POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG2810

STRUCTURES DISCRÈTES

Contrôle périodique 2

Hiver 2022

Directives:

- La durée du contrôle périodique est de <u>60 minutes</u>.
- Vous devez compléter cet examen seul, sans l'aide de personne et en utilisant aucun outil de communication.
- L'examen est sur un total de 20 points.
- Répondez directement sur ce document Word (docx).
- Vous avez 15 minutes additionnelles pour produire le PDF et le soumettre dans la boîte de remise de votre section de cours.
- Générez le PDF avec le nom sous le format Matricule-CP2.pdf (exemple 1234567-CP2.pdf).
- Aucune copie envoyée par courriel ne sera acceptée.

Identification

Prénom : Debanjan

Nom : Bhaumick

Matricule : 2112748

Exercice 1 (6 points)

Soit A l'ensemble de tous les mots binaires de longueur 3. On considère sur A la relation suivante :

$$Si\ x, y\ \in A, \qquad xRy \ \Leftrightarrow x\ et\ y\ ont\ les\ mêmes\ deux\ derniers\ chiffres$$

a) (3 **points**) Montrez que R est une relation d'équivalence sur A.

Réponse :

Montrons que la relation est une relation equivalence en montrant qu'elle est réflexive, symétrique et transitive.

Symetrique : vue que cest un mot binaire dune longueur de 3 et les deux derniers valeurs de x et y sont pareils on peut dire que ces couples sont possible

x	y
0	1
1	1
1	1

Ceci est vrai ainsi que :

x	y
1	0
1	1
1	1

On peut donc dire que ceci est symétrique

Reflexive car les binaires 011 ou 100 pour x et le binaire 011 ou 100 pour y est aussi possible donc on peut dire ce dernier est reflexive

Transitive : la relation est transitive car

Transitive :∀ ((x, y) ∈ R) ∧ ((y, z) ∈ R), (x, z) ∈ R

Suivant cette definition on realize que si x prend la valeur de 011 et y prend la valeur de 011 et z 111 notre relation est bien transitive.

Ces couples étant possible on peut dire que ce dernier est bel et bien transitive

Vue qu'il est transitive symmetrique et reflexive on peut conclure quil est bien relation equivalence

---

b) (**2 points**) On considère sur *B= {a, b, c, d}*, la relation T_1. Donnez la fermeture transitive T_2 de T_1.

T_1 = {(a, b), (b, a), (c, d), (d, c), (a, c), (d, b)}

Réponse :

T2 = {(a, b), (a, c), (a,d), (b,c), (b,d), (b, a), (c, d), (d, c), (d, b), }

c) (**1 point**) Soit l'ensemble des entiers. Montrez que la relation *R* est antisymétrique.

$$xRy \iff \exists\, k \in \mathbb{N}^*, \quad y = x^k$$

Réponse :

xRy ↔ ∃k1 ∈ N*, y = x^k1

xRy ↔ ∃k2 ∈ N*, x = y^k2

En remplencant on obtient

x = x^(k1×k2)

ceci est vrai lorsque k = 1 or si k= 1 alors y = x donc la relation est antisymétrique

Exercice 2 (4 points)

Est-ce que :

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^i = O(1) \ ?$$

Justifiez votre réponse.

Réponse :

On voit ici que notre sum itere sur de k=0 a k=n par contre dans la sum il n'y a pas de K seulement un $\left(\frac{2}{3}\right)^i$. L'absence du k résulte a ce que $\left(\frac{2}{3}\right)^i$ soit un constant donc cela va resulter au fait que cette equation va être = n* $\left(\frac{2}{3}\right)^i$.

Ceci peut être analyser plus en profondeur sachant que :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^i + \left(\frac{2}{3}\right)^i + \left(\frac{2}{3}\right)^i \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^i = n * \left(\frac{2}{3}\right)^i$$

Vue l'itération de n on peut conclure que ce dernier n'est pas un O(1)

<u>Exercice 3</u> (5 points)

Résolvez dans $\mathbb{Z}$ l'équation :

$$720\ a + 27\ b = 36$$

Réponse :

Résolvons l'équation avec l'algorithme d'Euclide étendu

[720, 1, 0] [27, 0, 1]

[693, 1, -1] [27, 0, 1]

[666, 1, -2] [27, 0, 1]

[639, 1, -3] [27, 0, 1]

[612, 1, -4] [27, 0, 1]

[585, 1, -5] [27, 0, 1]

[558, 1 , -6] [27, 0, 1]

[531, 1, -7] [27, 0, 1]

[504, 1, -8] [27, 0, 1]

[477, 1, -9] [27, 0, 1]

[450, 1, -10] [27, 0, 1]

[423, 1, -11] [27, 0, 1]

[396, 1, -12] [27, 0, 1]

[369, 1, -13] [27, 0, 1]

[34 2, 1, -14] [27, 0, 1]

[315, 1, -15] [27, 0, 1]

[288, 1, -16] [27, 0, 1]

[261, 1, -17] [27, 0, 1]

[234, 1, -18] [27 , 0, 1]

[207, 1, -19] [27, 0, 1]

[180, 1, -20] [27, 0, 1]

[153, 1, -21] [27, 0, 1]

[126, 1, -22] [27, 0, 1]

[99, 1, -23] [2 7, 0, 1]

[72, 1, -24] [27, 0, 1]

[45, 1, -25] [27 , 0, 1]

[18, 1, -26] [27, 0, 1]

[18, 1, -26] [9, -1, 27]

([9, 2, -53], [9, -1 , 27])

On trouve les couples (2,-53) et (-1,27)

A=2

Et b= -1

<u>Exercice 4</u> (5 points)

En utilisant l'induction mathématique, démontrez pour tout entier positif non nul n que.

$$\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+\ 1)} = \frac{n}{2n+1}$$

Réponse :

Démonstration de base

Pour n=1

$\frac{n}{2n+1}$ = 1/(3) donc vrai

Induction :

Supposons pour un certains k on P(k)

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{(2i-1)(2i+\ 1)} = \frac{k}{2k+1}$$

Demontrons que P(k+1) cest a dire :

$$\sum_{i=0}^{k+1} \frac{1}{(2i-1)(2i+\ 1)} = \frac{k+1}{2(k+1)+1}$$

On peut décrire ce dernier étant

$$\frac{1}{1\times 3} + \frac{1}{3\times 5} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)(2k+\ 1)} + \frac{1}{(2k+1)(2k+\ 3)} = \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+\ 3)}$$

$$\frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+\ 3)} = \frac{k(2k+\ 3)+2k+1}{(2k+1\ )(2k+\ 3)}$$

$$\frac{k(2k+\ 3)+2k+1}{(2k+1\ )(2k+\ 3)} = \frac{2k^2+3k+1}{(2k+1\ )(2k+\ 3)}$$

$$\frac{2k^2+3k+1}{(2k+1\ )(2k+\ 3)} = \frac{k+1}{(2k+\ 3)}$$

Ce dernier suit la règle

$$\sum_{i=0}^{k+1} \frac{1}{(2i-1)(2i+\ 1)} = \frac{k+1}{2(k+1)+1}$$

On peut donc conclure que cest vrai