Supplerende note til matematikforløb

Rasmus Frigaard Lemvig

rle@unf.dk

Masterclass 2020

31. januar til 2. februar

Indhold

1 Introduktion

1.1 Hvad handler denne note om?

Denne note er for alle, der kom igennem matematikdelen af det faglige kompendium og som ønsker at blive klogere eller få nogle flere udfordringer. Den første del af noten handler om matematik, særligt induktionsbegrebet. Induktion bruges til at vise et utal af resultater inden for mange grene af matematik. Selve begrebet kan være svært at forstå, men anvendelsen er overraskende simpel. Den anden halvdel af noten omhandler Djikstra's algoritme og har et mere datalogisk fokus. Her giver vi beviset for, at Djikstra's algoritme giver den korteste vej for en vægtet graf med positive vægte.

Mange af opgaverne i denne note er en del sværere end dem i kompendiet. De kræver tid at komme igennem, men husk, at det kræver tid og kræfter at lære nyt stof. Det er i processen med at få ideer til at løse en opgave, at man faktisk udvikler forståelse. Ikke alle opgaverne er lige relevante at lave. Opgaver af sværhedsgraf 3 (3 blå prikker) eller over kan du sagtens springe over i første omgang. Finder du nogle fejl, vil du vide mere, eller har du andre spørgsmål, skal du være velkommen til at skrive til mig på rle@unf.dk.

1.2 Mængder, notation og matematisk formalisme

1.2.1 Mængder

Inden vi går rigtigt i gang, skal vi have nogle ting på plads. Når vi matematikere taler sammen, bruger vi nogle bestemte begreber, som er meget grundlæggende. Lad os først få styr på, hvad en mængde er. En mængde kan du bare tænke på som en samling elementer (ting, objekter, genstande). Et konkret eksempel kunne være $\{1, 2, 3\}$, som er mængden, der indeholder tallene 1, 2 og 3. Som notation bruger vi tuborgklammer/akkolader $\{\}$ til at betegne mængder.

Eksempel 1.1. Betragt mængderne A, B og C:

$$A = \{\text{Matematik, Datalogi, Kemi, Fysik, Biologi}\}, \quad B = \{a, b\}, \quad C = \{\{a\}, \{b\}\}, \quad \emptyset$$

A er mængden af fag på Masterclass 2020. B er mængden af bogstaverne a og b. C er mængden af mængderne $\{a\}$ og $\{b\}$. Bemærk, at a og $\{a\}$ ikke er det samme! Den sidste mængde $\emptyset$ er ikke det danske bogstav Ø. Det er betegnelsen for den tomme mængde, som er mængden uden nogle elementer. Den tomme mængde er entydig, altså der findes netop én tom mængde. Vi siger, at to mængder er ens, hvis de indeholder præcist de samme elementer. Nu til lidt mere notation. Hvis et element ligger i en mængde, kan vi hurtigt blive træt af at skrive f.eks. "a er et element i B". Vi vil blot skrive $a \in B$, hvor "$\in$"kaldes tilhørertegnet. Og ligeledes, da c ikke ligger i B, skriver vi $c \notin B$. ◦

Ofte er det upraktisk at opskrive alle elementer i en mængde. F.eks. kan vi se på mængden af bogstaver i det danske alfabet. Vi gider ikke at skrive alle bogstaverne ud, så i stedet kunne vi skrive:

$$\{\text{a, b, ..., æ, ø, å}\}$$

Her skal vi implicit forstå, at alle bogstaver mellem b og æ også er med. Man kan også skrive i teksten omkring mængden, at den faktisk er alfabetet. Dette løser dog stadig ikke vores problemer helt. Hvad hvis vi f.eks. ville opskrive mængden af alle løsninger til ligningen $x^3 + 4x^2 + 3x - 2 = 0$ uden faktisk at regne dem ud? Da vil en matematiker nok skrive:

$$\{x \in A \mid x^3 + 4x^2 + 3x - 2 = 0\}$$

Som skal læses "mængden af alle de x i mængden A, som opfylder $x^3 + 4x^2 + 3x - 2 = 0$". Denne form for notation bruges overalt i matematik.

Eksempel 1.2. Alle mængder, vi har kigget på i denne note, er endelige, men meget ofte arbejder man med uendelige mængder, f.eks.:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\} \quad \text{Mængden af naturlige tal}$$
$$\mathbb{Z} = \{... - 2, -1, 0, 1, 2, ...\} \quad \text{Mængden af hele tal}$$
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ og } b \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{Mængden af rationale tal / brøker}$$
$$\mathbb{R} \quad \text{Mængden af reelle tal}$$

$\mathbb{N}$ og $\mathbb{Z}$ er lette at forstå ud fra definitionen. $\mathbb{Q}$ kræver lidt mere forklaring. Definitionen siger, at $\mathbb{Q}$ består af alle tal, der kan skrives som a/b, hvor $a \in \mathbb{Z}$ og $b \in \mathbb{N}$. F.eks. er $1/2 \in \mathbb{Q}$, da 1 er et heltal, og 2 er et naturligt tal. Overbevis dig selv om, at alle brøker kan skrives ved at vælge tælleren i $\mathbb{Z}$ og nævneren i $\mathbb{N}$. Man kan måske tro, at samtlige tal må ligge i $\mathbb{Q}$, men dette er langtfra tilfældet. F.eks. er $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Man siger, at $\sqrt{2}$ er irrational. De reelle tal, $\mathbb{R}$, går vi ikke i dybden med her. Du kan tænke på dem som mængden af samtlige tal, du er vant til at arbejde med. Her vil $\sqrt{2}$ være et element. ◦

1.2.2 Logik

Definition 1.3. Et (matematisk) udsagn er en udtalelse, som enten er sand eller falsk.

Eksempel 1.4. Følgende udtalelser er alle udsagn:

$$1 < 2, \quad q^2 \geq 0 \text{ for alle } q \in \mathbb{Q}, \quad 2 \text{ er et ulige tal}$$

De to første udsagn er sande, og det tredje er falsk. De følgende udtalelser er ikke udsagn:

$$x^2 + 1, \quad 5050, \quad \text{Matematik er sjovt}$$

◦

Ofte kan det være smart at have et udsagn, der afhænger af en bestemt værdi. F.eks. er $x^2 - 1 = 0$ sand, hvis $x = 1$ eller $x = -1$. Men det er falsk, hvis x f.eks. er 3. Dette motiverer os til at lave følgende definition:

Definition 1.5. En udtalelse med en fri variabel, som bliver til et udsagn, idet variablen antager en bestemt værdi i en mængde, kaldes et prædikat.

Eksempel 1.6. Lad $p(a)$ være et prædikat over $\mathbb{Z}$. $p(a)$ er sand, idet a er lige og falsk ellers. Så $p(4), p(100), p(-6)$ er alle sande udsagn, mens $p(3), p(1729)$ og $p(-11)$ er falske. ◦

Vi kommer til at se nærmere på prædikater, idet vi når til induktion. Nu kigger ser vi nærmere på noget matematisk sprogbrug. Lad p og q være to udsagn. Hvis q er sand hver gang, p er sand, siger vi, at p *medfører* q, og vi skriver:

$$p \Rightarrow q$$

Hvor "$\Rightarrow$"kaldes en "medfører-pil"eller en "implikationspil". Hvis der båder gælder $p \Rightarrow q$ og $q \Rightarrow p$, siger vi, at p og q er ækvivalente udsagn, og vi skriver:

$$p \Leftrightarrow q$$

Vi bruger ofte udtrykket p gælder *hvis og kun hvis* q gælder. Ækvivalenser er meget vigtige i matematik. Mange betingelser i matematik kan være meget svære at tjekke, men hvis vi kan vise, at denne betingelse holder hvis og kun hvis en anden og meget mere håndgribelig betingelser gælder, så gør vi livet lettere for os selv. Sætning 2.5, som vi vender tilbage til senere, er et fremragende eksempel på dette.

1.2.3 Funktioner

I dette afsnit skal vi blot formalisere funktioner en anelse. Du er nok vant til, at en funktion blot er givet som f.eks. $f(x) = 3x + 2$. Men dette er ikke nok for en matematiker! Vi vil gerne vide, hvilke værdier x kan antage. Til det bruger vi notationen:

$$f : A \to B, \quad f(x) = \text{et konkret udtryk}$$

hvor A og B er mængder. A kaldes domænet/definitionsmængden, og B kaldes co-domænet eller værdimængden. F.eks. kan vi definere funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ved $f(x) = 2x$. Her kan x antage alle værdier i de reelle tal. Hvis vi til gengæld havde valgt at definere f ved $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$ er det ikke længere den samme funktion! F.eks. giver udtrykket $f(1/2)$ slet ikke mening, da $1/2 \notin \mathbb{N}$. Man kan tænke på notationen $f : A \to B$ som, at f tager elementer i A og sender dem over i elementer i B.

1.2.4 Matematisk sprogbrug

Der er et fast format i matematisk litteratur. Man starter med en definition, og herudfra præsenterer man nogle resultater med hver sit bevis. Har man fat i en lærebog, vil der da blive vist nogle eksempler, men ellers starter man faktisk forfra med en ny definition, nogle resultater herudfra og så videre. Vi benytter kun til dels denne opbygning, da denne notes modtagere ikke er universitetsstuderende, men grundskoleelever. Et resultat er dog ikke bare et resultat. Der findes en del forskellige betegnelser for resultater i matematisk litteratur. Lad os her gennemgå dem:

- En *sætning* er et generelt resultat og nok den type af resultat, der fremkommer oftest. Sætninger kan være forholdsvist simple, men de kan også være meget svære at vise. En sætning, der kræver mange originale ideer at vise og som er meget central/ikonisk for en bestemt matematisk teori, kaldes ofte for *dyb*.
- Et *lemma* er en hjælpesætning. For overskuelighedens skyld vælger man ofte at vise dele af en vigtig sætning for sig i form af én eller flere lemmaer. Ofte er lemmaer også interessante i sig selv, men det er ikke atypisk, at de kun er interessante grundet en sætning, der kommer efterfølgende.
- Et *korollar* er en følgesætning til et andet resultat, typisk en sætning eller et lemma. Det hænder nemlig relativt ofte, at man forholdsvist nemt kan udlede et nyttigt resultat fra et tidligere.
- En *proposition* er et mindre resultat, der ofte bygger direkte ovenpå én eller flere definitioner.

Hvornår anvender man en proposition frem for en sætning? Det er meget op til en selv. Der er ikke et fast regelsæt for, hvornår man bruger hvad. Nogle forfattere bruger slet ikke propositioner, mens andre bruger dem flittigt. I sidste tilfælde vil sætninger være forbeholdt meget vigtige resultater. Til sidst skal nævnes, at en sætning også kaldes et *teorem*.

1.2.5 Sumtegn

Til sidst i dette afsnit nævner vi lidt mere af den notation, du kommer til at støde på. Først og fremmest er der sumtegnet:

$$\sum$$

Dette er faktisk det græske bogstav ”store sigma”. Sumtegnet er en supersmart notation, og der er intet mystisk ved det som sådan. Det kan dog kræve lidt øvelse, før man bliver god til at skrive summer op. Lad os se på et eksempel:

Eksempel 1.7. Jeg ønsker at opskrive summen af de første 10 naturlige tal, altså $1 + 2 + ... + 10$. Med sumtegnet bliver dette:

$$\sum_{n=1}^{10} n$$

Hvordan regner man dette sumtegn? Først er $n = 1$, så vi skriver 1. Dernæst er $n = 2$, så vi får $1 + 2$. Så er $n = 3$, dvs. vi har $1 + 2 + 3$. Vi fortsætter til $n = 10$, hvor vi så har $1 + 2 + ... + 10$. ◦

Eksempel 1.8. Lad os tage et andet eksempel, hvor summen ser lidt anderledes ud, nemlig:

$$\sum_{n=1}^{4}(2n - 1)$$

Lad os prøve at skrive summen ud. Når $n = 1$, er $2n - 1 = 1$. Når $n = 2$, er $2n - 1 = 4 - 1 = 3$. Fortsætter vi, fås:

$$\sum_{n=1}^{4} = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

Så dette er altså summen af de første 4 ulige naturlige tal. ◦

Sumtegnet kan måske virke som lidt overflødig notation, når man ser på de to ovenstående eksempler. Men de har det med at dukke op mange steder. Forestil dig f.eks. at du har et datasæt med 2000 værdier, og du skal beregne summen. Da har man ikke lyst til at skrive alle elementerne ud, så her er sumtegnet et nyttigt stykke notation. Lad os afslutte kapitlet med et sidste eksempel.

Eksempel 1.9. Vi behøver ikke kun at summere op til et endeligt tal. Vi kan også summere uendeligt mange ting sammen. Et konkret eksempel kunne være:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + 4 + ...$$

Denne sum må klart være lig uendelig, da vi bare lægger mere og mere til. Der findes dog også mange summer, som ikke er uendeligt store. F.eks.:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + ... = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,645$$

Vi siger, at summen *konvergerer*. Hvis en sum ikke konvergerer, kaldes summen *divergent*. At vise, at ovenstående sum faktisk er lig $\pi^2/6$ er ikke en let opgave. Studiet af følger og rækker (uendelige summer) er et centralt emne i matematisk analyse, én af de største grene af matematikken. ◦

1.3 Opgaver

Som en lille hjælp til nogle af opgaverne kan det være nyttigt at huske løsningsformlen for en andengradsligning. Hvis en andengradsligning er givet på formen:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Findes løsningerne x med denne formel:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Hvor $\pm$ skal forstås sådan, at den ene løsning fremkommer ved at lade $\pm$ være $+$, mens den anden løsning fremkommer ved at lade $\pm$ være $-$.

• **Opgave 1.1:**

1)Ligger a i mængden $\{a, b, c\}$? Ligger a i $\{\{a\}, \{b\}\}$?
2)Ligger $2/3$ i $\mathbb{N}$? I $\mathbb{Z}$? Hvad med $\mathbb{Q}$?
3)Er $0 \in L = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x = 0\}$? Ligger 1 i L?

• **Opgave 1.2:**

Hvilke af de fire mængder A, B, C og D herunder er ens?

$$A = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \text{ er lige}\}, \quad B = \{0, -1\}, \quad C = \{..., -4, -2, 0, 2, 4, ...\}, \quad D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x = 0\}$$

•• **Opgave 1.3:**

I denne opgave indfører vi et vigtigt begreb, nemlig *mængdeinklusioner*. Vi siger, at en mængde A er indeholdt i B, hvis det for alle $x \in A$ gælder, at $x \in B$. Med andre ord, alle elementer i A skal også ligge i B. Hvis A er indeholdt i B skriver vi $A \subseteq B$, og vi kalder A en *delmængde* af B. Vi siger desuden, at $\emptyset$ er en delmængde af alle mængder.
1)Er $A = \{1, 2, 3, 4\}$ indeholdt i $\mathbb{N}$?
2)Lad $B = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Gælder $B \subseteq \mathbb{Q}$?
3)Er $C = \{a, b\}$ indeholdt i $D = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$? [Vink: ligger a i D?]

•• **Opgave 1.4:**

Vi arbejder videre med mængdeinklusioner som defineret i forrige opgave. Lad A, B og C være mængder.
1)Vis, at $A \subseteq A$. Med andre ord, vis at alle mængder er indeholdt i sig selv.
2)Antag, at $A \subseteq B$ og $B \subseteq C$. Vis, at $A \subseteq C$.

Note: Den første delopgave viser, at relationen "$\subseteq$"mellem mængder er såkaldt *refleksiv*. Den anden delopgave viser, at "$\subseteq$"er såkaldt *transitiv*.

••• **Opgave 1.5:**

Denne opgave fortsætter med mængdeinklusioner, se de forrige opgaver. Argumenter for, at $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$. Argumenter derefter for, at $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$.

Note: Det gælder også, at $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. Fra denne opgave har vi altså følgende inklusioner:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

•• **Opgave 1.6:**

Opskriv følgende mængder på listeform, altså skriv mængden helt eksplicit:
1)$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1\}$.
2)$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x - 4 = 2\}$.
3)$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x = 3\}$.

••• **Opgave 1.7:**

Lad A være en mængde. Vi definerer *potensmængden* $\mathcal{P}(A)$ som mængden af alle delmængder af A. F.eks. hvis $A = \{a, b\}$, fås $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, A\}$.

1) Lad $A = \{1, 2\}$. Bestem $\mathcal{P}(A)$.

2) Lad $B = \{a, b, c\}$. Bestem $\mathcal{P}(B)$. Find også $\mathcal{P}(\emptyset)$.

Vi definerer *kardinaliteten* af en mængde som antallet af elementer i mængden. Som notation bruger vi $|A|$ for kardinaliteten af mængden A. Hvis mængden er uendelig, er kardinaliteten uendelig, ∞.

3) Bestem $|A|$ og $|B|$, hvor mængderne A og B er som i de forrige delopgaver. Bestem derefter $|\mathcal{P}(A)|$, $|\mathcal{P}(B)|$ og $|\mathcal{P}(\emptyset)|$.

4) Lad A være en endelig mængde, dvs. $|A| = n$ for et $n \in \{0, 1, 2, ...\}$. Find en formel for $|\mathcal{P}(A)|$. Kan du bevise den? [Vink: Udregn $|\mathcal{P}(A)|$, når $|A| = 0$, $|A| = 1$ osv. og prøv derefter at gætte en formel].

Note: Potensmængden dukker op mange steder i matematik, ofte som et håndgribeligt eksempel på et såkaldt *mængdesystem*, dvs. en mængde af mængder, der opfylder nogle regler. Potensmængden dukker bl.a. op i topologi og målteori.

• **Opgave 1.8:**

Hvilke af følgende udtalelser er udsagn (i matematisk forstand)?

$x^2 = 4$, Algebra er den bedste gren af matematikken, $6 < 7 < 10$, hvis a er lige, går 2 op i a

• **Opgave 1.9:**

Lad $p(x)$ være et prædikat for $x \in \mathbb{R}$, som er sandt, hvis $x < 10$ og falsk ellers. Hvad er sandhedsværdien af $p(1), p(12), p(1/2), p(10)$ og $p(\pi)$?

•• **Opgave 1.10:**

Lad $p(n)$ være et prædikat over $n \in \mathbb{N}$. $p(n)$ er sand, hvis 2 eller 3 (eller begge!) går op i n. Opskriv de første 16 elementer af mængden:

$$\{n \in \mathbb{N} \mid p(n) \text{ er sand}\}$$

Kan du sige noget om de tal, der ikke er med i mængden, op til det 16. element?

•• **Opgave 1.11:**

1) Udregn:

$$\sum_{n=1}^{10} a$$

når $a = 1$, $a = 2$ og $a = 1/5$. Er der et mønster?

2) Lad a være et konstant tal i $\mathbb{R}$ og N et vilkårligt naturligt tal. Bestem:

$$\sum_{n=1}^{N} a$$

Opgave 1.12:

1)Udregn summen:

$$\sum_{n=0}^{4} x^n$$

Når $x = 0$, $x = 1/2$, $x = 1$ og $x = 2$ (vi definerer $x^0 = 1$ for alle $x \in \mathbb{R}$).

2)Prøv at indsætte flere værdier for x i summen og se, hvad der sker. Tag nogle værdier større end 1 og nogle mindre end 1.

3)Åbn et CAS-program (f.eks. WolframAlpha her: https://www.wolframalpha.com/ og indtast forskellige værdier for x i den uendelige sum:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Du kan f.eks. skrive "sum of (1/2)ˆ n from n=0 to infinity"for tilfældet $x = 1/2$. Vælg 3 værdier numerisk mindre end 1 og 3 værdier større end 1 samt $x = 1$. Hvad sker der?

Note: Den uendelige sum ovenover kaldes for den *geometriske række*. Den spiller en central rolle i flere områder af matematisk analyse.

Opgave 1.13: (Kræver programmering)

1)Bestem:

$$\sum_{n=1}^{5} \frac{1}{n(n+1)}$$

2)Skriv et program til at udregne summen

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)},$$

hvor N er et naturligt tal. N skal være inputtet i programmet.

3)Test dit program med $N = 10$, $N = 1000$, og $N = 100000$. Giv et bud på værdien af den uendelige sum:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

I facitlisten er der et argument for værdien af den uendelige sum.

2 Induktion

Inden vi kigger på induktion, bliver vi nødt til at tage et skridt tilbage og blive lidt filosofiske. I matematik arbejder man oftest i et mønster à la: lav en definition, vis så mange resultater herudfra som muligt og gentag procduren. Men hvordan laver man den første definition, altså den allerførste? Hvordan kan vi være sikker på, at den allerførste definition giver mening, så vi kan arbejde ud fra den? Lad os starte med kigge kort på aksiomer. Det er helt forståeligt, hvis du synes, det er langhåret. Det er det for alle første gang, de støder på det. Det kan evt. være en ide at læse eksemplerne først og derefter hoppe tilbage til de første afsnit.

2.1 Aksiomer og deres betydning for matematik

Aksiomer er matematikernes svar på problemet med, at vi skal starte et sted. Et aksiom er blot en grundantagelse, dvs. noget som er sandt per antagelse. Helt formelt er alt matematik, du nogensinde er stødt på, bygget på mængdelærens aksiomer, som man ofte kalder ZF, som står for Zermelo-Fraenkel's aksiomsystem. Det indeholder 8 grundantagelser for mængdelæren. Der er også et niende aksiom kaldet udvalgsaksiomet eller "Axiom of Choice". Det er meget omdiskuteret, om man bør tage dette aksiom (oftest blot kaldet "Choice") med. Dette skyldes, at man kan vise nogle mærkelige og ikke-intuitive ting med det. ZF med Choice kaldes ZFC. Historien er selvfølgelig meget længere end dette. Der findes mange gode steder på internettet, hvor du kan læse mere om ZFC, og hvorfor Choice er så omdiskuteret[1].

2.2 Peano's aksiomsystem for de naturlige tal

Før introducerede vi mængden af alle naturlige tal $\mathbb{N}$. Nu definerer vi helt formelt, hvad denne mængde er. Vi skal se, at disse tal, vi har arbejdet med hele livet, er opbygget aksiomatisk:

Definition 2.1. De naturlige tal er en mængde $\mathbb{N}$ udstyret med en efterfølgerfunktion S, som tager et naturligt tal som input og giver et naturligt tal som output. Der gælder:

(i) $1 \in \mathbb{N}$.

(ii) For alle $n \in \mathbb{N}$ er $S(n) \neq 1$.

(iii) For alle $m, n \in \mathbb{N}$ gælder, at hvis $m \neq n$, er $S(m) \neq S(n)$.

(iv) **Induktionsaksiomet**: Lad A være en delmængde af de naturlige tal $\mathbb{N}$. Hvis $1 \in A$ og det for alle $m \in A$ gælder $S(m) \in A$, er $A = \mathbb{N}$.

Det fjerde aksiom er meget vigtigt. Det er det, der tillader os at lave induktionsbeviser! Vi beviser nu følgende meget vigtige sætning:

Sætning 2.2. ***(Sætningen om simpel induktion)*** *Lad $p(n)$ være et prædikat, hvor n løber over de naturlige tal. Antag at $p(1)$ er sand, og at $p(m)$ er sand medfører, at $p(m+1)$ er sand. Da er $p(n)$ sand for alle $n \in \mathbb{N}$.*

Bevis. Vi betragter mængden

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid p(n) \text{ er sand}\}$$

som blot er alle de naturlige tal, hvor påstanden p gælder. Da $p(1)$ er sand, er $1 \in A$. Idet $p(m)$ medfører $p(m+1)$, gælder det, at $m \in A$ medfører $S(m) \in A$. Mængden A opfylder induktionsaksiomet, så vi konkluderer, at $A = \mathbb{N}$. Prædikatet $p(n)$ er altså sand for alle naturlige tal n. ■

Induktion er et ekstremt stærkt værktøj i matematik og datalogi. Induktionsbeviser indgår derfor i alle matematiske discipliner, når man skal bevise f.eks. formler, hvor de naturlige tal indgår.

[1] Banach-Tarski paradokset er f.eks. interessant. Se https://en.wikipedia.org/wiki/Banach%E2%80%93Tarski_paradox og https://www.youtube.com/watch?v=s86-Z-CbaHA

2.3 Eksempler på anvendelse af induktion

Det er på tide med nogle eksempler. Tricket i alle eksemplerne er det samme. Vi har en påstand, hvor der indgår et naturligt tal. Vi viser, at påstanden holder for 1 (dette kaldes ofte induktionsstarten). Derefter antager vi, at påstanden holder for et natuligt tal m og viser, at så holder den også for $m+1$ (dette kaldes ofte induktionsskridtet). Og så er vi færdige per sætningen om simpel induktion.

Eksempel 2.3. En berømt matematisk fortælling omhandler en af de største matematikere nogensinde, Carl F. Gauss. Det siges, at Gauss' lærer engang bad ham om at lægge de første 100 naturlige tal sammen. Han skulle altså udregne $1+2+3+...+100$. Læreren var overbevist om, at lille Gauss ville være optaget i noget tid, men Gauss sagde svaret med det samme, nemlig 5050. Det formodes, at Gauss havde gennemskuet formlen for summen af de første n naturlige tal:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Men hvordan kan vi være sikre på, at denne formel holder for alle $n \in \mathbb{N}$? Vi beviser den ved induktion! Vores påstand er, at summen af de første n naturlige tal er lig $\frac{n(n+1)}{2}$. Vi viser, at formlen holder for 1:

$$\frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Og summen af det første naturlige tal er 1, så vores påstand gælder for 1. Antag nu, at formlen holder for et naturligt tal m. Vi skal vise, at den gælder for $m+1$. Vi vil udregne:

$$\sum_{i=1}^{m+1} i$$

Vi vælger at splitte summen op således:

$$\sum_{i=1}^{m+1} i = 1+2+3+...+m+(m+1) = \sum_{i=1}^{m} i + (m+1)$$

Vi har antaget, at vores påstand holder for m, så vi kan bruge formlen på summen op til m:

$$\sum_{i=1}^{m+1} i = \frac{m(m+1)}{2} + m + 1$$

Lad os prøve at omskrive udtrykket ovenover:

$$\frac{m(m+1)}{2} + m + 1 = \frac{m(m+1)}{2} + \frac{2(m+1)}{2} = \frac{m(m+1)+2(m+1)}{2} = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

Dette er blot vores formel med $m+1$ indsat i stedet for m! Dermed har vi vist, at hvis formlen holder for m, holder den også for $m+1$. Vi har altså vist begge betingelser i sætningen for simpel induktion. Vi konkluderer, at formlen holder for alle naturlige tal. Lad os til slut anvende formlen for sjov. Hvad er summen af de første 15 naturlige tal?

$$\sum_{i=1}^{15} i = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15 = 120$$

Og vores formel giver:

$$\frac{15(15+1)}{2} = \frac{15 \cdot 16}{2} = \frac{240}{2} = 120$$

Og hvad med de første 100 tal? Her nøjes vi med at bruge formlen:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{100(100+1)}{2} = \frac{100 \cdot 101}{2} = \frac{10100}{2} = 5050$$

Præcist som Gauss udregnede! Man kan lave alle mulige sjove formler for summen af de første n naturlige tal, der opfylder et eller andet. Se opgaverne. ∘

Eksempel 2.4. Du ved sikkert, at vinkelsummen i en trekant er 180°, mens den er 360° for en firkant. Måske ved du også, at den er 540° for en femkant. Kan du se et mønster? For en trekant er vinkelsummen $1 \cdot 180°$, for en firkant $2 \cdot 180°$ og for en femkant $3 \cdot 180°$. Hvad med en sekskant, syvkant eller 100-kant? Lad os vise, at vinkelsummen i en $(n+2)$-kant er $n \cdot 180°$:

1. Induktionsstart: For en trekant ($n = 1$) er vinkelsummen 180°, hvilket stemmer overens med formlen. Starten er da vist.
2. Induktionsskridtet: Antag for et $m \in \mathbb{N}$, at vinkelsummen i enhver $(m+2)$-kant er $m \cdot 180°$ grader. Betragt en $(m+3)$-kant. Vi kan tegne en passende diagonal mellem to kanter, så figuren bliver opdelt i en $(m+2)$-kant og en trekant (tegn dette!). Vi ved, at vores formel holder for alle $(m+2)$-kanter per vores antagelse. Vinkelsummen af denne $(m+2)$-kant er $m \cdot 180°$, og vinkelsummen i en trekant er jo 180°, så vinkelsummen i vores $(m+3)$-kant må være $m \cdot 180° + 180° = (m+1) \cdot 180°$. Men dette er jo bare vores formel for m erstattet med $m+1$, så formlen holder også for $m+1$!

Per sætningen om simpel induktion er vinkelsummen for en vilkårlig $(n+2)$-kant altså $n \cdot 180°$. ∘

Som det sidste i dette afsnit vil vi genkalde os Eulers sætning for, hvornår der findes en lukket Eulertur i en graf. Vi er nu i stand til at bevise sætningen!

Sætning 2.5. *Lad G være en sammenhængende graf. Da har G en lukket Euler-tur hvis og kun hvis alle knuder har lige valens.*

Bevis. Antag først, at G har en lukket Euler-tur. For enhver knude i grafen, går der en kant ind og en kant ud. Også for den første knude, idet vi skal slutte samme sted, som vi starter. Derfor må alle knuder have lige valens.

Antag nu, at alle knuder har lige valens. Vi benytter induktion efter antallet af knuder i grafen, n. Induktionsstarten overlades som øvelse til læseren (se opgaverne). I induktionsskridtet kan vi antage, at sætningen gælder for alle grafer med færre end eller lig $m \geq 3$ kanter, hvori alle knuder har lige valens. Lad G have $m+1$ kanter, og antag at alle knuder i G har lige valens. Vælg en vilkårlig knude u i grafen og bestem en lukket tur, der starter og slutter i u. Det er muligt at lave sådan en tur, idet alle knuder har lige valens. Når vi når til en given knude, kan vi altid bevæge os videre langs en anden kant, undtagen hvis vi havner tilbage ved u, og da er vi færdige. Vi vil altid komme tilbage til u, idet grafen har endeligt mange knuder.

Tag alle knuder og kanter, der indgår i denne tur, og fjern dem fra grafen. Det er muligt, at grafen ikke længere er sammenhængende, men de resterende dele må være sammenhængende og have færre end eller lig m knuder. Per induktionsantagelsen har disse del-grafer alle en lukket Euler-tur. Nu konstruerer vi en lukket Euler-tur i G ved at starte i u og bevæge os langs vores oprindelige tur, indtil vi når en knude i én af del-graferne. Da bevæger vi os videre langs dennes Euler-tur og tilbage på vores oprindelige tur. Gentag, indtil vi når u. Da har vi lavet en Euler-tur i G, og beviset er færdigt. ■

Bemærkning 2.6. Vi har faktisk ikke anvendt sætningen om simpel induktion i ovenstående bevis. Vi har i stedet anvendt *fuldstændig* induktion. Fuldstændig induktion er, når man i induktionsskridtet antager, at påstanden gælder for alle naturlige tal mindre end eller lig m i stedet for blot m. Princippet om fuldstændig induktion kan vises ud fra princippet om simpel induktion. Jeg går ikke i mere detalje her, men jeg refererer til [3].

2.4 Opgaver

• **Opgave 2.1:**

Hvad er summen af de første n naturlige lige tal? Med andre ord, find et udtryk for

$$\sum_{i=1}^{n} 2i$$

når $n \in \mathbb{N}$ [Vink: brug eksempel 2.3. Er det nødvendigt at bruge induktion?].

•• **Opgave 2.2:**

Brug induktion til at vise, at 4 går op i $5^n - 1$ for alle $n \in \mathbb{N}$ [Vink: $5 = 4 + 1$].

•• **Opgave 2.3:**

1)Opskriv summen af de første hhv. 2, 3, 4 og 5 ulige naturlige tal. Med andre ord, udregn

$$\sum_{i=1}^{n} (2i - 1)$$

for $n = 2, 3, 4$ og 5.

2)Er der et mønster i summerne fra før? Gæt på en formel for summen af de første n ulige naturlige tal.

3)Bevis din formel med induktion. Udregn derefter summen af de første 10000 ulige naturlige tal [Vink: brug kvadratsætningen $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$].

•• **Opgave 2.4:**
Bevis induktionsstarten i sætning 2.5, altså vis, at for alle grafer med 1 og 2 knuder, hvor knuderne har lige valens, findes en lukket Eulertur.

•• **Opgave 2.5:**

Lad $n, m \in \mathbb{N}$ med $n \leq m$.

1)Hvad er summen af alle naturlige tal mellem 5 og 10? Mellem 8 og 30? Med andre ord, udregn:

$$\sum_{i=5}^{10} i, \quad \sum_{i=8}^{30} i$$

2)Find en generel formel, der giver summen af alle naturlige tal mellem n og m [Vink: induktion er ikke vejen frem. Brug eksempel 2.3].

3)(Kræver programmering) Skriv et program, der på to forskellige måder kan finde summen af alle naturlige tal mellem n og m. n og m skal være input i programmet.

4)Brug din formel og dit program til at udregne summen af alle naturlige tal mellem 467 og 1220. Gentag for 250 og 80000.

•• **Opgave 2.6:**
Bevis

$$\sum_{i=1}^{n} (3i - 1) = \frac{n(3n + 1)}{2}$$

Ved at bruge induktion [Vink: udregn $(n+1)(3(n+1)+1)$ og anvend denne udregning i induktionsskridtet].

•• **Opgave 2.7:**
Bevis

$$\sum_{i=1}^{n}(4i-3) = n(2n-1)$$

ved at bruge induktion [Vink: gentag strategien fra forrige opgave].

••• **Opgave 2.8:**

Brug induktion til at vise, at 6 går op i $n^3 - n$ for alle $n \in \mathbb{N}$ [Vink: brug kubiksætningen $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$].

••• **Opgave 2.9:**

Der er et berømt "bevis"for, at alle heste har samme farve. Beviset føres ved induktion over antallet af heste n. Induktionsstarten er triviel (åbenlys). Hvis $n = 1$ har den ene hest naturligvis samme farve som sig selv. Antag nu, at alle grupper med n heste har samme farve og betragt en gruppe med $n+1$ heste. Udtag en hest H_1 fra gruppen. De resterende n heste har samme farve. Læg H_1 tilbage i gruppen og udtag en anden hest H_2. De resterende heste (herunder H_1) har da samme farve, og H_2 havde også denne farve til at starte med. Altså har de $m+1$ heste samme farve. Ved princippet om simpel induktion, kan vi konkludere (idet der kun findes endeligt mange heste i verden), at alle heste har samme farve.

Sund fornuft fortæller os, at der er noget galt i dette såkaldte bevis. Hvor går det galt? [Vink: induktionsskridtet skal gælde for et vilkårligt $m \in \mathbb{N}$].

3 Djikstra's algoritme

Nu kan vi vende tilbage til Djikstra's algoritme. Første trin er at omskrive algoritmen, som den er givet i kompendiet, til en mere kompakt form. Dette inkluderer en del ny notation, som vi vil vænne os til, før vi fortsætter. Herefter er vi klar til at bevise, at algoritmen altid giver den korteste vej i en vægtet graf med positive vægte.

3.1 Djikstra's algoritme i kompakt form

Vi kan med fordel anvende mængdebegrebet til at forstå Djikstra's algoritme på en ny måde. En graf G er blot et par af to endelige mængder, nemlig en mængde af knuder V (efter det engelske ord ”vertices”, der betyder ”knuder”) og en mængde af kanter E (efter det engelske ord ”edges”, der betyder ”kanter”). Vi betragter nu en vægtet graf G, hvor alle kanter har ikke-negativ vægt. Målet i første omgang er at skrive Djikstra's algoritme med såkaldt *pseudokode*. Pseudokode er en fiks måde at skrive et program op på meget kompakt form. Pseudokode er ikke rigtig kode, da en computer ikke kan bruge den til noget, men den hjælper programmøren med at få et overblik over de forskellige trin i algoritmen.

Eksempel 3.1. Jeg har lyst til at skrive et program, der opskriver de første n naturlige tal. Pseudokoden kan se sådan ud:

```
OpskrivTal(heltal n) {
Tjek: n >= 1
Lad i = 1
Mens (i <= n)
    Skriv i
    i = i + 1
}
```

OpskrivTal er navnet på funktionen, og paranteserne med ”heltal n”bagefter angiver inputtet. I vores tilfælde skal funktionen bruge et heltal, som vi kalder n. Første linje i programmet tjekker, at $n \geq 1$, da programmet ellers ikke giver mening. Vi definerer nu en ny variabel i, som vi sætter til 1. ”Mens-udtrykket er en såkaldt *løkke*, altså noget kode, der kører, så længe en betingelse er opfyldt. I vores tilfælde er betingelsen, at $i \leq n$. Prøv at køre algoritmen med papir og blyant for f.eks. $n = 8$. ◦

For at kunne skrive Djikstra's algoritme med pseudokode, skal vi have styr på notationen:

- Startknuden for algoritmen betegner vi med s.
- $d(x)$ betegner afstanden fra s til knuden x, som Djikstra's algoritme giver.
- $\delta(x)$ (δ er det græske bogstav ”lille delta”) betegner den korteste vej fra s til knuden x. Hvis der ikke findes en vej fra s til x, definerer vi $\delta(x) = \infty$.
- Hvis u, v er naboknuder, er $l(u, v)$ længden af kanten fra u til v (husk, at vi kan antage, at G er en simpel graf).
- Mængden af knuder, vi har besøgt i grafen (bortset fra s), betegner vi som S.

Du har nok bemærket, at vi har skiftet notationen en smule fra den i kompendiet. I kompendiet brugte vi store bogstaver fra A til Z til at betegne knuder. Nu bruger vi bl.a. u, v, x og y. Den sidste notation er mere typisk i datalogibøger. En anden vigtig ting er brugen af ordet ”vej”. Her refererer ”vej”til en rute (så der kan godt være gentagne knuder eller kanter i en vej). Man har bare traditionen i datalogi for at bruge ordet ”path”, som kan oversættes til ”vej”. Lad os nu gennemgå Djikstra's algoritme. Først vælges startknuden s, og vi sætter afstanden fra s til alle andre knuder til uendelig. Derefter vælger vi (så længe det er muligt) den ubesøgte knude u, der har kortest afstand til s. Tilføj u til S.

Udregn $d(v)$, hvor v er en vilkårlig naboknude til u. Hvis $d(v)$ er skarpt større end $d(u)+l(u,v)$, må vejen til v gennem u og kanten fra u til v være en kortere vej, så vi lader $d(v)=d(u)+l(u,v)$. Gentag udregningen for alle naboknuder til u og vælg den næste knude med kortest afstand til s og gentag processen, indtil vi har besøgt alle knuder. Læs eventuelt algoritmen i kompendiet igen og overbevis dig selv om, at der foregår det samme. Lad os omskrive dette til pseudokode:

```
Djikstra(G, s)
Lad d(s) = 0
For alle u i V, u =/= s, lad d(u) = uendelig
Lad S = {}
Mens S =/= V
    Vaelg u ej i S med mindste d(u)
    Tilfoj u til S
    For alle naboknuder v til u
        hvis d(v) > d(u) + l(u,v)
            lad d(v) = d(u) + l(u,v)
```

Læs pseudokoden, indtil den giver mening for dig. Den bliver vigtig i beviset for korrektheden af Djikstra's algoritme i næste afsnit.

3.2 Hvorfor algoritmen virker

Vi er endelig klar til at bevise Djikstra's algoritme. Først et hjælperesultat:

Lemma 3.2. *Lad G være en vægtet graf, hvor alle vægte er ikke-negative. Lad u og v være to knuder i G. Hvis der findes en vej fra u til v, findes også en korteste vej, R, fra u til v. Hvis x er en knude i R mellem u og v, vil delvejen af R, som starter i u og slutter i x, være den korteste vej fra u til x. Med andre ord: korteste veje er opbygget af korteste veje.*

Bevis. Beviset er opgave 1.4.6 i kompendiet. Har du ikke lavet denne opgave, så er den også stillet efter dette afsnit. ■

Sætning 3.3. *Lad G være en vægtet graf, hvor alle vægte er ikke-negative. Lad en startknude s være givet. Da giver Djikstra's algoritme altid den korteste vej mellem s og alle andre knuder i grafen.*

Bevis. Husk, at S betegner mængden af alle besøgte knuder i grafen G. Vi lader $|S|$ betegne antal elementer i S. Vi viser, at Djikstra's algoritme altid giver den korteste vej fra s til alle besøgte knuder. Idet alle knuder i G besøges på et tidspunkt, vil vi da have bevist sætningen. Vi fører beviset med induktion på $|S|$.

1. Induktionsstarten: Lad $|S|=1$. Det eneste tidspunkt, hvor $|S|=1$, er idet startknuden s tilføjes til S. Da har vi $d(s)=0=\delta(s)$, så Djikstra's algoritme giver længden af den korteste vej i dette tilfælde.

2. Induktionsskridtet: Dette er den svære del af beviset. Lad $|S|=n+1$ for et $n\in\mathbb{N}$. Lad u betegne den sidste knude, der tilføjes til S. Vi lader S' være mængden S foruden u. Da er $|S'|=n$, så per induktionsantagelsen giver Djikstra's algoritme længden af den korteste vej for alle knuder i S'. Vi mangler altså kun at vise, at $d(u)=\delta(u)$ for at være færdige. Vi har nu to tilfælde. Enten findes en vej fra s til u, eller også gør der ikke. Det overlades som øvelse til læseren at vise, at hvis der ikke findes en vej fra s til u, så giver Djikstra's algoritme længden af "den korteste vej".

   Antag nu, at der findes en vej fra s til u, da findes også en korteste vej per vores lemma. Kald denne korteste vej R og lad $l(R)$ betegne længden af R. Vi viser denne del af beviset ved et såkaldt *modstridsbevis*. Vi antager, at det ønskede ikke gælder og viser, at dette fører til en modstrid (eller på godt dansk: noget nonsens). Vi antager, at:

$$l(R) < d(u) \tag{1}$$

Vejen R starter i S' og forlader på et tidspunkt S' for at nå til u (idet $u \notin S'$). Mere præcist må vejen R gå gennem en knude $x \in S'$, som har en kant til en anden knude $y \notin S'$. Lad R_x være den del af vejen R, som slutter i x. Da gælder:

$$l(R_x) + l(x,y) \leq l(R) \tag{2}$$

Vores induktionsantagelse kombineret med lemmaet giver $d(x) = \delta(x) \leq l(R_x)$. Vi indsætter dette i (2) og får:

$$d(x) + l(x,y) \leq l(R) \tag{3}$$

y er naboknude til x, så da vi nåede til x i Djikstra's algoritme, er $d(y)$ blevet opdateret af algoritmen. Med andre ord har vi:

$$d(y) \leq d(x) + l(x,y) \tag{4}$$

Læs evt. linje 8-10 i pseudokoden med $u = x$ og $v = y$. u er blevet valgt af algoritmen (husk, at $u \in S$), så u må have kortest afstand:

$$d(u) \leq d(y) \tag{5}$$

Vi kan nu udlede vores modstrid. Lad os samle ulighederne i rækkefølgen (5), (4), (3), (1):

$$d(u) \leq d(y) \leq d(x) + l(x,y) \leq l(R) < d(u)$$

Kigger vi igennem ulighederne, ser vi, at $d(u) < d(u)$. Men et tal kan aldrig være skarpt mindre end sig selv! Antagelsen om, at der findes en vej, der er kortere end $d(u)$, må da være forkert. Med andre ord må $d(u) = \delta(u)$ som ønsket.

■

Bemærkning 3.4. For at vise en del af sætningen, brugte vi et modstridsbevis. Modstridsbeviser er en meget typisk måde at føre beviser på i matematik.

3.3 Opgaver

• **Opgave 3.1:**
Læs beviset for sætning 3.3 igen. Hvorfra i pseudokoden kan vi udlede ligning (5), $d(u) \leq d(y)$?

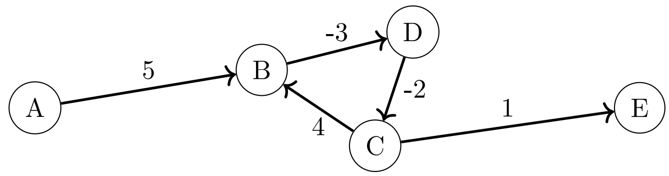
• **Opgave 3.2:**
Se på beviset for sætning 3.3. Hvis der ikke findes en vej fra s til u, vis da, at Djikstra's algoritme giver den korrekte afstand fra s til u.

•• **Opgave 3.3:**
Bevis lemma 3.2.

•• **Opgave 3.4:**
Lad G være en vægtet graf med ikke-negative vægte. Vis, at Djikstra's algoritme faktisk besøger alle knuder i G. Bemærk, at vi benyttede dette i beviset for sætning 3.3. Hvor?

••• **Opgave 3.5:**
I denne opgave skal vi overveje, hvad der sker, hvis vi forsøger at anvende Djikstra's algoritme på en graf med negative vægte.

1)Prøv at anvende Djikstra's algoritme på følgende graf, hvor A er startknuden:



Figur 1: En vægtet graf med negative vægte.

2)Forklar, hvad der går galt i forrige delopgave. Hvad er længden af den korteste vej fra A til B, C, D og E, og hvad er længderne ifølge Djikstra's algoritme?

4 Konklusion

Hvad så nu? Næste trin er selvfølgelig at implementere algoritmen i et programmeringssprog. Dette kræver dog en del flere teknikker inden for programmering, end I har lært på campen. Ikke desto mindre er Djikstra's algoritme et sjovt programmeringsprojekt, når teknikkerne er på plads. Jeg kan afsløre, at der findes rigtig mange måder at implementere algoritmen. Personligt kan jeg f.eks. godt lide denne implementation, da den er simpel og overskuelig. Er du nysgerrig på at vide mere om, hvordan matematik er som fag, giver [3] en god introduktion til mange områder af diskret matematik, som grafteori er en del af.

Sidst skal nævnes, at løsninger til opgaverne kan findes på min GitHub her.

5 Litteraturliste

Til matematikdelen af denne note refererer jeg til Jesper Lützens bog "Diskrete Matematiske Metoder". Ønsker du at blive bedre til programmering i Python (sproget vi brugte på campen), kan jeg stærkt anbefale bogen "Python for Informatics"af Charles Severance, se [4]. Vil du allerede nu springe ud i noget gymnasie-stof, findes en del bøger på biblioteket, der dækker matematik på A-niveau. Er du interesseret i matematik på universitetsniveau, se da [1]. Til noterne i matematisk analyse vil jeg stærkt anbefale at få styr på gymnasiestoffet først. Til sidstnævnte kan jeg også anbefale Khan Academy, som jeg selv har haft stor glæde af gennem gymnasiet, se [2]. Af YouTube-kanaler kan jeg bl.a. anbefale 3Blue1Brown, Numberphile og Vsauce.

[1] Imfs matematiknoter, 2019. URL `http://web.math.ku.dk/noter/filer/matematik.htm`.

[2] Salman Khan et al. Khan academy, 2019. URL `https://www.khanacademy.org/signup`.

[3] Jesper Lützen. *Diskrete Matematiske Metoder*. Københavns Universitet, 2 edition, 2019.

[4] Charles Severance. *Python for Informatics - Exploring Information*. 0.0.7 edition, 2013. URL `https://www.pythonlearn.com/book_007.pdf`.