[양식2] 기초R&E 중간보고서

2020학년도
경기과학고 기초 R&E 중간보고서

Bezier curve를 이용한 3차원 곡선의 애니매이션화

2020. 08. 02

연구 참여자 : 20046 박건호(skyalexpark@naver.com)
20071 윤상 (dick1225@naver.com)

지 도 교 사 : 김소연 (abc0003@naver.com)

과학영재학교 경기과학고등학교

Bezier curve를 이용한 3차원 곡선의 애니매이션화

요 약

애니메이션은 여러 장의 그림을 빠르게 보여줌으로써 보는 사람으로 하여금 실제 사물이 움직이는 것처럼 보이게 한다. 이러한 애니메이션은 과거 수많은 그림을 사람이 일일이 그려 만들어졌다. 하지만 최근 컴퓨터 기술력이 발달함에 따라 사람이 그리기보다는 컴퓨터 그래픽을 이용하는 경향이 강해졌다. 또한 과거의 애니메이션은 2D였지만 요즘은 3D 그래픽을 이용한 3D 애니메이션도 많이 제작된다. Bezier curve는 자연스러운 곡선을 구사하는 기술력으로 애니메이션은 물론 글자 폰트에도 사용된다. 우리는 Bezier curve를 이용한 3차원 곡선과 그 움직임을 구현할 수 있는 방법을 탐구해보았다.

Bezier curve를 이용한 3차원 곡선의 애니매이션화

I. 서론

1.1 연구의 필요성 및 목적

우리는 베지어 곡선(Bezier curve)를 이용한 3차원 곡선의 애니메이션화를 통하여 3차원 애니메이션을 만들 수 있을 것이다. 우리는 영화 또는 애니메이션을 보며 어떻게 해야 저렇게 부드럽고 자연스러운 곡선을 만들지라는 생각을 할 것이다. 그것은 대부분 베지어 곡선(Bezier curve)을 이용하여 만든 것이다.
우리는 그러므로 이런 곡선의 성질만 알면 우리도 충분히 구현시킬 수 있을 것이다. 하지만 우리는 지금까지 2차원에서의 곡선밖에 다뤄보지 못하였다. 만약에 2차원 곡선을 3차원 곡선으로 확장 시킨다면 3차원 적인 움직임 즉, 홀로그램 같은 것을 만들 수 있고 이를 통해 부드러운 곡선을 형성할 수 있는 것이다. 우리는 이 3차원 곡선을 통해 우리가 2차원으로서만 보고 이해하지 못하는 그림들을 3차원으로 표현해서 교육적인 측면, 건설에 관련된 측면 모두 이해력을 상승시켜준다는 점에서 많은 효과를 얻을 수 있다.

우리는 한 개의 2차 베지어 곡선(quadratic Bezier curve)를 다루기 위해서는 세 개의 점이 필요하다. 그리고 이 세 개의 조절 점을 어디에 잡는지에 따라 곡선은 많이 다양해진다. 하지만 그중에서도 우리는 이상하게 그린 곡선을 부드러운 3차원 곡선으로 바꾸는 것이 목적이므로 임의의 연속인 곡선과 오차가 제일 적은 곡선을 골라야 한다. 그리고 곡선을 하나 그린다고 하여도 이런 과정을 반복하여 그린 곡선들의 모임이 매끄럽지 않다면 우리가 한 모든 노력은 다 물거품이 되어 버리므로 곡선끼리 이을 때도 어떻게 해야 부드러운 곡선이 나올지에 대해 충분히 생각해 봐야 한다.
그러므로 우리는 세 개의 점을 어떻게 잡아야 임의의 연속인 곡선과의 오차를 최소화할지, 또한 그 곡선들의 모임이 매끄럽기 위해서 어떤 기분으로 점을 잡아야 할지 동시에 생각해 보아야 한다.

1.2 이론적 배경

Definition 1.1. 곡선

$t \in [a,b]$에서 정의된 연속함수 $c:[a,b] \to \mathbb{R}^n$을 곡선이라 한다.

Definition 1.2. 조각별(piecewise)와 조각(piece)

$t \in [a, b]$에서 정의된 곡선 c에 대해서 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$인 $x_i\,(i = 0, 1, \dots, n)$을 생각할 때, 곡선의 정의역을 $[x_{i-1}, x_i]\,(i = 1, 2, \dots, n)$으로 나누는 것을 조각별(piecewise)로 나눈다고 한다. 이때 각 $[x_{i-1}, x_i]\,(i = 1, 2, \dots, n)$에서 정의된 c를 조각(piece)라 한다.

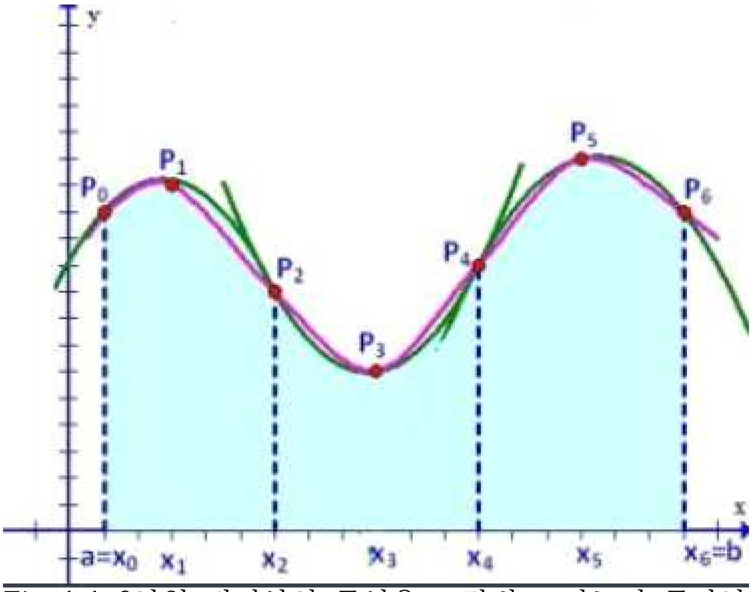

Fig 1.1 2차원 평면상의 곡선을 조각별로 나누어 근사하는 심프슨 공식의 사용 예시

Definition 1.3. 이차 베지에 곡선(quadratic Bezier curve)

세 점 $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$와 $0 \le t \le 1$에 대하여

$\overline{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1}$을 $(1-t):t$로 내분하는 점을 Q_0, $\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}$를 $(1-t):t$로 내분하는 점을 Q_1이라 할 때,

이차 베지어 곡선 위의 한 점 $B(t)$는 $\overline{\mathrm{Q}_0\mathrm{Q}_1}$을 $(1-t):t$로 내분하는 점이다.

이 때 세 점 $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$를 베지어 곡선의 조절점(control point)라 한다.

Theorem 1.4.

$$B(t) = (1-t)^2\mathrm{P}_0 + 2t(1-t)\mathrm{P}_1 + t^2\mathrm{P}_2 \quad \dots(1)$$

proof.

$Q_0 = (1-t)P_0 + tP_1$
$Q_1 = (1-t)P_1 + tP_2$
$B(t) = (1-t)Q_0 + tQ_1$
$\quad = (1-t)[(1-t)P_0 + tP_1] + t[(1-t)P_1 + tP_2]$
$\quad = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2$

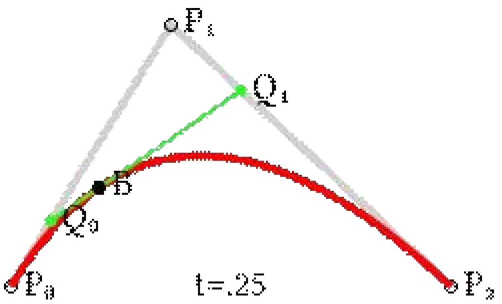

Fig 1. $B(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2, t = 0.25$

Property 1.5. $P_0, P_1, \ldots, P_n$을 조절점으로 가지는 베지어 곡선은 다음 식으로 나타내어진다.[1]

$$B(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i P_i \quad \ldots(2)$$

Property 1.6. $B(t)$는 각각 $t=0, t=1$일 때 P_0, P_n을 지나지만 일반적으로 다른 조절점은 지나지 않는다. 특히 이차 베지어 곡선의 경우 항상 P_0, P_2를 지나지만 P_1은 지나지 않는다.

Difinition 1.7. 집합 X에서 정의된 거리함수 $d : X \times X \to [0, \infty)$는 다음 세 공리를 만족한다.

$x, y, z \in X$에 대해서

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) \le d(x, z) + d(z, y)$

본 연구에서는 $\mathbb{R}^n$에서 주어진 유클리드 거리만을 생각한다. 즉 $d(x, y) = \| x - y \|$

Definition 1.8. 하우르도르프 거리(Hausdorff distance)

X, Y가 $\mathbb{R}^n$의 공집합이 아닌 부분집합일 때, 하우스도르프 거리 $d_H(X, Y)$는

$$d_H(X, Y) = \max\left(\max_{x \in X}\left(\min_{y \in Y} d(x, y)\right), \max_{y \in Y}\left(\min_{x \in X} d(x, y)\right)\right) \quad [2]$$

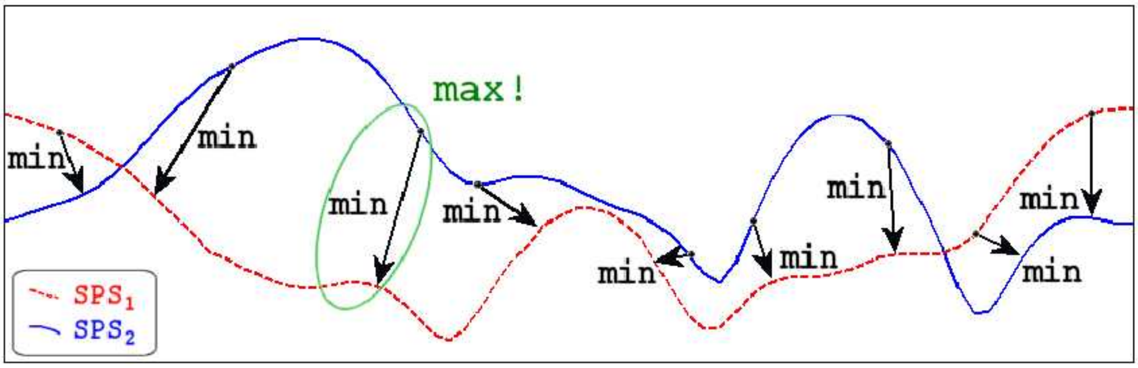

Fig 1.2. 파란 곡선이 X, 빨간 곡선이 Y일 때 $\max_{x \in X} \min_{y \in Y} d(x, y)$

Definition 1.9. 주어진 곡선을 c, 베지어 곡선을 이용한 근사를 B라 할 때 거리 $d_H(c, B)$가 작을수록 좋은 근사이다. [3,4]

II. 연구과정 및 방법

2.1. quadratic Bezier curve를 이용한 임의의 매끄러운 3차원 곡선의 근사 가능성

Bezier curve는 2차원 평면상에서 정의되지만 이를 임의의 n차원까지 확장할 수 있다. 식 (2)에서 각 조절점 P_i에 n차원 좌표를 대입하면 된다. 본 연구에서는 3차원 2차 베지어 곡선만을 생각한다. 즉 식 (1)에서 조절점 $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$는 3차원 공간상의 점이다.

Theorem 2.1.3차원 2차 베지어 곡선은 한 평면상에 존재한다.

Lemma 2.2. 공간상의 같은 직선 위에 있지 않은 세 점은 한 평면 위에 놓이고, 이러한 평면은

유일하다.

Proof. 공간상의 같은 직선 위에 있지 않은 세 점을 P_1, P_2, P_3라고 하자.

$n = (P_2 - P_1) \times (P_1 - P_0)$라 정의하면 $(P - P_0) \cdot n = 0$을 만족하는 점 P들의 자취는 한 평면이다. 또한 $(P_0 - P_0) \cdot n = 0$, $(P_1 - P_0) \cdot n = 0$, $(P_2 - P_0) \cdot n = 0$을 만족하므로 이 평면은 세 점 P_0, P_1, P_2을 포함한다.

Proof. (Theorem 2.1)

(1)에 의하면, P_0, P_1, P_2을 조절점으로 가지는 2차 베지어 곡선 위의 한 점은 P_0, P_1, P_2의 선형 결합으로 이루어진다. 내적의 선형성을 이용하면, 2차 베지어 곡선 위의 모든 점은 Lemma 2.2의 평면 위에 존재한다.

주어진 곡선을 근사할 때, 곡선을 조각별로 나누고 각 조각은 2차 베지어 곡선을 이용하여 근사한다면 우리가 얻은 곡선의 각 조각은 한 평면 위에 있을 것이다. 이 특징을 이용한다면 3차원 2차 베지어 곡선를 이용하여 3차원 곡선을 근사시킬 수 있을 것이다.

2.2. 효율적인 근사를 위한 세 조절점의 선택

2차 베지어 곡선의 개형적인 특징(Property 1.4)를 고려할 때, 효율적인 근사를 위해서는 곡선 위의 두 점과 곡선 위에 있지 않은 한 점을 조절점으로 잡아야 한다. 곡선의 근사는 주어진 곡선을 조각별로 나누어, 각 조각을 하나의 2차 베지어 곡선으로 근사시키는 데서 출발한다. 주어진 곡선을 더 많은 조각으로 나눌수록 근사의 효율성은 증가할 것이다. 여기서는 더 많이 나누기보다는, 각 조각을 효율적으로 근사시킬 수 있는 방법을 탐구한다.

하나의 조각 곡선을 근사시킬 때, Property 1.4를 고려하면, 두 조절점 P_0와 P_2는 조각 곡선의 양 끝점이 되어야 한다. 그리고 P_1은 곡선 위에 있지 않은 한 점(일부 경우 곡선 위의 점이 될 수 있다)으로, 곡선이 근사가 충분히 효율적으로 되게 하는 점이다.

각 조각을 근사시키기 전 주어진 곡선을 조각별로 나누는 방법을 연구해야 한다. 조각의 선택에 따라 근사 효율이 크게 차이가 날 수 있기 때문이다. 우선 오차가 큰 경우를 생각하면, 양 끝점에서 주어진 곡선과 2차 베지어 곡선의 기울기 차이가 클 때이다. 이러한 특징을 가진 점은 곡선의 변곡점일 것이라고 생각했다. 조각의 양 끝점 중 하나가 변곡점일 경우 2차 베지어

곡선을 이용하여 근사하였을 때 오차가 커질 것이라고 예상한다. 다만 이것이 변곡점의 특징인지, 혹은 변곡점이 아닐지 아직 확실하지 않다. 오차가 커지는 점은 무엇이며, 이러한 점을 피해 오차가 작아지게 하기 위한 방법은 추가적인 연구가 필요하다.

2.3. 우리가 얻은 곡선이 모든 점에서 미분 가능하게 할 수 있는가

Theorem 2.3. 임의의 매끄러운 곡선을 조각별로 나누어 각 조각을 2차 베지어 곡선으로 근사시킨 곡선은 조각별로 미분 가능하다.

Proof. 각 조각은 (1)의 식으로 표현된다. 이 때

$$B'(t) = 2(1-t)(\mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_0) + 2t(\mathrm{P}_2 - \mathrm{P}_0)$$

이므로 $0 \le t \le 1$에서 미분 가능하다.

우리가 얻은 곡선은 조각별로 미분 가능하지만 일반적으로 모든 점에서 미분 가능하지는 않다. 모든 점에서 미분 가능하기 위해서는 각 조각의 양 끝점에서 미분 가능해야 한다. 각 조각을 근사한 2차 베지어 곡선을 $B_i(t)\,(i = 0, 1, \ldots, n)$이라 한다면 모든 $i = 1, 2, .., n$에 대해서 $B'_{i-1}(1) = B'_i(0)$이 성립해야 한다. 이 등식이 성립하기 위해 조절점을 어떻게 잡을지는 아직 연구중이다.

2.4. 곡선 근사의 효율성을 판단할 척도의 여부

곡선의 근사 효율을 판단하기 위해 하우스도르프 거리를 이용한다. 즉 주어진 곡선을 c, 우리가 얻은 곡선을 B라 할 때, $d_H(c, B)$가 작은 값을 가질수록 좋은 근사라고 판단한다. 하우스도르프 거리는 많은 선행 연구에서 근사 효율을 판단할 때 사용되었기에 신뢰성이 있다고 생각한다. [3,4]

III. 예상 결과

3.1 2차 베지어 곡선을 이용하여 임의의 매끄러운 3차원 곡선을 근사시킬 수 있는지와 이를 수식으로 표현이 가능한지 알아보자.

우리가 2차원 2차 베지어 곡선을 세 개의 점만 잡으면 만들 수 있다는 사실은 이론적 배경에서 설명하였다. 하지만 여기서 2차원을 3차원으로 확장시킬 경우에도 세 개의 점만 잡으면 결정될지는 증명을 해보아야 한다.

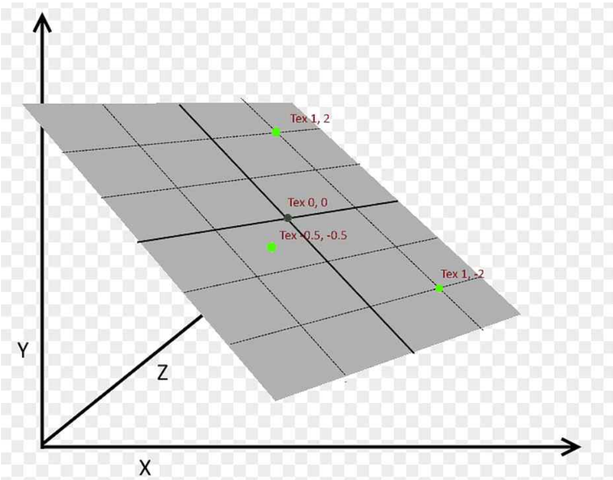

Fig 3.1. 3차원 좌표계에서의 평면과 그 평면 위에 세 개의 점을 놓은 그림

그림의 평면을 S라고 하고 그 위의 세 점을 $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$라고 하자. 이때 법선 벡터를 $n=(\mathrm{P}_2-\mathrm{P}_1)\times(\mathrm{P}_1-\mathrm{P}_0)$ 라고 말할 수 있다. 그러면 우리는 평면 S를 $(\mathrm{P}-\mathrm{P}_0)\cdot n=0$ 라는 식으로 결정시킬 수 있다. 그러면 우리는 3개의 점을 정함에 따라 평면 S 위에서도 서로 수직인 단위 벡터 u, v를 잡을 수 있고 평면 S 위의 한 점을 u, v축을 잡아 수식으로 표현할 수 있을 것이다.

수식으로 표현하는 방법은 간단하다. 먼저 회전 행렬을 통해서 어떤 u, v축에서의 단위 증가량이 x, y, z축에 얼마나 대응되는지 수식으로 알아내고 uv평면에서 곡선을 임의의 시점 기준으로 u, v벡터 표현한 뒤에 x, y, z축에 대한 단위 벡터 $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$로 나타낸 뒤 시점이 uv 평면에서의 원점이므로 xyz 3차원 직교 좌표계를 시점으로 하고 uv 평면에서의 원점을 종점으로 하는 벡터를 더해주면 3차원 2차 베지어 곡선을 3차원 x,y,z 축 직교좌표계를 이용하여 나타낼 수 있다.

3.2 3개의 점을 어떤 기준을 통하여 정하는 것이 가장 효율적인가

2차 베지어 곡선의 개형적인 특징에 따라, 임의의 곡선을 근사하기 위해서는 곡선 위의 두 점과 곡선 위에 있지 않은 한 점을 조절점으로 잡아야 한다. 곡선의 근사는 곡선을 조각별로 나누어 각 조각들을 근사시키는 방법으로 이루어진다. 각 조각의 양 끝점이 2차 베지어 곡선의 조절점이 되고, 이 상황 속에서 오차가 가장 작아지게 하는 세 번째 조절점을 잡아야 한다.

그러면 어떤 경우가 크게 차이가 날까?

사이에 크게 변곡된 구간이 있을 경우가 대표적으로 일어난다. 베지어 곡선은 변곡 없이 가는 점이 오차가 발생하는 요인이지만 2차 베지어 곡선이 아닌 3차 4차 5차...를 대입하면 충분히 해결될 문제가 하지만 그런 것까지 도입된다면 어떤 3D 곡선을 일반화 시키는데에 있어 어려움이 있을 것이므로 변곡점을 기준으로 곡선을 세분화 시키는 방법이 있다. 즉, 처음에 곡선이 시작하는 점 A 끝나는 점 B으로 이루어져 있고 그 사이에 변곡점 P가 있다면 변곡점 P를 기준으로 곡선을 2개로 나누어 각각 근사시키는 방법이다. 그러면 변곡이 없는 곡선은 어떻게 대처를 하면 좋을지 생각해 보았지만 변곡이 없다고 하여도 오차는 조금 생길 수 밖에 없다. 그래서 변곡이 없을 경우에는 평균값 정리의 그림에서 영감을 받아 비슷하게 설계해 보았다. 아까와 동일하게 어떤 곡선의 처음점과 끝점을 A, B라고 정의 하면 2개의 점을 이은 직선이 있을 것이고 이와 평행한 직선중 곡선과 교점이 1개만 생기는 부분이 항상 존재할 수 밖에 없다. 그러면 그 점을 기준으로 나누기로 하였다. 이 방법을 언제 까지 반복할까 생각해 보았는데 Definition 1.5.를 참고로 보면 주어진 곡선을 c, 베지어 곡선을 이용한 근사를 B라 할 때 $d_H(c, B)$가 작을수록 좋은 근사이라고 위에서 설명 하였으므로 어느 기준 값 안에 들어오면 더 이상 점을 더 나누지 않게 설계하면 되겠다고 생각하였다.

IV. 결론 및 기대효과

베지어 곡선을 이용한 3차원 곡선의 근사의 할용 분야 중 하나는 애니메이션이다. 애니메이션은 2차원으로 보이지만 시청자가 3차원으로 인식하도록 해야 한다. 그렇기 때문에 실제로 3차원 도형을 움직이고 그것을 사영시키는 방법을 통해 쉽게 애니메이션을 만들 수 있다. 우리의 연구 결과를 이용하면 임의의 매끄러운 3차원 곡선과 그 움직임을 수식을 이용하여 표현할 수 있다. 즉 여러 개의 수식으로서 어떤 물체의 모양과 움직임을 표현할 수 있다. 이 방법의 장점은 수식만으로 구현할 수 있기에 차지하는 용량이 적고, 물체의 크기나 화질에 의해 변하지 않는다는 것이다. 이것은 애니메이션을 만듦에 있어 일손이 적어지고 비용을 절감할 수 있다는 기대효과가 있다.

V. 참고문헌

[1] Hazewinkel, Michiel (1997). Encyclopaedia of Mathematics: Supplement. 1. Springer Science & Business Media. p. 119.

[2] Munkres, James (1999). Topology (2nd ed.). Prentice Hall. pp. 280–281.
[3] Seon-Hong Kim & Young Joon Ahn (2007) "An approximation of circular arcs by quartic Bezier curves", Computer-Aided Design 39, pp.490-493.
[4] Young Joon Ahn & Yeon soo Kim & Youngsuk Shin (2004) "Approximation of circular arcs and offset curves by Bezier curves of high degree", Journal of Computational and Applied Mathematics 167, pp.405-416.