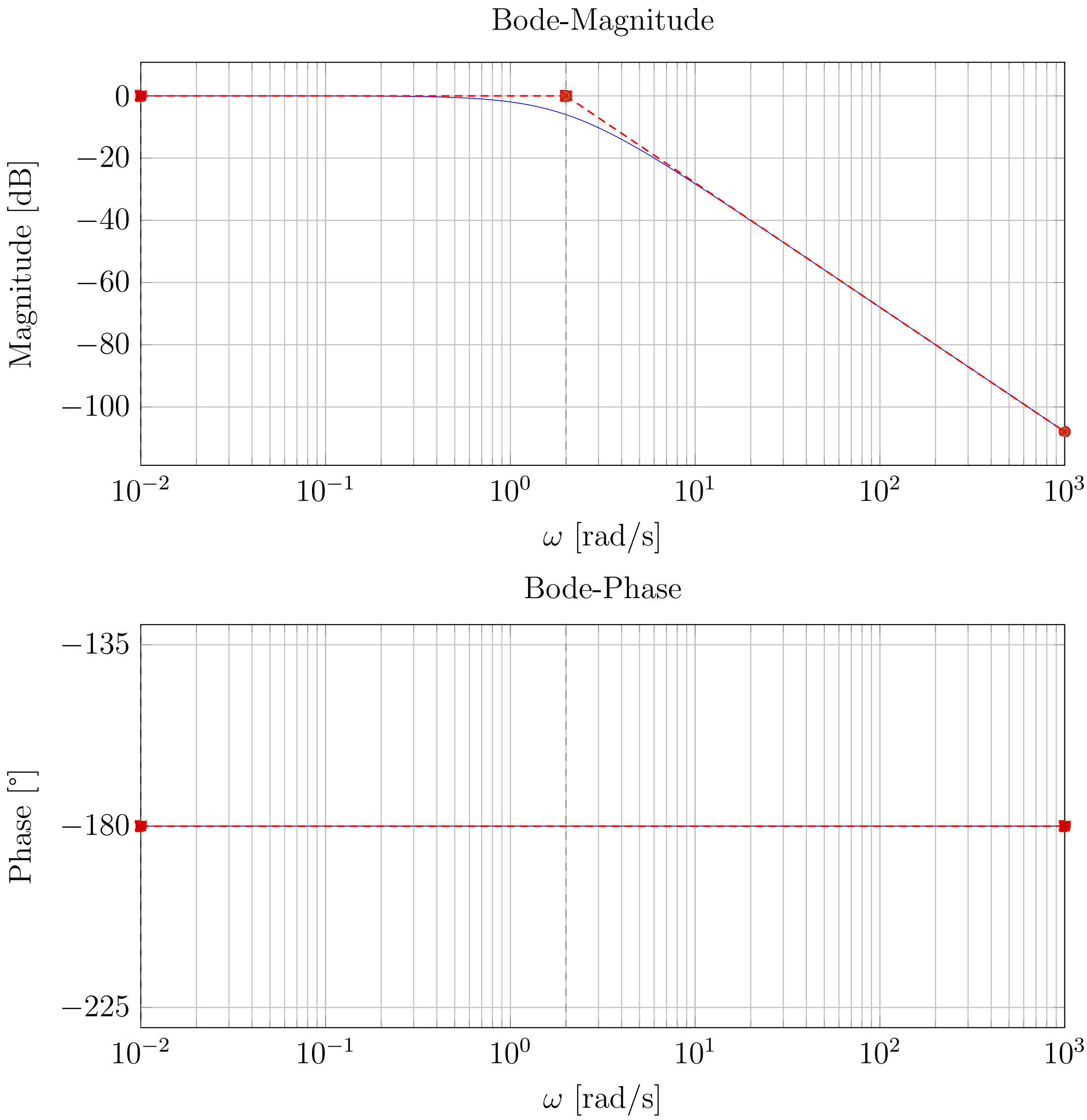
Stückweise Näherung

$$|H(\mathrm{j}\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx \begin{cases} 0, & \omega \ll 1, \\ 0, & \omega = 1, \\ 0, & \omega \gg 1, \end{cases}$$

Aufgabe S)

$$H(s) = \frac{4}{s^2 - 4} = \frac{4}{(s-2)(s+2)}\,.$$

S.1 Bode-Diagramm



S.2 Erklärung

Schritt 1 Faktorisierung: $H(s) = \dfrac{4}{(s-2)(s+2)}$. DC-Wert $H(0) = -1 \Rightarrow |H|_{\mathrm{DC}} = 0\,\mathrm{dB}$; das negative Vorzeichen liefert eine konstante Phase von $-180°$. Anfangssteigung $0\,\mathrm{dB/dec}$.

Schritt 2 Pole bei $\omega_p = 2\,\mathrm{rad/s}$ (einer RHP, einer LHP): Magnitudenbeitrag entspricht einem Doppelpol bei $\omega = 2 \Rightarrow$ ab $\omega = 2$ Slope $-40\,\mathrm{dB/dec}$. Am Eckpunkt exakte Dämpfung $-20\log_{10} 2 \approx -6\,\mathrm{dB}$. Phasenverlauf: die entgegengesetzen Beiträge der LHP- und RHP-Polphase heben sich auf; netto bleibt die Phase für alle ω konstant $-180°$.

Schritt 3 Grenzverhalten: für $\omega \ll 2$ bleibt $|H(\mathrm{j}\omega)| \approx 1$; für $\omega \gg 2$ folgt $|H(\mathrm{j}\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx -40\log_{10}(\omega/2)$; die Phase bleibt über das gesamte Spektrum bei $-180°$.

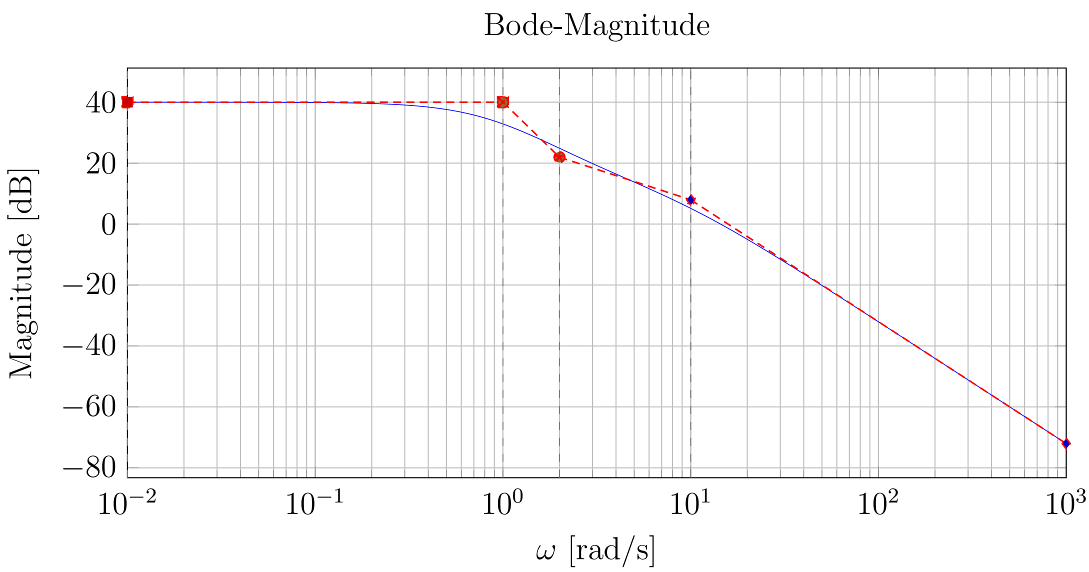
Stückweise Näherung

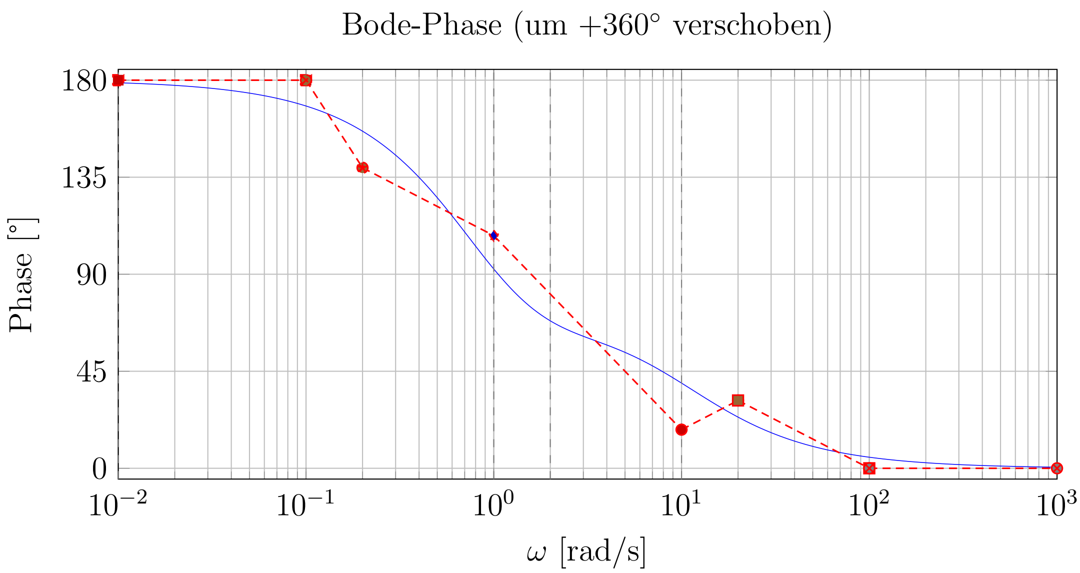
$$|H(\mathrm{j}\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx \begin{cases} 0, & \omega \ll 2, \\ -20\log_{10} 2, & \omega = 2, \\ -40\log_{10}(\omega/2), & \omega \gg 2, \end{cases}$$

Aufgabe T)

$$H(s) = \frac{-1000\,(s+2)^2}{4\,(s+1)^3\,(s+10)} = -250\,\frac{(s+2)^2}{(s+1)^3\,(s+10)}\,.$$

T.1 Bode-Diagramm





T.2 Erklärung

Schritt 1 Konstante & Vorzeichen: $H(0) = -100 \Rightarrow |H|_{\mathrm{DC}} = 40\,\mathrm{dB}$, Anfangssteigung $0\,\mathrm{dB/dec}$. Die Darstellung ist um $+360^\circ$ verschoben: Startphase 180° (das negative Vorzeichen).

Schritt 2 Dreifachpol bei $\omega = 1\,\mathrm{rad/s}$: ab $\omega = 1$ Steigungsänderung um $-60\,\mathrm{dB/dec}$; Exakte Abweichung ggü. Geradennäherung $-3 \cdot 10 \log_{10} 2 \approx -9\,\mathrm{dB}$. Phasenabfall dieses Poltripels über $\omega \in [0.1, 10]$ um 270°.

Schritt 3 Doppelnullstelle bei $\omega = 2\,\mathrm{rad/s}$ und Pol bei $\omega = 10\,\mathrm{rad/s}$: die Doppelnull hebt die Slope ab $\omega = 2$ um $+40\,\mathrm{dB/dec}$ (Netto $-20\,\mathrm{dB/dec}$ in $(2, 10)$), der Pol bei $\omega = 10$ senkt sie um weitere $-20\,\mathrm{dB/dec}$ (Netto $-40\,\mathrm{dB/dec}$ für $\omega \gg 10$). Phasenbeiträge: $+180^\circ$ der Doppelnullstelle über $[0.2, 20]$, -90° des Pols bei 10 über $[1, 100]$; Die Phase verläuft von 180° ($\omega \ll 0.1$) gegen 0° ($100 \ll \omega$).

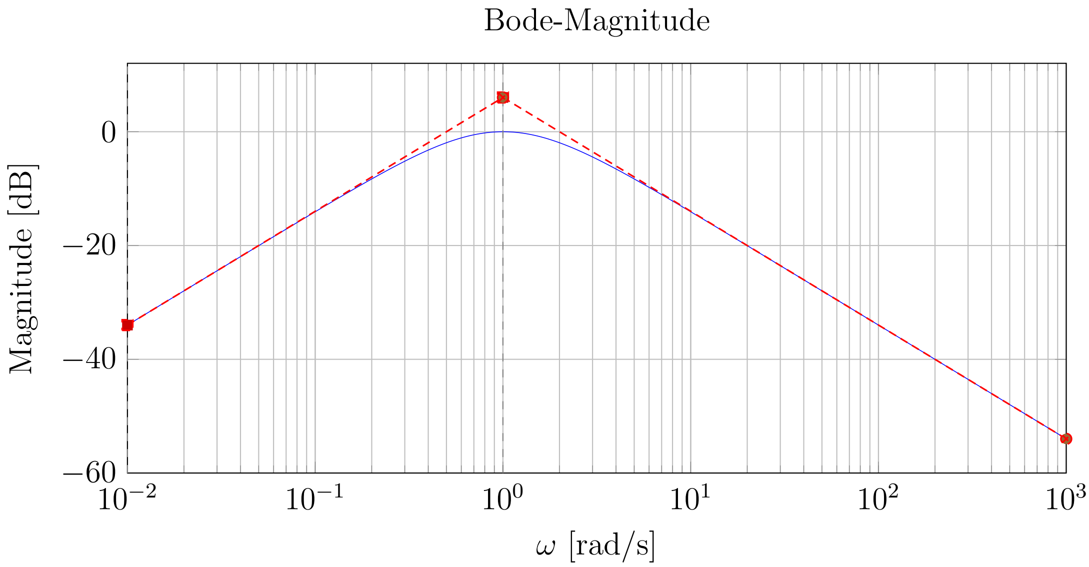
Stückweise Näherung

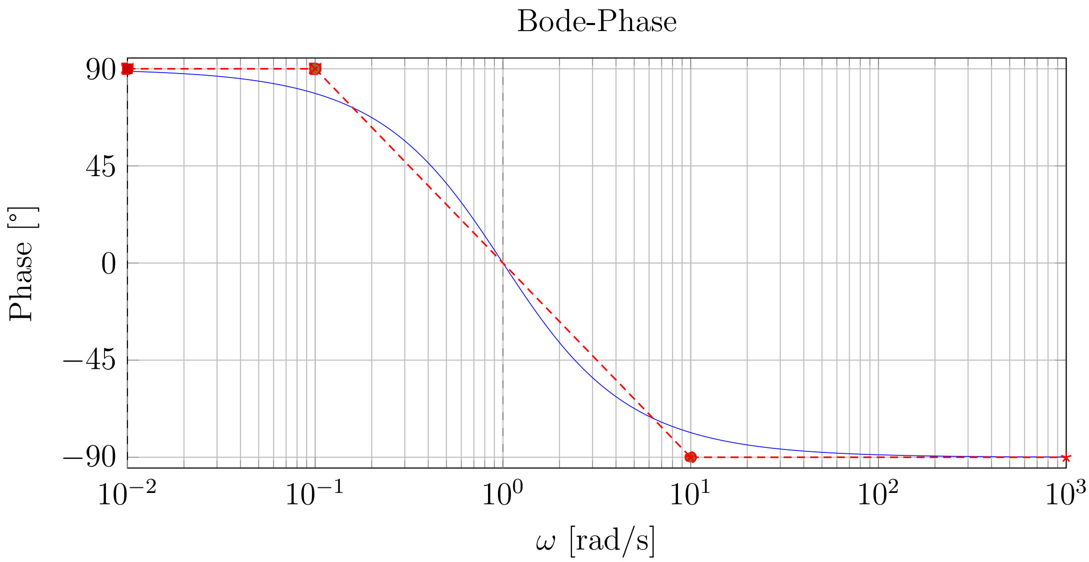
$$|H(\mathrm{j}\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx \begin{cases} 40, & \omega \ll 1, \\ 40 - 60 \log_{10} \omega, & 1 \ll \omega \ll 2, \\ 40 - 60 \log_{10} 2 - 20 \log_{10}(\omega/2), & 2 \ll \omega \ll 10, \\ 40 - 60 \log_{10} 2 - 20 \log_{10} 5 - 40 \log_{10}(\omega/10), & \omega \gg 10, \end{cases}$$

Aufgabe U)

$$H(s) = \frac{2\,s}{s^2 + 2s + 1} = \frac{2\,s}{(s+1)^2}\,.$$

U.1 Bode-Diagramm





U.2 Erklärung

Schritt 1 Nullstelle im Ursprung und Faktor 2: für $\omega \ll 1$ gilt $|H(\mathrm{j}\omega)| \approx 2\,\omega$ $\Rightarrow$ Startsteigung $+20\,\mathrm{dB/dec}$, Fixpunkt bei $|H(1j)|_{dB} = 20\log_{10} 1 \approx 0\,\mathrm{dB}$; Fixpunkt für Geradennäherung liegt ca. 6 dB über exakten Fixpunkt 0 dB. Startphase $\approx +90°$.

Schritt 2 Doppelter Pol bei $\omega = 1\,\mathrm{rad/s}$: ab $\omega = 1$ zusätzliche Steigungsänderung um $-40\,\mathrm{dB/dec}$; Netto-Slope für $\omega \gg 1$ ist $-20\,\mathrm{dB/dec}$ ($|H| \sim 2/\omega$). Phasenabfall der beiden Pole zusammen $180°$ über $\omega \in [0.1, 10]$; Näherung: $45° - 90° \log_{10} \omega$.

Schritt 3 Grenzverhalten: $\omega \ll 1 \Rightarrow |H|_{\mathrm{dB}} \approx 20\log_{10} 2 + 20\log_{10}\omega$, $\angle H \approx +90°$; $\omega \gg 1 \Rightarrow |H|_{\mathrm{dB}} \approx 20\log_{10} 2 - 20\log_{10}\omega$, $\angle H \to -90°$.

Stückweise Näherung

$$|H(\mathrm{j}\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx \begin{cases} 20\log_{10} 2 + 20\log_{10}\omega, & \omega \ll 1, \\ 20\log_{10} 2 \;\; - 20\log_{10} 2 = 0, & \omega = 1, \\ 20\log_{10} 2 - 20\log_{10}\omega, & \omega \gg 1, \end{cases}$$