Solutionnaire

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

Contrôle périodique 3

LOG2810

Sigle du cours

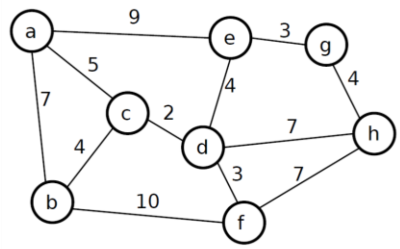
Sigle et titre du cours	*Groupe*	*Trimestre*
LOG2810 **Structures discrètes**	**Tous**	**Hiver 2022**
Professeur	***Local***	***Téléphone***
Aurel Randolph, Chargé de cours **Lévis Thériault, Coordonnateur**		

Jour	*Date*	*Durée*	*Heures*
Samedi	**2 avril 2022**	**1h**	**10h30-11h30**

Documentation	*Calculatrice*	
☐ Aucune ☒ Toute ☒ Voir directives particulières	☒ Aucune ☐ Toutes ☐ Non programmable (AEP)	**Les appareils électroniques personnels sont interdits.**

Directives particulières
Assurez-vous que votre questionnaire contient bien 11 pages. Cet examen est calculé sur 20 points et vaut 12% de la note finale. NE PAS FOURNIR DE CAHIERS DE RÉPONSE NI DE CAHIERS SUPPLÉMENTAIRES

Question 1 : (5 points)
À partir du graphe ci-dessous, proposez un arbre couvrant de poids minimal. Indiquez la méthode utilisée et détaillez toutes les étapes.



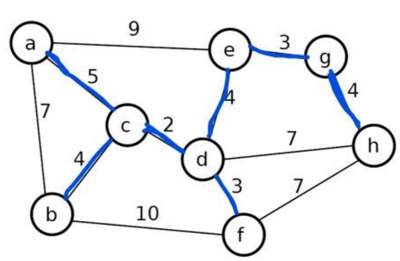
Solution

- Méthode : Kruskal
- Démarche
  - Tri des arcs en ordre croissant de coût

Arcs	Coût
cd	2
df	3
eg	3
bc	4
de	4
gh	4
ac	5
ab	7
dh	7
fh	7
ae	9
bf	10

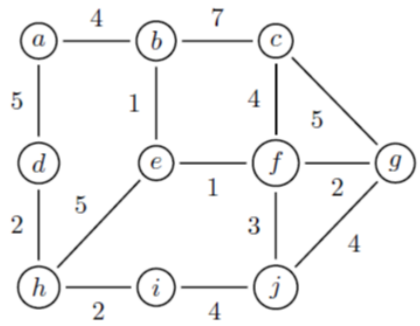
  - Construction de l'arbre par ajout itératif d'arcs. Parcourir la liste triée du haut vers le bas en ne sélectionnant que les arcs qui n'ajoutent pas de cycle dans l'arbre en construction. Arrêter après l'ajout de (n-1) arcs, avec n le nombre de sommets dans le graphe initial.
    À titre illustratif, les arcs non retenus sont barrés.

Arcs	Coût
cd	2
df	3
eg	3
bc	4
de	4
gh	4
ac	5
~~ab~~	~~7~~
~~dh~~	~~7~~
~~fh~~	~~7~~
~~ae~~	~~9~~
~~bf~~	~~10~~



Question 2 : 7 points

En utilisant l'algorithme de Dijkstra, déterminez le plus court chemin, du sommet c vers tous les autres sommets.



Solution

Sommet	Plus court chemin	Coût
a	c-f-e-b-a	10
b	c-f-e-b	6
c	c-c	0
d	c-f-e-h-d	12
e	c-f-e	5
f	c-f	4
g	c-g	5
h	c-f-e-h	10
i	c-f-j-i	11
j	c-f-j	7

Question 3 : (3 points)

Calculez :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{k-1} 3^{n-k+1}$$

Solution

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{k-1} 3^{n-k+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{k-1} 3^{n-k+1} \times 2 \times 2^{-1} \times 3 \times 3^{-1}.$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{k-1} 3^{n-k+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{k} 3^{n-k} \times 2^{-1} \times 3.$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{k-1} 3^{n-k+1} = 2^{-1} \times 3 \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{k} 3^{n-k}\right).$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{k-1} 3^{n-k+1} = 2^{-1} \times 3 (2+3)^{n}.$$

$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{k-1} 3^{n-k+1} = \frac{3}{2} \times 5^n$.

Question 4 (5 points)

Résolvez l'équation de récurrence :

$$a_{n+1} - 2a_n = -1 \,; avec\ a_0 = 4, a_1 = 7$$

Solution

On sait que : $a_{n+1} - 2a_n = -1$

Ainsi, $a_{n+2} - 2a_{n+1} = -1$

En soustrayant la 1ère ligne de la2ème ligne, on a :

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$$

Cette relation de récurrence linéaire homogène à coefficient constant de degré 2 a pour équation caractéristique :

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

Les racines de cette équation sont r = 1 et r = 2.

La solution de la relation de récurrence est de la forme

$$a_n = \mathrm{s}(1^n) + t(2^n)$$

Avec les cas de base on obtient s = 1 et t = 3

La solution est donc

$$a_n = 1 + 3.2^n$$