베지어 곡면을 이용한 3D 모델링

[교사] [학생]

사 업 명 : 2021년 경기과학고등학교 심화R&E

연 구 자 : 박건호(2학년), 윤상(2학년)

지 도 교 사 : 김소연

ABSTRACT

공학 설계를 하는 CAGD 분야에서 자동차 차체, 비행기 기체 등을 설계할 때 베지어 곡면을 많이 사용한다. 베지어 곡면이 삼각형 분할에 비해 부드러운 곡면을 표현함에 더 강하고, 적은 메모리를 필요로 한다는 장점이 있기 때문이다. 우리 연구에서는 obj파일로 주어진 3D 모델을 베지어 곡면을 이용해 근사하고 압축해 메모리를 줄이는 새로운 방법을 다룬다. 실제로 구면에 이 방법을 적용했을 때, 적당한 오차에 대해 1분 안에 메모리가 200배 이상 감소하는 효과를 보였다. 이 연구는 3차원 공간상의 볼록 집합의 경계를 대상으로 하며 기존의 베지어 곡면을 이용한 point cloud(물체의 나타내는 점들)의 근사 방법을 확장해 연구했다. 고차 베지어 곡면은 활용성이 높지만 계산량이 많다는 단점이 있기 때문에 (2, 2)차 베지어 곡면을 이용하였으며, 낮은 차수로도 충분히 좋은 결과를 얻었다. 우리는 곡면을 근사하기 위해 point cloud를 원통형으로 분할하는 과정을 거쳤다. 분할한 각 영역의 점들을 하나의 베지어 곡면으로 근사하였고, 공간상에서 광선과 삼각형의 교점을 찾는 Möller–Trumbore 알고리즘과 선행 연구를 참고해 최소제곱법, 뉴턴-랩슨 방법을 사용하여 최대한 빠른 시간안에 근사가 되도록 하였다. 베지어 곡면과 원 곡면의 차이를 나타내는 오차함수는 하우스도르프 거리가 적합하지만, 계산량이 너무 많다. 때문에 이를 적절히 변형해 새로운 오차함수를 만듦으로써 적은 시간을 소모하게 만들었다. 본 연구를 통해 곡면 모델링이 핵심이 되는 VR, AR 및 홀로그램 분야에서의 활용이 기대된다. 또한 CAGD 분야에서 더 큰 활용이 가능하며 미래 우주 공학과도 직결되는 우주선이나 우주 정거장을 디자인하는 데도 사용될 수 있다.

INTRODUCTION

현재 3D 모델은 저장, 프로그램 사용 등 많은 부분에서 obj파일로 사용된다. obj파일은 삼각형(사각형) 분할을 이용하는데, 이러한 다각형 분할은 많은 장점이 있지만 베지어 곡면을 이용한 압축에 비해 부드러운 곡면을 표현하는 능력이 떨어진다는 단점도 있다. 또한 베지어 분할은 베지어 곡면이 가지는 조절점이라는 고유한 성질 덕에 메모리도 적게 소모되어 더 효율적이다.

THEORETICAL BACKGROUND

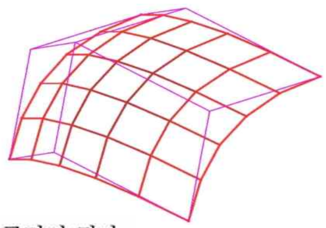
Defintion 1.2. $(n+1)(m+1)$개의 점 $\mathbf{b}_{ij}$ $(i=0,1,\cdots,n$ and $j=0,1,\cdots,m)$에 대해 다음 2변수 다항식을 생각하자.

$$\mathbf{x}(u,v)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}B_i^n(u)B_j^m(v)\mathbf{b}_{ij} \tag{2}$$

여기서 Bernstein 다항식 $B_i^n(t)=\binom{n}{i}(1-t)^{n-i}t^i$이다. $\mathbf{x}$에 의한 $[0,1]^2$의 상을 $(\boldsymbol{n},\boldsymbol{m})$**-차 베지어 곡면(Bézier surface)**이라 한다. 점 $\mathbf{b}_{ij}$를 이 베지어 곡면의 조절점이라 한다. [1]

Defintion 1.3. $\mathbb{R}^n$의 부분집합 C가 다음 조건을 만족할 때, C를 **볼록 집합(convex set)**이라 부른다.

$$\forall \mathbf{x},\mathbf{y}\in C,\ \forall t\in[0,1],\ (1-t)\mathbf{x}+t\mathbf{y}\in C$$



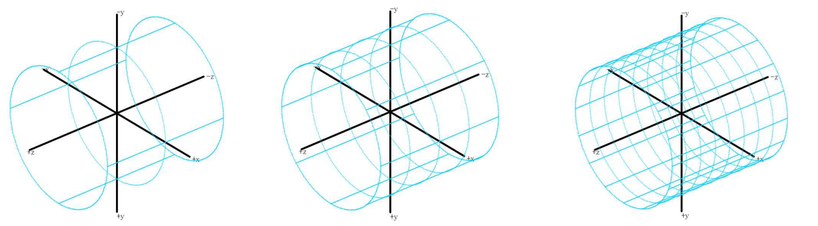
$\mathbb{R}^3$의 내부가 공집합이 아닌 볼록 집합의 경계는 2차원 곡면이 된다.

MAIN CONTENTS

주어진 모델을 하나의 베지어 곡면으로 나타내려면 오차가 너무 커진다.

$\Longrightarrow$ 정점을 원통형으로 분할하고, 각각의 분할된 곡면을 하나의 베지어 곡면으로 근사

다만 같은 (θ,z)에 대해 두 개 이상의 점이 있으면 문제가 생긴다. 이 단점을 없애기 위해 연구 대상을 $\mathbb{R}^3$의 볼록 집합의 경계 곡면으로 축소했다.



분할된 곡면을 근사하기 위해서 9개의 조절점이 필요하다. 각 영역의 경계는 $\theta=\theta_i$ 혹은 $z=z_j$로 주어지므로, 직선 ℓ: $\theta=\theta_i$, $z=z_j$와 obj파일의 면 F의 교점으로 네 조절점 $\mathbf{b}_{00},\mathbf{b}_{02},\mathbf{b}_{20},\mathbf{b}_{22}$를 구한다. 여기서 직선과 삼각형의 교점을 찾는 빠른 알고리즘인 Möller-Trumbore intersection algorithm을 사용한다. [2] 그리고 $(2,2)$차 베지어 곡면의 네 모서리는 각각 2차 베지어 곡선이 되므로 작년 연구를 이용하면 $\mathbf{b}_{01},\mathbf{b}_{10},\mathbf{b}_{12},\mathbf{b}_{21}$도 얻을 수 있다. [3]

$\mathbf{b}_{11}$을 구하기 위해 최소제곱법을 이용한다. 최소제곱법을 사용하기 위해서는 각 정점 $\mathbf{P}_k$에 대응되는 베지어 곡면 위의 점 $\mathbf{x}_k=\mathbf{x}(u_k,v_k)$을 알아야 한다. 이미 알고 있는 8개 조절점에 대한 항을 $\mathbf{y}_k$라 하면 $\mathbf{x}_k=B_1^2(u_k)B_1^2(v_k)\mathbf{b}_{11}+\mathbf{y}_k$로 나타낼 수 있다. 이제 제곱오차 $\sum_{k=1}^{K}\|\mathbf{x}_k-\mathbf{P}_k\|^2$을 최소로 하는 $\mathbf{b}_{11}$은 다음과 같이 주어진다.

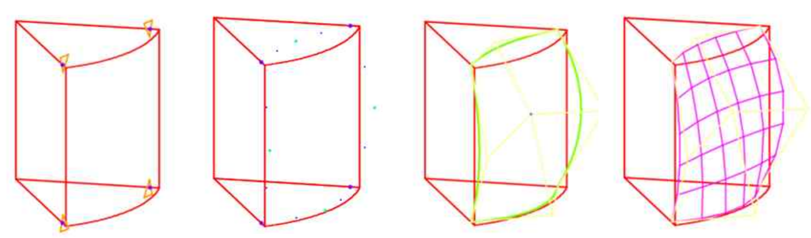
$$\mathbf{b}_{11}=\frac{\sum_{k=1}^{K}B_1^2(u_k)B_1^2(v_k)(\mathbf{P}_k-\mathbf{y}_k)}{\sum_{k=1}^{K}(B_1^2(u_k)B_1^2(v_k))^2} \tag{5}$$

각 k에 대해 u_k와 v_k의 값을 안다면 Eq. (5)와 같이 $\mathbf{b}_{11}$을 구할 수 있다. 이제 최적의 u_k,v_k를 찾기 위해 가우스-뉴턴 방법을 이용한다. 가우스-뉴턴 방법은 뉴턴-랩슨 방법을 다변수 벡터함수로 확장한 것이다. 이를 적용할 함수는 $\mathbf{x}-\mathbf{P}_k$이다. 즉 현재 $u_{n,k}$와 $v_{n,k}$가 $\mathbf{u}_{n,k}=(u_{n,k},v_{n,k})$와 같이 주어질 때, 다음과 같이 $\mathbf{u}_{n+1,k}=(u_{n+1,k},v_{n+1,k})$를 얻는다.

$$\mathbf{u}_{n+1,k}=\mathbf{u}_{n,k}-(\mathbf{J}_\mathbf{x}^T\mathbf{J}_\mathbf{x})^{-1}\mathbf{J}_\mathbf{x}^T(\mathbf{x}_k-\mathbf{P}_k) \tag{6}$$

이때 $\mathbf{J}_\mathbf{x}$는 $\mathbf{x}$의 Jacobian이다.

초기 조건 $u_{0,k}=v_{0,k}=0.5$에 대해, $\mathbf{b}_{11}$을 구하고 u_k,v_k를 갱신하는 과정을 반복한다. 실험적으로 위 과정을 20번 반복하면 u_k와 v_k의 값이 거의 일정했다.



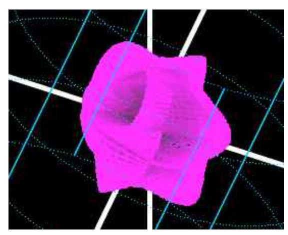
Defintion 3.1. 분할된 각 영역 내의 점을 $\mathbf{P}_k$ $(1\le k\le K)$라 하고, 이에 대응되는 베지어 곡면 위의 점을 $\mathbf{x}(u_k,v_k)=\mathbf{x}_k$라 하자. 이때 오차함수 μ는 다음과 같이 주어진다.

$$\mu=\max_{\text{각 영역}}\max_{1\le k\le K}\|\mathbf{x}_k-\mathbf{P}_k\| \tag{8}$$

Eq. (8)에서 $\mathbf{x}_k-\mathbf{P}_k$의 값이 작을수록 베지어 곡면과 원 곡면 사이의 오차가 작으므로 μ는 오차함수로 적절하다.

CONCLUSION

- 실제로 반지름의 길이가 64인 구면에 제시한 방법을 적용했을 때, 실행 시간 1분 이내에 오차함수가 10보다 작아졌고 곡면을 저장하는 메모리는 200배 이상 감소되었다.



- 연구 대상으로 하는 모든 곡면이
- 제시한 방법에 따라 충분히 근사될 수 있음을 보였다.

Proof. 증명의 핵심은 다음 식이다.

$$\|\mathbf{x}_k-\mathbf{P}_k\|\le\sum_{i,j=0}^{2}B_i^2(u_k)B_j^2(v_k)\|\mathbf{b}_{ij}-\mathbf{P}_k\|$$

REFERENCE

[1] Farin, G. E., & Farin, G. (2002). *Curves and surfaces for CAGD: a practical guide.* Morgan Kaufmann.

[2] Möller, T., & Trumbore, B. (1997). Fast, minimum storage ray-triangle intersection. *Journal of graphics tools*, 2(1), 21-28.

[3] 윤상, 박건호. (2020). *Bezier curve를 이용한 3차원 곡선의 애니메이션화* (기초 R&E). 경기과학고등학교.

[4] Munkres, J. (2014). *Topology.* Pearson Education.

[5] Lifton, J. J., Liu, T., & McBride, J. (2021). Non-linear least squares fitting of Bézier surfaces to unstructured point clouds. *AIMS Mathematics*, 6(4), 3142-3159..