מערכות לומדות בתחום הבריאות 336546

תרגיל בית 4

מגישים: שחר רשטי 312465305

שירלי חגי 315081315

חלק 1: תאוריה

1. (i). נוכיח שהקווריאנס הוא אפס וכתוצאה מכך לא תהיה קורלציה בין המשתנים:

$$cov(X,Y) = E[XY] - EX \cdot EY$$

לפי הגדרת התוחלת והתוחלת המשותפת וכיוון שנתון שהמשתנים בלתי תלויים:

$$E[XY] = \iint XYf_{XY}(x,y)dxdy$$
$$= \int XYf_X(x)f_Y(y)dxdy = \int Xf_X(x)dx \int Yf_Y(y)dy = EX \cdot EY$$

קיבלנו כי $EX \cdot EY = E[XY]$ ולכן:

$$cov(X,Y) = E[XY] - EX \cdot EY = 0$$

קיבלנו כי אין קורלציה בין המשתנים.

(ii). נפריך בעזרת דוגמא נגדית: נבחר X שמפולג יוניפורמית וY כאינדיקטור.

$$X \sim U[0,5]$$

$$Y = \begin{cases} 1, & x = 2,3 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$E[X] = \frac{(0+5)}{2} = \frac{5}{2}$$

$$E[Y] = 1 \cdot P(X=2) + 1 \cdot P(X=3) + 0 = 1 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 0 = \frac{2}{6}$$

$$E[XY] = 1 \cdot 2 \cdot P(X=1, Y=1) + 1 \cdot 3 \cdot P(X=2, Y=1) = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$E[XY] - EX \cdot EY = \frac{5}{6} - \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{6} = \frac{5}{6} - \frac{10}{12} = 0$$

קיבלנו כי הקווראינס שווה לאפס ולכן אין קורלציה בין המשתנים. המשתנים תלויים כיוון שההסתברות של Y להיות 0 היא שונה מ0, אך ההסתברות של Y בהינתן X=2,3 להיות 0 היא 0. כך קיבלנו כי ההסתברויות שונות ולכן המשתנים תלויים.

לסיכום, הבאנו דוגמה נגדית למקרה בו אין קורלציה בין המשתנים אך הם עדיין תלויים.

2. (i). לא נכון. דוגמה נגדית:

$$X = \begin{cases} 1, & \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} \end{cases} \qquad X^2 = \begin{cases} 1, & \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$P(X^2 = 1 | X = 1) = 1$$

$$P(X^2 = 1) = \frac{1}{2}$$

קיבלנו כי
$P(X^2 = 1 | X = 1) = 1 \neq P(X^2 = 1) = \frac{1}{2}$ ולכן המשתנים תלויים.

(ii). לא נכון. דוגמה נגדית:

$$X = \begin{cases} 1, & \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} \end{cases} \qquad X^2 = \begin{cases} 1, & \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$E[X] = 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$E[X^2] = 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$E[X \cdot X^2] = E[X^3] = 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$cov(X, X^2) = E[X^3] - EX \cdot EX^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \neq 0$$

קיבלנו כי יש קורלציה בין המשתנים.

(iii). לא נכון. דוגמה נגדית:

$$X = \begin{cases} 1, & \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} \end{cases} \qquad X^2 = \begin{cases} 1, & \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$E[X] = 1 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$E[X^2] = 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$E[X \cdot X^2] = E[X^3] = 1 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$cov(X, X^2) = E[X^3] - EX \cdot EX^2 = 0 - 0 \cdot 1 = 0$$

קיבלנו מקרה בו הקורלציה בין המשתנים היא 0.

(iv). לא נכון. דוגמה נגדית:

$$X = \begin{cases} 1, & \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} \end{cases} \qquad X^2 = \begin{cases} 1, & \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$P(X^2 = 1 | X = 1) = 1$$

$$P(X^2 = 1) = 1$$

קיבלנו כי $P(X^2|X) = P(X^2)$ ולכן בלתי תלויים.

3. $C = X^T X$ נתחיל מלהראות כי C היא סימטרית:

$$C_{ij} = \sum_1^4 X_{ij}^T \cdot X_{ji} = \sum_1^4 X_{ij} \cdot X_{ji}^T = C_{ji}$$

כעת יש להוכיח כי C היא semi positive:

$$Z^T \cdot C \cdot Z = Z^T \cdot X^T X \cdot Z = (X \cdot Z)^T \cdot (X \cdot Z) = ||XZ||_2^2 \geq 0$$

הוכחנו כי היא סימטרית וsemi positive.

4. (i).

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \\ 5 & 6 \\ 6 & 6 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

נמצא את הקווריאנס של המטריצה ע"י הנוסחה הבאה:

$$cov(X) = \frac{1}{m} [X - E(X)]^T [X - E(X)]$$

$$E(X) = \left[\frac{(1+2+3+5+6+7)}{6}, \frac{0+0+0+6+6+6}{6}\right] = [4,3]$$

ובעת נציב בנוסחה על מנת למצוא את הקווראינס:

$$cov(x) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1-4 & 2-4 & 3-4 & 5-4 & 6-4 & 7-4 \\ 0-3 & 0-3 & 0-3 & 6-3 & 6-3 & 6-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-4 & 0-3 \\ 2-4 & 0-3 \\ 3-4 & 0-3 \\ 5-4 & 6-3 \\ 6-4 & 6-3 \\ 7-4 & 6-3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & -3 & -3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -2 & -3 \\ -1 & -3 \\ 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 28 & 36 \\ 36 & 54 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{28}{6} & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}}$$

(ii). בעזרת מטריצת הקווריאנס, נמצא את הערכים העצמיים של המטריצה:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} \frac{28}{6} - \lambda & 6 \\ 6 & 9 - \lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{28}{6} - \lambda\right)(9 - \lambda) - 36 = 0$$

$$42 - \frac{28}{6}\lambda - 9\lambda + \lambda^2 - 36 = 0 \rightarrow \lambda^2 - \frac{41}{3}\lambda + 6 = 0$$

$$\lambda_1 = 13.212, \lambda_2 = 0.454$$

כעת, נמצא את הוקטורים העצמיים של המטריצה:

עבור $\lambda_1 = 13.212$:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} \frac{28}{6} - \lambda & 6 \\ 6 & 9 - \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{28}{6} - 13.212\right)x_1 + 6x_2 \\ 6x_1 + (9 - 13.212)x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8.545x_1 + 6x_2 \\ 6x_1 - 4.212x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} -8.545x_1 + 6x_2 = 0 \\ 6x_1 - 4.212x_2 = 0 \end{matrix} \rightarrow x_1 = 0.702x_2 \rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 0.702 \\ 1 \end{pmatrix}$$

עבור $\lambda_2 = 0.454$:

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{28}{6} - 0.454\right)x_1 + 6x_2 \\ 6x_1 + (9 - 0.454)x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.212x_1 + 6x_2 \\ 6x_1 + 8.546x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 4.212x_1 + 6x_2 = 0 \\ 6x_1 + 8.546x_2 = 0 \end{matrix} \rightarrow x_1 = -1.424x_2 \rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} -1.424 \\ 1 \end{pmatrix}$$

המטריצה המלכנסת:

$$P = \begin{pmatrix} 0.702 & -1.424 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

על מנת ללכסן את המטריצה, נמצא את המטריצה ההופכית:

$$P^{-1} = \frac{1}{2.12}\begin{pmatrix} 1 & 1.424 \\ -1 & 0.702 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.471 & 0.671 \\ -0.471 & 0.331 \end{pmatrix}$$

נציב ב: $D = P^{-1}CP$ ונמצא את המטריצה האלכסונית:

$$D = \begin{pmatrix} 0.471 & 0.671 \\ -0.471 & 0.331 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{28}{6} & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.702 & -1.424 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 13.249 & 0 \\ 0 & 0.455 \end{pmatrix}}$$

(iii). הוקטור העצמי העיקרי הוא: $v_1 = \begin{pmatrix} 0.702 \\ 1 \end{pmatrix}$

(iv). הערך העצמי המרכזי הוא: $\lambda_1 = 13.212$

(v). נמצא את ההטלה של $x_7 = (2 \quad 1)$ על הוקטור העצמי: $v_1 = \begin{pmatrix} 0.702 \\ 1 \end{pmatrix}$:

ע"י החסרה של הממוצע ממנו נקבל:

$$p = 0.702\widehat{x_7} + \widehat{x_7} = 0.702(2 - 4 \quad 1 - 3) + 1(2 - 4 \quad 1 - 3) = (-3.404 \quad -3.404)$$

5. א. נכתוב את המטריצות לפי המשקלים המתאימים:

$$W^{(1)} = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix}$$

$$W^{(2)} = \begin{pmatrix} W_{31} & W_{32} \end{pmatrix}$$

ב.

$$\hat{y}(x) = W^{(2)} ReLU \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} W^{(1)} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{31} & W_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1(\, v_1) \\ \varphi_2\,(v_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$$

ג. לפי הגרף הנתון ניתן לראות כי y (משוואות קו לינארי) כתלות בφ :

$$y = \begin{cases} \varphi\left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right), & x \le 0 \\ \varphi(x-1), & x > 0 \end{cases}$$

נתון כי φ הוא $\max\{0, z\}$, ולכן ניתן לרשום כך:

$$y = \begin{cases} max\left(0, -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right), & x \le 0 \\ max(0, x-1), & x > 0 \end{cases}$$

מצד אחד, כפי שמצאנו בסעיף קודם:

$$\hat{y}(x) = \begin{pmatrix} W_{31} & W_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1(\, v_1) \\ \varphi_2\,(v_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} W_{31} & W_{32} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1(v_1) \\ \varphi_2(v_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{11} + W_{12}x \\ W_{21} + W_{22}x \end{pmatrix}$$

$$= \boldsymbol{(W_{31} \quad W_{32}) \cdot \left(\varphi_1(v_1)(W_{11} + W_{12}x) + \varphi_2(v_2)(W_{21} + W_{22}x)\right)}$$

מסעיף זה קיבלנו:

$$\hat{y}(x) = \boldsymbol{\varphi\left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) + \varphi(x-1)}$$

לכן מהשוואת מקדמים נקבל בין הביטויים המודגשים נקבל:

$$\boxed{W_{31} = 1, W_{32} = 1, W_{11} = -\frac{1}{2}, W_{12} = -\frac{1}{2}, W_{21} = -1, W_{22} = 1}$$

ד. נתון כי: $L = \left(y - \hat{y}(x)\right)^2$, נגזור את הביטוי ונקבל:

$$\Delta L = \frac{\partial\left(\left(y - \hat{y}(x)\right)^2\right)}{\partial x} = 2\left(y - \hat{y}(x)\right) \cdot \frac{\partial \hat{y}(x)}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial L}{\partial \hat{y}(x)} \cdot \frac{\partial}{\partial x}((W_{31} \quad W_{32}) \cdot \left(\varphi_1(v_1)(W_{11} + W_{12}x) + \varphi_2(v_2)(W_{21} + W_{22}x)\right) =$$

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{y}(x)} \cdot (W_{31} \quad W_{32}) \cdot (\varphi_1'(v_1)(W_{11} + W_{12}x) \cdot W_{12} + \varphi_2'(v_2)(W_{21} + W_{22}x) \cdot W_{22}) =$$

$$\boxed{2\left(y - \hat{y}(x)\right) \cdot (W_{31} \cdot \varphi_1'(v_1)(W_{11} + W_{12}x) \cdot W_{12} + W_{32} \cdot \varphi_2'(v_2)(W_{21} + W_{22}x) \cdot W_{22})}$$

ה. בהקשר של פונקציית Loss נוכל לכתוב כי:

$$w_1 = w_0 - \eta\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{w}_0}\right)$$

בנוסף:

$$M = \begin{pmatrix}\varphi_1 \\ \varphi_2\end{pmatrix}' = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

כעת, עבור $W^{(1)}$ ולפי $\left(W_{31} \quad W_{32}\right) \cdot \left(\varphi_1(v_1)(W_{11} + W_{12}x) + \varphi_2(v_2)(W_{21} + W_{22}x)\right)$:

$$W_{n+1}^{11} = W_n^{11} - \eta\frac{\partial J}{\partial w^{11}} = W_n^{11} - \eta 2\left(y - \hat{y}(x)\right)W_n^{31}M(W_n^{11} + xW_n^{12})$$

$$W_{n+1}^{12} = W_n^{12} - \eta\frac{\partial J}{\partial W^{12}} = W_n^{12} - \eta 2\left(y - \hat{y}(x)\right)W_n^{31}M \cdot x(W_n^{11} + xW_n^{12})$$

$$W_{n+1}^{21} = W_n^{21} - \eta\frac{\partial J}{\partial W^{21}} = W_n^{21} - \eta 2\left(y - \hat{y}(x)\right)W_n^{32}M(W_n^{21} + xW_n^{22})$$

$$W_{n+1}^{22} = W_n^{22} - \eta\frac{\partial J}{\partial W^{22}} = W_n^{22} - \eta 2\left(y - \hat{y}(x)\right)W_n^{32}M \cdot x(W_n^{21} + xW_n^{22})$$

כעת, עבור $W^{(2)}$:

$$W_{n+1}^{31} = W_n^{31} - \eta \frac{\partial J}{\partial W^{31}} = W_n^{31} - \eta 2\big(y - \hat{y}(x)\big) \begin{pmatrix} \varphi_1(v_1) \\ \varphi_2(v_2) \end{pmatrix} (W_n^{11} + xW_n^{12})$$

$$W_{n+1}^{32} = W_n^{32} - \eta \frac{\partial J}{\partial W^{32}} = W_n^{32} - \eta 2\big(y - \hat{y}(x)\big) \begin{pmatrix} \varphi_1(v_1) \\ \varphi_2(v_2) \end{pmatrix} (W_n^{11} + xW_n^{12})$$

ו. נתון כי:

$$W^{(1)}(n=0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$W^{(2)}(n=0) = (1 \quad 1)$$

ובנוסף, (x,y)=(0,0) הראשונים.

נציב זאת בביטוי שמצאנו בסעיף ב' ולפי הגדרת ה$ReLU$:

$$\hat{y}(x) = (1 \quad 1) \begin{pmatrix} \varphi_1(\, v_1) \\ \varphi_2\,(v_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1 \quad 1) \begin{pmatrix} \varphi_1(\, v_1) \\ \varphi_2\,(v_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (1 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

נציב בפונקציית הLoss:

$$L(x=0) = \big(y - \hat{y}(x)\big)^2 = (0-1)^2 = \boxed{1}$$

קיבלנו כי ערך הLoss ההתחלתי הוא 1.