Facitliste og vejledende besvarelser til den supplerende note i matematikforløbet

Rasmus Frigaard Lemvig

rle@unf.dk

Masterclass 1515

31. januar til 2. februar

Introduktion

Opgave 1.1

1) $a \in \{a,b,c\}$, men $a \notin \{\{a\},\{b\}\}$. Husk, at a og $\{a\}$ ikke er den samme ting!

2) $\frac{2}{3}$ er ikke et element i $\mathbb{N}$ eller $\mathbb{Z}$, da $\frac{2}{3}$ ikke er et heltal. Oog har vi $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$, da $2 \in \mathbb{Z}$ og $3 \in \mathbb{N}$

3) Lad $L = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2+x=0\}$. Da $0^2+0=0$, må $0 \in L$. Da $1^2+1=2 \neq 0$ er 1 ikke i L.

Opgave 1.2

Bemærk, at $A=\{\dots,-4,-2,0,2,4,\dots\}=C$. Lad os opskrive D ekspicit. $x^2+x=0$ har løsningen $x=0$, så $0 \in D$. Deler vi begge sider af $x^2+x=0$ med x fås $x+1=0$. Da ser vi, at $x=-1$ er den anden løsning, så $1 \in D$. Der kan maksimalt være 2 løsninger til en andengradsligning, så $B=\{0,-1\}=D$. Opsummeret:

$$A=C, \quad B=D$$

Opgave 1.3

1) Ja, $A \subseteq \mathbb{N}$, da $1,2,3,4 \in \mathbb{N}$

2) Ja. $B=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots\}$ og alle elementer i B har et heltal i tæller og nævner, så $B \subseteq \mathbb{Q}$

3) Nej, $C \not\subseteq D$. $a \in C$, men $a \notin D$

Opgave 1.4

1) Hvis $\emptyset = A$ er $A \subseteq A$ per definition, idet $\emptyset \subseteq \emptyset$ er antaget at gælde. Hvis $A \neq \emptyset$ findes et $a \in A$. Alle $a \in A$ ligger i A, så $A \subseteq A$

Note: Det første aksiom for mængdelæren (se næste kapitel) dikterer, at to mængder er ens netop hvis de har samme elementer, altså hvis A og B er mængder gælder $A = B \iff A \subseteq B$ og $B \subseteq A$

2) Antag $A \subseteq B$ og $B \subseteq C$. Alle elementer i A ligger i B, og alle elementer i B ligger i C, altså må alle A's elementer specielt være i C, så $A \subseteq C$

Opgave 1.5

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ og alle disse elementer ligger i $\mathbb{Z}$, så $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$. Vi viser nu $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$. $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\}$, så hvis $b = 1$, ser vi, at alle elementerne $\ldots, \frac{-2}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \ldots$ ligger i $\mathbb{Q}$. Men $\frac{a}{1} = a$ for alle $a \in \mathbb{Z}$, så $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} = \{\ldots, \frac{-2}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \ldots\}$, og vi konkluderer, at $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$.

Opgave 1.~~4~~6

1) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1\}$. $x = 1$ og $x = -1$ er løsninger til ligningen $x^2 = 1$, så $A = \{1, -1\}$

2) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x - 4 = 2\}$. Vi løser ligningen $x - 4 = 2$ ved at lægge 4 til på begge sider: $x - 4 + 4 = 2 + 4 \Leftrightarrow x = 6$, så $B = \{6\}$

3) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x = 3\}$. Først ser vi, at:

$$x^2 - 2x = 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

ved blot at trække 3 fra på begge sider. Vi løser denne andengradsligning med formlen:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$= \frac{2 \pm 4}{2} = 1 \pm 2$, så løsningerne er $x = -1$ og $x = 3$

Opgave 1.7

1) $A = \{1, 2\}$: Vi har $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, A\}$

2) $B = \{a, b, c\}$. Vi har $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, B\}$. $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

3) $|A| = 2$, $|B| = 3$, $|\mathcal{P}(A)| = 4$, $|\mathcal{P}(B)| = 8$, $|\mathcal{P}(\emptyset)| = 1$

4) Lad A være en mængde med n elementer. Først bemærker vi, at $|\mathcal{P}(A)|$ ikke afhænger af selve elementerne, men kun af antallet n. Altså har vi fra opgave 1), 2) og 3), at:

$$|\mathcal{P}(A)| = 1, \text{ når } |A| = 0$$
$$|\mathcal{P}(A)| = 4, \text{ når } |A| = 2$$
$$|\mathcal{P}(A)| = 8, \text{ når } |A| = 3$$

osv. Hvis $|A| = 1$ kan man let vise, at $|\mathcal{P}(A)| = 2$. Vi ser, at $|\mathcal{P}(A)|$ fordobles, idet vi tilføjer et element. Et bud på en formel er da $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

Proposition

Lad A være en endelig mængde med $|A| = n \in \{0, 1, 2, ..\}$. Da er $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|} = 2^n$.

Bevis: Vi skal blot beskrive, hvordan alle delmængder af A fremkommer. En delmængde af A er bestemt ud fra de elementer, der ligger i den. For alle A's elementer skal vi således vælge, om dette element skal ligge i delmængden eller ej. Det giver netop 2 muligheder for alle A's elementer. Det samlede antal muligheder (som er lig antal delmængder) er da $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2$ n gange, ergo $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$ som ønsket

$\blacksquare$

Opgave 1.8

$x^2=4$ er ikke et udsagn, da sandhedsværdien afhænger af x.

$6<7<10$ er et udsagn (som er sandt)

"hvis a er lige, går 2 op i a" er et udsagn (som er sandt)

"Algebra er den bedste gren af matematikken" er ikke et udsagn i matematisk forstand, da det er sandt eller falskt efter, hvem man spørger (for mig er det sandt)

Opgave 1.9

$p(1)$, $p(1/2)$ og $p(\pi)$ er sande, $p(10)$ og $p(12)$ er falske.

Opgave 1.10

Lad $A = \{n \in \mathbb{N} \mid p(n) \text{ er sand}\}$. Vi opskriver de første 16 elementer:

2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24

Dette er de første 16 elementer af $\mathbb{N}$, hvor 2 eller 3 deler tallet. Lad os opskrive de manglende elementer:

1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23

Bortset fra 1 er alle disse tal primtal. Et primtal er et heltal, hvor kun 1 og tallet selv er divisorer.

Opgave 1.11

1) $a=1$: $\sum_{n=1}^{10} a = 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 = 10 = \underline{\underline{10 \cdot 1}}$

$a=2$: $\sum_{n=1}^{10} a = 2+2+2+2+2+2+2+2+2+2 = 20 = \underline{\underline{10 \cdot 2}}$

$a=\frac{1}{5}$: $\sum_{n=1}^{10} a = \frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5} = 2 = \underline{\underline{10 \cdot \frac{1}{5}}}$

Resultatet er $10 \cdot a$ i alle tilfælde

2) lad nu $a \in \mathbb{R}$ være villkårlig og konstant og $N \in \mathbb{N}$. Vi finder $\sum_{n=1}^{N} a$. Summen er $a+a+ \dots +a$ N ~~gg~~ gange, hvilket vi også så i 1). Altså er $\sum_{n=1}^{N} a = N \cdot a$

Opgave 1.12

1) Bemærk, at $\sum_{n=0}^{4} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$

+
2)

x-værdi	Sum $\sum_{n=0}^{4} x^n$
0	1
1/2	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16} = \frac{31}{16}$
1	$1+1+1+1+1 = 5$
2	$1+2+4+8+16 = 31$
-1	$1+(-1)+1+(-1)+1 = 1$
-2	$1+(-2)+4+(-8)+16 = 11$
10	$1+10+100+1000+10000 = 11111$

3) Wolframalpha giver:

x-værdi	sum $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$
1/2	2
-1/3	3/4
1/4	4/3
1	∞
5/4	∞
3/2	∞
10/4	∞

Når x numerisk er 1 eller større, bliver summen uendelig stor. Et formelt argument er givet i de fleste analyse-bøger, se evt. litteraturlisten.

Opgave 1.13

1) $$\sum_{n=1}^{5} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot(1+1)} + \frac{1}{2(2+1)} + \frac{1}{3\cdot(3+1)} + \frac{1}{4\cdot(4+1)} + \frac{1}{5\cdot(5+1)}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} = \frac{5}{6}$$

2) Se linket til min GitHub

3) Ifølge mit program er:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n\cdot(n+1)} = 0{,}9 \quad , \text{ når } N=10$$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n\cdot(n+1)} \approx 0{,}999 \quad , \text{ når } N=1000$$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n\cdot(n+1)} \approx 0{,}99999 \quad , \text{ når } N=100000$$

Det ser ud til, at summen kommer tættere og tættere på 1, når N bliver større. Lad os vise, at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)} = 1$.
Vi laver først den smarte omskrivning:

$$\frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n+1-n}{n\cdot(n+1)} = \frac{(n+1)}{n\cdot(n+1)} - \frac{n}{n\cdot(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Hvorfor er dette smart? Lad os indsætte i summen for et $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{N} + \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}$$

Kig nærmere på summen. Rigtig mange led går ud, f.eks. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$, $\frac{1}{3} - \frac{1}{3}$, osv. Faktisk er $1 - \frac{1}{N+1}$ det eneste, der er tilbage! Summer, der opfører sig sådan her, kaldes <u>teleskoperende</u>. Vi har altså:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n\cdot(n+1)} = 1 - \frac{1}{N+1} \quad \text{for alle } N \in \mathbb{N}$$

Lader vi N gå mod ∞ (altså N bliver vilkårlig stor), får vi, at $\frac{1}{N+1}$ må gå med 0. Men det vil netop sige, at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)} = 1 - 0 = 1$ som ønsket.

Grænseværdier er meget vigtige i matematisk analyse. Se evt. litteraturlisten.

Induktion

Opgave 2.1

Fordi summen kun har endeligt mange tal, kan vi omskrive:

$$\sum_{i=1}^{n} 2i = 2+4+6+\dots+2\cdot n = 2\cdot(1+2+3+\dots+n) = 2\cdot\sum_{i=1}^{n} i$$

Bruger vi eksempel 2.3 fås: $\sum_{i=1}^{n} 2i = 2\cdot\frac{n(n+1)}{2} = n\cdot(n+1)$

Opgave 2.2

Start: $n=1$ $\quad 5^n-1 = 5-1 = 4$ og 4 deler klart sig selv.

Skridt: Antag 4 deler 5^n-1 for et $n\in\mathbb{N}$. Vi laver omskrivningen

$$5^{n+1}-1 = 5^n\cdot 5-1 = 5^n\cdot(4+1)-1 = 5^n\cdot 4+5^n-1$$

4 deler $5^n\cdot 4$, og 4 deler 5^n-1 per induktionsantagelsen.
Dermed deler 4 også summen, altså deler 4 $5^{n+1}-1$.
Vi er da færdige.

Opgave 2.3

1) $\sum_{i=1}^{2}(2i-1) = 1+3 = 4$, $\quad\sum_{i=1}^{3}(2i-1) = 1+3+5 = 9$, $\quad\sum_{i=1}^{4}(2i-1) = 1+3+5+7 = 16$, $\quad\sum_{i=1}^{5}(2i-1) = 1+3+5+7+9 = 25$

2) Opsummering af 1):

n	1	2	3	4	5
Sum	1	4	9	16	25

Vi ser, at summen er kvadratet på n, altså n^2 i de 5 tilfælde. Vi gætter derfor på, at $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$

3) Lad os bevise vores formodning med induktion. Vi så, at formlen holdt for $n=1$. Antag nu, at $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2$ for et $n\in\mathbb{N}$. Vi får:

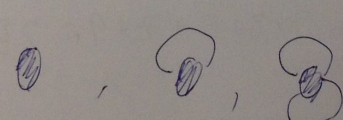
$$\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) = \sum_{i=1}^{n}(2i-1) + (2(n+1)-1) = n^2+2n+2-1$$

$$= n^2+2n+1$$

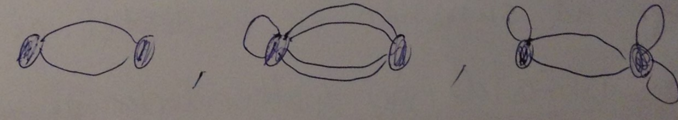
Bruger vi kvadratsætningen $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$ fås: $n^2+2n+1=(n+1)^2$, så $\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1)=(n+1)^2$ og formlen gælder dermed også for $n+1$, så vi har bevist vores formodning! Summen af de første 10.000 ulige naturlige tal er $\sum_{i=1}^{10000}(2i-1) = 10000^2 = 100.000.000 = 10^8$ dvs. 100 millioner.

Opgave 2.4

~~Den eneste graf med én knude og~~

Én knude:  osv.

alle har klart en lukket Eulertur

To knuder:  osv.

Idet grafen skal være sammenhængende, og alle knuder skal have ~~u~~lige udens, bliver vi nødt til at have et lige antal kanter mellem de to knuder. Igen er eksistensen af en Euler tur oplagt.

Opgave 2.5

1) $\sum_{i=5}^{10} i = 5+6+7+8+9+10 = \underline{\underline{45}}$. For $\sum_{i=8}^{30} i$ gør vi noget smartere.

Vi udregner $\sum_{i=8}^{30} i$ ved at udregne $\sum_{i=1}^{30} i$ og trække $\sum_{i=1}^{7} i$ fra. Ved eksempel 2.3 får vi:

$$\sum_{i=8}^{30} i = \sum_{i=1}^{30} i - \sum_{i=1}^{7} i = \frac{30\cdot(30+1)}{2} - \frac{7\cdot(7+1)}{2} = 465 - 28 = \underline{\underline{437}}$$

2) For at finde $\sum_{i=n}^{m} i$ bruger vi samme ide som i 1). Og får vi:

$$\sum_{i=n}^{m} i = \sum_{i=1}^{m} i - \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{m\cdot(m+1)}{2} - \frac{(n-1)\cdot n}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\cdot(m^2+m-n^2+n)}}$$

3) Se min GitHub

4) Begge programmer giver:

$$\sum_{i=467}^{1220} i = 635999, \quad \sum_{i=250}^{80000} i = 3200008875$$

Opgave 2.6

Vi følger vinket og udregner $(n+1)\cdot(3(n+1)+1)$:

$$(n+1)\cdot(3(n+1)+1) = (n+1)\cdot(3n+4) = 3n^2+4n+3n+4 = 3n^2+7n+4$$

Lad os nu anvende induktion. Lad $n=1$, da fås:

$$\sum_{i=1}^{n}(3i-1) = 3\cdot 1-1 = 2 \quad , \quad \frac{n\cdot(3n+1)}{2} = \frac{1\cdot(3\cdot 1+1)}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Så påstanden holder for $n=1$. Antag nu, at påstanden holder for et vilkårligt $n \in \mathbb{N}$. Da fås:

$$\sum_{i=1}^{n+1}(3i-1) = \sum_{i=1}^{n}(3i-1) + (3\cdot(n+1)-1) = \frac{n\cdot(3n+1)}{2} + 3n+2$$

$$= \frac{n\cdot(3n+1)}{2} + \frac{6n+4}{2} = \frac{n\cdot 3n+n+6n+4}{2}$$

$$= \frac{3n^2+7n+4}{2} = \frac{(n+1)\cdot(3\cdot(n+1)+1)}{2} \quad \text{vink!}$$

Vi genkender dette som formlen med $n+1$ i stedet for n, så induktionsskridtet er vist, og vi er færdige.

Opgave 2.7

Lad os gentage fremgangsmåden i opgave 2.6. Først gør vi induktionsskridtet nemmere for os selv ved at udregne $(n+1)\cdot(2\cdot(n+1)-1)$:

$(n+1)\cdot(2\cdot(n+1)-1) = (n+1)\cdot(2n+1) = 2n^2+n+2n+1 = 2n^2+3n+1$

Lad os nu lave beviset med induktion. Lad $n=1$:

$$\sum_{i=1}^{n}(4i-3) = 4\cdot 1-3 = 1 \quad , \quad n\cdot(2n-1) = 1\cdot(2\cdot 1-1) = 1\cdot 1 = 1$$

Så starten holder! Antag, at påstanden er sand for et $n\in\mathbb{N}$, da får vi:

$$\sum_{i=1}^{n+1}(4i-3) = \sum_{i=1}^{n}(4i-3) + 4\cdot(n+1)-3 = n\cdot(2n-1)+4n+4-3$$

vink!

$$= 2n^2-n+4n+1 = 2n^2+3n+1 = (n+1)\cdot(2\cdot(n+1)-1)$$

Så formlen holder også for $n+1$, så vi er færdige.

Opgave 2.8

Antag $n=1$. Da er $n^3-n = 1-1 = 0$, og alle heltal deler 0, så 6 deler n^3-n. Antag nu, at 6 deler n^3-n for et $n\in\mathbb{N}$. Vi bruger vinket og får:

$$(n+1)^3-(n-1) = n^3+3n^2+3n+1-n-1 = n^3-n+3n^2+3n$$
$$= (n^3-n)+3n(n+1)$$

Per induktionsantagelsen går 6 op i n^3-n. Vi skal altså blot vise, at 6 går op i $3n(n+1)$. $n\cdot(n+1)$ er altid et lige tal. Hvis n er lige, er $n+1$ ulige og vice versa, men et produkt af et lige og et ulige tal er altid lige. Altså går 2 op i $n \cdot (n+1)$ for alle $n \in \mathbb{N}$, så $2 \cdot 3 = 6$ går op i $3n(n+1)$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Da 6 går op i både $n^3 - n$ og $3n(n+1)$, må 6 også dele summen, så vi er færdige.

Opgave 2.9

Som vinket giver os, skal induktionsskridtet gælde for alle $n \in \mathbb{N}$, specielt også for $n=1$. Lad os gennemgå skridtet for $n=1$. Vi har en mængde på 2 heste, H_1 og H_2. Idet vi udtager H_1, har alle resterende heste (som kun er H_2!) selvfølgelig samme farve. Idet H_1 lægges tilbage og H_2 udtages, gentages situationen blot, men fordi vi ikke har en tredje hest at sammenligne med, har vi ikke et argument for, at H_1 og H_2 har samme farve! Med andre ord, induktionsskridtet er kun gyldigt for $n \geq 2$, hvilket gør beviset forkert.

Djikstra's algoritme

Opgave 3.1

Fra linje 6 i pseudokoden kan vi læse, at algoritmen udvælger den knude med mindste afstand og som ikke ligger i S. Dette er netep u per antagelse.

Opgave 3.2

Hvis der ikke findes en vej fra s til u er $\delta(u) = \infty$ per konvention. Læser man igennem algoritmen, vil $d(u) = \infty$ hele tiden, så når u bliver besøgt, vil algoritmen give svaret $d(u) = \infty = \delta(u)$, ergo giver Djikstra's algoritme igen "den korteste vej" (eller rettere: længden af denne).

Opgave 3.3

Antag, at der findes en vej fra u til v. Der kan potentielt være uendeligt mange veje, men vi kan nøjes med at se på endeligt mange af dem, nemlig veje uden gentagne knuder og kanter. Hvorfor? Hvis en vej har gentagne knuder eller kanter, må der nødvendigvis være en kreds i grafen, og denne kan naturligvis fjernes, idet den gør vejen unødigt længere (fordi alle vægte er ikke-negative). Da vi kun behøver at betragte disse endeligt mange veje, kan vi udregne alle deres længder og blot vælge vejen med mindst længde.

Antag vi har en korteste vej fra u til v. Lad x ligge på vejen. Hvis delvejen fra u til x ikke er den korteste vej fra u til x, kan vi tage den korteste vej fra u til x og erstatte delvejen med denne. Da har vi fundet en ny korteste vej fra u til v, men dette er umuligt per antagelse. Vi konkluderer, at delvejen fra u til x er den korteste vej fra u til x.

Opgave 3.4

Så længe, at $S \neq V$, altså sålænge der findes ikke-besøgte knuder, vil koden linje 6-10 køre.

I linje 7 tilføjes den valgte knude u til S, så idet V er en endelig mængde, må alle knuder blive besøgt, i hvert fald så længe der findes en knude u med mindste d(u). Dette er dog altid tilfældet, selv hvis d(u) = ∞, idet der kun er endeligt mange knuder at sammenligne med.

Vi benytter, at alle knuder bliver besøgt, i allerførste del af beviset.

Opgave 3.5

Lad os anvende Djikstra's algoritme ukritisk på grafen:

	B	C	D	E
A →	5	∞	∞	∞
B →	✓	∞	5-3	∞
D →		2-2	✓	∞
C →		✓		0+7
E →				✓

Så længden af de korteste veje ifølge Djikstra's algoritme er:

A → B : 5 , A → C : 0 ,

A → D : 2 , A → E : 7

men i virkeligheden er alle ~~vejene~~ de korteste veje af længde ~~...~~ −∞! Prøv at minimere afstanden mellem A og B f.eks. Vi kan gå fra A → B med afstand 5, men vi kan også lave vejen A → B → D → C → B af længde 4. Gentag delen B → D → C → B så mange gange, du har lyst, af-

standen fra A til B bliver mindre hver gang! Altså kan afstanden hele tiden blive mindre, altså $\delta(B) = -\infty$. Samme argument holder for de andre knuder. Kredsen $B \to D \to C \to B$ kaldes i øvrigt en <u>negative weight cycle</u> (eller på dansk: en "negativ-vægt-kreds").
Du kan læse mere om dette i en af bøgerne i litteraturlisten.