Raport - temat 2

Interpolacja.

Zadanie 20

Przemysław Wiczołek
gr. F3

31.10.2018

1. Wstęp teoretyczny

Treść zadania: *Interpolacja funkcjami kwadratowymi na obszarze* $D : |x| + |y| \leq 1$ *podzielonym na* $4n^2$ *trójkątów przystających. Tablicowanie funkcji, przybliżenia i błędu w środkach ciężkości trójkątów. Obliczenie błędu średniokwadratowego w tych punktach.*

Postać wielomianu interpolacyjnego stopnia drugiego dla funkcji 2 zmiennych to:

$$p(x,y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy + a_4x^2 + a_5y^2$$

Niech (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) będą współrzędnymi danego trójkąta, wówczas
$(x_3, y_3) = \left(\frac{x_0+x_1}{2}, \frac{y_0+y_1}{2}\right)$, $(x_4, y_4) = \left(\frac{x_0+x_2}{2}, \frac{y_0+x_2}{2}\right)$, $(x_5, y_5) = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$
to współrzędne środków jego boków.

Żeby obliczyć współczynniki p(x,y) rozwiązujemy układ 6 równań:

$$\begin{cases} p(x_0, y_0) = a_0 + a_1x_0 + a_2y_0 + a_3x_0y_0 + a_4{x_0}^2 + a_5{y_0}^2 = f(x_0, y_0) \\ p(x_1, y_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2y_1 + a_3x_1y_1 + a_4{x_1}^2 + a_5{y_1}^2 = f(x_1, y_1) \\ p(x_2, y_2) = a_0 + a_1x_2 + a_2y_2 + a_3x_2y_2 + a_4{x_2}^2 + a_5{y_2}^2 = f(x_2, y_2) \\ p(x_3, y_3) = a_0 + a_1x_3 + a_2y_3 + a_3x_3y_3 + a_4{x_3}^2 + a_5{y_3}^2 = f(x_3, y_3) \\ p(x_4, y_4) = a_0 + a_1x_4 + a_2y_4 + a_3x_4y_4 + a_4{x_4}^2 + a_5{y_4}^2 = f(x_4, y_4) \\ p(x_5, y_5) = a_0 + a_1x_5 + a_2y_5 + a_3x_5y_5 + a_4{x_5}^2 + a_5{y_5}^2 = f(x_5, y_5) \end{cases}$$

gdzie f to interpolowana funkcja.

Podany obszar D dzielimy na $4n^2$ przystających trójkątów prostokątnych.
Dla każdego z małych trójkątów rozwiązujemy podany wyżej układ równań i obliczamy wartość wielomianu p oraz funkcji f w środku ciężkości tego trójkąta: $\left(\frac{x_0+x_1+x_2}{3}, \frac{y_0+y_1+y_2}{3}\right)$.
Następnie obliczamy wartość błędu względnego w tym punkcie.

Błąd średniokwadratowy obliczamy ze wzoru:

$$MSE(\theta) = \sum_{i=1}^{4n^2} (f(\theta_i) - p(\theta_i))^2, \quad \theta = \theta_1, ..., \theta_{4n^2}$$

gdzie θ_i to współrzędne środka ciężkości i-tego trójkąta.

2. Opis metody

Implementacja

Implementacja została przeprowadzona poprzez funkcję

$$[meanSquaredError,\ valuesArray] = squarePolynInterpol(func,\ n)$$

Podział na trójkąty

---

1. Zaczynamy od pierwszego małego trójkąta o współrzędnych $(0,0)$, $(\frac{1}{n},0)$, $(0,\frac{1}{n})$ w I ćwiartce układu kartezjańskiego.
2. Odbijamy go w pozostałych ćwiartkach układu współrzędnych.
3. Obliczamy trójkąt przeciwległy, symetryczny względem przeciwprostokątnej poprzez dodanie $(\frac{1}{n},\frac{1}{n})$ do punktu przy kącie prostym.
4. Odbijamy drugi trójkąt w pozostałych ćwiartkach.
5. Przechodzimy do następnego trójkąta poprzez dodanie $\frac{1}{n}$ do pierwszej współrzędnej każdego punktu.
6. Powtarzamy powyższą procedurę aż dojdziemy do ostatniego trójkąta w pierwszym wierszu, dla którego nie ma przeciwległego.
7. Przechodzimy do początku następnego wiersza poprzez dodanie $\frac{1}{n}$ do drugiej współrzędnej każdego punktu pierwszego trójkąta w aktualnym wierszu.
8. Powtarzamy powyższą procedurę aż dojdziemy do ostatniego wiersza.

Dla pierwszego wiersza będziemy mieli n małych trójkątów (bez przeciwległych). W każdym wierszu liczba trójkątów zmniejsza się o 1, więc kolumny wystarczy iterować od 1 do $n - aktualnyWiersz$. Przez wiersze należy przechodzić od 1 do n.
W ten sposób otrzymujemy cały obszar $D : |x| + |y| \leq 1$.

Obliczanie współczynników wielomianu interpolacyjnego

Tak opisałem wcześniej, dla każdego trójkąta obliczamy kolejny wielomian interpolacyjny. Dla każdego punktu trójkąta (x, y) przekształcamy go funkcją:

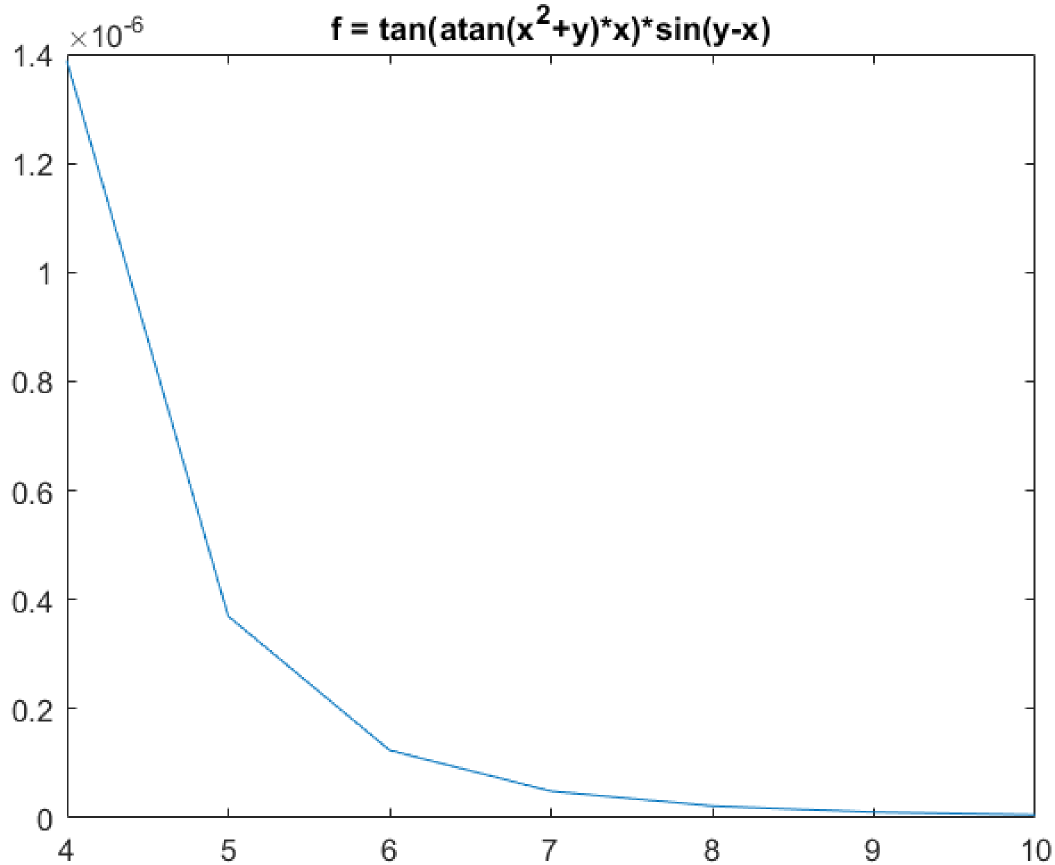
$$polynomialScheme(x, y) = [1,\ x,\ y,\ x * y,\ x * x,\ y * y]$$

w wektor, który będzie lewą stroną jednego z naszych równań.
Otrzymujemy macierz $A \in \mathbb{R}^{6\times6}$.
Z obliczenia wartości funkcji interpolowanej mamy wektor $b \in \mathbb{R}^6$.
Rozwiązujemy układ równań liniowych $Ax = b$, gdzie otrzymany $x \in \mathbb{R}^6$ jest wektorem współczynników wielomianu interpolacyjnego.

3. Wyniki

Odpowiednio pliki: *errorGraph.m* *timeGraph.m* *examples.m.*

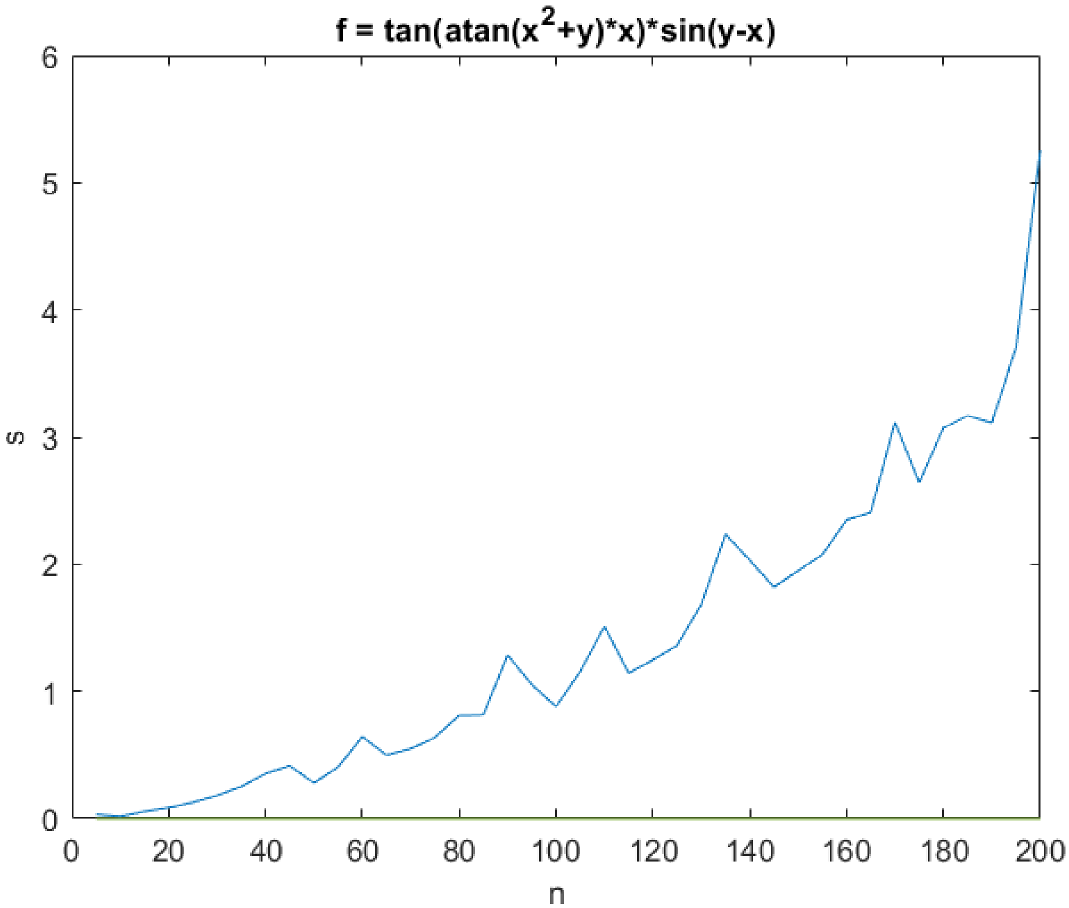
Dokładność



Wykres błędu średniokwadratowego w zależności od n

Jak widać nawet dla dosyć skomplikowanej funkcji błąd średniokwadratowy jest niewielki i szybko maleje wraz ze wzrostem n. Mimo tego dla tej funkcji błąd względny w niektórych punktach jest ogromny.

Czas



Wykres czasu w zależności od n

Przykłady obliczeniowe

1. $f(x,y) = \frac{1}{sin(x^2)+e^{-x^2-y^2}}, \quad n = 2$

	x	y	p(x, y)	f(x,y)	błąd względny
1	0.16667	0.16667	1.025	1.02697	0.19216
2	0.33333	0.33333	1.10294	1.09695	0.54651
3	0.66667	0.16667	0.94254	0.94915	0.69682
4	0.16667	0.66667	1.50847	1.53518	1.7397
5	-0.16667	0.16667	1.025	1.02697	0.19216
6	-0.33333	0.33333	1.10294	1.09695	0.54651
7	-0.66667	0.16667	0.94254	0.94915	0.69682
8	-0.16667	0.66667	1.50847	1.53518	1.7397
9	-0.16667	-0.16667	1.025	1.02697	0.19216
10	-0.33333	-0.33333	1.10294	1.09695	0.54651
11	-0.66667	-0.16667	0.94254	0.94915	0.69682
12	-0.16667	-0.66667	1.50847	1.53518	1.7397
13	0.16667	-0.16667	1.025	1.02697	0.19216
14	0.33333	-0.33333	1.10294	1.09695	0.54651
15	0.66667	-0.16667	0.94254	0.94915	0.69682
16	0.16667	-0.66667	1.50847	1.53518	1.7397

$$bladSrKwadratowy = 19.922 * 10^{-5}$$

2. $f(x, y) = log(1 + (x + y)^2) - cos(\frac{x+y}{1+(x+y)^2}), \quad n = 2$

	x	y	p(x, y)	f(x,y)	błąd względny
1	0.16667	0.16667	-0.85449	-0.84998	0.531
2	0.33333	0.33333	-0.52634	-0.52764	0.24703
3	0.66667	0.16667	-0.35518	-0.35413	0.29699
4	0.16667	0.66667	-0.35518	-0.35413	0.29699
5	-0.16667	0.16667	-0.98875	-1	1.12517
6	-0.33333	0.33333	-0.98875	-1	1.12517
7	-0.66667	0.16667	-0.70216	-0.69792	0.60778
8	-0.16667	0.66667	-0.70216	-0.69792	0.60778
9	-0.16667	-0.16667	-0.85449	-0.84998	0.531
10	-0.33333	-0.33333	-0.52634	-0.52764	0.24703
11	-0.66667	-0.16667	-0.35518	-0.35413	0.29699
12	-0.16667	-0.66667	-0.35518	-0.35413	0.29699
13	0.16667	-0.16667	-0.98875	-1	1.12517
14	0.33333	-0.33333	-0.98875	-1	1.12517
15	0.66667	-0.16667	-0.70216	-0.69792	0.60778
16	0.16667	-0.66667	-0.70216	-0.69792	0.60778

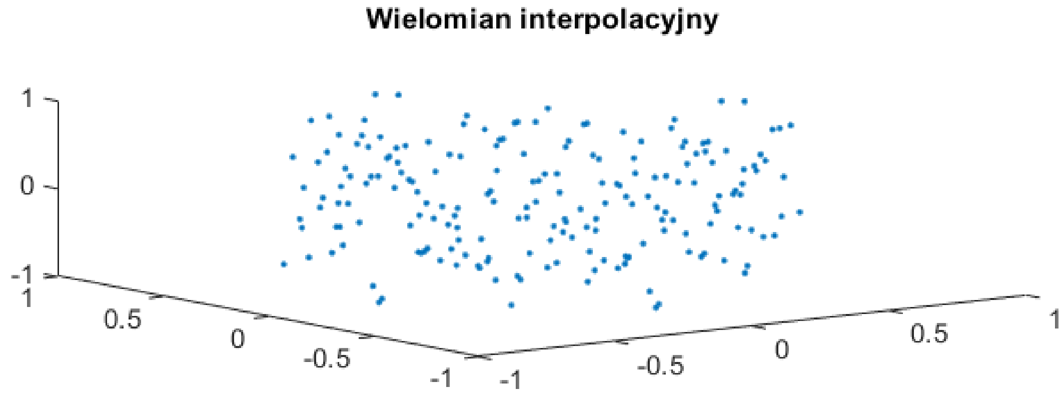
$bladSrKwadratowy = 3.918 * 10^{-5}$

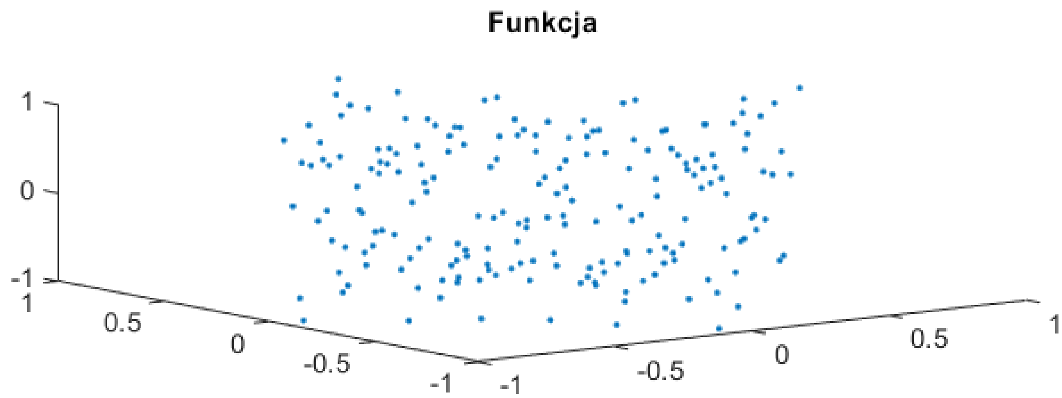
3. $f(x, y) = tan(atan(x^2 + y) * x) * sin(y - x), \quad n = 2$

	x	y	p(x, y)	f(x,y)	błąd względny
1	0.16667	0.16667	0.00484	0	2.18055E+15
2	0.33333	0.33333	-0.00524	0	2.35846E+15
3	0.66667	0.16667	-0.16809	-0.18358	8.44004
4	0.16667	0.66667	0.05087	0.04867	4.51867
5	-0.16667	0.16667	-0.01132	-0.01048	8.08694
6	-0.33333	0.33333	-0.08898	-0.08677	2.54842
7	-0.66667	0.16667	-0.27286	-0.28343	3.73114
8	-0.16667	0.66667	-0.07228	-0.07514	3.80712
9	-0.16667	-0.16667	0.00484	0	2.18055E+15
10	-0.33333	-0.33333	-0.00482	0	2.17049E+15
11	-0.66667	-0.16667	-0.07171	-0.08755	18.09375
12	-0.16667	-0.66667	-0.04371	-0.04556	4.07891
13	0.16667	-0.16667	0.01472	0.00753	95.58907
14	0.33333	-0.33333	0.03627	0.04515	19.66291
15	0.66667	-0.16667	-0.12042	-0.13517	10.91635
16	0.16667	-0.66667	0.07658	0.07035	8.8593

$$bladSrKwadratowy = 6.935 * 10^{-5}$$

4. $f(x,y) = sin(\frac{27951}{256} * x * y), \quad n = 8$





$$bladSrKwadratowy = 54689.2 * 10^{-5}$$

4. Podsumowanie

Reasumując powyższą analizę, interpolacja funkcji wielu zmiennych nie jest zadaniem zbyt trudnym obliczeniowo, jeżeli obszar interpolacji jest stosunkowo niewielki. Dla danego obszaru $D : |x| + |y| \leq 1$ już przy $n = 2$ otrzymujemy znośną dokładność, a czas obliczania jest pomijalny. Gdybyśmy chcieli rozszerzyć obszar na np. $|x| + |y| \leq 10^6$ przy tym samym rozmiarze trójkątów potrzeba by $n = 2 * 10^6$, a wówczas na obliczenia potrwały by kilka dni.

Kolejną rzeczą, którą należy rozważyć jest błąd względny, który w miejscach, w których funkcja interpolowana jest źle określona, może osiągać ogromne wartości, tak jak w trzecim przykładzie. Projektując ogólny algorytm ciężko jest przewidzieć, w jakich punktach interpolować, aby nie osiągnąć tak dużego zaburzenia.

Należy również zwrócić uwagę, żeby nie korzystać tylko z jednego sposobu obliczania błedu interpolacji. Tak jak widać w ostatnim przykładzie, pomimo ogromnych wartości błedu względnego, błąd średniokwadratowy jest dosyć niewielki. Użycie tylko jednego wskaźnika błędu mogłoby spowodować odrzucenie sposobu interpolacji jako błędnego, mimo, że miałby po prostu inne właściwości.