Exercice 1 : Méthode itérative

On cherche à approcher numériquement un modèle de transport de matériaux par la méthode de discrétisation des différences finies. Le modèle est donné par :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (\beta - 1)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (x,t) \in [0,1] \times [0,1] \\ u(0,t) = 2t \\ \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 1 - t \\ u_0(x) = \cos^2(2\pi x) \end{cases}$$

où $(\beta - 1) \in [0,1]$ est le coefficient de diffusion.

1. Schéma numérique centré

À l'aide des développements de Taylor, on approxime la dérivée seconde par :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_n) \approx \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

L'ordre d'approximation est $O((\Delta x)^2)$.

2. Schéma numérique décentré à droite

Pour la dérivée temporelle :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n) \approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}$$

Ordre d'approximation : $O(\Delta t)$.

3. Schéma d'Euler explicite

L'équation devient :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -(\beta - 1)\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

On pose $r = \frac{-(\beta-1)\Delta t}{(\Delta x)^2}$, d'où :

$$u_i^{n+1} = (1 - 2r)u_i^n + ru_{i+1}^n + ru_{i-1}^n$$

4. Condition de stabilité

On note $\alpha = -(\beta - 1)$, et avec $\beta = 0{,}86$, on a $\alpha = 0{,}14$.

La condition de Von Neumann est :

$$r = \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2}$$

5. Conditions aux limites et système linéaire

Discrétisation spatiale : $x_i = i\Delta x$, $i = 0, \ldots, N_x$.

- Condition Dirichlet à gauche : $u_0^n = 2t_n$
- Condition Neumann à droite :

$$u_{N_x+1}^n = u_{N_x-1}^n + 2\Delta x(1 - t_n)$$

Formules du schéma numérique aux bords et à l'intérieur :

- $i = 1$:
$$u_1^{n+1} = (1 - 2r)u_1^n + ru_2^n + 2rt_n$$
- $2 \leq i \leq N_x - 1$:
$$u_i^{n+1} = ru_{i-1}^n + (1 - 2r)u_i^n + ru_{i+1}^n$$
- $i = N_x$:
$$u_{N_x}^{n+1} = (1 - 2r)u_{N_x}^n + 2ru_{N_x-1}^n + 2r\Delta x(1 - t_n)$$

6. Écriture matricielle

On note :

$$U^n = \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_{N_x}^n \end{bmatrix}, \quad U^{n+1} = AU^n + B^n$$

Matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 1-2r & r & 0 & \cdots & 0 \\ r & 1-2r & r & \cdots & 0 \\ 0 & r & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1-2r & r \\ 0 & \cdots & 0 & 2r & 1-2r \end{pmatrix}$$

Vecteur B^n :

$$B^n = \begin{pmatrix} 2rt_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 2r\Delta x(1-t_n) \end{pmatrix}$$

7.a. Application numérique

Voir le fichier : `exercice1question7a.m`

7.b. Résultat graphique

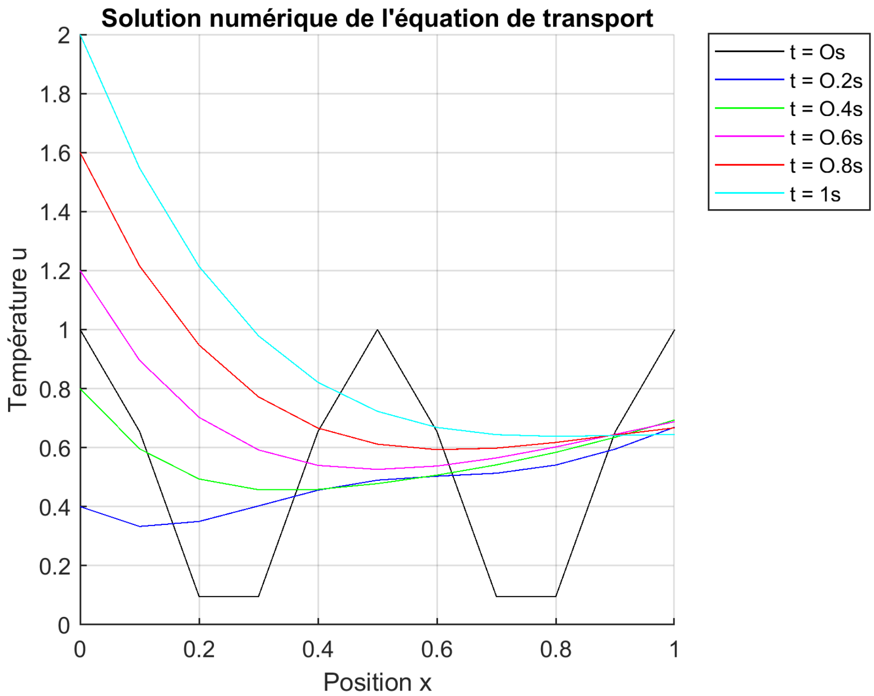

FIGURE 1 – Solution numérique de l'équation de transport

Analyse qualitative des résultats : L'analyse des différentes courbes de solution obtenues pour l'équation de transport avec diffusion révèle l'influence combinée de la diffusion et des conditions aux limites imposées.

- **Effet de lissage de la diffusion :**
  - À $t = 0\,\mathrm{s}$, la courbe présente une forme ondulatoire avec des pics et des creux distincts.
  - Avec le temps, ces oscillations sont atténuées : les bosses s'aplatissent, les creux se remplissent. Ce comportement reflète l'action du terme de diffusion, qui tend à uniformiser la distribution de u.

- **Influence de la condition de Dirichlet à gauche :**
  - La condition à $x = 0$ est de type Dirichlet : $u(0, t) = 2t$, ce qui induit une augmentation linéaire de la valeur de u à cette extrémité.
  - Le graphique montre que le point de départ des courbes à gauche augmente avec le temps, poussant la solution vers des valeurs plus élevées dans le domaine.
- **Adaptation à la condition de Neumann à droite :**
  - La condition à $x = 1$ est de type Neumann : $\frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 1 - t$, imposant une pente évolutive.
  - À $t = 0\,\text{s}$, la pente est positive. Elle diminue avec le temps et devient nulle à $t = 1{,}0\,\text{s}$, ce que confirme la forme quasi horizontale de la courbe à droite.

En résumé, ces résultats illustrent l'interaction entre la diffusion, l'entrée croissante à la frontière gauche et la contrainte de pente à la frontière droite, expliquant l'évolution des profils de la solution.

Exercice 2 : Intégration numérique

1. Détermination de la valeur exacte

$$I(f) = \int_0^{2\pi} (x^3 - 2\sin(x) + 1)\,dx$$

Décomposition de l'intégrale en termes simples :

$$I(f) = \int_0^{2\pi} x^3\,dx - 2\int_0^{2\pi} \sin(x)\,dx + \int_0^{2\pi} 1\,dx$$

Calcul des primitives de chaque terme :

$$\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} \quad \text{(primitive de } x^3\text{)}$$

$$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) \quad \text{(primitive de } \sin(x)\text{)}$$

$$\int 1\,dx = x \quad \text{(primitive de 1)}$$

Évaluation entre 0 et 2π :

$$I(f) = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{2\pi} - 2\left[-\cos(x)\right]_0^{2\pi} + [x]_0^{2\pi}$$

$$I(f) = \left(\frac{(2\pi)^4}{4} - 0\right) - 2\left(-\cos(2\pi) + \cos(0)\right) + (2\pi - 0)$$

$$I(f) = \frac{16\pi^4}{4} - 2(-1+1) + 2\pi$$

$$= \frac{(2\pi)^4}{4} + 2\pi \approx 395.9195$$

2. Code MATLAB

Voir le fichiers `exercice2question2.m`

3. Code MATLAB

Voir le fichier `exercice2question3.m`

4. Analyse de l'erreur

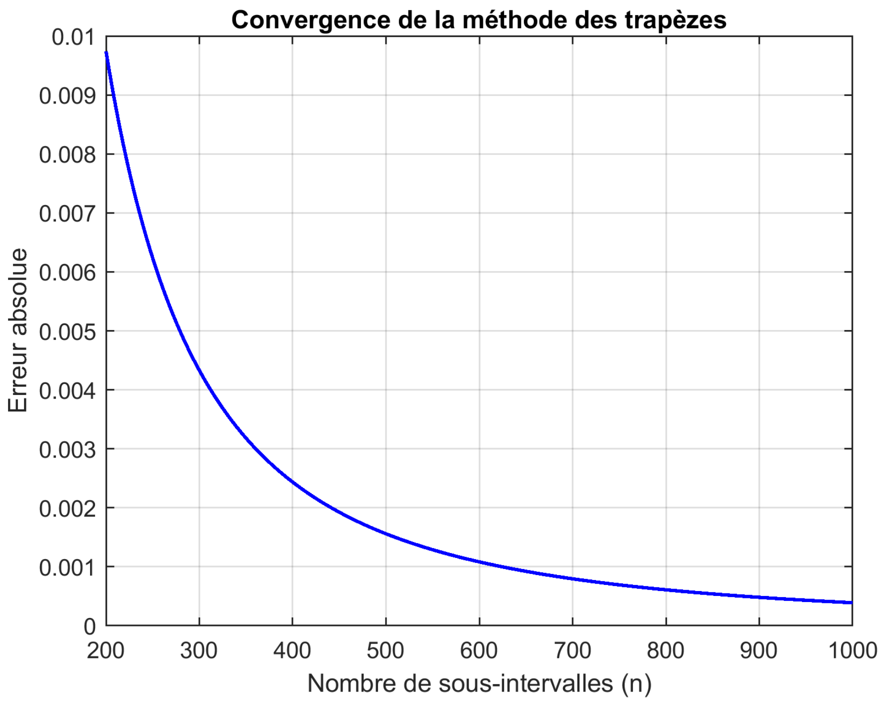

FIGURE 2 – Évolution de l'erreur absolue en fonction de n

Commentaires :

- L'erreur diminue lorsque le nombre de subdivisions n augmente.
- La convergence est rapide grâce à la régularité de la fonction intégrée.
- Au-delà d'un certain seuil, l'erreur devient négligeable.

Exercice 3 : Méthode direct

1. Code MATLAB

Voir le fichier exercice3question1.m

1. Code Python

Voir le fichier exercice3question2.txt