Bezier curve를 이용한 3차원 곡선의 애니메이션화

[교사] [학생]

사 업 명 : 2020년 경기과학고등학교 기초 R&E
연 구 자 : 박건호[1학년], 윤상[1학년]
지 도 교 사 : 김소연

ABSTRACT

베지어 곡선을 주어진 몇 개의 점을 이용해 만들어지는 곡선이다. 베지어 곡선은 자연스러운 곡선을 만들 수 있어 글자 폰트나 애니메이션에도 활용된다. 베지어 곡선을 이용한 최근의 연구 동향은 베지어 곡선을 이용해 평면도형을 근사시키는 효율적인 알고리즘을 찾은 사례가 있다. 본 연구에서는 베지어 곡선을 통해 임의의 3차원 곡선을 근사하고, 선행 연구의 방법을 확장시켜 곡선의 움직임을 주는 방법을 제시한다. 주어진 곡선을 정의역에 따라 개의 조각으로 나누고, 각각의 조각들은 중간 점을 잡아 베지어 곡선으로 근사한다. 중간점은 조각 위의 한 점으로, 조각의 양 끝점을 잇는 직선 위에 내린 수선의 길이가 최대가 되는 점으로 정의한다. 제시한 방법을 통해 단위 반원을 근사하였을 때, n=2일 때 오차가 0.001보다 작았고, n의 값에 따라 오차가 지수적으로 감소하는 양상을 보였다. 곡선을 디지털화하기 때문에 저장 용량을 효율적으로 감소시킬 수 있고 3차원 곡선의 움직임을 줄 수 있어 최근 주목받는 홀로그램이나 VR 기술 등에도 활용될 수 있다.

INTRODUCTION

- 3차원 이미지로 주어진 임의의 곡선을 디지털화할 수 있다.
- 베지어 곡선을 이용해 임의의 3차원 곡선을 충분히 근사할 수 있다.
- 선행 연구의 방법을 3차원으로 확장해 3차원 곡선의 움직임을 줄 수 있다.

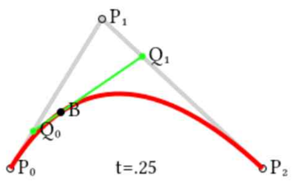
THEORETICAL BACKGROUND

Definition 1. 2차 베지어 곡선

세 점 $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$ 에 대해 2차 베지어 다항식은 다음과 같다.

$$\mathrm{B}(t) = (1-t)^2\mathrm{P}_0 + 2t(1-t)\mathrm{P}_1 + t^2\mathrm{P}_2$$

2차 베지어 다항식에 의한 [0,1]의 상을 2차 베지어 곡선이라 한다.
이때 $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$을 베지어 곡선의 조절점이라 한다.



Definition 2. 하우스도르프 거리

거리공간(M,d) 의 공집합이 아닌 두 부분집합 X, Y에 대해

$$d_H(X, Y) = \max\left(\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} d(x,y), \sup_{y\in Y}\inf_{x\in X} d(x,y)\right)$$

Definition 3. 근사 거리

곡선 C를 $\{C_i\}_{i\in I}$와 같이 조각별로 나누었다고 하자. 각 C_i를 근사한 곡선을 B_i라 할 때, 근사 거리는 다음과 같이 주어진다.
각 조각에 대한 근사 거리 μ_i는 C_i와 B_i사이의 하우스도르프 거리와 같다.
전체 곡선에 대한 근사 거리 μ는 μ_i 의 최댓값으로 정의한다.

MAIN CONTENTS

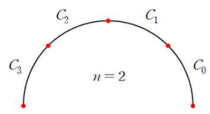
■ 근사 방법

1. 곡선을 조각별로 나누기

연속함수 $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$에 대해 $C = \gamma([0,1])$이라 하자.
C를 다음과 같이 2^n 개의 조각으로 나눈다.

$$\gamma_i(t) = \gamma\left(\frac{i+t}{2^n}\right)$$

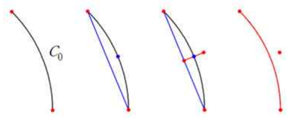
$$C_i = \gamma_i([0,1]) \quad (i = 0, 1, \ldots, 2^n - 1)$$



($n=2$ C_0 C_1 C_2 C_3 표시하기)

2. 각 조각을 근사하기

조각 C_i의 양 끝점을 $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_2$라 하고, 조각의 양 끝점을 잇는 직선에서 가장 멀리 떨어진 조각 위의 점을 중간점으로 정의한다. P_1은 중간점에 대한 P_0와 P_2의 중점의 대칭점이다.
이제 $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$를 이용해 베지어 곡선 B_i를 그린다.

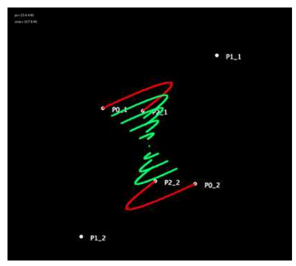


3. 오차 확인하기

C와 $B = \bigcup_{i=0}^{2^n-1} B_i$ 사이의 근사 거리 μ가 주어진 $\varepsilon > 0$보다 작으면 충분한 근사라고 판단하고 작업을 중지한다.
$\mu > \varepsilon$ 이라면 $n+1$에 대해 위 과정을 반복한다.

■ 곡선에 움직임을 주는 방법

- 처음 곡선과 끝 곡선이 주어질 때, 두 곡선을 같은 n에 대해 근사한다.
- 각 대응되는 조절점을 처음 곡선에서 끝 곡선까지 선형적으로 변화시킨다.
- 같은 시점에서의 조절점들을 이용해 베지어 곡선을 그린다.



CONCLUSION

- 제시된 방법에 따라 임의의 3차원 곡선을 근사할 수 있다.
- 어떤 $\varepsilon > 0$에 대해서도 $\mu < \varepsilon$이 성립하는 n이 존재한다.
- 반지름이 1인 반원의 경우 $n=2$일 때 $\mu \approx 0.001$, n에 따라 μ는 지수적으로 감소하는 경향을 보인다.
- 곡선을 구성하는데 조각별로 3개의 점만 필요하므로 저장 용량이 줄어든다.
- 3차원 곡선의 움직임을 구현할 수 있으므로 홀로그램, VR 등의 활용 분야가 있다.

REFERENCE

[2] Hazewinkel, Michiel (1997) "Encyclopaedia of Mathematics: Supplement. 1", Springer Science & Business Media, pp. 119.
[3] Seon-Hong Kim, Young Joon Ahn (2007) "Approximation of circular arcs by quartic Bezier cirves", Computer-Aided Design 39, pp. 490-493.
[5] 문성룡, 문홍진, 송의남, 김종교 (1985) "Quadratic Bezier Polynomial 과 B-spline Function을 이용한 Curve Fitting 및 Computer Graphic Animation 에 관한 기초연구", 대한전자공학회 학술대회, pp. 321-327.
[6] Munkres, James (1999) Topology(2nd ed) Prentice Hall, pp.280-281.