СБЕР УНИВЕРСИТЕТ

Математические основы машинного обучения

План занятия

1. Основные понятия
2. Векторные пространства
3. Операции с векторами
4. Произведение векторов (скалярное произведение векторов)
5. Норма вектора
6. Угол и расстояние между векторами
7. Ортогональность векторов
8. Линейная зависимость
9. Базис векторного пространства
10. Матрицы и их виды
11. Преобразование матриц
12. Линейные преобразования
13. Определитель матрицы
14. Ранг матрицы
15. Матричные разложения
16. Собственные вектора и значения

Основные понятия

Основные понятия

Скаляр

Основные понятия

Скаляр
$a \in R$

Основные понятия

Скаляр
$a \in R$

Вектор

Основные понятия

Скаляр
$a \in R$

Вектор
$a \in R^n$

Основные понятия

Скаляр
$a \in R$

Вектор
$a \in R^n$

Матрица

Основные понятия

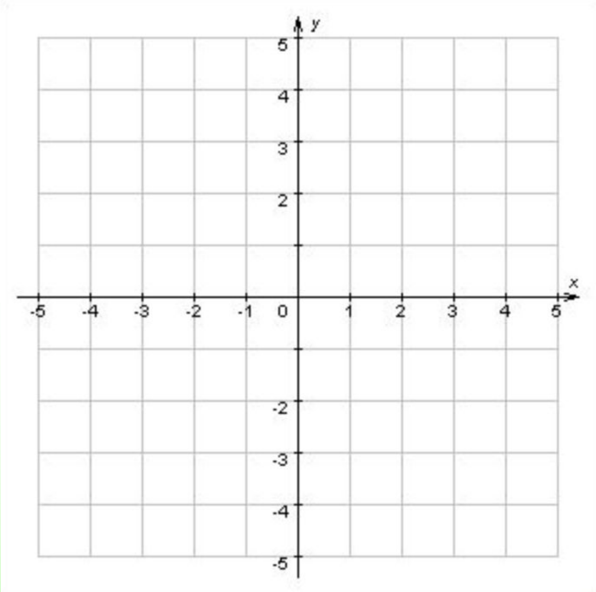
Скаляр
$a \in R$

Вектор
$a \in R^n$

Матрица
$a \in R^{m \times n}$

Основные понятия

Декартова система координат



Векторные пространства

Векторные пространства

Векторное пространство – это множество векторов,
на котором заданы операции
сложения векторов и умножение вектора на число.

Векторные пространства

Аксиомы векторного пространства:

- ассоциативность
- коммутативность
- существование нейтрального элемента относительно сложения
- существование противоположного элемента относительно сложения
- ассоциативность умножения на скаляр
- существование нейтрального элемента относительно умножения
- дистрибутивность умножения вектора на скаляр относительно сложения скаляров
- дистрибутивность умножения вектора на скаляр относительно сложения векторов

Векторные пространства

Аксиомы векторного пространства

- ассоциативность

$x + (y + z) = (x + y) + z$

Векторные пространства

Аксиомы векторного пространства

- коммутативность

$x + y = y + x$

Векторные пространства

Аксиомы векторного пространства

- существование нейтрального элемента относительно сложения

$\exists 0 \in V\colon \forall x \in V \qquad 0 + x = x$

Векторные пространства

Аксиомы векторного пространства

- существование противоположного элемента относительно сложения

$\forall x \in V \quad \exists -x \in V: x + (-x) = 0$

Векторные пространства

Аксиомы векторного пространства

- ассоциативность умножения на скаляр

$\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

Векторные пространства

Аксиомы векторного пространства

- существование нейтрального элемента относительно умножения

$\forall x \in V \quad 1 \cdot x = x$

Векторные пространства

Аксиомы векторного пространства

- дистрибутивность умножения вектора на скаляр относительно сложения скаляров

$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

Векторные пространства

Аксиомы векторного пространства

- дистрибутивность умножения вектора на скаляр относительно сложения векторов

$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

Операции с векторами

Операции с векторами

Сложение двух векторов

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} \in R^n, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix} \in R^n$$

Операции с векторами

Сложение двух векторов

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} \in R^n, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix} \in R^n$$

$$x + y = \begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \cdots \\ x_n+y_n \end{bmatrix} \in R^n$$

Операции с векторами

Умножение вектора на скаляр

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \in R^n, \alpha \in R$$

Операции с векторами

Умножение вектора на скаляр

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \in R^n, \alpha \in R$$

$$\alpha x = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \dots \\ \alpha x_n \end{bmatrix} \in R^n,$$

Операции с векторами

Примеры

$x, y \in R^2$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Операции с векторами

Примеры

$x, y \in R^2$

$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$y = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$x + y =$

Операции с векторами

Примеры

$x, y \in R^2$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x + y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Операции с векторами

Примеры

$x, y \in R^2$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x + y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 2 \\ 0 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Операции с векторами

Примеры

$x, y \in R^2$

$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$y = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$x + y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 \\ 0+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

$5x =$

Операции с векторами

Примеры

$x, y \in R^2$

$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

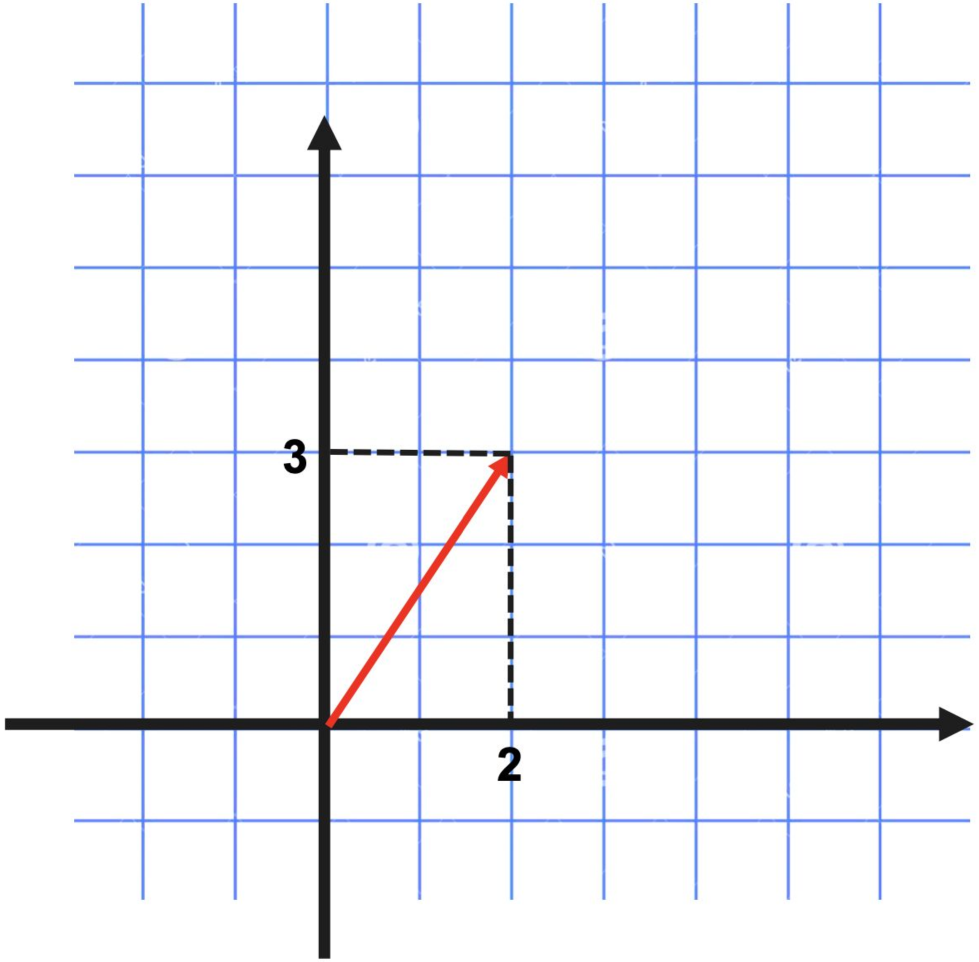
$y = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$x + y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 2 \\ 0 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

$5x = \begin{bmatrix} 5 * 1 \\ 5 * 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$

Операции с векторами

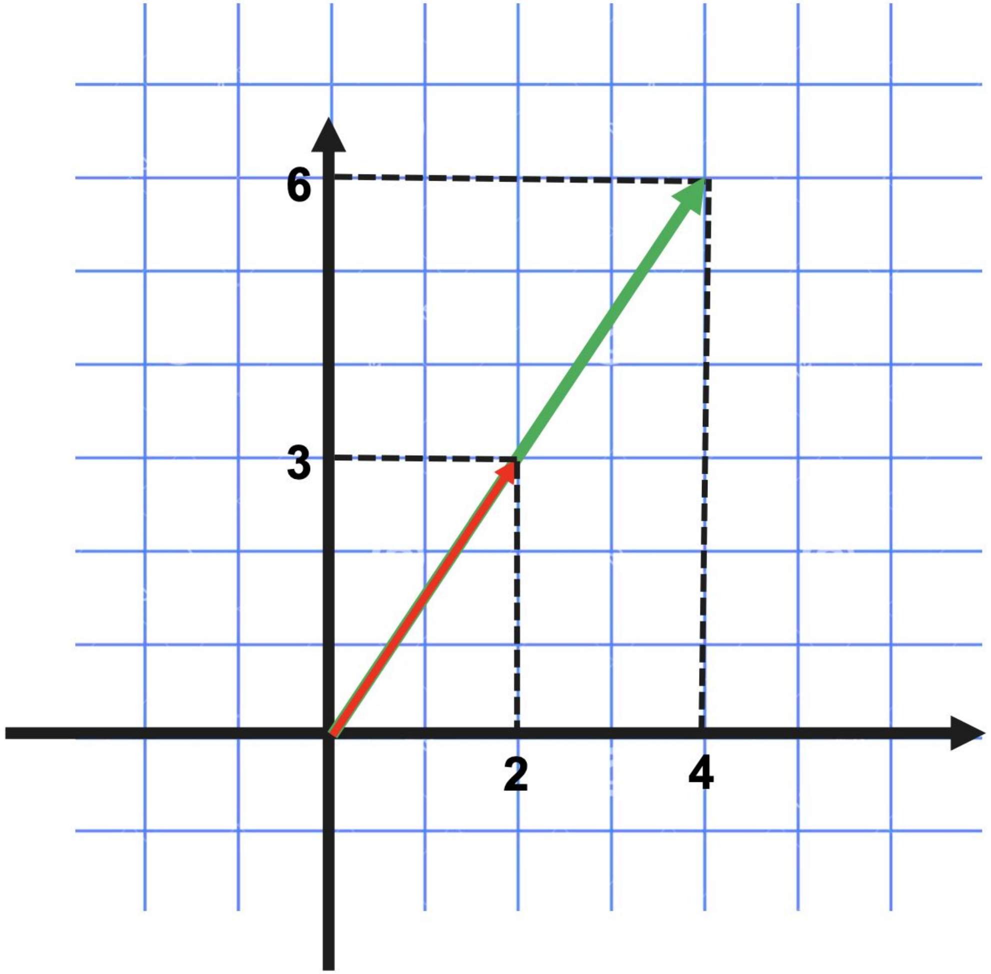
Геометрическая интерпретация
$x = [2, 3]$



Операции с векторами

Геометрическая интерпретация
$x = [2, 3]$

$2x = [4, 6]$

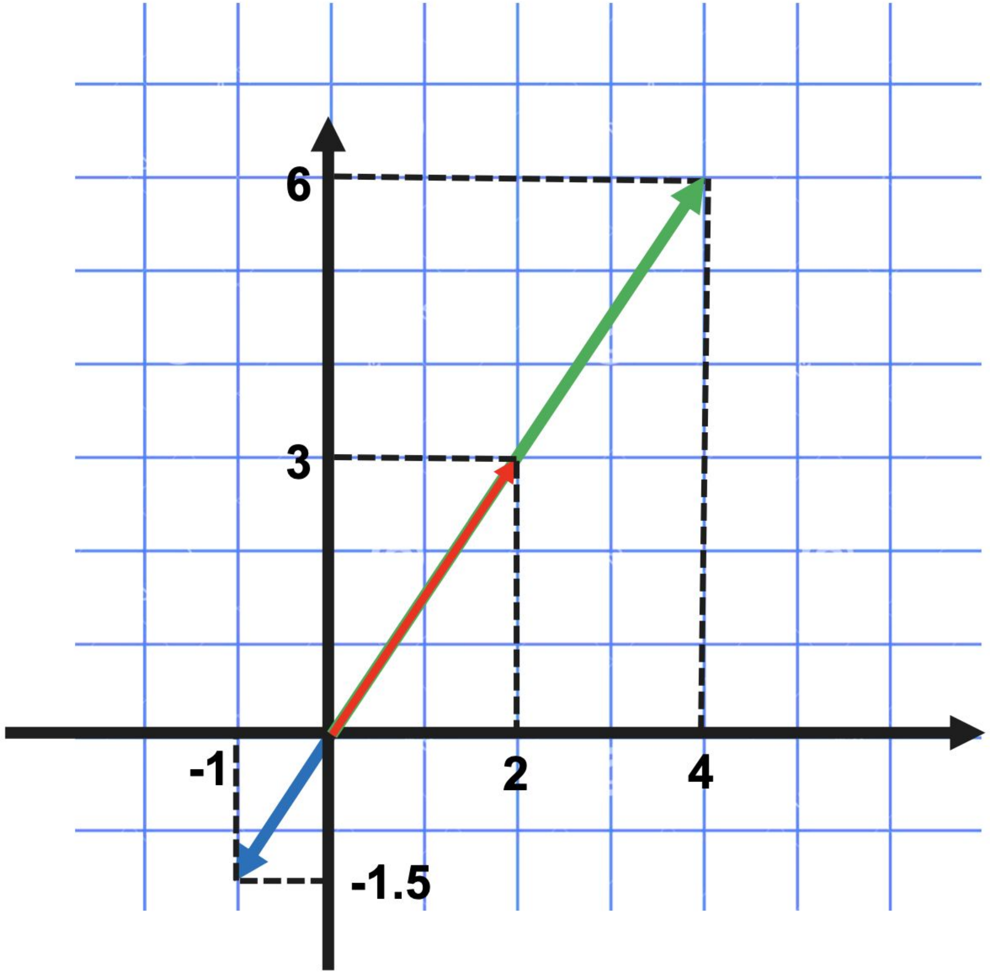


Операции с векторами

Геометрическая интерпретация
$x = [2, 3]$

$2x = [4, 6]$

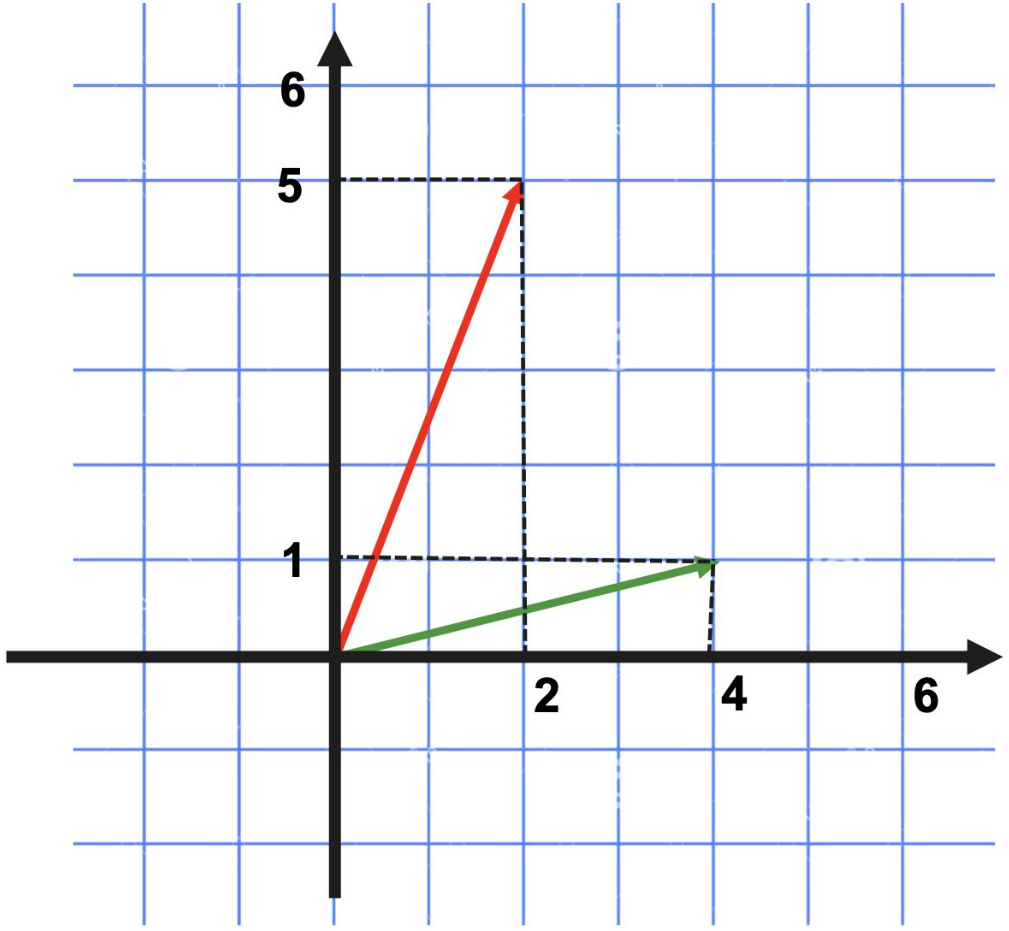
$-0.5x = [-1, -1.5]$



Операции с векторами

Геометрическая интерпретация
$x = [2, 5]$

$y = [4, 1]$



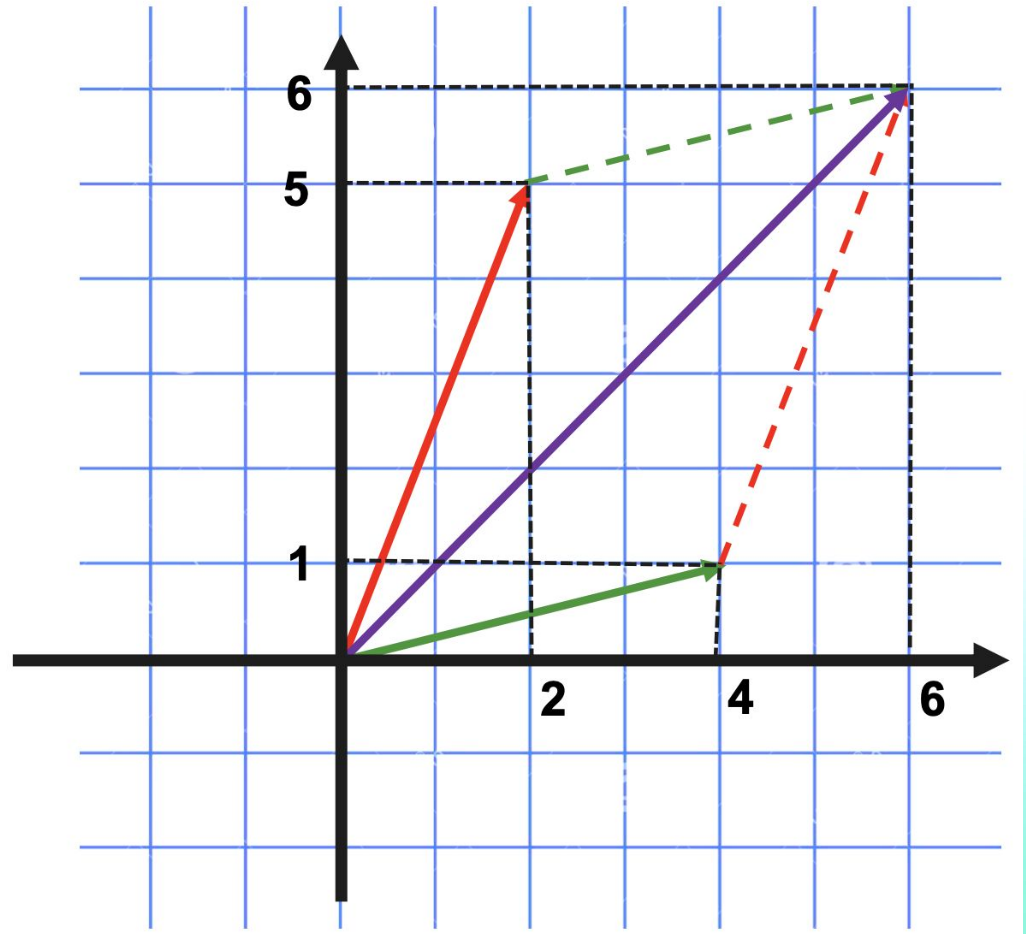
Операции с векторами

Геометрическая интерпретация

$x = [2, 5]$

$y = [4, 1]$

$x + y = [6, 6]$



Произведение векторов

Произведение векторов

Свойства произведения векторов

Произведение векторов

Свойства произведения векторов
$V \times V \to R$

Произведение векторов

Свойства произведения векторов
$V \times V \to R$

- симметричность

Произведение векторов

Свойства произведения векторов
$V \times V \rightarrow R$

- симметричность

$\forall x, y \in V \ \ < x, y > = < y, x >$

Произведение векторов

Свойства произведения векторов
$V \times V \rightarrow R$

- симметричность

$\forall x, y \in V \ < x, y > = < y, x >$

- положительная определенность

Произведение векторов

Свойства произведения векторов
$V \times V \to R$

- симметричность

$\forall x, y \in V \ < x, y > = < y, x >$

- положительная определенность

$\forall x \in V \backslash \{0\} \ < x, x > \ > 0 \qquad < x, 0 >= 0$

Скалярное произведение векторов

Скалярное произведение векторов

Зададим скалярное произведение

Скалярное произведение векторов

Зададим скалярное произведение

$x = [x_1, \dots, x_n]$
$y = [y_1, \dots, y_n]$

Скалярное произведение векторов

Зададим скалярное произведение

$$x = [x_1, \dots, x_n]$$
$$y = [y_1, \dots, y_n]$$

$$< x, y > = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

Скалярное произведение векторов

Пример

$x = [1,2,3,4]$
$y = [5,2,2,0]$

$< x, y > =$

Скалярное произведение векторов

Пример

$x = [1,2,3,4]$
$y = [5,2,2,0]$

$< x, y > = 1 * 5 + 2 * 2 + 3 * 2 + 4 * 0 = 15$

Евклидово векторное пространство

Евклидово векторное пространство

Евклидово векторное пространство – это векторное пространство, в котором задано скалярное произведение.

Норма вектора

Норма вектора

Свойства нормы вектора(длины вектора)

Норма вектора

Свойства нормы вектора(длины вектора)

$\forall x \in V, \forall \alpha \in R \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

Норма вектора

Свойства нормы вектора(длины вектора)

$\forall x \in V, \forall \alpha \in R \quad \|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

$\forall x \in V \ \ \|x\| \geq 0 \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Норма вектора

Свойства нормы вектора(длины вектора)

$\forall x \in V, \forall \alpha \in R \quad \|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

$\forall x \in V \;\; \|x\| \geq 0 \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\forall x, y \in V \;\; \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Виды норм

Виды норм

Общий вид

$$\|x\|_p = \left(\sum_i |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Виды норм

L1 норма

Виды норм

L1 норма

$$\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$$

Виды норм

L1 норма

$$\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$$

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$$

Виды норм

L2 норма

Виды норм

L2 норма

$$\|x\|_2 = \left(\sum_i |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Виды норм

L2 норма

$$\|x\|_2 = \left(\sum_i |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

Виды норм

Примеры

$x = [1, 2, 3, 4]$
$\|x\|_1 =$

Виды норм

Примеры

$x = [1, 2, 3, 4]$
$\|x\|_1 = |1| + |2| + |3| + |4| = 10$

Виды норм

Примеры

$x = [1, 2, 3, 4]$
$\|x\|_1 = |1| + |2| + |3| + |4| = 10$

$\|x\|_2 =$

Виды норм

Примеры

$x = [1, 2, 3, 4]$
$\|x\|_1 = |1| + |2| + |3| + |4| = 10$

$\|x\|_2 = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2}$

Виды норм

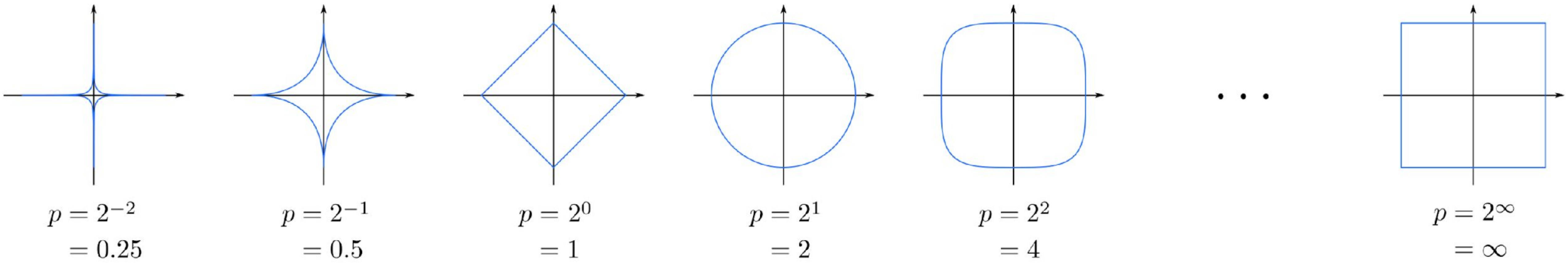
Примеры

$x = [1, 2, 3, 4]$
$\|x\|_1 = |1| + |2| + |3| + |4| = 10$

$\|x\|_2 = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{1 + 4 + 9 + 16} = \sqrt{30} \approx 5.48$

Виды норм

Нормы другой степени



Скалярное произведение и норма

Скалярное произведение в евклидовом пространстве порождает L2 норму

$$\sqrt{< x, x >} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = \|x\|_2$$

Скалярное произведение и норма

Неравенство Коши - Буняковского

$$|< x, y >| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Расстояние между векторами

Расстояние между двумя векторами

$$\|x - y\| = \sqrt{< x - y, x - y >}$$

Для евклидовой нормы

$$\|x - y\|_2 = \sqrt{< x - y, x - y >} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

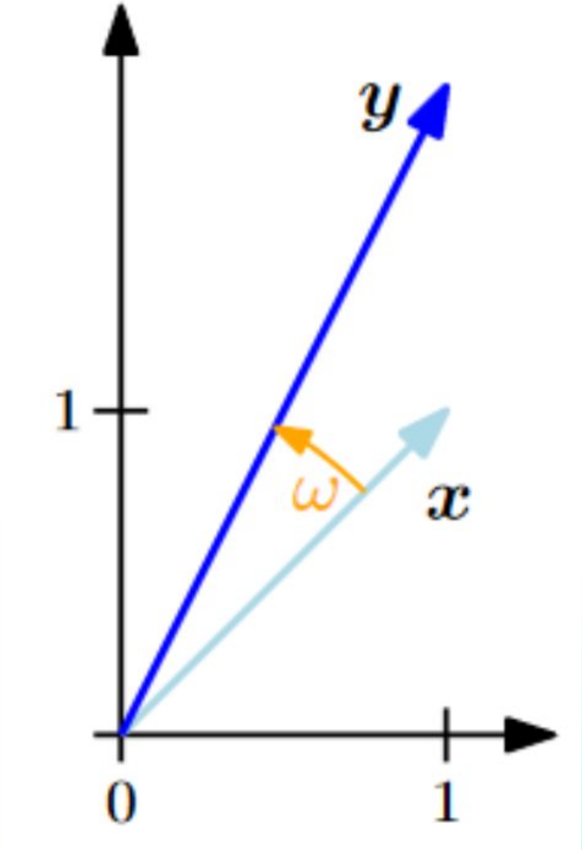
Угол между векторами

Исходя из неравенства Коши - Буняковского

$$|< x, y >| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

$$-1 \leq \frac{< x, y >}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1$$

$$\cos \omega = \frac{< x, y >}{\|x\| \cdot \|y\|}$$



Угол между векторами

Пример

$x = [0, 5, 0]$
$y = [1, 1, 0]$

$\omega =$

Угол между векторами

Пример

$$x = [0, 5, 0]$$
$$y = [1, 1, 0]$$

$$\omega = arccos\frac{< x, y >}{\|x\|\ \|y\|}$$

Угол между векторами

Пример

$x = [0, 5, 0]$
$y = [1, 1, 0]$

$$\omega = arccos\frac{< x, y >}{\|x\|\ \|y\|} = arccos\frac{0 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 0 \cdot 0}{\sqrt{0^2 + 5^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}}$$

Угол между векторами

Пример

$$x = [0, 5, 0]$$
$$y = [1, 1, 0]$$

$$\omega = arccos\frac{< x, y >}{\|x\|\,\|y\|} = arccos\frac{0 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 0 \cdot 0}{\sqrt{0^2 + 5^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = arccos\frac{5}{5\sqrt{2}}$$

Угол между векторами

Пример

$$x = [0, 5, 0]$$
$$y = [1, 1, 0]$$

$$\omega = arccos \frac{< x, y >}{\|x\| \, \|y\|} = arccos \frac{0 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 0 \cdot 0}{\sqrt{0^2 + 5^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = arccos \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$$

Ортогональность векторов

Ортогональные векторы – это векторы угол между которым равен 90°

Ортогональность векторов

Ортогональные векторы – это векторы угол между которым равен 90°

$$\cos\frac{\pi}{2}$$

Ортогональность векторов

Ортогональные векторы – это векторы угол между которым равен 90°

$$cos\frac{\pi}{2} = 0$$

Ортогональность векторов

Ортогональные векторы – это векторы угол между которым равен 90°

$$cos\frac{\pi}{2} = 0 = \frac{< x, y >}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

Ортогональность векторов

Ортогональные векторы – это векторы угол между которым равен 90°

$$cos\frac{\pi}{2} = 0 = \frac{< x, y >}{\|x\| \cdot \|y\|} \Leftrightarrow \; < x, y > = 0$$

Ортогональность векторов

Пример

$x = [1, 2, 3]$
$y = [1, 1, 1]$
$< x, y > = 1 + 2 + 3 = 6 \neq 0$

$x = [1, 2, 3]$
$y = [1, 1, -1]$
$< x, y > = 1 + 2 - 3 = 0$

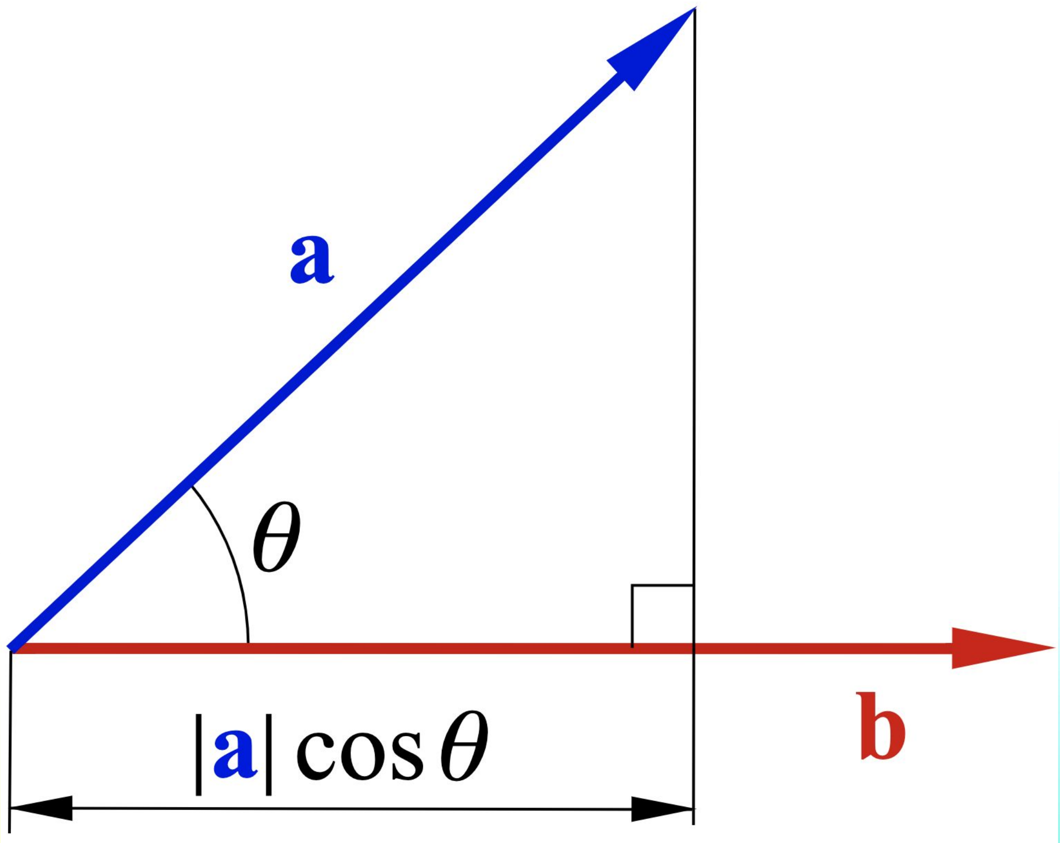
Ортогональные проекции векторов

Длина ортогональной проекции

$$\cos\theta = \frac{\|b'\|}{\|a\|}$$

$$\|b'\| = \|a\|\cos\theta = \|a\| \frac{< a, b >}{\|a\| \cdot \|b\|}$$

$$\|b'\| = \frac{< a, b >}{\|b\|} = \frac{< a, b >}{\sqrt{< b, b >}}$$



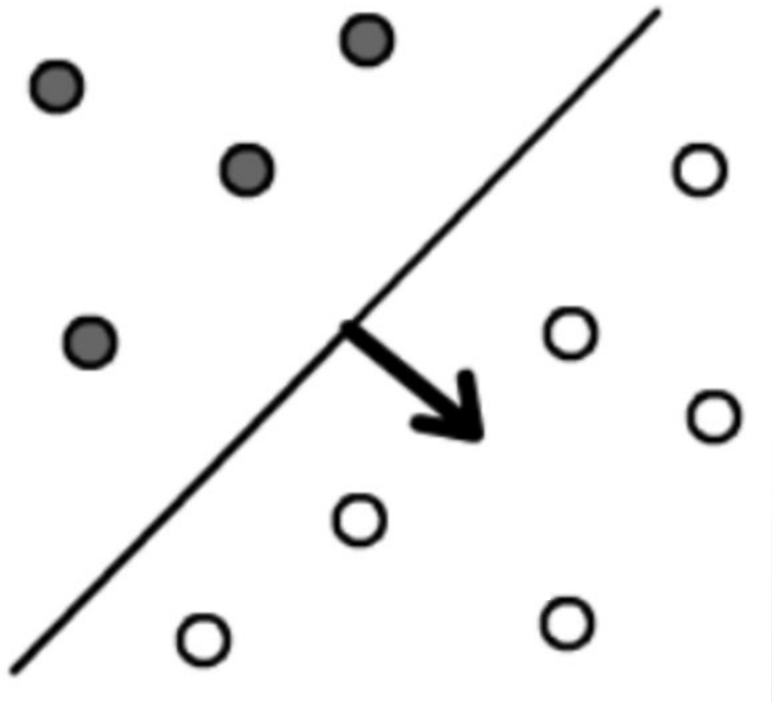
Гиперплоскость

Уравнение гиперплоскости

$w_1x_1 + w_2x_2 + \dots + w_nx_n + \mathrm{b} = 0$

где хотя бы один $w_i \neq 0$

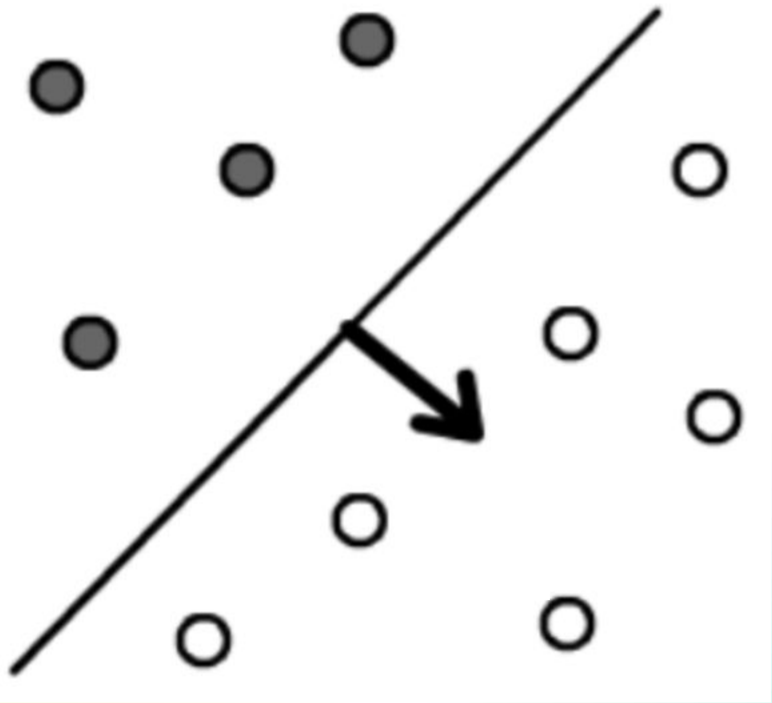
$< w, x > \ + b = 0$



Гиперплоскость

Нормальный вектор плоскости

$w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$



Векторные подпространства

V – векторное пространство

$U \subseteq V$

$+\colon U \times U \to U$

$\cdot : R \times U \to U$

Линейная комбинация

V – векторное пространство

$x_1, \dots, x_n \in V$
$\alpha_1, \dots, \alpha_n \in R$

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_n x_n$$

Линейная зависимость

V – векторное пространство

$x_1, \dots, x_n \in V$
$\alpha_1, \dots, \alpha_n \in R$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_n x_n = 0$$

Если есть хотя бы один $\alpha_i \neq 0$, то $x_1, \dots, x_n$ линейно зависимы.

Если все $\alpha_i = 0$, то вектора линейно независимы.

Линейная зависимость

Множество векторов линейно зависимо тогда и только тогда, когда один из этих векторов может быть представлен в виде линейной комбинации всех остальных.

$$x_n = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{n-1} x_{n-1}$$

Линейная зависимость

Пример

$x = [1,2\ ]$
$y = [3,6]$

Линейная зависимость

Пример

$x = [1,2\ ]$
$y = [3,6]$

$y = 3x$ - линейно зависимы

Линейная зависимость

Пример

$x = [1,2\ ]$
$y = [3,6]$

$y = 3x$ - линейно зависимы

$x = [2,0\ ]$
$y = [0,3]$

Линейная зависимость

Пример

$x = [1,2\ ]$
$y = [3,6]$

$y = 3x$ - линейно зависимы

$x = [2,0\ ]$
$y = [0,3]$

линейно независимы

Размерность линейного пространства

Размерностью n линейного пространства

называют максимальное количество линейно независимых векторов.

Базис векторного пространства

V – векторное пространство

Базис – это набор из n линейно независимых векторов в векторном пространстве размерности n.

$\mathrm{X} = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq V$

$x_1, \dots, x_n$ - базисные вектора

Если X является базисом для V, то каждый вектор $v \in V$ можно представить в виде линейной комбинации базисных векторов.

Базис векторного пространства

V – векторное пространство

$x_1, \dots, x_n$ - базисные вектора

Если все базисные вектора ортогональны друг другу, то это ортогональный базис.

Если в ортогональном базисе все векторы единичной длины, то это ортонормированный базис.

$$x_1 = [1,0,0]$$
$$x_2 = [0,1,0]$$
$$x_3 = [0,0,1]$$

x_1, x_2, x_3 - ортонормированный базис для R^3

Линейная оболочка

V – векторное пространство

$\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq V$

$\{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n | \alpha_1, \alpha_n \in R\}$

линейная оболочка — это множество всех линейных комбинаций набора векторов

Линейная оболочка базисных векторов порождает все векторное пространство.

Матрица

$a \in R^{m \times n}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Виды матриц

Диагональная матрица

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Единичная матрица

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Симметричная матрица

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Треугольная матрица

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Преобразование матриц

Транспонирование матриц

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & & a_{m2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Преобразование матриц

Свойства транспонирования матриц

$A^T = A$, A- симметричная

$(A^T)^T = A$

$(A + B)^T = A^T + B^T$

$(AB)^T = B^T A^T$

Преобразование матриц

Умножение матрицы на скаляр

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\beta A = \begin{bmatrix} \beta a_{11} & \beta a_{12} & \cdots & \beta a_{1n} \\ \beta a_{21} & \beta a_{22} & & \beta a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \beta a_{m1} & \beta a_{m2} & \cdots & \beta a_{mn} \end{bmatrix}$$

Преобразование матриц

Сложение матриц

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & & b_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \end{bmatrix}$$

Преобразование матриц

Умножение матриц

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

Умножение матриц не коммутативно:

$A \cdot B \neq B \cdot A$

Умножение на единичную матрицу

$A \cdot E = E \cdot A = A$

Умножение на нулевую матрицу

$A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$

Линейные преобразования

A – линейное преобразование

$x \to A \to x'$

Свойства
$A(x + y) = A(x) + A(y)$
$A(\beta x) = \beta A x$

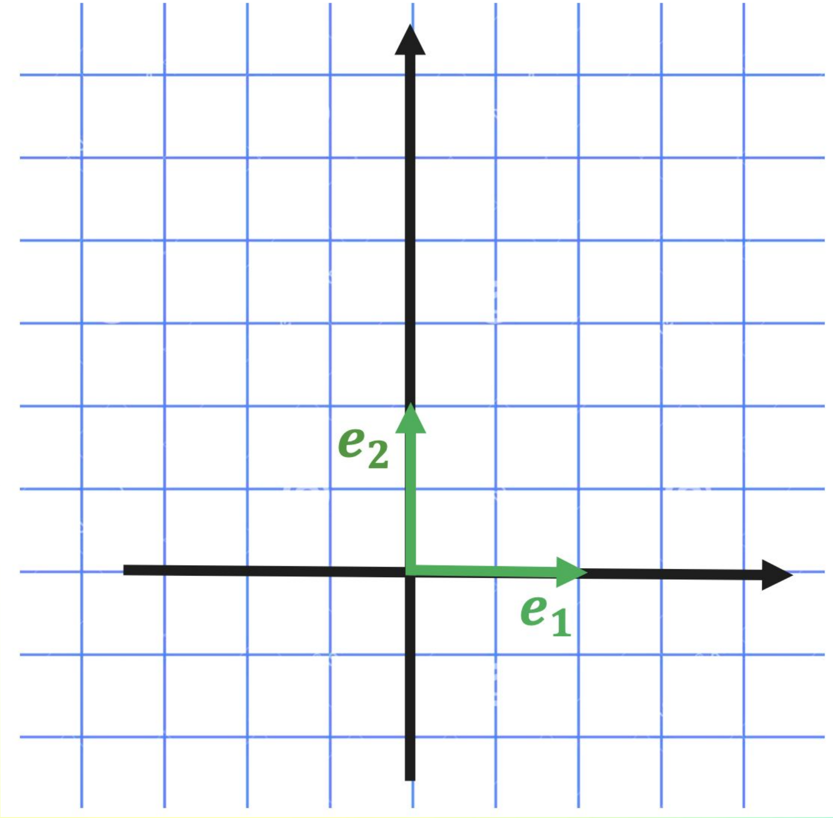
$x' = Ax$

Линейные преобразования

Пример

поворот на 90° против часовой стрелки

$$e_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$



Линейные преобразования

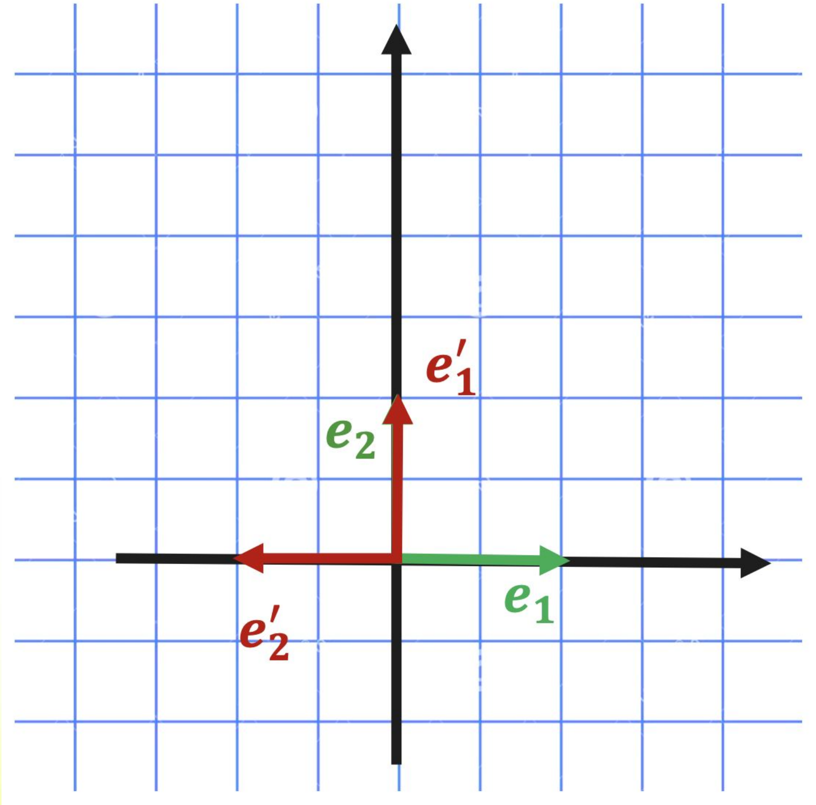
Пример

поворот на 90° против часовой стрелки

$e_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

$e'_1 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, e'_2 = \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$



Линейные преобразования

Пример

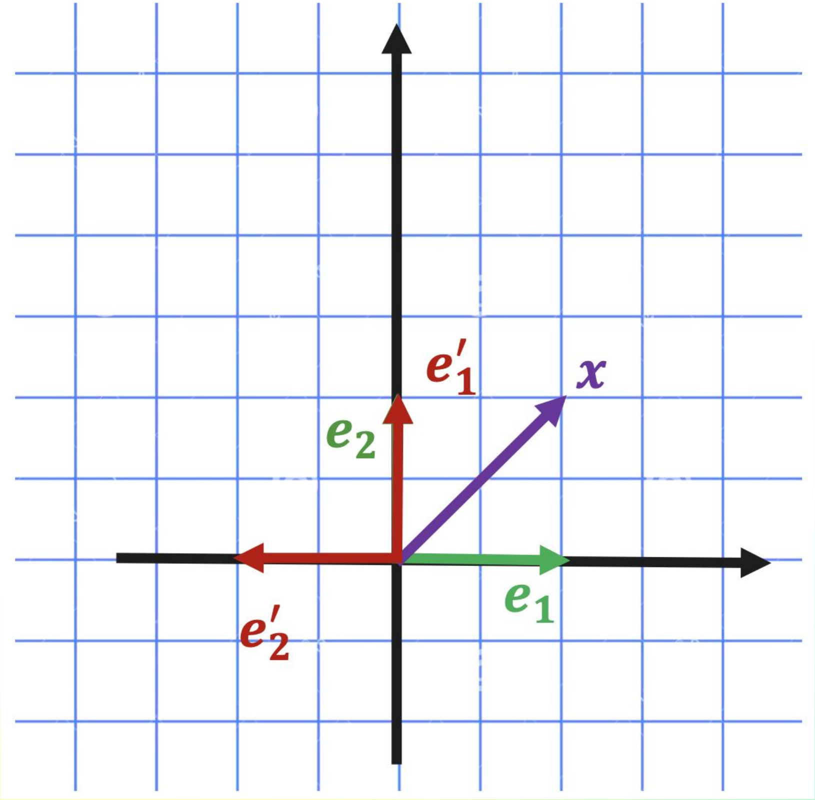
поворот на 90° против часовой стрелки

$e_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

$e'_1 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, e'_2 = \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$

$x = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$



Линейные преобразования

Пример

поворот на 90° против часовой стрелки

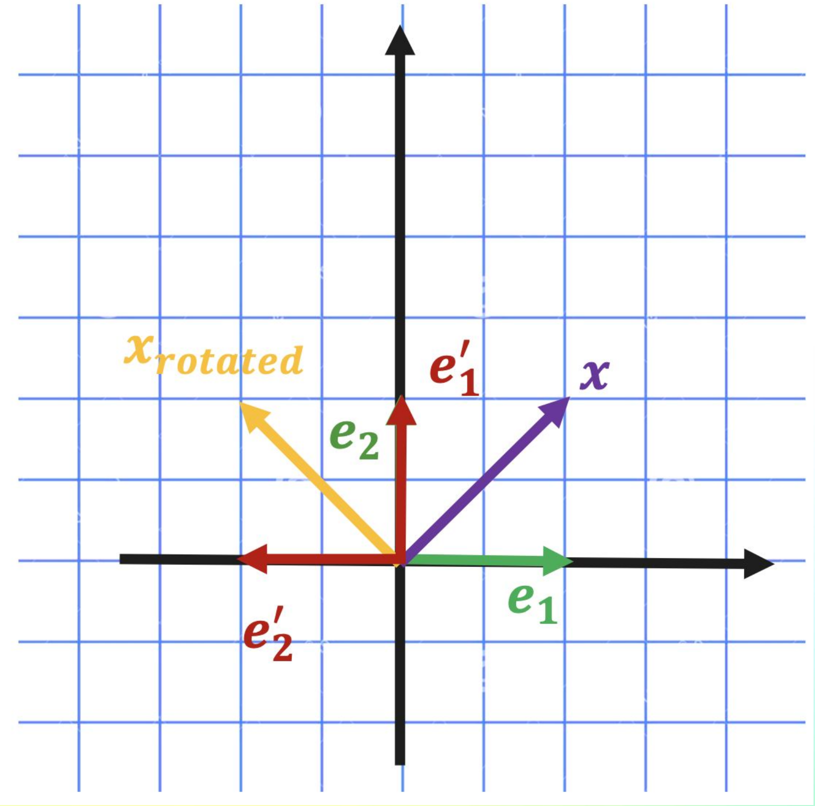
$e_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

$e'_1 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, e'_2 = \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$

$x = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

$x' = Ax = \begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$



Линейные преобразования

Виды преобразований

Тождественное преобразование

$$Ex = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x$$

Сжатие/растяжение

$$\mathrm{K}x = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 x_1 \\ k_2 x_2 \end{bmatrix}$$

Проекция на оси

$$Px = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Поворот против часовой стрелки на угол ω

$$\mathrm{R}x = \begin{bmatrix} cos\omega & -sin\omega \\ sin\omega & cos\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Линейные преобразования

Комбинации преобразований

A, B –преобразования

$B(Ax) = (BA)x = Cx$
$C = BA$

$C = Ax + Bx$

A^{-1}- обратное преобразование для A

Матрица, у которой нет обратной матрицы называется вырожденной.

Определитель матрицы

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix} - \mathrm{b}\begin{bmatrix} d & f \\ g & i \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} d & e \\ g & h \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d & f \\ g & i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d & e \\ g & h \end{bmatrix}$ - миноры

$detA \neq 0$

матрица А задает взаимно-однозначное преобразование и, соответственно, имеет обратную матрицу

$detA = 0$

матрица А не задает взаимно-однозначного преобразования и не имеет обратную матрицу.

Определитель матрицы

Свойства

$$detA^T = detA$$

$$detAB = detA \cdot detB$$

$$detA^{-1} = \frac{1}{detA}$$

Ранг матрицы

A –матрица

$A^1, \ldots, A^n$- столбцы матрицы A

U – линейная оболочка $A^1, \ldots, A^n$

Ранг матрицы A – размерность векторного пространства U.

Ранг - максимальное количество линейно независимых столбцов.

Ранг - максимальное количество линейно независимых строк.

Ранг матрицы

Свойства

$rank(A) = rank(A^T)$

В пространстве R^n не может быть больше чем n линейно независимых векторов.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots \\ \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$rank(A) \leq \min(m, n)$

$rank(A) = \min(m, n)$ – матрица полного ранга, она невырожденная.

Ранг матрицы

Примеры

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; rank(A) =$$

Ранг матрицы

Примеры

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; rank(A) = 1$$

Ранг матрицы

Примеры

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; rank(A) = 1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; rank(A) =$$

Ранг матрицы

Примеры

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; rank(A) = 1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; rank(A) = 2$$

Ранг матрицы

Примеры

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; rank(A) = 1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; rank(A) = 2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \; rank(A) =$$

Ранг матрицы

Примеры

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; rank(A) = 1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; rank(A) = 2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \; rank(A) = 3$$

Матричное разложение

Матричное разложение – это представление исходной матрицы в виде произведения других.

Собственные вектора и собственные значения

A – линейное преобразование.
$x \in V$

$$Ax = x'$$

$v \neq 0$
$Av = \lambda v$
$\lambda \in R$

Тогда

v – собственный вектор матрицы A

λ – собственное значение матрицы A

Собственные вектора и собственные значения

$Av = \lambda v$
$Av - \lambda v = 0$
$(A - \lambda E)v = 0$

$v \neq 0$
$\det(A - \lambda E) = 0$

$\det(A - \lambda E) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda\ + a_0 = 0$ - характеристический многочлен матрицы A

Корнями характеристического многочлена являются собственные значения матрицы A

Для матрицы n x n характеристический многочлен будет иметь степень n

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ - собственные значения матрицы A

$\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ – спектр матрицы A

Собственные вектора и собственные значения

Свойства

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ - собственные значения квадратной матрицы A n x n

$\mathrm{d}etA = \lambda_1 \cdot \ \dots \cdot \lambda_k$

матрица A обратима, когда все собственные значения ненулевые

$trA = \ a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ - след матрицы (сумма диагональных элементов)

$trA = \lambda_1 + \ \dots + \lambda_k$

Разложение по собственным векторам

Свойства

$v_1, \dots, v_n$ - линейно независимые собственные вектора квадратной матрицы A n x n

$\{v_1, \dots, v_n\}$ – базис собственных векторов

Переведем матрицу A в новый базис из собственных векторов

$V = [v_1|v_2| \dots |v_n]$ - матрица перехода к базису собственных векторов

$A = V\Lambda V^{-1}$ - разложение по собственным векторам или спектральное разложение

$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$ - диагональная матрица

Спектральная теорема

A– действительная симметричная матрица

$A = A^T$и $a_{ij} \in R$

1. A имеет только действительные собственные значения
2. A имеет n линейно независимых собственных векторов
3. собственные векторы ортогональны
4. А – диагонализируемая(может быть представлена в виде диагональной матрицы в некотором базисе)

$\Lambda = V^{-1}AV$

Ортогональная матрица

Если все колонки матрицы являются ортогональными между собой векторами, то матрица ортогональна.

$$A^T A = AA^T = E$$

$$A^{-1} = A^T$$

$$\Lambda = V^{-1}AV = V^T AV$$

Возведение матрицы в степень

Матрица A - диагонализируемая

$A = V\Lambda V^{-1}$

$A^2 = AA = V\Lambda V^{-1}\, V\Lambda V^{-1} = V\Lambda^2 V^{-1}$

$A^n = V\Lambda^n V^{-1}$

$$\Lambda^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_k^n \end{bmatrix}$$

Вопросы