UNF Masterclass 2019

UNF København og UNF Lyngby

Fagligt kompendium

Fagligt team:

Knut Ibæk Topp Lindenhoff	knut@unf.dk
Freja Elbro	fel@unf.dk
Claudia Charlott Lassen	ccl@unf.dk
Morten Raahauge Bastholm	mrb@unf.dk
Robert Garbrecht Larsen	roe@unf.dk
Jacob Mejlsted	jme@unf.dk
Rasmus Frigaard Lemvig	rle@unf.dk

Ungdommens Naturvidenskablige Forening

Kompendium til UNF Masterclass 2019

Masterclass er sponsoreret af UNF København og UNF Lyngby.

Dette kompendium er skrevet af Knut Ibæk Topp Lindenhoff, Freja Elbro, Claudia Charlott Lassen, Morten Raahauge Bastholm, Robert Garbrecht Larsen, Jacob Mejlsted og Rasmus Frigaard Lemvig. Kompendiet er tryk i 2019.

Billederne på forsiden (fra øverste venstre hjørne) er fra hhv. egen produktion, Orbit B htx [6], egen produktion og Zoologisk morfologi[3].

Indhold

Introduktion

Velkommen til det faglige kompendium! Kompendiet er bygget op af fire kapitler, som dækker de fire forløb, der er på campen. Materialet er lavet af de faglige teams for hvert område, og hvert afsnit dækker den viden, du skal bruge for at kunne lave de øvelser, der er på programmet. Selve vejledningerne til forsøgene er også i kompendiet. Alle os faglige ønsker jer held og lykke med campen!

Kapitel 1

Matematik

1.1 Hvad er matematik?

Hvis jeg skal beskrive matematik, vil jeg fremhæve tre ting:

- matematikere prøver at finde mønstre
- matematikere vil kommunikere præcist
- matematikere vil være helt sikre

1.1.1 At finde mønstre

En af de mest kendte matematikere, Gauss, blev engang bedt om at summe alle tallene fra 1 til 100. Hans lærer troede at det ville holde Gauss beskæftiget et godt stykke tid, men Gauss var doven, så i stedet for at summe alle tallene, ledte han efter et system, så han kunne blive hurtigere færdig. Han fandt ud af at man kan parre tallene to og to: 1+100, 2+99, 3+98 osv., så summen hele tiden bliver 101. Der er 100 tal i alt, så der bliver 50 par. Hver af dem er 101 stort, så summen bliver $101 \cdot 50 = 5050$.

Faktisk kunne Gauss gøre det endnu bedre. Han kunne ikke bare summe de første 100 tal, men han kunne også finde summen af de første 1000 tal eller de første 250 tal. Lad os sige vi gerne vil summe alle tallene fra 1 op til n. Så fandt Gauss en formel for summen

$$1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Så hvis nogen i fremtiden bad han løse en lignende opgave, behøvede han ikke engang at gå gennem skridtene beskrevet ovenfor.

Det er meget klassisk matematiker-agtigt. De fleste matematikere bryder sig ikke om repeditive opgaver. De vil meget hellere prøve at finde et system. Både for at få opgaven hurtigere overstået, men også fordi det er sjovere. Således er mange matematikere faktisk rigtigt dårlige til hovedregning!

1.1.2 Præcis kommunikation

Gennem tiden har matematikere udviklet deres eget sprog, som kan bruges til at kommunikere enormt meget information enormt hurtigt. Fx kan jeg sige til Holger:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Hvis Holger skal læse dette højt med almindeligt sprog, ville han sige noget alla: "for at finde summen af de første n positive hele tal, skal du tage n, gange det med n plus 1 og dividere resultatet med 2".

En stor del af at lære matematik består i at lære sproget. Det kan godt være kedeligt til tider, da det svarer lidt til at øve tyske verber, men det er et enormt effektivt sprog, så det er tiden værd!

1.1.3 At være helt sikker

Matematikere vil gerne vær helt sikre inden de udtaler sig endeligt. For at blive sikre, laver de beviser.

Det er bemærkelsesværdigt at viden i matematik er så langlivet. Den gang fysikerne gik rundt og diskuterede om alting var lavet af fire elementer: vand, ild, jord og luft, lavede matematikerne allerede andengradsligninger på en måde, som vi stadig accepterer som rigtigt. På den måde kan vi tænke på matematik som en 5000 år gammel videnskab med resultater der bygger ovenpå hinanden lige siden babylonerne. Det er både det bedste og det værste ved matematik. Det bedste er at der er så meget at lære, og så sindsygt vilde indsigter at man kan være høj en helt uge efter at have lært det. Det værste er at der er så sindsygt meget at indhente, før man når frem til et sted hvor man kan bidrage med ny viden til matematik. Langt de fleste studier på universitetet kræver at man bidrager med noget nyt til sit felt i specialet efter 5 års studier. På matematik er der ikke sådan et krav. Det er svært nok bare at komme frem til fronten af hvad vi ved i matematik. Så hvis du undervejs i dine studier ikke synes at du får lov selv at finde mønstre i matematikundervisningen og selv at argumentere for hvorfor det er rigtigt, så tager du nok ikke fejl. Du har 5000 års viden at indhente, og det er ineffektivt hvis du selv skal finde på det hele. Derfor er matematikundervisning nogle gange lidt rutinepræget. Du skal lære nogle metoder, og den bedste måde at lære det på er at øve sig.

I undervisningen her har vi heldigvis lidt bedre tid, så jeg håber at kunne præsentere jer for et bredt udsnit af hvad matematik kan være. Så vi både opdager systemer, lærer at kommunikere dem klart og bliver helt overbeviste om at det vi laver er rigtigt.

1.2 Introduktion

I dette forløb skal vi undersøge hvor lang tid en kugle, som kastes op i luften, bliver i luften, før den rammer jorden.

Afhængigt af din klasse og din lærer der hjemme, kommer du nok til at opleve denne undervisning som ret anderledes end noget du har prøvet før.

1. Du kommer til at opleve at mere af tankevirksomheden er overladt til dig. Du kommer sandsynligvis til at blive frustreret minimum én gang i dette kursus, fordi du sidder fast og ikke ved hvad du skal gøre. Tag dette som en gave, fordi det giver dig mulighed for at være kreativ. Vær ikke bange for at lave fejl, og vær ikke bange for at prøve forskellige ting af. Og hvis det ikke virker, så spørg endelig. Vi er voldsomt mange undervisere, og hvis ikke vi bliver spurgt om noget, kommer vi til at kede os.

2. I enhver klasse vil der altid være nogle som hurtigt fanger idéen, og nogle det tager lidt længere tid for. I din egen klasse er du sandsynligvis én af dem, det går hurtigst for. Da I jo ikke alle kan være den der ser mønsteret hurtigst, vil størstedelen af jer opleve at hænge bagefter fra tid til anden her. Endnu værre, minimum én af jer vil opleve at være den sidste der forstår en idé. Det er hårdt at hænge bagefter, men giv ikke op! Forsøg at se det som en oplevelse og en udfordring. Du kommer til at få bedre forståelse for dem derhjemme der hele tiden hænger bagefter, og hvis du ikke giver op undervejs, bliver du sandsynligvis én af dem der gør allerstørst fremskridt på denne weekend. Så giv ikke op, og husk at stille mange spørgsmål! Alt hvad jeg fortæller skal bruges senere hen i forløbet, så det er vigtigt at du spørger så snart noget er uklart.

   På den anden side, hvis du er den der fanger pointen hurtigst, så prøv at give lidt plads til de andre. Det er mega sjovt at få idéen. Det er ikke særligt sjovt at få idéen forklaret. Hver opgavesektion er "lukket" i den forstand at I alle bør blive udfordret. Opgaverne bliver sværere og sværere. Så hvis en opgave er for nem, så spring den over, og se længere ned af listen. Der er formentligt noget som udfordrer dig. Ellers spørg. Så skal vi nok finde på noget.

3. I modsætning til jeres lærer, har jeg kun meget lidt viden om hvad I ved og ikke ved. Derfor vil jeg fra tid til anden spørge: "Giver det mening?". Det er et reelt spørgsmål, som jeg ikke kender svaret på. Jeg har brug for at I alle nikker eller ryster på hovedet som svar (hvis du har brug for lidt tid til at overveje det jeg lige har sagt, så ryst på hovedet). Og jeg har brug for at I hjælper mig med at finde ud af hvad I mangler. Dvs. at jeg har brug for at I tør sige at noget er svært foran de andre. Også

selvom nogle af de andre har forstået det! Det bliver meget ineffektivt, hvis jeg skal forsøge at gætte hvad I synes er svært!

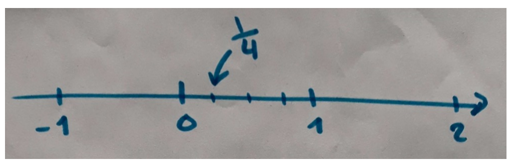
4. Bogens formål er at I har noget at kigge i når I kommer hjem. Derfor står mange af svarene skrevet. Så hvis du ikke vil have spoilers så luk bogen mens jeg fortæller og lad være med at læse forud. Husk det er sjovt at komme på idéen. Det er ikke så sjovt at læse den højt fra bogen.

1.3 Nødvendig teknik

Før vi for alvor går igang, er vi nødt til at være enig om nogle regneregler.

1.3.1 Brøkregneregler

Først: Hvad er en brøk overhovedet? Hvad betyder brøken $\frac{1}{4}$? Nogen af jer vil måske tænke: Det er et tal! Det er tallet som ligger lige her på tallinjen:



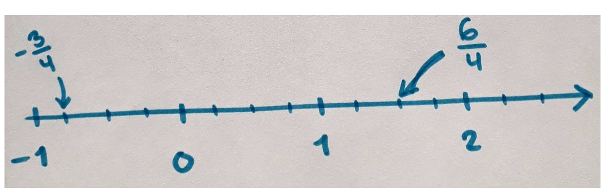
Andre af jer vil måske tænke: Det er en fjerdedel af noget. Fx en lagkage:

Atter andre vil måske tænke: Det er et regnestykke som venter på at blive udført

$$\frac{1}{4} = 1 : 4 = 0,25$$

I har alle sammen ret. Vi kan tænke på brøker på mange måder. Hvis I tænker på brøken som en fjerdedel af noget, så vær gode at tænke på den som en fjerdedel af 1 i dette kursus. Så bliver vi alle enige om hvilket tal vi tænker på.

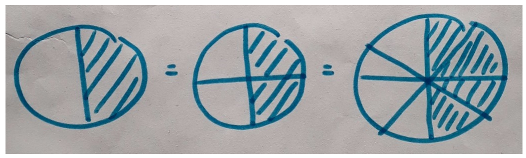
Brøker behøver ikke ligge mellem 0 og 1. De kan også være mindre end nul eller større end 1.



Brøker kan skrives på flere forskellige måder. Fx er

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{10}{20} = ...$$

Hvilket vi fx kan illustrere med lagkager



Generelt kan vi matematikere bedst lide små tal, så hvis vi skal vælge hvordan vi vil skrive ovenstående brøk, vil vi altid vælge $\frac{1}{2}$.
Kan vi regne med brøkerne? Vi tager eksemplerne

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{5}{7}$$

$$\frac{4}{11} + \frac{9}{11} = \frac{13}{11}$$

Generelt gælder der at, hvis jeg skal lægge to brøker sammen med samme nævner, så skal jeg bare lægge tællerne sammen og beholde nævneren. Eller sagt med tegn:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

hvorfor pludselig disse bogstaver? Du troede måske bogstaver hørte til dansk og du kunne blive fri for dem i matematik? Sådan går det ikke. Jo længere du kommer i din uddannelse jo *flere* bogstaver bliver der i matematik! Hvorfor? Der er minimum tre grunde

1. Matematikere er dovne! Hvis de først har set et mønster i nogle opgaver (alla dem ovenfor), så gider de ikke lave alle opgaverne. De vil langt hellere sige én gang for alle hvordan man løser dem.

2. Det er mere effektiv at skrive

   $$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

   end at skrive "hvis jeg skal lægge to brøker sammen med samme nævner, så skal jeg bare lægge tællerne sammen og beholde nævneren"

3. Nogle gange skal vi arbejde med brøker, hvor vi ikke kender tælleren eller nævneren. Så har vi brug for regler for hvad vi må gøre.

Som et eksempel på tre'eren ovenfor, så tag et stykke papir og noget at skrive med og skriv følgende udregninger ned:

1. Vælg et lige tal mellem 0 og 10, og skriv det på papiret.
2. Læg to til dit tal.
3. Divider resultatet fra før med to.
4. Træk et fra resultatet.
5. Gang resultatet med 2.
6. Træk det originale tal fra.

Hvis du har regnet rigtigt, bør du ende med at få resultatet 0.

Hvordan kunne jeg vide det? Fordi jeg har udført udregningen med alle lige tal! Jeps dem alle sammen. Alle uendeligt mange lige tal. Og uanset hvilket et du starter med, så vil du ende med nul. Jeg bad dig bare vælge et lille tal, så det var nemt at regne med.

Jeg gør det ved at lave udregningerne med symbolet x, hvor x symboliserer det tal du tænker på, men som jeg ikke kender. Undervejs bruger jeg den regel vi snakkede om før:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

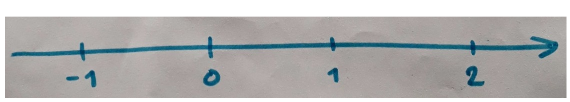
Se om du kan spotte hvor.

1. Vælg et lige tal: x
2. Læg to til dit tal: $x + 2$
3. Divider resultatet fra før med to: $\frac{x+2}{2} = \frac{x}{2} + \frac{2}{2} = \frac{x}{2} + 1$
4. Træk et fra resultatet: $\frac{x}{2} + 1 - 1 = \frac{x}{2}$
5. Gang resultatet med 2: $2 \cdot \frac{x}{2} = x$
6. Træk det originale tal fra: $x - x = 0$

Opgaver

Opgave 1. Hvor på tallinjen bor følgende brøker?

$$\frac{1}{3} \quad \frac{8}{4} \quad \frac{0}{10} \quad -\frac{14}{7}$$



Opgave 2. Find fire forskellige måder at skrive brøken $\frac{2}{6}$ på. Hvilken måde tror du matematikerne bedst kan lide?

Hvordan ganger man en brøk med et helt tal?

Vi ved hvordan man ganger to hele tal med hinanden. Fx. er

$$3 \cdot 2 = 6$$

Vi kan tænke på det som spørgsmålet: Hvor mange æbler har jeg, hvis jeg har tre kasser æbler med to æbler i hver kasse? Så har jeg

$$2 + 2 + 2 = 6$$

æbler.
Ligeledes kan vi gange brøker med tal, så fx $3 \cdot \frac{1}{2}$ er det antal æbler jeg ville have, hvis jeg havde tre kasser med et halvt æble i hver. I dette tilfælde ville jeg have

$$3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+1+1}{2} = \frac{3}{2}$$

æbler. (Bemærk at jeg ikke er fan af at skrive $1\frac{1}{2}$, da det kan mistolkes som $1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, som er noget andet)
Ligeledes er $4 \cdot \frac{1}{2}$ lig med $\frac{1}{2}$ lagt sammen med sig selv fire gange:

$$4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+1+1+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Opgave 3. Udregn følgende

- $2 \cdot \frac{1}{3}$
- $2 \cdot \frac{2}{3}$
- $5 \cdot \frac{2}{3}$

Opgave 4. Så du et mønster i den forrige opgave? Kan du beskrive mønsteret med bogstaver? Måske kan du blive inspireret af én af de følgende?

- $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$

- $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{b}{ac}$
- $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{bc}$

Opgave 5. Hvilken af følgende er en gyldig regneregel?

- $\frac{ab}{b} = a$
- $\frac{a+b}{b} = a$

Test eventuelt ved at sætte tal ind på a's og b's pladser, hvis du er i tvivl.

> *x^2 betyder $x \cdot x$ (x ganget med sig selv).*
>
> Så fx er $2^2 = 4$, $3^2 = 9$ og $1^2 = 1$. Husk at minus gange minus giver plus, så
> $$(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4$$

Opgave 6. Simplificer følgende udtryk ved at bruge de regler du har lært.

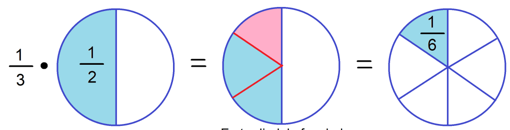
Bemærk at jeg har givet de ubekendte nye navne. Nogle gange har vi lyst til at bruge andre bogstaver end a, b og c. Andre bogstaver kan også stå for ukendte tal. Fx står t tit for tid og v tit for hastighed (hastighed hedder velocity på engelsk).

- $\frac{M \cdot \frac{1}{M} + 3}{2}$
- $\frac{-5v^2}{v}$
- $\frac{t^2+t}{t}$

Når du kommer hertil, så marker til Freja at du er klar til at gå videre. Resten af opgaverne er nice to do. Ikke need to do.

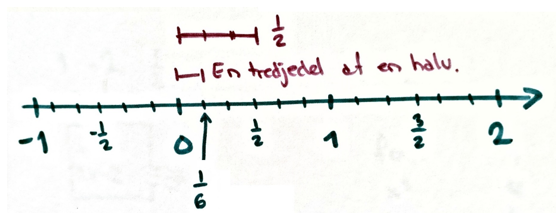
Hvordan ganger man en brøk med en brøk?

Vi kan tænke på $3 \cdot \frac{1}{2}$ som "3 halve lagkager", som vi kan udregne til at blive $\frac{3}{2}$.
På samme måde kan vi tænke på $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$ som "en tredjedel af en halv lagkage".

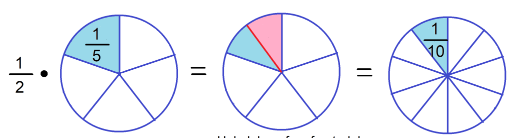


En tredjedel af en halv

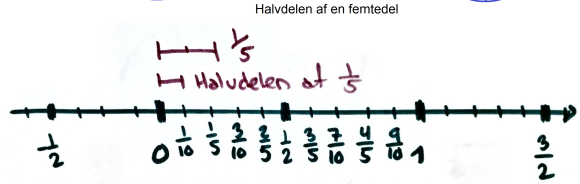
Vi ser at en tredjedel af en halv lagkage er $\frac{1}{6}$ lagkage, så $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$ er altså $\frac{1}{6}$
Hvis du bedre kan lide tallinjen, er der her et billede som siger det samme:



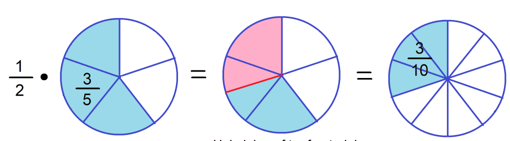
Hvad er så $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}$? Det er simpelthen halvdelen af en femtedel



Halvdelen af en femtedel



Som er $\frac{1}{10}$.
Hvad nu hvis vi ganger en brøk med nogen der ikke har 1 i tælleren? Som fx $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}$? Så gør vi præcis det samme som før.



Halvdelen af tre femtedele

Opgave 7. Udregn følgende

- $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$
- $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$
- $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$
- $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$

Opgave 8. Så du et mønster i den forrige opgave? Kan du beskrive mønsteret med bogstaver?

Opgave 9. Er følgende en gyldig regneregel?

$$\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$$

Prøv med tal, hvis du er i tvivl. Bemærk at du her skal summe brøker med *forskellige* nævnere. Hvis du ikke kender regnereglen, så prøv at bruge det du ved. Tegn en lagkage eller et tal på tallinjen for hver brøk, og se om reglen stemmer.

1.3.2 Regning med paranteser

Som udagnspunkt vil man altid gange før man lægger sammen, så

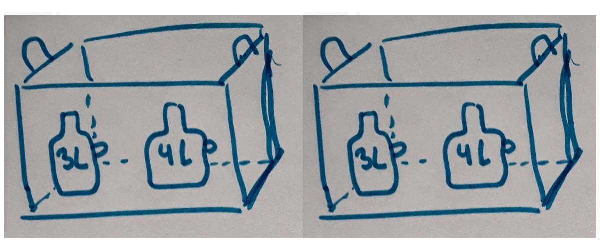
$$2 \cdot 3 + 4 = 6 + 4 = 10$$

og ikke

$$2 \cdot 3 + 4 = 2 \cdot 7 = 14$$

Du kan næsten se det på måden mit skriveprogram sætter tegnene op på. Der er mere luft mellem 3 og 4 end mellem 2 og 3, hvilket indikerer at programmet på en måde synes at 2 og 3 hører tættere samen end 3 og 4. Hvis du ikke tager mit skriveprograms holdninger for gode ord, kan du tænke på $2 \cdot 3 + 4$ som “to flasker med 3 liter i og en ekstra flaske med 4 liter i” Dvs. i alt plads til 10 liter vand.

Det andet ville svare til “Jeg har to kasser. I hver af dem har jeg en treliters flaske og en firliters flaske. Hvor mange liter vand har jeg plads til i alt?”.

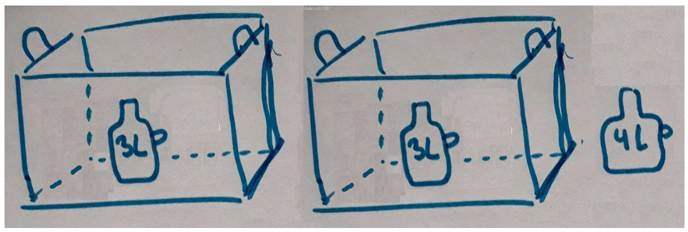


For at udregne dette, ville jeg

- Udregne hvor mange liter kan være i hver kasse: $3 + 4 = 7$
- Gange dette med antal kasser $2 \cdot (3 + 4) = 2 \cdot 7 = 14$

Bemærk at jeg bruger parantesen til at binde 3 og 4 sammen, så de skal lægges sammen inden jeg ganger 2 på.

Hvis jeg skulle tegne en tegning der passer til $2 \cdot 3 + 4$, ville jeg tegne følgende:



Opgaver

Opgave 10. Udregn følgende

- $2 \cdot 1 + 5 \cdot (3 - 2)$
- $(-1) + 3 \cdot 2 \cdot (1 - 2)$

Og tjek at du har regnet rigtigt. Du bør få 7 i den første opgave og -7 i den anden.

Nogle gange udelader man gangetegnet

Hvis det er tydeligt hvad man mener, kan man godt skrive ab i stedet for $a \cdot b$. Det betyder det samme, men er lidt hurtigere at skrive. Her er nogle andre eksempler på brug af usynligt gangetegn.

- $3a$ betyder $3 \cdot a$
- $3(2 + 1)$ betyder $3 \cdot (2 + 1)$

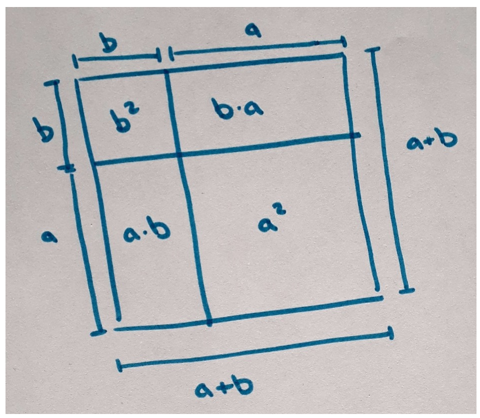
Opgave 11. Hvilke af følgende er gyldige regneregler?

- $a(b + c) = ab + ac$
- $a(b + c) = ab + c$
- $a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$

- $a(b \cdot c) = a \cdot b \cdot a \cdot c$
- $(a+b)^2 = a^2 + b^2$
- $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
- $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$

Hvis du er i tvivl om hvordan du skal starte, kan du prøve at sætte tal ind på a, b og c's plads.

Opgave 12. Hvis du skal overbevise dig selv om at én af reglerne ovenfor gælder, kan du eventuelt kigge på følgende tegning.



Forestil dig at du har en mark, du gerne vil vide hvor stor er. Du ved at marken er kvadratisk, og hver side er $a + b$ lang. Kan du udregne arealet af marken på to forskellige måder?

Opgave 13. Brug samme idé, men en ny mark, til at overbevise en (evt. usynlig) ven om at $a(b+c) = ab + ac$

De regneregler vi tager med videre er

- $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$.
  - Når du har en brøk med en sum i tælleren, må du gerne splitte den op i to brøker
  - Hvis du vil lægge to brøker med samme nævner sammen, skal du bare lægge tællerne sammen og beholde nævneren.
- $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$.
  - At gange tælleren i en brøk med et helt tal er det samme som at gange hele brøken med det samme tal.
- $\frac{1}{a} \cdot \frac{b}{c} = \frac{b}{c} : a = \frac{b}{ac}$
  - At gange en brøk med $\frac{1}{a}$ er det samme som at dividere brøken med a, som er det samme som at gange nævneren af brøken med a.
- $a(b+c) = ab + ac$
- $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

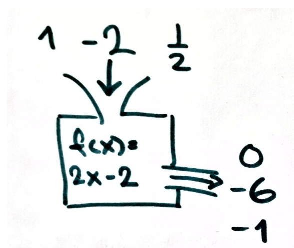
1.4 Funktioner og grafer

Nu går vi i gang med de mere specifikke emner, I skal have styr på, inden vi kan analysere skud fra springkanoner. Først skal vi snakke om funktioner

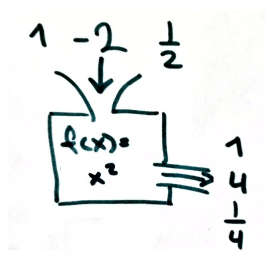
1.4.1 Funktioner

Man kan tænke på funktioner som en maskine. Nogen har engang indstillet hvad maskinen gør, og så gør den det samme ved alting man putter ind i den.

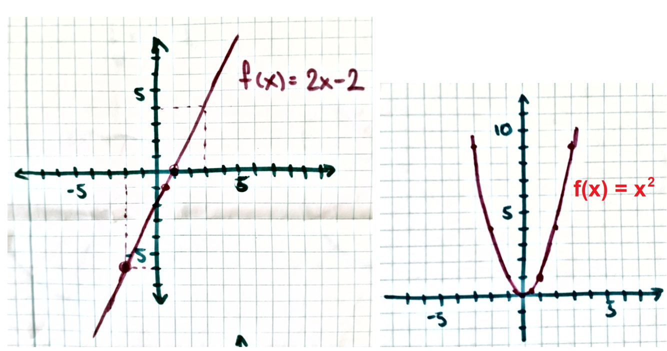
Funktionen $f(x) = 2x - 2$ vil gange ethvert tal man putter ind i den med 2 og trække 2 fra resultatet



Funktionen $f(x) = x^2$ vil derimod gange ethvert tal den får med sig selv



Man kan få overblik over en funktion ved at plotte dens input på en vandret akse (x-aksen) og dens output på en lodret akse (y-aksen). Resultatet kalder vi en graf

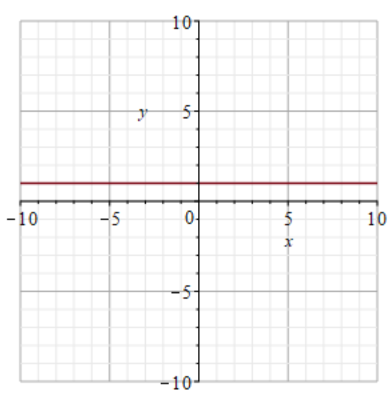


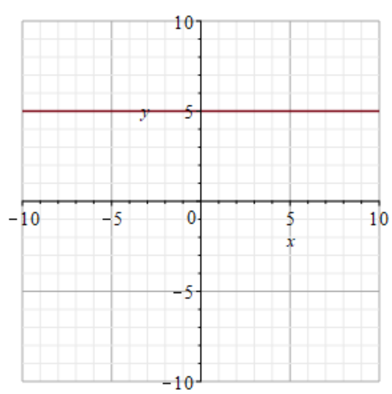
Opgaver

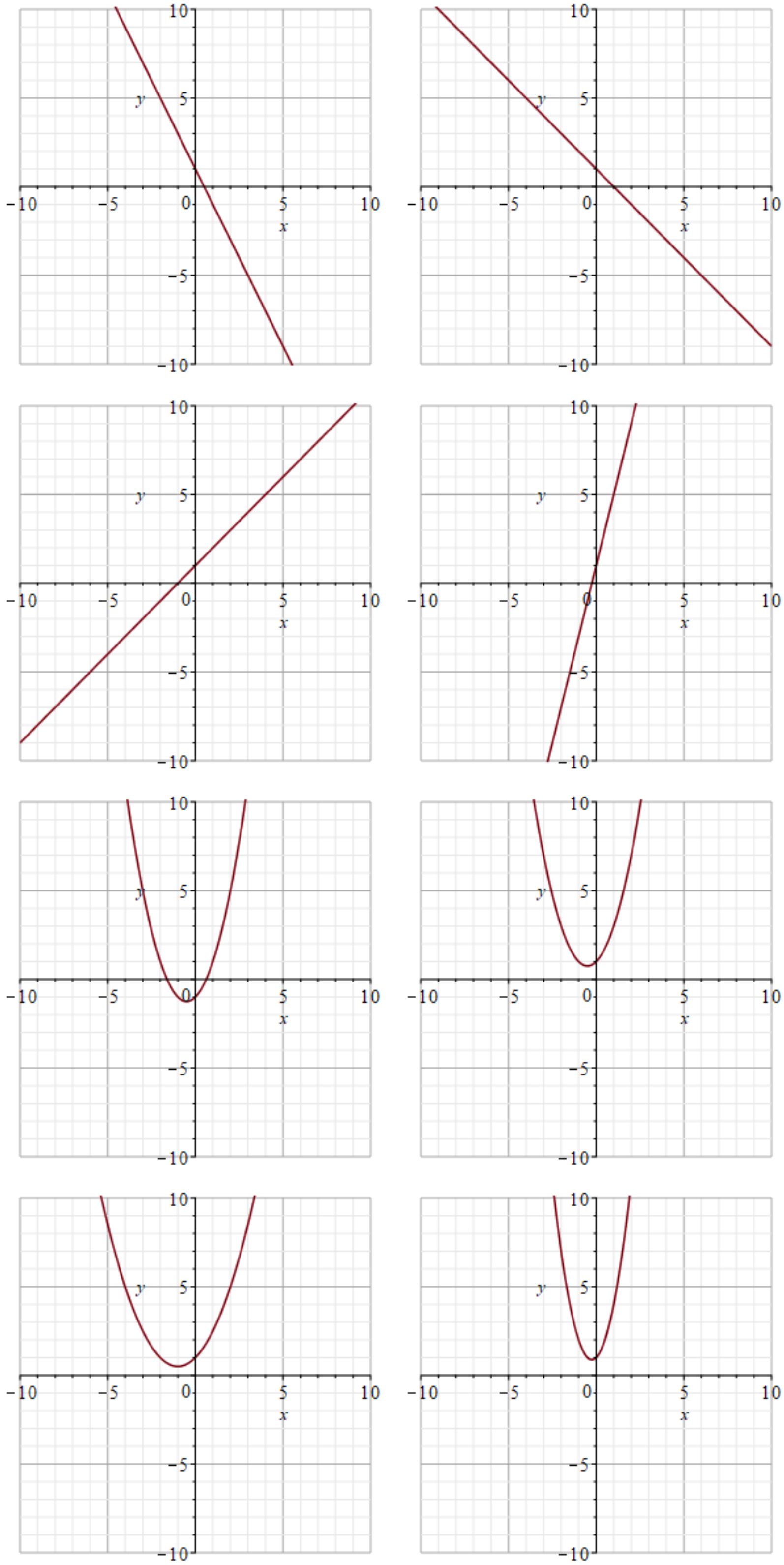
Opgave 14. Nedenfor har jeg tegnet funktionerne

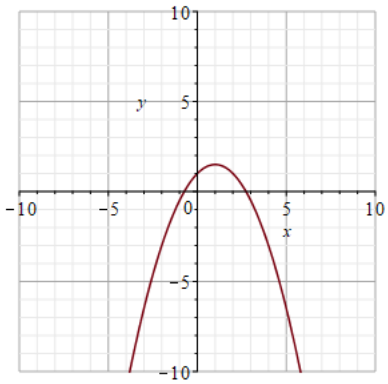
1. $f(x) = -1 \cdot x + 1$
2. $f(x) = -x^2 - x - 1$
3. $f(x) = 4 \cdot x + 1$
4. $f(x) = x^2 + x + 1$
5. $f(x) = -2 \cdot x + 1$
6. $f(x) = x^2 + x - 1$
7. $f(x) = 5$ (Ja, det er også en funktion. Uanset hvad du putter ind i den, spytter den tallet 5 ud)
8. $f(x) = 2 \cdot x^2 + x + 1$
9. $f(x) = 1 \cdot x + 1$
10. $f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 + x + 1$
11. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 1$
12. $f(x) = 1$

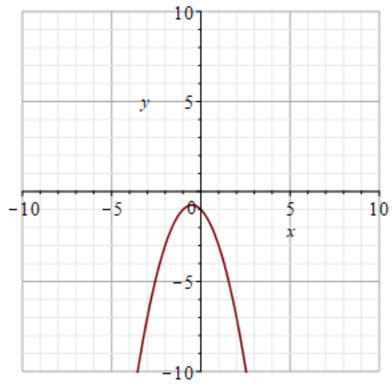
Din opgave er at finde ud af hvilken funktion, der er hvilken. Start med at sætte nogle tal ind for at få en idé om hvad der foregår, men husk at være på jagt efter mønstre, så du kan blive fri for at sætte tal ind i fremtiden!






10
y
5
−10
−5
0
5
10
x
−5
−10

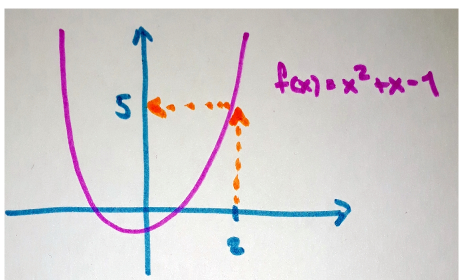




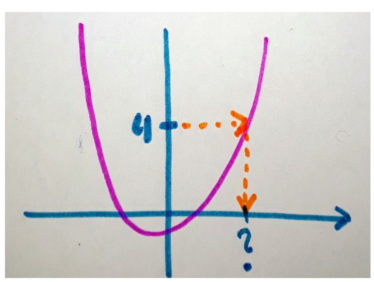
Resten af opgaverne herfra er nice to do. Ikke need to do. Sig lige til Freja at du er klar inden du går igang med dem.

Opgave 15. Hvis du kender x-værdien til et punkt på grafen, er det nemt at finde y-værdien. Du skal bare sætte x-værdien ind i funktionen. Som eksempel kan du tage funktionen $f(x) = x^2 + x - 1$ og x-værdien 2. y-værdien i det punkt er

$$f(2) = 2^2 + 2 - 1 = 5$$



Men hvad hvis du skal gå den anden vej? Hvilken x-værdi har y-værdien 4?



For at finde ud af det, kan du bruge en computer. Gå ind på hjemmesiden tiger-algebra.com, og tast

$$x\hat{\ }2 + x - 1 = 5$$

Giver svaret mening? Prøv med

$$x\hat{}2 + x - 1 = 11$$

$$x\hat{}2 + x - 1 = 4$$

$$x\hat{}2 + x - 1 = -1$$

og

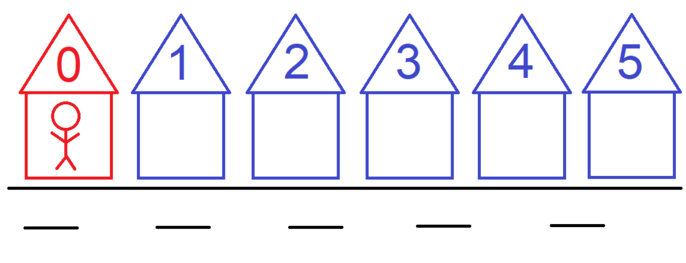
$$x\hat{}2 + x - 1 = -2$$

Inden du taster ind, så prøv at gætte ca. hvad svaret bør være.

Opgave 16. Gå tilbage til de tidligere sektioner og lav de opgaver, du mangler. Hvis du har lavet dem alle, så kan du overveje at spørge en underviser om han/hun vil forklare hvordan computeren ved hvad løsningerne er i den forrige opgave.

1.4.2 Afstand som funktion af tid

Vi kan bruge funktioner til at beskrive bevægelse. Lad os sige vi er interesserede i hvordan Ole har bevæget sig en tirsdag eftermiddag. Ole har 5 naboer, som bor langs en vej. Der er en kilometer mellem hver nabo.

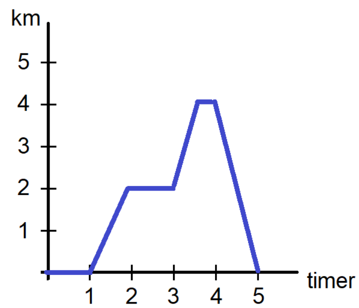


Tallet på taget af husene symboliserer hvor langt hver nabo bor væk fra Ole.
Lad os sige at denne tirsdag er Oles plan

- Kl 12-1: Er der hjemme
- Kl 1-2: Gå hen til naboen i nummer 2
- Kl 2-3: Drik te med nabo i nummer 2
- kl 3-3.30: Gå hen til nabo i nummer 4
- kl 3.30-4: Drik te med nabo i nummer 4

- kl 4-5 gå hjem

Vi kan beskrive denne bevægelse med grafen:

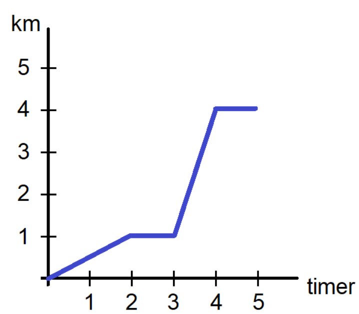


Ud af x-aksen måler vi antal timer siden kl 12, og op af y-aksen måler vi hvor langt Ole er fra sit hjem.

Jeg er godt med på at grafen ikke gør vores liv meget bedre lige nu. Bær lige over med mig lidt. Den skal nok blive nyttig.

Opgaver

Opgave 17. Beskriv Oles tidsplan for eftermiddagen, hvis hans bevægelser følger grafen.



Opgave 18. Tegn grafen der repræsenterer Oles bevægelse, hvis Oles tidsplan er

- Kl 12-1: Gå hjem til nabo i nummer 5
- Kl 1-2: Drik te med nabo i nummer 5
- Kl 2-3: Gå hjem til nabo i nummer 3
- Kl 3-4: Drik te med nabo i nummer 3
- kl 4-5: Gå hjem

Opgave 19. Hvornår gik Ole hurtigst i opg 17? Hvornår gik han langsomst?

Opgave 20. Hvornår gik Ole hurtigst i opg 18? Hvornår gik han langsomst?

Resten af opgaverne herfra er nice to do. Ikke need to do. Sig lige til Freja at du er klar inden du går igang med dem.

Opgave 21. Du er måske vandt til at snakke om hastigheder i bil? Fx har du måske set et skilt langs med vejen i en by, hvor der står 60 på? Eller langs motorvejen, hvor der står 110? Skiltene er en max-hastighed. Dvs. i byen ved skiltet må man max køre 60 kilometer i timen. På motorvejen ved skiltet må man maks køre 110 kilometer i timen.

60 kilometer i timen skal forstås således: Hvis du fortsætter med samme fart, og kører i en time, har du kørt 60 kilometer. Ligeledes vil en bil, som kører 110 kilometer i timen tilbagelægge 110 kilometer, hvis den kører i en time.

Kig tilbage på opgaverne med Ole. Kan du afgøre hvor hurtigt Ole går?

1.4.3 Hastighed

Vi er ofte interesserede i hvor hurtigt noget bevæger sig. Fx har du måske hørt at man maksimalt må køre 130 km/t på motorvejen og 50 km/t i byen. Hvis der gælder andre hastighedsgrænser, sætter myndighederne et skilt med et tal op. Så fx har du måske set et skilt, der står 60 på? Det betyder at lige her gælder den generelle regel ikke. Her må du køre maks 60 km/t uanset hvilken type vej det er.

Du ved måske også at man på en cykel kører med ca 20 km/t, og at en standard hastighed, når man går er 5 km/t. Et passagerfly bevæger sig med ca 700 km/t, en F16 kan flyve op til 2500 km/t. Til sammenligning bevæger lyden sig med 1.200 km/t. Man snakker om at gennembore lydmuren eller flyve supersonisk. Det vil sige at man flyver så hurtigt at man indhenter lyden fra sine egne motorer.

I kender måske også reglen om at man kan udregne hvor langt væk et lyn slår ned ved at tælle sekunder mellem lyset og braget og dividere med tre? Det er fordi lyden bevæger sig 1200 km på en time. Så den bevæger sig $1200/60 = 20$ km på et minut. Så et sekund bevæger det sig $20/60 = 1/3$ km. Dvs. at lyden er 3 sekunder om at bevæge sig en km.

Hvis jeg gerne vil finde ud af hvor hurtigt noget har bevæget sig, kan jeg gøre det med formlen

$$\text{Hastighed} = \frac{\text{Afstand}}{\text{tid}}$$

Det giver god mening. Hvis jeg har kørt i en time og har tilbagelagt 110 km, så har jeg kørt

$$\frac{110\ km}{1\ t} = 110\ km/t$$

Har jeg kørt i to timer og tilbagelagt 220 km, så har jeg kørt lige så hurtigt: 110 km/t. har jeg derimod kun kørt 110 km på de to timer, må jeg have kørt halvt så hurtigt. Altså 55 km/t. Kender du nogle afstande du har tilbagelagt? Fx hvor langt du har til skole? Hvor lang en fodboldbane er (105 m) eller lignende? Hvor lang tid tager det at tilbagelægge de afstande? Hvor hurtigt bevæger du dig, så?

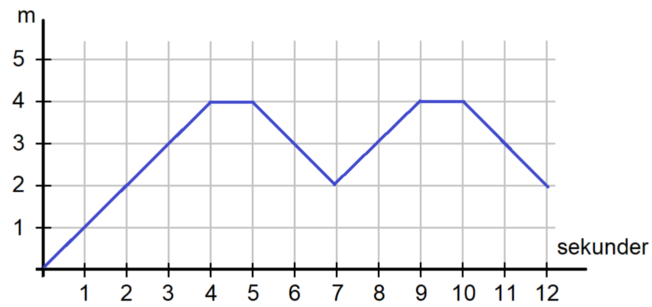
Hvad er det hurtigste og det langsomste Ole har gået?

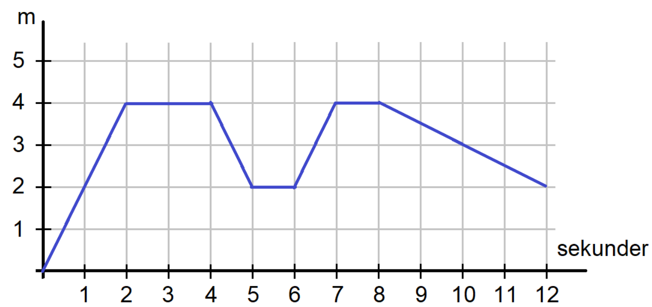
Vi bemærker at hastigheden er relateret til hældningen på grafen. Jo stejlere grafen er, jo højere er hastigheden.

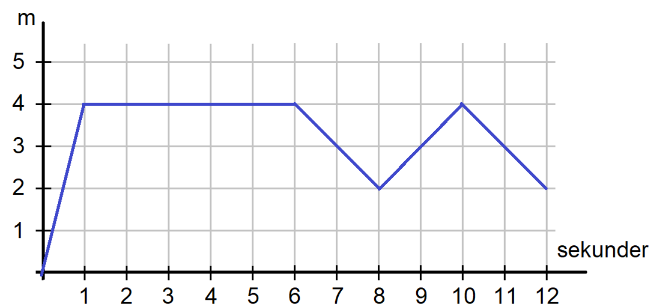
Da vi skal arbejde med små springkanoner, er det nemmere at måle hastighed i meter per sekund. Det er selvfølgelig lidt irriterende at have forskellige måder at måle hastighed på, men det er lidt ligesom at bage. Nogle gange er det mere naturligt at måle i deciliter, nogle gange i spiseskefulde og nogle gange i teskefulde.

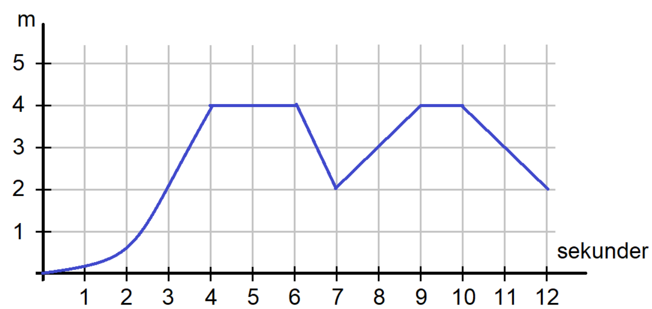
	km/t	m/s
Gang	5	1
Cykel	20	6
Bil i by	50	14
Bil på motorvej	130	36
Personfly	700	194
Lyd	1224	340
F16	2500	694

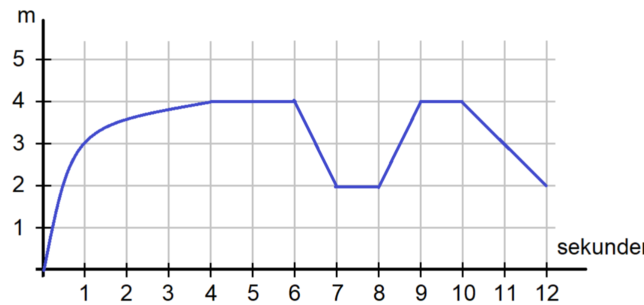
Opgave 22. Gå sammen i grupper på 2-3 personer. Vælg et startpunkt og marker på jorden hvad der er 1m, 2m, 3m, 4m og 5m væk fra startpunktet. Udvælg en løber. Den person vælger én af følgende grafer og forsøger at bevæge sig som grafen foreskriver. Dvs. efter x sekunder skal løberen være y meter væk fra startpunktet. De andre skal gætte hvilken graf løberen beskriver. OBS: Lad løberen løbe færdigt inden I gætter, og forsøg kun at gætte når I er sikre. Tag hellere en ekstra løbetur, hvis I er i tvivl.


m
5
4
3
2
1
sekunder
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12


m
5
4
3
2
1
sekunder
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12


m
5
4
3
2
1
sekunder
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12


m
5
4
3
2
1
sekunder
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



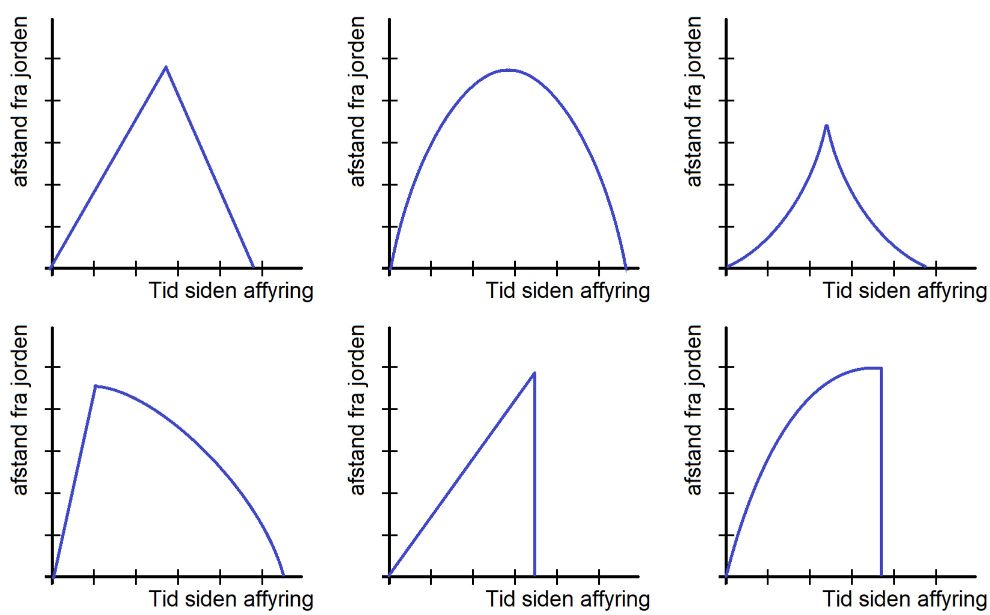
Sig til når I er nået her til.

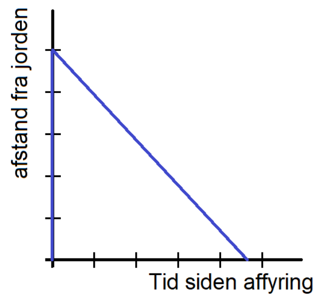
Opgave 23. Udfordr hinanden. Tegn én graf som andre skal forsøge at følge, eller løb som en anden graf, som dit hold skal forsøge at tegne.

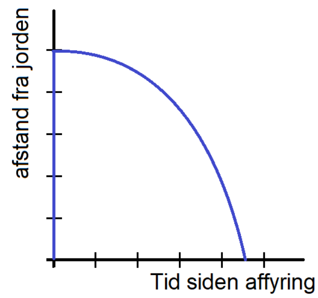
1.5 Katapultskud

Nu har vi alle redskaberne til at analysere skud fra springkanonen. Det første vi skal gøre er at analysere hvordan kuglen bevæger sig i luften. Til det skal vi plotte kuglens afstand fra jorden som funktion af tid.

Opgave 24. Hvilken af følgende tror du bedst beskriver kuglens rejse i luften?







Opgave 25. Nu skal vi finde ud af det. Vi skal filme kuglen, der kommer ud af kanonen, og plotte hvor højt den er over jorden som funktion af tid. Gå ind på `https://bit.ly/2FaqnPs` og download det program som ligger der. Der findes også en guide til at få programmet til at virke. Prøv at affyre kanonen og plotte punkterne. Hvilken form af de ovenstående passer?

Når du kommer hertil, så sig til.

Opgave 26. Overvej om banen i luften afhænger af kanonen/kuglen/hastigheden. Flyver alting på samme måde når det kastes op i luften? Prøv eventuelt med et penalhus eller en trøje.

1.5.1 Andengradspolynomier

Parabler/andengradspolynomier er funktioner på formen

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

hvor $a \neq 0$. Dvs. vi har allerede mødt en masse andengradspolynomier:

- $-x^2 - x - 1$ (her er $a = -1, b = -1, c = -1$)
- $x^2 + x + 1$ (her er $a = 1, b = 1, c = 1$)
- $x^2 + x - 1$ (her er $a = 1, b = 1, c = -1$)
- $2x^2 + x + 1$ (her er $a = 2, b = 1, c = 1$)
- $\frac{1}{2}x^2 + x + 1$ (her er $a = \frac{1}{2}, b = 1, c = 1$)
- $-\frac{1}{2}x^2 + x + 1$ (her er $a = -\frac{1}{2}, b = 1, c = 1$)

Men vi kan sagtens forestille mange andre andengradspolynomier:

- $\sqrt{2}x^2 + \frac{300}{56}x + 5001$ (her er $a = \sqrt{2}, b = \frac{300}{56}, c = 5001$)
- $693x^2 - 17$ (her er $a = 693, b = 0, c = -17$)
- $-5x^2 - \frac{2}{9}x$ (her er $a = -5, b = -\frac{2}{9}, c = 0$)
- ...

Det viser sig at når vi skyder kugler fra springkanoner, så vil kuglens afstand fra jorden som funktion af tid altid følge en parabel, men at a, b og c kan variere alt efter omstændighederne.

Opgave 27. Prøv at ændre højden over jorden og starthastigheden på katapulten. Hvordan ændrer det ved a, b og c? Du må gerne gætte på resultatet inden du affyrer kanonen og plotter punkter.

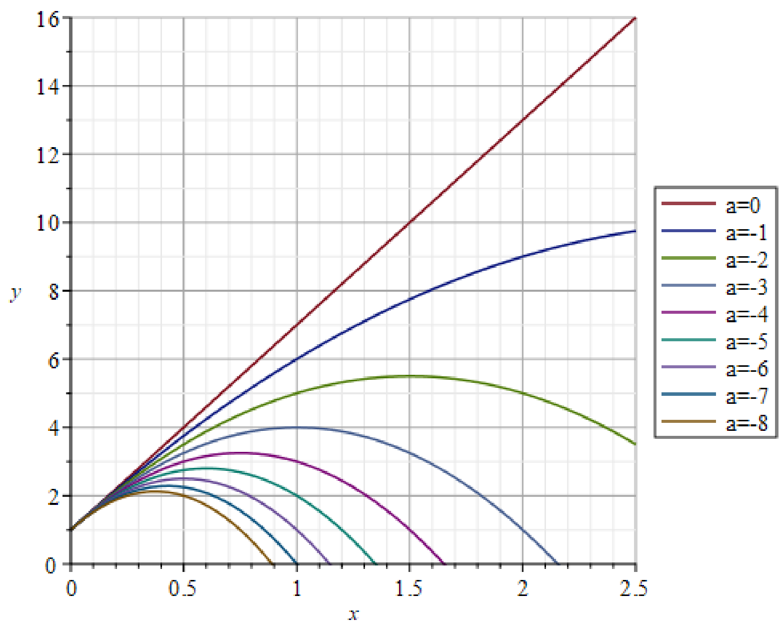
1.5.2 Hvorfor?

Vi finder ud af at a er konstant, b er starthastigheden og c er højden over jorden, som kuglen affyres fra. Hvorfor bliver det sådan? Lad os starte med at kigge på c. Hvis vi sætter $x = 0$ i funktionen, der beskriver højden som funktion af tiden får vi højden over jorden efter der er gået nul sekunder. Hvis vi sætter ind i formlen, ser vi at

$$f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$$

Så c er altså højden over jorden, som kuglen starter med at have.

Hvad foregår der med a? Selvom, det ikke svarer til noget vi har observeret, så lad os alligevel prøve at variere a og se hvad der sker.



Vi kan forestille os at vi står på planeter med forskellig tyngdekraft. I den allermest ekstreme situation, hvor der ingen tyngdekraft er, vil kuglen fortsætte med den hastighed den affyres med i det uendelige. Det svarer til $a = 0$. Jo større tyngekraften er, jo mere vil kuglen afvige fra denne ekstreme bane, da den i hvert øjeblik bliver trukket en lille smule ned mod planeten vi står på. Da alle vores eksperimenter laves på jorden, er det ikke underligt at a hele tiden bliver det samme. Afhængigt af målefejl, bør du finde noget alla: $a = -4.9$. For en fysisk forklaring af dette, så se afsnit 2.4 på side 50.

1.5.3 Starthastigheden

Ok, hvordan overbeviser vi os selv om at b er den hastighed som kuglen har, når den forlader kanonen? Til det skal vi bruge noget som hedder differentialregning, og er noget nær det sejeste, sværeste og mest brugbare I lærer i gymnasiet. Det er en ære at være den første, som får lov at fortælle jer om det.

Vi tager et eksempel. Lad os sige at vi har gravet kanonen ned så $c = 0$, vi afrunder a til -5 og vi affyrer kanonen, så kuglens bane følger parablen

$$f(x) = -5x^2 + 30x$$

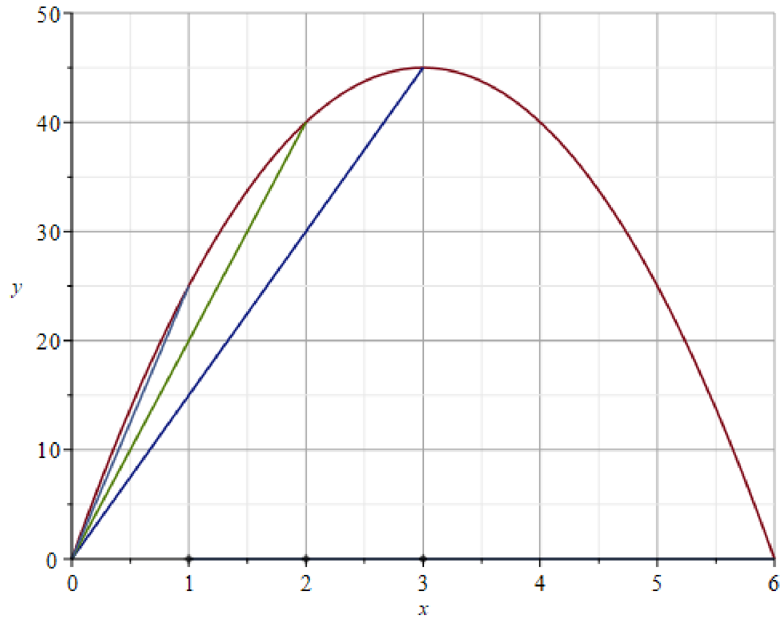
Lad os bevise at kuglens starthastighed er 30. Vi gør det i skridt

1. Hvor langt har kuglen bevæget sig fra $x = 0$ til $x = 3$ (altså på de første tre sekunder)? Hvor hurtigt bevægede kuglen sig i gennemsnit i de første tre sekunder? (svar: Kuglen har bevæget sig $f(3) - f(0) = -5 \cdot 3^2 + 30 \cdot 3 - 0 = 45$ meter. Det tog 3 sekunder, så den fløj i gennemsnit med hastigheden 45/3 = 15 m/s)

2. Hvor langt har kuglen bevæget sig fra $x = 0$ til $x = 2$ (altså på de første to sekunder)? Hvor hurtigt bevægede kuglen sig i gennemsnit i de første tre sekunder? (svar: Kuglen har bevæget sig $f(2) - f(0) = -5 \cdot 2^2 + 30 \cdot 2 - 0 = 40$ meter. Det tog 2 sekunder, så den fløj i gennemsnit med hastigheden 40/2 = 20 m/s)

3. Hvor langt har kuglen bevæget sig fra $x = 0$ til $x = 1$ (altså på det første sekund)? Hvor hurtigt bevægede kuglen sig i gennemsnit i de første tre sekunder? (svar: Kuglen har bevæget sig $f(1) - f(0) = -5 \cdot 1^2 + 30 \cdot 1 - 0 = 25$ meter. Det tog 1 sekund, så den fløj i gennemsnit med hastigheden 25/1 = 25 m/s)

4. Det vi laver her er i virkeligheden at finde hældningerne på linjerne på tegningen



Og vi ønsker at finde hastigheden i $x = 0$. Vi ved at hastigheden netop er hældningen! Forhåbentlig kan du se at de hældninger vi har fundet kommer tættere og tættere på den ønskede hældning? Lad os prøve at komme uendeligt tæt på!

5. Lad T være et antal sekunder, vi ikke kender endnu (vi har haft $T = 1, 2$ og 3, nu prøver vi at behandle alle T på én gang. Gennemsnitshastigheden mellem $x = 0$ og $x = T$ er

$$\frac{f(T)}{T} = \frac{-5T^2 + 30T}{T} = -5T + 30$$

Lad os tjekke at vi finde det samme som før med $T = 3, 2$ og 1

$$\frac{f(3)}{3} = -5 \cdot 3 + 30 = 15$$

$$\frac{f(T)}{T} = -5 \cdot 2 + 30 = 20$$

$$\frac{f(T)}{T} = -5 \cdot 1 + 30 = 25$$

Vi ser at vi kommer tættere og tættere på 30 efterhånden som T bliver mindre og mindre. Når T er uendeligt tæt på nul, så får vi en hældning på

$$\frac{f(T)}{T} = -5 \cdot 0 + 30 = 30$$

1.5.4 Hvor længe går der inden kuglen rammer jorden igen?

Det er faktisk nemt at svare på nu. Husk at vi kan bruge tiger-algebra.com til at finde x-værdier, når vi kender y-værdien. Så lad os sige at vi affyrer den samme nedgravede kanon som før med samme hastighed $b = 30$, på en planet der har lidt mere tyngdekraft end jorden, så $a = -5$. Så vil kuglen følge banen

$$f(x) = -5x^2 + 30x + 0$$

Når kuglen rammer jorden, vil det sige at y-værdien er 0. Dvs. vi kan finde x-værdien ved at taste

$$-5x\hat{}2 + 30x = 0$$

ind i tiger-algebra.com. Programmet giver at $x = 0$ eller $x = 6$. Dvs. at kuglen rør jorden to steder: Lige i det den fyres af og igen efter 6 sekunder.

Opgave 28. Prøv med nogle af de eksempler du arbejdede med tidligere. Kan du bruge ovenstående metode til at udregne hvor længe kuglen er i luften?

1.5.5 For sjov

Hvis der er tid til overs, kunne det være sjovt at snakke om hvad tiger-algebra.com gør for at finde x-værdierne der hører til y-værdierne. Ellers kunne det være sjovt at finde hastigheden på kuglen andre steder i luften.

Endelig er det måske en god idé at du overvejer hvordan du vil forklare det, vi har været igennem til din gruppe i næste workshop.

1.6 Eksperiment

Målet med eksperimentet er at forudsige hvor kuglen rammer jorden. Det afhænger af hastigheden du affyrer med og vinklen på kanonen.

Opgave 29.

1. Stil kanonen lige op i luften og skyd med hastighed 10m/s. Mål med øjet hvor højt kuglen kommer op i luften.

2. Stil nu kanonen på 45 grader. Hvor hurtigt skal du affyre kanonen for at kuglen kommer lige så højt op som før? Tænk over det matematisk, men prøv også at affyre og se om det passer.

3. Stil nu kanonen på 30 grader. Hvor hurtigt skal du affyre kanonen for at kuglen kommer lige så højt op som før?

Opgave 30.

1. Stil kanonen på 45 grader og affyr den med hastighed 10 m/s. Mål med øjet hvor højt kuglen kommer op i luften.
2. Stil nu kanonen lige op i luften. Hvor hurtigt skal du affyre kanonen for at kuglen kommer lige så højt op som før?
3. Gentag de ovenstående opgaver med vinklen 30 grader i stedet for 45 grader.

Opgave 31. Tænk på funktionerne $h(t)$ og $l(t)$, som måler henholdsvis hvor langt kuglen er over jorden til tid t og hvor langt kuglen har bevæget sig langs jorden til tid t. Brug tracker til at tegne grafer for de to funktioner. Kan du forklare hvorfor graferne ser ud som de gør?

Opgave 32. Hvor lang tid er kuglen i luften, hvis den affyres med vinkel 45 grader og hastighed 10 m/s?

Opgave 33. Hvor langt flyver kuglen, hvis den affyres med vinkel 45 grader og hastighed 10 m/s?

Kapitel 2

Fysik

2.1 Introduktion

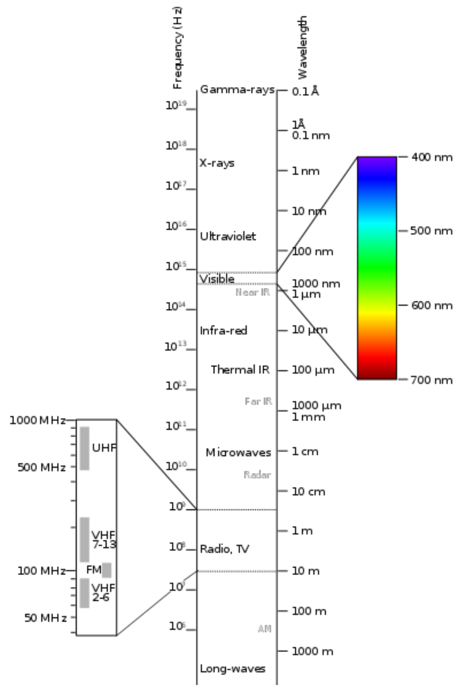
I dette kompendium vil vi forsøge at introducere læseren til noget af den fysik, man møder i gymnasiet og samtidig gøre det klart, hvad det er, der gør fysik til noget særligt inden for naturvidenskab. Fokus vil være på det mere konceptuelle for ikke at forvirre læseren med unødvendige matematiske krøller. Ønsker man alligevel en dybere og mere stringent gennemgang, kan man blot spørge underviserne.

Vi har valgt at fokusere på lys i dette kompendium, da det sandsynligvis vil være nyt stof for de fleste læsere, men samtidig ikke kræver store matematiske evner at forstå eller arbejde med. Basal trigonometri og ligningsløsning burde være nok.

Derudover vil vi kort fortælle lidt om noget mere generelt inden for naturvidenskab, nemlig usikkerhed og enheder. Til sidst i kompendiet er også en kort note om tyngdekraft.

2.2 Lys

Når fysikere taler om lys, mener de elektromagnetisk stråling. Det, man i almindelig daglig tale kalder lys, er i virkeligheden en meget lille del af det elektromagnetiske spektrum og omtales oftest som synligt lys af fysikere. På figur 2.1 ses det elektromagnetiske spektrum.



Figur 2.1: Det elektromagnetiske spektrum (kilde: [7])

Lys er karakteriseret ved dets bølgelængde, og sammenhængen mellem dets udbredelseshastighed, bølgelængde og frekvens er:

$$c = \lambda \cdot f$$

Hvor c er lysets hastighed, λ (det græske bogstav lambda) er bølgelængden, og f er frekvensen. Hvis du ikke kender begreberne bølgelængde og frekvens, så frygt ej, det vil blive forklaret i det følgende.

2.2.1 Partikel/Bølge-dualitet

Igennem historien har man beskrevet lys som både partikel og som bølge. Først i moderne tid er fysikere kommet frem til, at lys ikke rigtig er nogen af delene. Nogle fænomener kan forklares med en model, hvor lys er en partikel, andre med en model, hvor lys er en bølge.

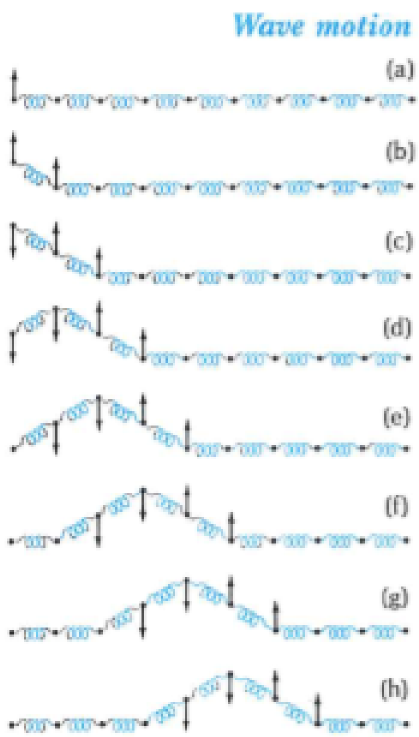
Som udgangspunkt er dette ret foruroligende, lys er omkring os hele tiden, og vi ved ikke rigtig, om det er en partikel eller en bølge. Her kommer den såkaldte 'Københavnerfortolkning' ind i billedet.

Københavnerfortolkningen blev fremført af Niels Bohr i 1927 og går ud på, at et fysisk fænomen kan beskrives med to forskellige komplimentære modeller. Selvom de to modeller indbyrdes udelukker hinanden, kan de tilsammen bidrage til en komplet forståelse af fænomenet. I dette tilfælde kan lys både forstås som bølge og som partikel, alt efter hvilket fænomen der skal forklares.

I dette kompendium vil vi koncentrere os om en bølgeforståelse af lys.

2.2.2 Bølger

En bølge er kort sagt en forstyrrelse, der bevæger sig igennem et medie. Forestil dig, at du har et sjippetov, der ligger foran dig på jorden. Bevæger du hurtigt den ene ende af tovet op og ned, vil der komme en forstyrrelse, der rejser ned gennem tovet. Situationen ses på figur 2.2. Denne forstyrrelse er en bølge, bemærk at selv torvet (der i dette tilfælde er mediet) ikke har bevæget sig, men hvad er det så, der har bevæget sig? Svaret er energi, da bølger bærer energi.



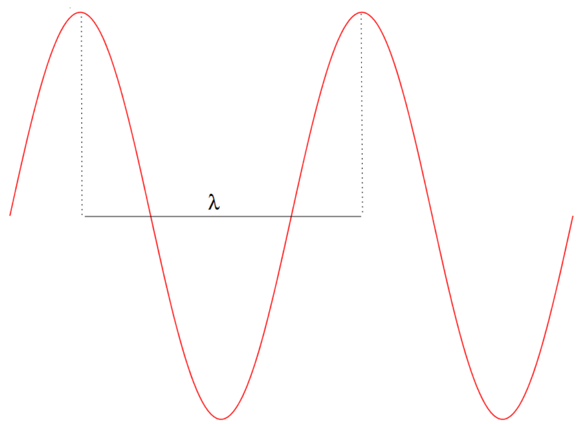
Figur 2.2: En transversal bølge i en snor til forskellige tidspunkter. a er først, og efter lidt tid ser bølgen ud som på b, osv. (kilde: [5])

Vi vil i dette kompendium koncentrere os om transversale bølger. Det er bølger, hvor forstyrrelsen er vinkelret på udbredelseshastigheden. Et godt eksempel er sjippetorvet.

Når vi taler om bølger, er der fire egenskaber, vi ofte bruger til at karakterisere dem. Hastighed, bølgelængde, periode og frekvens. Tidligere præsenterede vi sammenhængen imellem tre af disse egenskaber, nu vil vi gå mere i dybden med, hvad de er. Vi vil koncentrere os om periodiske bølger. Det vil sige, at bølgen gentager sig selv.

Hastigheden er, hvor hurtigt bølgen udbreder sig, altså hvor langt bølgen har bevæget sig pr tidsenhed. Hastighed betegnes ofte v, men når vi taler om lys, bruger man c. Hastighed har enheden meter pr sekund.

Bølgelængden beskriver den rummelige størrelse af forstyrrelsen, for en periodisk bølge er det størrelsen af én periode. Det vil sige, hvor langt man skal gå langs bølgen, før den begynder at gentage sig selv. På figur 2.3 ses en periodisk bølge med bølgelængden indtegnet. Bølgelængden betegnes ofte med λ og har enheden meter.



Figur 2.3: En sinusbølge med bølgelængden indtegnet

På samme måde som bølgelængden beskriver bølgens størrelse i rummet, beskriver perioden bølgens tidlige størrelse. Det er hvor lang tid, der går, før bølgen gentager sig selv. Tænk på det, som at du står stille og observerer en bølge, der glider forbi dig. Hvis du har et stopur i hånden, kan du starte det, når du ser en bølgetop lige uden for dig og så stoppe det, når du ser den næste bølgetop. Det, du lige har målt, er peroden. Perioden måles i sekunder og betegnes ofte T.

Frekvens hænger tæt sammen med periode. Hvor perioden beskriver, hvor mange sekunder der går for hver bølge, beskriver frekvens hvor mange bølger, der er på ét sekund. Periode og frekvens er således hinandens reciprokke:

$$T = \frac{1}{f}$$

Hvor f er frekvensen. Frekvens måles i enheden hertz, der er det samme som sekund i minus første.

Når man kender betydningen af frekvens, bølgelængde og hastighed, er det ret intuitivt at forstå deres sammenhæng. Hvis en bølge har f perioder på et sekund, og hver periode har længden λ meter, må den på et sekund bevæge sig med f gange λ meter. Dette er jo netop hvad en hastighed er, og vi kan konkludere:

$$v = f \cdot \lambda$$

Lys som bølge

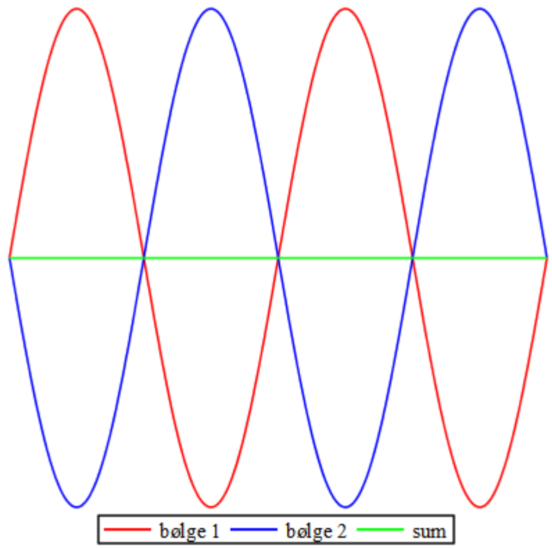
I bølgeforståelsen af lys består elektromagnetisk stråling af et elektrisk felt og et magnetisk felt. Du har måske stiftet bekendtskab med, at der er en sammenhæng imellem elektricitet og magnetisme, og det er denne sammenhæng (opsummeret i Maxwells ligninger), der forklarer, hvordan lys kan ses som en bølge. Kort forklaret skaber ændringen i det elektriske et magnetisk felt, imens det magnetiske felts ændring skaber et elektrisk felt. Med noget matematik kan man fra Maxwells ligninger finde en bølgeligning for de to felter. Disse to vekslende felter er vinklrette på lysets udbredelsesretning, og lys er således en transversal bølge, hvor to vinkelrette felter vekselvirker med hinanden. [6]

Interferens

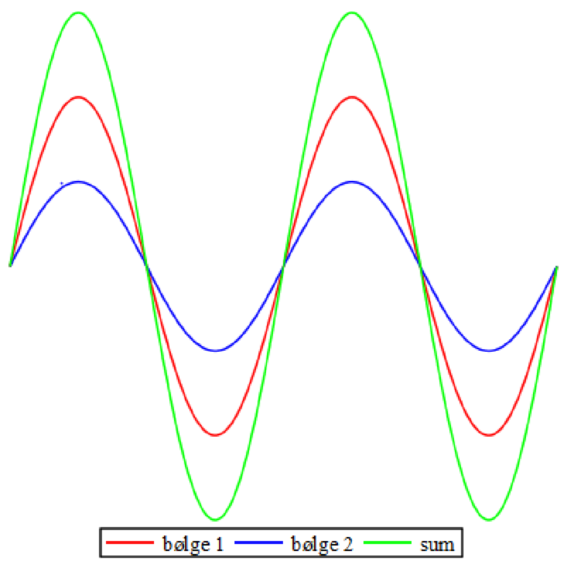
Vi vil nu se på en vigtig engenskab ved bølger, nemlig interferens. Når to bølger overlapper, interfererer de. Det vil sige, at den effektive forstyrrelse i mediet vil være summen af de to bølger. Man siger, at den resulterende bølge er en superposition af de bølger, der interfererer.

Interferens kan skabe alle mulige komplicerede bølger, især når man betragter det mere generelle tilfælde, hvor et vilkårligt antal bølger interfererer. Hvis man vil vide mere om, hvordan man splitter et signal op i forskellige bølger, må vi henvise til, at man slår fourier-rækker og fouriertransformationer op. Det er stof, man først lærer på universitetet, så det vil vi ikke beskæftige os med her.

For os vil det være nok at se på et par enkle tilfælde, nemlig konstruktiv og destruktiv interferens imellem bølger med samme bølgelængde. Dette er illustreret på figur 2.4 og 2.5:



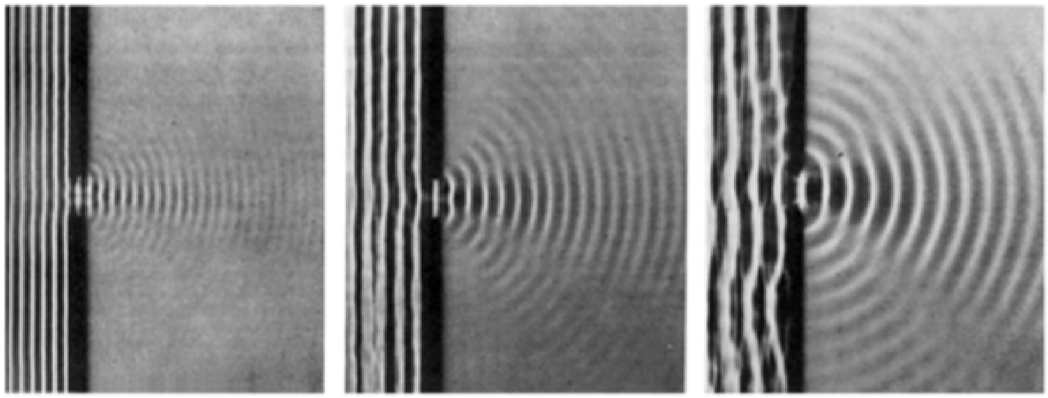
Figur 2.4: Et eksempel på destruktiv interferens



Figur 2.5: Et eksempel på konstruktiv interferens

Bølgebevægelse

En sidste egenskab ved bølger, som vi må kende, er hvordan de opfører sig, når de når en smal åbning. På figur 2.6 ses opførslen undersøgt eksperimentelt med vandbølger. Hvis åbningen er smal nok sammenlignet med bølgelængden, vil man se, at bølgen udbreder sig i alle retninger fra åbningen på den anden side af muren.



Figur 2.6: Bølger rammer en lille åbning og udbreder sig på den anden side med centrum ved åbningen. (Kilde: [6])

2.2.3 Optiske gitre

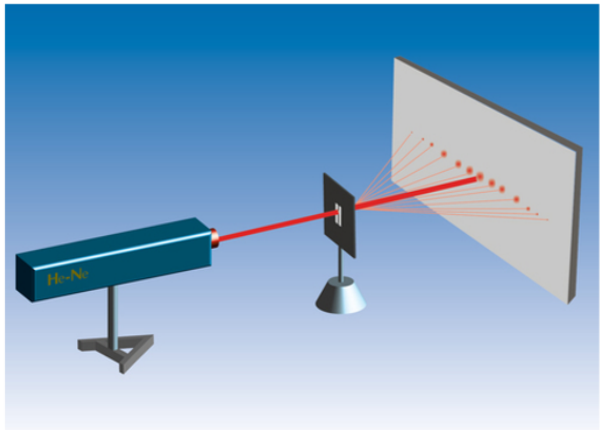
Lad os nu se på, hvordan de bølgeegenskaber lys har, kan forklare et fænomen. Et godt eksempel er, hvad der sker, når lys sendes igennem et optisk gitter. Et optisk gitter er bare et utroligt fint gitter, altså et gitter hvor afstanden imellem tremmerne er meget lille. Derudover er der kun tremmer på den ene led. For at gøre det enkelt at undersøge optiske fænomener, bruger man ofte lasere.

Lasere

En laser er en lyskilde der udsender lys i én retning med kun én bølgelængde. Derudover er lyset i fase, det vil sige, at alle bølgerne interferer konstruktivt. At lave sådan en lyskilde er overraskende kompliceret og blev først gjort i 1960. I dette kompendium vil vi ikke komme nærmere ind på, hvordan en laser fungerer, blot acceptere de tre ovenstående egenskaber.

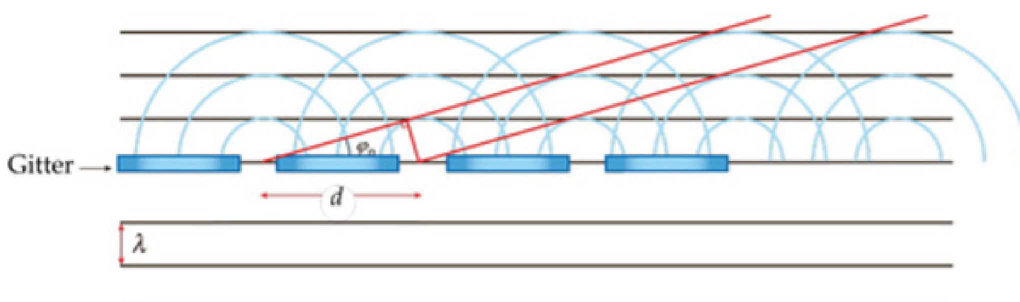
Gitterligningen

Sender man lys igennem et optisk gitter, vil man se, at det splittes op i flere forskellige retninger. Dette er illustreret på figur 2.7. Vi vil nu forklare dette fænomen og finde frem til den ligning, der beskriver, hvilke retninger lyset splittes op i.



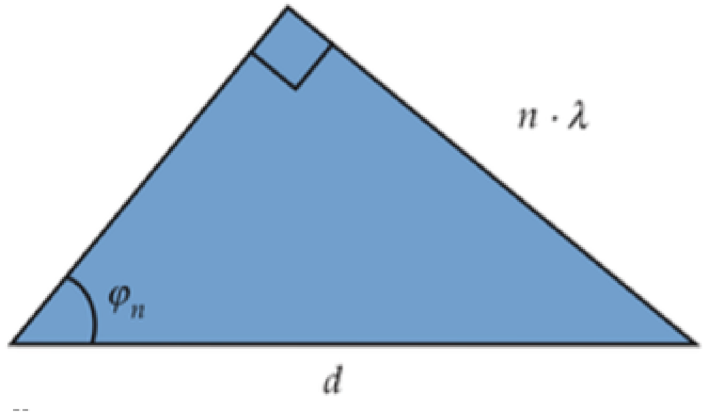
Figur 2.7: Laser sendes igennem et optisk gitter. (Kilde: [6])

Da åbningerne i gitteret er meget smalle, vil lyset (der jo er en bølge) udbrede sig i alle retninger fra hver åbning på den anden side af gitteret. Dette ses på 2.8, hvor bølgetoppene på den anden side af muren er angivet med blå buer. Lyset vil nu interferere med sig selv på den anden side af gitteret. De fleste steder er lyset ude af fase med sig selv, og vil derfor interferere destruktivt, men i nogle bestemte retninger vil der være konstruktiv interferens.



Figur 2.8: Tegning af lys der sendes igennem et optisk gitter. De sorte streger og de blå buer angiver bølgetoppe. d er afstanden imellem spalterne, og λ er lysets bølgelængde. De røde linjer angiver retninger med konstruktiv interferens (Kilde: [6])

Først og fremmest er der konstruktiv interferens vinkelret på gitteret. Altså vil en del af laserlyset bevæge sig igennem gitteret uden at skifte retning. Det mere interessante fænomen er, at bølgen fra en spalte kan interferere konstruktivt med den forrige bølgetop, der er gået igennem nabospalten. Dette sker kun i nogle ganske bestemte vinkler, nemlig dem, hvor de to bølger er forskudt et helt antal bølgelængder. For at forstå hvilke vinkler, kan man tegne en trekant som på figur 2.9.



Figur 2.9: Trekant til illustration af udledning af gitterligningen. Den nederste side i trekanten er afstanden imellem de to spalter, og den øverste side til højre er et heltal bølgelængder. (Kilde: [6])

Bruger man sinus, kan man fra trekanten på figur 2.9 se:

$$\sin(\varphi_n) = \frac{n \cdot \lambda}{d}$$

Hvor φ_n (Det græske bogstav phi) er vinklen.

Det er denne ligning, man kalder gitterligningen. Det ses, at der kommer flere retninger, hvor der er konstruktiv interferens, da n kan variere. Altså er der en retning for hvert heltal n op til, at brøken på højre side bliver større end 1. (Da sinus til en vinkel altid er imellem -1 og 1) heltallet n kalder man ordenen. Afstanden d kaldes gitterkonstanten.

2.2.4 Øvelser

Til følgende opgaver kan lysets hastighed c sættes til: $c = 3{,}0 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

- Opgave 1:
  Betragt en bølge der udbreder sig med $v = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Hvis den har en frekvens på 1 Hz, hvor stor er bølgelængden så? Hvad hvis frekvensen er 10 Hz? Hvad ville hastigheden være hvis bølgelængden var 1 m, og frekvensen var 2 Hz?

- Opgave 2:
  Hvad er frekvensen af lys med en bølgelængde på 600 nm? ($1\,\mathrm{nm} = 1 \cdot 10^{-9}$ m)

- Opgave 3:
  Hvad er bølgelængden af lys med en frekvens på $8{,}0 \cdot 10^{14}$ Hz?

- Opgave 4:
  Lys sendes igennem et optisk gitter med 500 spalter pr. mm. Vinklen til første orden bestemmes til at være 48 grader. Hvad er lysets bølgelængde?

- Opgave 5:
  Udtryk vinklen til andenordens-pletten for lys der sendes igennem et optisk gitter ved lysets hastighed og frekvens.

2.3 Eksperimentel fysik

Det der, blandt andet, gør fysik til en naturvidenskab, er at fysikere tester deres teorier med eksperimenter og ser resultaterne fra eksperimenterne stemmer overens med teorien. Vi kan nemlig opstille en teori for hvordan vi tænker verden omkring os fungerer, men viser det sig så gennem eksperimenter, at verden ikke stemmer overens med teorien, må vi, som fysikere, genoverveje vores gamle teori og komme op med en ny, der stemmer overens med de udførte eksperimenter. Dette kan man nogle gange gøre uden at skulle bruge tal eller matematik, men ofte slår den fremgangsmåde ikke til.

For at kunne sige noget om verden i disse tilfælde, er vi nødt til at kunne beskrive den med talstørrelser, der er tilknyttet virkeligheden. Til dette bruger vi *enheder*, og vi er nødt til at kunne angive, hvor sikker vi er på vores modeller og teorier, og til dette bruger vi *usikkerhederne* på vores observationer.

2.3.1 Enheder

2.3.2 Enheder

For at kunne opstille teorier, der kan be- eller afkræftes, er vi nødt til at kunne beskrive verden omkring os med kvantitative størrelser. Det vil sige, at vi skal kunne sætte tal på vores observationer, modsat til bare at kunne beskrive dem med ord. Vi skal således gå fra at kunne sige, at noget "skete langt væk" eller at "ilden er varm" til at kunne beskrive det med en talstørrelse.

Det er dog ikke nok bare at sætte en talstørrelse på et fænomen, eftersom det ikke nytter at sige, at "ilden er 5 varm", da tallet 5 for sig selv bare er et koncept, som vi har fundet på, og det ikke har nogen fysisk betydning. Vi er derfor nødt til at sætte en enhed på vores talstørrelse, så den får en fysisk betydning. Det giver således fysisk mening for os at sige, at "ilden er 5 °C varm", da vi nu sat en fysisk størrelse på tallet 5.

Der er dog flere fysiske størrelser for temperatur for eksempel Kelvin, der er SI-enheden for temperatur, se tabel 2.1, og fahrenheit, der bliver brugt i USA i stedet for enheden Celsius. Derfor er det vigtigt, at det er tydeligt, hvilken enhed, som man bruger, da for eksempel 5 °F ikke er lig med 5 °C, men lig med −15 °C. Et lignende problem med ikke at holde styr på sine enheder kan opstå, når det gælder enheder som mil og fod, da disse enheder også er defineret forskelligt i forskellige lande, og de derfor også har forskellige værdier baseret på om det for eksempel er danske eller norske mil.

For at gøre det nemmere for fysikere og alle os andre, der arbejder med naturvidenskab, har man i store dele af verden valgt at definere og bruges et fælles sæt af enheder. Disse enheder er dem, der kendes som SI-enheder, og de syv grund enheder kan ses i tabel 2.1.

Tabel 2.1: SI-enheder

Størrelse	Enhed	Symbol
Længde	Meter	m
Tid	Sekunder	s
Temperatur	Kelvin	K
Strømstyrke	Ampere	A
Mængde	Mol	mol
Masse	Kilogram	kg
Lysstyrke	Candela	cd

Disse SI-enheder er grundenhederne for de fleste af de enheder, som vi bruger, når vi laver forsøg. Fordelen ved dette er, at vi alle har samme udgangspunkt og arbejder ud fra de samme definitioner, hvilket gør det nemmere at dele naturvidenskabelige resultater. Nogle af af de afledte SI-enheder, der er defineret ud fra de syv grund SI-enheder, kan ses i tabel 2.2.

Tabel 2.2: Afledte SI-enheder

Størrelse	Enhed	Symbol	SI-enheder
Effekt	Watt	W	$\frac{kg \cdot m^2}{s^3}$
Frekvens	Hertz	Hz	s^{-1}
Kraft	Newton	N	$\frac{kg \cdot m}{s^2}$
Energi	Joule	J	$\frac{kg \cdot m}{s^2}$
Spænding	Volt	V	$\frac{kg \cdot m^2}{s^3 \cdot A}$
Ladning	Coulomb	C	$A \cdot s$
Tryk	Pascal	Pa	$\frac{kg}{m \cdot s^2}$
Elektrisk modstand	Ohm	Ω	$\frac{kg \cdot m^2}{s^3 \cdot A^2}$
Elektrisk kapacitans	Farad	F	$\frac{s^4 \cdot A^2}{kg \cdot m^2}$

Det er dog ikke inden for alle områder af naturvidenskaben, hvor vi vælger at regne i rene SI-enheder. Indenfor astronomiens verden er der for eksempel konvention om at regne med masser af objekter i for eksempel Jordmasser eller Solmasser, da det giver et godt udgangspunkt for sammenligning, og skulle disse størrelser skrives i kilogram, ville vi som fysikere ende med at skulle arbejde med meget store tal. Kemikere vælger også ofte at afvige fra at bruge SI-enheder direkte, da det for eksempel er meget nemmere for dem at måle deres opløsninger i liter og mililiter, og det ville besværliggøre deres arbejde, hvis de skulle lave opmålingerne i kubikmeter.

Eftersom vi inden for nogle felter arbejder med tal i specifikke størrelseordener, så bruger vi også *enhedsprefikser* til at angive disse størrelsesordener. Et enhedsprefiks er et symbol, vi sætter foran en enhed til at angive størrelsen af denne enhed, og nogle af disse prefikser kan ses i tabel 2.3.

Tabel 2.3: Enhedsprefikser

Prefiks	Størrelse	Symbol
giga	$1 \cdot 10^9$	G
mega	$1 \cdot 10^6$	M
kilo	$1 \cdot 10^3$	k
mili	$1 \cdot 10^{-3}$	m
mikro	$1 \cdot 10^{-6}$	μ
nano	$1 \cdot 10^{-9}$	n
pico	$1 \cdot 10^{-12}$	p

Prefikserne angiver vores enheds størrelse i videnskabelig notation, som I måske har haft om tidligere i folkeskolen, og dette angiver i en forsimplet udgave, hvor mange "nuller", der kommer efter vores tal. Skriver vi således 5 km er det lig med $5 \cdot 10^3$ m = 5000 m. Ligeledes, hvis vi skriver 5 mm er det lig med $5 \cdot 10^{-3}$ m = 0,005 m. Det fungerer på samme måde, hvis vi har mere end et ciffer i vores tal, så for eksempel er 8,314 km = $8{,}314 \cdot 10^3$ m = 8314 m og 8,314 mm = $8{,}314 \cdot 10^{-3}$ m = 0,008 314 m.

Som I måske har bemærket eller vil bemærke, så bruges disse prefikser for eksempel også, når vi arbejder med lys, da det er nemmere bare at skrive 643 nm, for bølgelængden af noget lys, end at skulle skrive $643 \cdot 10^{-9}$ m og så skulle holde styr på potenserne, når vi sammenligner den bølgelængde med andre bølgelængder.

Udregning med enheder

Når vi regner med enheder, fungerer det praktisk talt ligesådan, som ved normal regning med algebra, som I måske har haft noget om. Det giver således ikke mening at lægge to forskellige enheder sammen, ligesom man heller ikke kan reducere for eksempel $a + b$ mere end dette uden at kende værdierne for a og b. Har vi tilgengæld to af de samme enheder, kan vi sagtens lægge dem sammen og trække dem fra hinanden, så $2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ og $2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ligesom $2b + b = 3b$ og $2b - b = b$.

Når vi ganger og dividere med enheder, er det også ligesom, når vi ganger og dividere i algebra. Således bliver for eksempel $5\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}82\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 49{,}1\,\frac{\mathrm{kgm}}{\mathrm{s}^2}$ ligesom $a \cdot \frac{b}{c^2} = \frac{ab}{c^2}$. Vi får også, at $\frac{3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2\,\mathrm{s}} = 1{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ ligesom $\frac{\frac{a}{b}}{b} = \frac{a}{b^2}$ og $9{,}82\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 5\,\mathrm{s} = 49{,}1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ligesom $\frac{a}{b^2} \cdot b = \frac{a}{b}$.

Når vi skriver vores enheder op efter vores tal, er der konvention for, at vi skriver enheder oprejste og ikke i kursiv, så som $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ og ikke som $\frac{m}{s}$. Folk vil dog sagtens kunne forstå, hvad I mener, hvis I skriver jeres enheder i kursiv, og det er mest et designvalg, som man har valgt at tage indenfor naturvidenskaben.

2.3.3 Betydende cifre

Når vi går ud i verden for at lave nogle er der en begrænsning på, hvor præcist vi kan lave vores målinger. Prøver vi at måle en eller anden afstand, kan vi måske måle den til 1,2 m, hvilket vil sige, at vi har 2 betydende cifre på denne måling. Lykkedes det tilgengæld for os med bedre måleudstyr at måle afstanden til 1,284 m, så har vi nu en måling med 4 betydende cifre. så de betydende cifre siger noget om, hvor præcist vi har bestemt en måling, da vi ikke kan sige noget om størrelsen af vores måling udover de cifre, som vi har bestemt.

Dette har så den betydning, at vi ved udregninger er nødt til at tage højde for vores betydende cifre og præcision af vores målinger, når vi bruger dem til at beregne et resultat. Vi kan nemlig sagtens ved en beregning med målinger med lav præcisoin og få betydende cifre få et resultat med mange cifre i, men de tilsynladende ekstra cifre, der er kommet via beregningen kan ikke bruges til noget, da vi ikke kan sige noget om disse, eftersom vores målinger havde få betydende cifre. Vi kan for eksempel forestille os, at vi har målt længden af en pind til 10 m, og skal vi en trejdedel af denne længde, får vi 3,3 m. Grunden til, at vi får 3,3 m og ikke 3 med en uendelig række af tretaller efterfulgt, er fordi vores originale måling af længden af pinden var på 10 m med to betydende cifre så vores endelige resultat kan ikke selv have mere end to betydende cifre, derfor bliver det 3,3 m, da vi er nødt til at runde vores resultat op ved at se på tallet bagved vores betydende ciffer og runde op eller ned efter det. Havde vi i stedet målt pindens længde til 10,0 m, ville vores resultat have været 3,33 m.

Der er måske nogle der nu tænker, at det første resultat ikke skulle være 3,3 m, men det skulle være 3 m, da vi dividerede 10 m, der har to betydende cifre, med 3, der har et betydende ciffer. Dette er sådan set rigtig nok bortset fra, at 3 i dette tilfælde fremstår som et matematisk heltal og ikke en måling, der kan angives med en større præcision. Så skal vi finde gennemsnitshøjden af alle personer i et klasselokale, vil vi tage summen af alle de tilstedeværendes højde og dividere den med antallet af personer. I dette tilfældet er antallet af personer også et heltal, som vi ikke kan angive med større præcision, da det for eksempel ikke giver nogen mening at sige, der er 11,2 personer tilstede, men det giver mening med 11 personer tilstede. I dette tilfælde kan antallet af person ses som have "uendeligt" mange betydende cifre, og det er således antallet af de betydende cifre på vores højde målinger, der angiver antallet af betydende cifre i vores resultat.

Med betydende cifre, er der således forskel på målingen på 10 m og målingen på 10,00 m, da det sidste er bestemt med større præcision. Der er tilgengæld ikke forskel på 10 m og $0{,}010 \cdot 10^3$ m, da de første nuller ikke siger noget om præcisionen af målingen men størrelsesordenen, og begge målinger har et nul efter ettallet, så de har begge to betydende cifre.

2.3.4 Usikkerheder

Noget andet, som vi skal tage højde for udover præcisionen af vores målinger, er usikkerhederne på vores målinger. Usikkerheder bygger på, at der er forskellige forhold, der gør det svært at angive en præcis værdi for en måling. Skal du for eksempel på øjemål angive længden af en pind, kan du måske komme med et bud, men du ville være rimelig sikker på, at du ikke var helt korrekt med den reelle værdi, og du ville måske endda angive give de svar med "plus minus x". Dette er det samme princip bagved usikkerheder på målinger, da vores måleudstyr har usikkerheder, og det så handler om at mindske disse usikkerheder. I det forrige eksempel kan dette for eksempel gøres ved at bruge en lineal i stedet for øjemål, men du ville stadig være i tvivl om den præcise værdi af din måling, men du ville have en lavere usikkerhed.

Betydende cifre og usikkerheder hænger sammen, men de er ikke det samme, og det kan godt være, at vi måler længde af en pind til mange betydende cifre og derved en høj præcision, men har vores måleværktøj en høj usikkerhed har de mange betydende cifre alligevel ikke nogen betydning.

Laver vi en måling af vindhastigheden til at være på 6,45 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, og vores måleværktøj har en usikkerhed på 0,52 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, ville vi skrive det op sådan her $(6{,}5 \pm 0{,}5)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Grunden til dette er, at det ikke giver mening at angive vores usikkerhed med mere end et betydende ciffer, da vi ikke kan sige, om noget varierer med 0,02 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, når vi ikke engang kan sige om noget varierer med en præcision på 0,5 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Ligeledes er vi nødt til at afrunde vores måling til det ciffer, som er angivet ved voers usikkerhed, da det heller ikke giver mening at kunne være sikker på vores måling på 0,05 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, hvis vi ikke kan sige noget med sikkerhed, der er mindre end 0,5 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Således er vores måling også nødt til at blive afrundet til et passende antal betydende cifre.

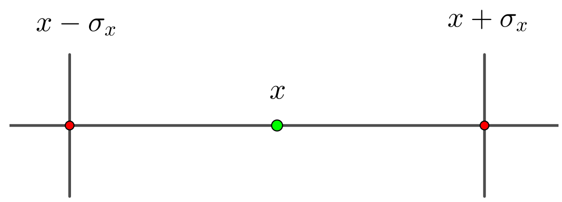
Der er også konvention for, at vi skriver vores målinger og usikkerheder på videnskablig notation, så vi ender med at have et decimaltal med et ciffer foran kommaet. Dette gør det nemlig nemmere at holde styr på usikkerhederne. Så bestemmer vi bølgelængden af noget lys til at være på 643 nm med en usikkerhed på 0,1 nm, kunne det skrives sådan her $(643{,}0 \pm 0{,}1)\,\mathrm{nm} = (643{,}0 \pm 0{,}1) \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}$.

Skal vi skrive et matematisk udtryk op, der indeholder en måling x, er det konvention at skrive den tilhørende usikkerhed ved brug af det græske "sigma", så σ_x, hvilket giver:

$$x \pm \sigma_x$$

Maks-min metoden

En af de simple metoder, som vi kan bruge til at bedømme vores resultater, baseret på de målte usikkerheder, er "maks-min-metoden". Denne metode er bygget ud fra det faktum, at vi med en måling x af et fænomen, med en usikkerhed på σ_x, ikke kan sige, hvilken vej målingen er forskudt i forhold til den "reelle" værdi af fænomenet. Det eneste vi således kan sige er, at den reelle værdi af det målte fænomen må ligge indenfor intervallet af den målte værdi fratrukket usikkerheden og den målte værdi tillagt usikkerheden. Dette er illustreret i figur 2.10.



Figur 2.10: En illustration af usikkerhedsintervallet ved en målling x. Den reelle værdi vil således ligge mellem usikerhederne på den målte værdi.

Så har vi nogle målinger, som vi kan bruge til at beregne et resultat, kan vi regne de største og mindste værdier af målingerne og bruge disse til at beregne alle kombinationerne af vores resultat, og på den måde finde intervallet for resultatet baseret på usikkerhederne af målingerne. Skulle du så prøve at måle dit resultat, skulle det gerne ligge indenfor dit beregnede interval for resultat, hvis afvigelsen fra det beregnede resultat alene skal kunne forklares ved usikkerhederne på dine originale målinger.

Er man smart i forhold til sin beregning af den største og mindste værdi af sit resultat, er det ikke nødvendigt at beregne alle mulige kobinationer af de målte værdier. Skulle I dog være lidt interesseret i, hvilke mere avancerede metoder, som man lærer på universitet til at sige noget om sin usikkerhed på sit resultat, kan I kigge i næste afsnit og ellers springe det.

Bonus: Ophobningsloven

Følgende afsnit er ikke noget, som I skal bruge i løbet af denne weekend, og det er nok først noget som I vil støde på, hvis I tager på universitet. Det er således bare for at pirre jeres nysgerrighed.

I det forrige afsnit blev det beskrevet, hvordan vi kan bruge maks-min metoden til at sige noget om den endelige usikkerhed på vores resultat. Det blev dog måske bemærket, at maks-min metoden er en relativ simpel metode, der hurtigt kan kræve mange beregninger, medmindre man kan være smart og udelukke nogle af de mange kombinationer af usikkerheder.

En anden og lidt mere avanceret metode, som man kan bruge, er at bruge "ophobningsloven". Ophobningsloven tager udgangspunkt i, at usikkerhederne på nogle målte størrelser i et forsøg har større betydning på usikkerheden af det endelige resultat end andre usikkerheder har. Har vi et fysisk udtryk f, som vi vil undersøge, og dette udtryk afhænger af de målte størrelser x og y, så vil vores endelige værdi være lig med vores beregnede værdi $f(x_0, y_0)$ af vores målte størrelser x_0 og y_0, sammen med den samlede usikkerhed σ_f, som kan ses i følgende ligning:

$$f(x_0, y_0) \pm \sigma_f \tag{2.1}$$

Til at beregne den endelige usikkerhed σ_f bruger vi ophobningsloven, som skrevet i nedenstående ligning, hvor f afhænger af x og y:

$$\sigma_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \cdot \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \cdot \sigma_y^2} \tag{2.2}$$

Ophobningsloven ser måske måske en smule avanceret ud, men I skal bare tænkte på, at $\frac{\partial f}{\partial x}$ beskriver, hvor meget, at udtrykket for f ændrer sig, når vi ændrer på værdien for x, og ligeledes beskriver $\frac{\partial f}{\partial y}$, hvor meget, at udtrykket for f ændrer sig, når vi ændrer på værdien for y. Hermed giver det en stor usikkerhed på det endelige resultat, hvis vi har et udtryk, hvor $\frac{\partial f}{\partial x}$ eller $\frac{\partial f}{\partial y}$ er stor, og deres usikkerheder σ_x og σ_y er store, og vi får en lille usikkerhed på det endelige resultat, hvis $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, σ_x og σ_y er små.

Vi kan ud fra dette derfor relativt nemt se, hvilke usikkerheder, der har det største bidrag til den endelige usikkerhed, og vi kan således bruge tid og kræfter på at minimere usikkerheden for den pågældende målte størrelse i vores forsøg.

2.3.5 Øvelser

Følgende opgaver er lavet for at øve jer i begreberne *enheder*, *usikkerheder* og *betydende cifre*. Medmindre I således direkte bliver bedt om at udregne noget, kan I antage, at de numeriske udregninger er rigtige. I behøver således ikke at bruge tid på at regne det efter.

- Opgave 1:
  Omskriv følgende afledte SI-enheder i form af deres SI-enheder:
  Hint: Se tabel 2.2.

$$\mathrm{N} = ? \qquad \mathrm{J} = ? \qquad \mathrm{V} = ? \qquad \mathrm{Q} = ?$$

- Opgave 2:
  Hvilke af følgende udtryk er ikke korrekte i forhold til enheder?

  a) $\cos(30°) \cdot 15\,\mathrm{N} \cdot 7{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 78\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{s}}$

  b) $\frac{1}{2} \cdot 0{,}50\,\mathrm{kg} \cdot (10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2 = 25\,\mathrm{N}$

c) $4{,}66 \cdot 10^{14}\,\mathrm{Hz} \cdot 643 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m} \approx 3{,}00 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}$

d) $(255\,\mathrm{mA})^2 \cdot 300\,\Omega \approx 19{,}5\,\mathrm{W}$

e) $\frac{5 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{C}}{5\,\mathrm{mV}} = 250\,\mathrm{nF}$

f) $0{,}15\,\mathrm{A} \cdot 4500\,\Omega = 675\,\mathrm{V} \cdot \mathrm{s}$

- Opgave 3:
  Udregn enhederne for følgende udtryk og bestem om de repræsenterer en kraft.

a) $1{,}00\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}82\,\mathrm{m/s^2} = 9{,}82\,?$

b) $5{,}000\,\mathrm{kg} \cdot 1{,}625\,\mathrm{N/kg} = 8{,}125\,?$

c) $2000\,\mathrm{kg} \cdot 72\,\mathrm{km/h} = 144\,000\,?$

d) $\left(6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2}\right) \cdot \frac{1{,}99 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}{(1{,}50 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m})^2} \approx 3{,}52 \cdot 10^{22}\,?$

e) $\left(6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2}\right) \cdot \frac{5{,}97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg} \cdot 7{,}34 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}}{3{,}84 \cdot 10^{5}\,\mathrm{m}} \approx 7{,}31 \cdot 10^{31}\,?$

f) $150\,\mathrm{kN/cm} \cdot 10\,\mathrm{cm} = 1500\,?$

- Opgave 4:
  Givet lysets hastighed c har enheden $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, bølgelængden af lyset λ har enheden m, og lysets frekvens f har enheden $\frac{1}{\mathrm{s}}$.

  Opstil et udtryk for c ved at bruge symbolerne λ og f:

$$c = ?$$

- Opgave 5:
  Hvilke af følgende udtryk har det rigtige antal betydende cifre?

a) $\frac{1}{2} \cdot 0{,}530\,\mathrm{kg} \cdot \left(2{,}21\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 \approx 1{,}22\,\mathrm{J}$

b) $0{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 1{,}92\,\mathrm{s} = 0{,}960\,\mathrm{m}$

c) $0{,}003\,00\,\mathrm{kg} \cdot 4{,}184 \cdot 10^{3}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{K}} \cdot 25{,}00\,\mathrm{K} = 313{,}8\,\mathrm{J}$

d) $2{,}32\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 0{,}47\,\mathrm{m}^3 \cdot 9{,}82\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \approx 11\,\mathrm{N}$

e) $\frac{0{,}53\,\mathrm{kg}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}+2{,}35\,\mathrm{kg}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2{,}94\,\mathrm{kg}} \approx 0{,}980\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

f) $\frac{1}{2} \cdot 0{,}56\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \left(6{,}5\,\mathrm{s}^{-1}\right)^2 = 11{,}83\,\mathrm{J}$

- Opgave 6:
  Ranger følgende målinger efter deres usikkerheder med den største usikkerhed først. (Nogle af usikkerhederne kan godt være lige store)

  a) $(2{,}40 \pm 0{,}34)\,\mathrm{m}$

  b) $(13{,}0 \pm 3{,}5)\,\mathrm{cm}$

  c) $(1{,}40 \pm 3{,}93)\,\mathrm{mm}$

  d) $(85 \pm 19) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$

  e) $(279{,}0 \pm 95{,}9) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{cm}$

  f) $(5{,}20 \pm 4{,}25) \cdot 10^{-1}\,\mathrm{cm}$

- Opgave 7:
  Omskriv følgende udtryk så usikkerhederne passer.

  a) $(9{,}820 \pm 0{,}527)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \;\Rightarrow ?$

  b) $(243{,}943 \pm 0{,}594)\,\mathrm{g} \;\Rightarrow ?$

  c) $(299{,}3 \pm 1{,}5)\,\mathrm{mm} \;\Rightarrow ?$

  d) $(3400 \pm 90)\,\mathrm{ml} \;\Rightarrow ?$

- Opgave 8:
  Udregn omregningsfaktoren k fra hastigheder i $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ til $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, så følgende er opfyldt:

  $$k \cdot x\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = y\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \qquad \text{og} \qquad \frac{y\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}{k} = x\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

- Opgave 9:
  Givet trykket p har enheden bar, volumen V har enheden l, stofmængden n har enheden mol og temperaturen T har enheden K. Hvilken enhed har R så i idealgasloven?

  Idealgasloven er givet ved følgende udtryk:

  $$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

2.4 Bonus: Tyngdekraft

I matematikdelen af denne masterclass er fokus på de parabler som en partikel man kaster følger. Her vil vi kort komme ind på en smule af fysikken bag.

Som så mange andre gange i fysikken vil vi her koncentrere os om en lidt idealiseret og simplificeret situation. Du står et sted uden luft, og kaster to objekter med samme hastighed, og i samme retning. De to objekter har forskellig masse, man du observerer at det ikke gør nogen forskel for hvilken bane de følger. Hvordan kan det nu være?

Grunden er, at de begge oplever samme acceleration. Nemlig en konstant nedadrettet acceleration, der skyldes tyngekraften imellem objekterne og jorden. Lad os kalde denne for tyngdeaccelerationen, og betegne den g.

Spørgsmålet er nu hvorfor denne er ens for alle de objekter du kunne finde på at kaste med. For at forklare dette, skal vi kende til to fysiske love og konceptet 'kraft'.

2.4.1 Krafter

Inden for fysik beskæftiger vi os blandt andet med hvordan og hvorfor ting bevæger sig. Her er vigtigt at have tre begreber på plads. Det første er position. Dette er hvor et givent objekt er henne i rummet. Ofte beskriver man dette med koordinater. f.eks. kunne et objekts position være beskrevet med punktet (1,2).

Det andet vi skal kende til er hastighed. Dette er hvor hurtigt positionen af et objekt ændrer sig. For eksempel kunne en bold have en hastighed på 5 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ mod nord. Grunden til at jeg angav en retning, er at hastighed er en vektor. Du behøver ikke vide særlig meget om vektorer for at forså det følgende, bare tænkt på vektorer som tal med en retning. Man kan også se dem som pile, med en længde og en retning.

Det sidste vi skal kende, er acceleration. Jeg nævnte allerede begrebet lidt tidligere, da jeg indførte tyngdeaccelerationen. Acceleration er ligesom hastighed en vektor, og beskriver hvor hurtigt hastigheden af et objekt ændrer sig.

Kender man et objekts startposition, starthastighed og acceleration, kan man forudsige hvordan det vil bevæge sig, derfor er det jo interessant at vide hvorfor og hvordan et objekt accelereres. Her indfører man begrebet kraft. Krafter er det som får et objekt til at ændre hastighed. Det er nu tid til at se nærmere på denne sammenhæng. For at forstå denne, må vi forstå to fysiske love.

2.4.2 To fysiske love

Den første fysiske lov vi vil præsentere, kaldes for Newtons anden lov. Det er denne der kæder begrebet om acceleration og kraft sammen.

$$F = m \cdot a$$

Hvor F er den samlede kraft på objekter, også kaldet den resulterende kraft, m er inertien af objektet og a er accelerationen. Her indførte vi et nyt begreb, nemlig inerti. Dette er netop hvor meget et objekt modstår acceleration. Et objekt med høj inerti bliver accelereret mindre end et objekt med lavere inerti, der påvirkes af samme kraft.

Det er nu tid til at indføre den anden fysiske lov vi skal bruge. Denne beskriver tyngekraften imellem to objekter.

$$F = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$$

Hvor $G = 6{,}673\,84 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}}$ er den universelle gravitationskonstant, m er massen af det ene objekt, M er massen af det andet objekt, og r er afstanden imellem massemidtpunkterne af de to objekter. (Prøv at tjekke enhederne i dette udtryk.)

Du har måske lagt mærke til at jeg har brugt samme symbol for et objekts inerti, og dets masse. Det er fordi de er ens! (så længe vi bevæger os med meget mindre end lysets hastighed.) Det er netop dette mærkværdige fænomen, der gør at alt accelereres lige meget af tyngekraften.

For at se dette, så forestil dig at vi betrager en bold med massen m, og jorden med massen M. Vi siger at tyngekraften er den eneste kraft der virker på bolden, så F i de to ovenstående ligninger må være lig hinanden:

$$m \cdot a = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$$

Deler på begge sider med m:

$$a = G \cdot \frac{M}{r^2} \tag{2.3}$$

Der står nu tilbage at accelerationen af bolden ikke har noget med boldens masse at gøre, men kun med jordens masse, afstanden imellem bolden og jordens centrum, og en konstant.

Der er dog et lille problem. Kaster man bolden op i luften ændres r, så accelerationen af bolden ændres også, alt efter hvor højt over jorden den er. Lad os sige at jorden har radius R, og bolden er et stykke h over jordens overflade:

$$a = G \cdot \frac{M}{(R+h)^2}$$

Det er her man som fysiker laver en approksimation.

Jordens radius er 6371km, dens masse er $5{,}972 \cdot 10^{24}$ kg og et menneske kaster nok ikke bolden meget højere op end 50 m. Prøv at regne accelerationen af bolden imens den er ved jordens overfalde, og imens den er 50 meter over jordens overflade. Hvor stor er forskellen?

Du skulle gerne få at den var ekstremt lille. Derfor kan man med god tilnærmelse sige at tyngdeaccelrationen nær jordens overflade er konstant. Det er denne konstante tyngdeaccelration vi kalder g.

I Danmark er $g = 9{,}82\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

2.5 Øvelsevejledning

Formål

I dette forsøg skal gitterkonstanten af et ukendt gitter bestemmes. Dette gøres ved at sende laserlys med en kendt bølgelængde igennem gitteret, og måle vinklen ud til ordenspletterne.

Materialer

- Laser
- Optisk gitter
- Lineal
- Holder

Opstilling

På figur 2.11 ses et forslag til den eksperimentelle opstilling.

Figur 2.11: Forslag til opstilling

Sikkerhed

Det eneste farlige i dette forsøg er laserlyset, der kan skade øjne, hvis laseren rettes mod dem. Vær derfor forsigtig med laseren, og hav den kun tændt, når der er brug for det.

Fremgangsmåde

Gitteret sættes fast i holderen, og holderen sættes i en passende afstand til en flad skærm. Afstanden imellem gitter og skærm måles og skrives ned. (Husk usikkerhedder!) Laserlyset sendes igennem gitteret, og afstanden ud til de forskellige ordenspletter måles. (Husk igen usikkerhedder!)

For at øge præcisionen kan forsøget gentages med en anden laser.

Resultater

Beregn gitterkonstanten af gitteret med gitterligningen, og brug maks-min-metoden til at bestemme usikkerheden af jeres måling.

Data

Her kan I notere jeres målinger:

Afstand mellem gitter og skærm: ______________________

Tabel 2.4: Tabel til rådata

Laser	Orden	Afstand til plet

Kapitel 3

Kemi

3.1 Mængdeberegning

3.1.1 Hvad er mængdeberegning?

Mængdeberegning er en af de vigtigste discipliner inden for kemi. Den gør det muligt at sætte tal på kemiske forbindelser og reaktioner herunder hvor mange molekyler, der er af et bestemt stof. Der er dog et mindre problem. Molekyler er meget små. Der findes dog en simpel løsning: arbejd med tilstrækkeligt mange af dem!

3.1.2 Centrale begreber og enheder

De fleste af begreberne inden for mængdeberegning er velkendte og intuitive, f.eks. masse m. Et mindre velkendt begreb er stofmængden n (tænk på "number"), som angiver antallet af molekyler i enheden mol.

Hvad er et mol?

Et mol er blot en mængde ligesom et dusin (12) eller en snes (20). En mol er dog noget større, helt præcist er én mol lig $6,02214076 \cdot 10^{23}$ (det er ikke nødvendigt at have alle cifrene med, når I regner!). Der er en rigtig god grund til, at en mol har netop denne størrelse. I Det Periodiske System kan man se de vægtede atommasser for alle grundstofferne. F.eks. har Carbon en atommasse på 12,011 u. Et mol er da defineret således, at 1 mol carbonatomer vejer 12,011 u. Denne sammenhæng er ikke unik for carbon, den gælder for alle stoffer. Så 1 mol dihydrogen vejer f.eks. 2,16 u, fordi et dihydrogen-molekyle vejer 2,16 u (2 gange atommassen af hydrogen) og således for alle atomer og forbindelser.

Molarmassen M

Nu da vi ved, hvad et mol er, giver det mening at definere molarmassen M. M angiver, hvor mange g et stof vejer for hvert mol af stoffer. M er oftest den nemmeste størrelse at finde for et stof i mængdeberegning. For et grundstof slår man bare atommassen op i Det Periodiske System og erstatter enheden u med g/mol. For en forbindelse er fremgangsmåden den samme. Vi tager et eksempel med kalk, $CaCO_3$. Atommassen for Ca, C og O er hhv. 40,078 u, 12,011 u og 15,999 u. Dermed er massen af et kalk-molekyle givet ved $40,078\text{u} + 12,011\text{u} + 3 \cdot 15,999\text{u} = 100,086\text{u}$, og molarmassen er $M = 100,086\text{g/mol}$.

Stofmængdekoncentration c

Det sidste begreb, vi skal have styr på, er stofmængdekoncentrationen c. Denne størrelse er relevant, når man arbejder med opløsninger. c er antallet af mol stof per liter opløsningsmiddel (som oftest vand), d.v.s. $c = \frac{n}{V}$. Denne definition er meget intuitiv, da koncentrationen jo bliver større, jo flere molekyler af et stof, du kommer i dit opløsningsmiddel.

Når man ser på kemikalierne i et kemilokale, vil der oftest stå en koncentration angivet i M. Men M er da ikke en koncentration? Jo, det er det faktisk! Dette skyldes, at man ofte forkorter enheden mol/L til M, som udtales "molær". Dette skaber normalt forvirring, første gang man arbejder med det, men man lærer hurtigt at adskille det. Hvis f.eks. der står 2,00 M på en flaske saltsyre, betyder det, at saltsyren har koncentrationen $c = 2,00\text{mol/L}$, d.v.s. den er "2 molær".

Begrænsende faktor

Den begrænsende faktor er den reaktant, der først slipper op, hvis man lader reaktionen forløbe fuldstændigt. Den begrænsende faktor sætter altså grænsen for, hvor meget stof, der kan dannes på den højre side af reaktionspilen. Når man skal bestemme den i et konkret tilfælde, ser man på, hvilket stof på venstre side af reaktionspilen, der er har mindst stofmængde, når der er taget højde for forholdet mellem reaktanterne. En god måde at illustrere konceptet, kan ses på nedenstående figur:

Figur 3.1: Figur til illustration af begrænsende faktor (kilde: [4])

Opsummering af begreberne

Herunder ses en liste over de begreber, vi arbejder med:

- m: massen målt i g
- n: stofmængden målt i mol
- M: molarmassen målt i g/mol
- V: volumen målt i L
- c: stofmængdekoncentrationen målt i mol/L
- Begrænsende faktor: den reaktant, der først slipper op, idet reaktionen får lov at forløbe helt

3.1.3 Formler

Nu da de centrale begreber er på plads, kan vi begynde at sætte formler på dem! Massen m er givet som produktet af molarmassen og stofmængden:

$$m = M \cdot n$$

Dette giver mening intuitivt, da massen bliver større, jo mere et mol af molekylet vejer og jo flere molekyler, der er. Ofte er det nødvendigt at finde stofmængden n. Så må man dividere begge sider med molarmassen:

$$m = M \cdot n \Leftrightarrow n = \frac{m}{M}$$

Bliver man i tvivl, kan man altid tjekke, at enhederne går ud med hinanden. Arbejder man med en opløsning, hvor man kender volumenet og koncentrationen, kan stofmængden beregnes således:

$$n = c \cdot V$$

I nogle tilfælde kan man komme ud for, at V eller M (det vil sige stoffet) er ukendt. Så må man isolere disse størrelser på tilsvarende vis.

3.1.4 Mængdeberegning i kemiske reaktioner

Mængdeberegninger laves sjældent helt isoleret. Ofte regner man på de forskellige stoffer i en kemisk reaktion. Vi tager et konkret eksempel med respiration. Det afstemte reaktionsskema ser sådan ud:

$$C_6H_{12}O_6 + 6\,O_2 \longrightarrow 6\,CO_2 + 6\,H_2O$$

Vi forestiller os, at vi har 10 g glukose og 0,25 mol dioxygen. Hvor mange g CO_2 og H_2O dannes der? En god måde at løse dette problem er at opskrive en tabel med al den information, vi har givet og derefter beregne alle de manglende størrelser. Se tabellen herunder:

	$C_6H_{12}O_6$	+	6 O_2	→	6 CO_2	+	6 H_2O
m	10,00 g						
M							
n			0,25 mol				

Vi ved, hvordan man regner molarmasser ud, så det starter vi med! Vi finder molarmassen for glukose ved at slå op i det periodiske system og lægger masserne for hvert atom sammen:

$$\begin{aligned} M_{C_6H_{12}O_6} &= 6 \cdot 12,011\text{g/mol} + 12 \cdot 1,008\text{g/mol} + 6 \cdot 15,999\text{g/mol} \\ &= 180,156\text{g/mol} \end{aligned}$$

Ved at bruge samme fremgangsmåde for de andre stoffer, kan tabellen udfyldes således:

	$C_6H_{12}O_6$	+	6 O_2	→	6 CO_2	+	6 H_2O
m	10,00 g						
M	180,156 g/mol		31,998 g/mol		44,009 g/mol		18,015 g/mol
n			0,25 mol				

Når man har to størrelser i en søjle, må man nødvendigvis kunne beregne den tredje. Derfor beregner vi nu massen af dioxygen og stofmængden af glukose:

$$n_{C_6H_{12}O_6} = \frac{10\text{g}}{180,156\text{g/mol}} = 0,056\text{mol}$$

$$m_{O_2} = 0,25\text{mol} \cdot 31,998\text{g/mol} = 8\text{g}$$

Nu ser vores tabel sådan ud:

	$C_6H_{12}O_6$	+	6 O_2	→	6 CO_2	+	6 H_2O
m	10,00 g		8,00 g				
M	180,156 g/mol		31,998 g/mol		44,009 g/mol		18,015 g/mol
n	0,056 mol		0,25 mol				

For at komme videre herfra, skal vi have fastlagt den begrænsende faktor. Man kunne måske tro, at det var glukose i dette tilfælde, da stofmængden af glukose er mindre end stofmængden af dioxygen, men se nærmere på forholdet mellem dioxygen og glukose. For hvert glukosemolekyle skal der bruges 6 dioxygenmolekyler, og eftersom $0,25\text{mol} < 6 \cdot 0,056\text{mol}$, må dioxygen være den begrænsende faktor.

Da dioxygen er den begrænsende faktor, og det står i forholdet 1:1 med CO_2 og H_2O (tallene i reaktionsligningen er ens for disse stoffer), må stofmængden af CO_2 og H_2O være det samme som for dioxygen:

	$C_6H_{12}O_6$	+	6 O_2	→	6 CO_2	+	6 H_2O
m	10,00 g		8,00 g				
M	180,156 g/mol		31,998 g/mol		44,009 g/mol		18,015 g/mol
n	0,056 mol		0,25 mol		0,25 mol		0,25 mol

Vi kan nu beregne masserne af de resterende stoffer med samme fremgangsmåde, som vi plejer:

	$C_6H_{12}O_6$	+	6 O_2	→	6 CO_2	+	6 H_2O
m	10,00 g		8,00 g		11,002 g		4,504 g
M	180,156 g/mol		31,998 g/mol		44,009 g/mol		18,015 g/mol
n	0,056 mol		0,25 mol		0,25 mol		0,25 mol

Vi kan nu konkludere, at massen af CO_2 og H_2O er hhv. 11,002 g og 4,504 g, når reaktionen er fuldendt. Undervejs fandt vi ud af, at dioxygen er den begrænsende faktor. Havde der været $6 \cdot 0,056\text{mol} = 0,336\text{mol}$ dioxygen til stede, havde stofmængderne for glukose og dioxygen været såkaldt ækvivalente, og reaktionen ville netop kunne fuldendes uden rester af reaktanter.

3.2 Uorganisk analyse

Kvalitative uorganisk analyser har til formål at kunne undersøge små prøver ved hjælp af primært fældningsreaktioner, redoxreaktioner og udkogninger. I dette forløb vil vi primært arbejde med fældningsreaktioner.

3.2.1 Fældnings reaktionen

En fældningsreaktionen sker, når to opløsninger blandes, og der fås et bundfald. Dette bundfald fremkommer enten ved, at der dannes et salt, som har et lavere opløselighedsprodukt og er mere stabilt som salt end i opløsning, eller fordi der dannes et tungtopløseligt kompleks. I den følgende reaktion ses en fældningsreaktion:

$$AgNO_3(aq) + KCl(aq) \longrightarrow AgCl(s) + K^+(aq) + NO_3^-(aq)$$

I reaktionen ses det at der bliver dannet AgCl(s), da det er mere stabilt som salt end, som opløsning. Til gengæld dannes ikke fast KNO_3, da det er mere stabilt som opløsning. Et salt består af to dele, en kation (den positive ion) og en anion (den negative ion), og et salt er altid neutralt ladet.

Anvendelighed

Til kvalitativ analyse kan fældningsreaktioner bruges ud fra, at man har tabeller over hvilke ioner, der er tungtopløselige med hinanden, og hvilke der er letopløselige. Definitionen på, om noget er letopløseligt eller tungtopløseligt er som følgende: Hvis der ved standardbetingelser (I skal tænke på det som en temperatur på 25° C og 1 atmosfæres tryk) kan opløses mere end to gram per liter, er det letopløselig, ellers er det letopløseligt.

Anvendelse af let/tungt-opløselighedsskema

På følgende figur ses et diagram over, hvilken blanding, der danner bundfald og hvilken, der ikke gør:

Vender vi tilbage til eksemplet fra før, sker der følgende reaktion:

$$AgNO_3(aq) + KCl(aq) \longrightarrow AgCl + KNO_3 \qquad \{1\}$$

For at finde ud af, om de to salte er tungt- eller letopløselige, ses der på tabellen. Her ses, at Ag er tungt med Cl^{-1}, det vil sige, at det er tungtopløseligt. Der ses på KNO_3. Her ses det, at et ude for K^+ og ${NO_3}^-$ står l, det vil sige, at det er letopløseligt.

3.2.2 Metode til at løse identifikations-forsøget

En god måde at løse forsøget er at opstille alle de reaktioner, der vil ske og forudsige, hvilke salte der vil udfælde med hinanden og derefter kigge på, hvor mange gange det vil forventes, at hver opløsning vil give et tungtopløseligt produkt. Derefter kan man så gå grundigt til værks og udelukke en del ved blot at se på, hvor mange let- og tungtopløselige udfældninger den laver.

	NH_4^+	Na^+	K^+	Mg^{2+}	Zn^{2+}	Cu^{2+}	Fe^{2+}	Fe^{3+}	Ca^{2+}	Ba^{2+}	Pb^{2+}	Ag^+
NO_3^-	L	L	L	L	L	L	L	L	L	L	L	L
Cl^-	L	L	L	L	L	L	L	L	L	L	T	T
Br^-	L	L	L	L	L	L	L	L	L	L	T	T
I^-	L	L	L	L	L	-	L	-	L	L	T	T
SO_4^{2-}	L	L	L	L	L	L	L	L	T	T	T	T
CO_3^{2-}	L	L	L	T	T	-	T	-	T	T	T	T
OH^-	L	L	L	T	T	T	T	T	T	L	T	-
S^{2-}	L	L	L	T	T	T	T	T	T	T	T	T
PO_4^{3-}	L	L	L	T	T	T	T	T	T	T	T	T

Figur 3.2: Tabel over tungt- og letopløselige salte(kilde: astra)

En anden teknik kan også være at udnytte observationer, f.eks. at det begynder at boble. Det kunne være et eksempel på, at der bliver dannet CO_2:

$$CaCO_3 + 2\,HNO_3 \longrightarrow CO_2 + Ca^{2+} + H_2O + 2\,NO_3^- \qquad \{2\}$$

Farver er også meget vigtige at notere, da det være tegn på, hvilken reaktion der er sket, både opløsningens farve før, det bliver blandet, men også efter. Derefter er det også meget vigtigt at se, hvilken farve bundfaldet giver, da f.eks. sulfidbundfald som regel er sorte, og AgCl er hvidt.

Ellers kan man også komme med et kvalificeret gæt (hvis man f.eks. ved, at der er to muligheder for et givet salt) og se, hvor det bærer hen. I sidste ende handler det om at kunne udelukke alle muligheder undtagen det rigtige svar.

3.3 Idealgasligningen

Idealgasligningen er som følgende.

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \tag{3.1}$$

Hvor p er tryk, V er volumen, n er stofmængde, R er gaskonstanten, og T er absolut temperatur (måles i K, som udtales "Kelvin"). Denne formel kan bruges til alle gasser, der har en temperatur og et tryk, der minder om standardbetingelser. Da R er en konstant, kan enhver værdi findes ved, at man kender tre af de andre værdier. R's værdi afhænger naturligvis af enhederne. Herunder ses en tabel med de relevante værdier og tilhørende enheder for R:

Tabel 3.1: R's værdier til forskellige enheder (Kilde: Wikipedia)

Værdier for R	Enheder
0,083144598	$L \cdot bar \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$
8,3144598	$m^3 \cdot Pa \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$
8,3144598	$J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$

Inden vi viser et eksempel på anvendelse af idealgasligningen, skal vi have en ting på plads omkring T. T er absolut temperatur, dvs. 0 K er den laveste mulige temperatur. Kelvin-skalaen er dermed en smule anderledes en den skala, vi er vant til at arbejde med, nemlig Celsius-skalaen, hvor $-273,15°$ C er den laveste temperatur. Heldigvis er Kelvin-skalaen lavet sådan, at graderne har samme størrelse (en stigning på 1 K er præcist det samme som en stigning på 1° C). Dermed kan man regne mellem de to skalaer således:

$$T = t + 273,15 \tag{3.2}$$

Hvor t er temperaturen målt i grader C. Vi viser nu et eksempel på anvendelse af idealgasligningen.

I en lukket beholder med ren helium er der et tryk på 1 bar, den har volumen 1 L, og en temperatur på 27 °C. Vi vil beregne stofmængden. Først beregnes T:

$$T = 27°C + 273,15K = 300,15K \tag{3.3}$$

Vi anvender idealgasligningen til at isolere for n og der indsættes de kendte værdier:

$$n = \frac{p \cdot V}{R \cdot T} = \frac{1bar \cdot 1L}{0,08314bar \cdot L \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1} \cdot 300,15K} = 0,04mol \tag{3.4}$$

3.4 Identifikationsøvelse

Vi er blevet givet 6 forskellige opløsninger. Vi ved, hvad de er, men hvilken er hvilken? Opløsningerne er:

1. $CuSO_4$ 2M
2. Na_2CO_3 2M
3. HNO_3 4M
4. $Ag(NO_3)$ 2M
5. $BaCl_2$ 2M
6. NaCl

Formål

Formålet er at kunne bestemme, hvad opløsning a,b,c,d,e og f indeholder.

Sikkerhed

Salpetersyre HNO_3 er ætsende og kan lave mærker på huden, så sørg for at være forsigtig med alle opløsningerne!

Metode

Der bliver udleveret en række reagensglas. Derefter blandes hver prøve med hinanden indbyrdes (i alt 15 blandinger). For hver reaktion, der finder sted, noteres der, om der kommer bundfald, farve eller bobler. Dette noters i tabellen under resultater.

Resultater

Tabel 3.2: Tabel til observationer fra fældningsforsøget.

	1	2	3	4	5	6
1	-					
2	-	-				
3	-	-	-			
4	-	-	-	-		
5	-	-	-	-	-	
6	-	-	-	-	-	-

I den følgende tabel kan I skrive jeres bud på, hvad hver opløsning er:

Tabel 3.3: Tabel til svar

Nummer prøve	Bogstav	Stof
1		
2		
3		
4		
5		
6		

3.5 Titrerings forsøg

3.6 Formål

Vi skal finde stofmængden af jern(II)opløsningen, og dette skal gøres ved titrering.

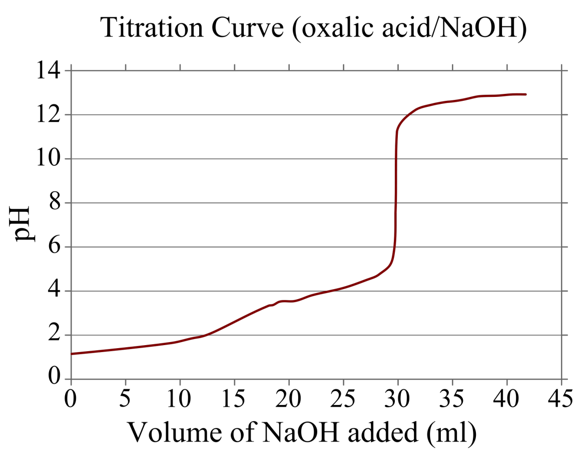
3.7 Teori

En titrering fungerer ved, at man har en prøve der får tilsat en titrator, og ved aflæsning af ækvivalenspunktet, kan man finde stofmængden af prøven.

Et eksempel på dette kan være titrering af en syre, såsom eddikesyre. Her bruges eddikesyren som prøve og en base, f.eks. NaOH, som titrator (se opgaverne). I dette tilfælde vil edikkesyre reagere med NaOH således:

$$CH_3COOH \; + OH^- \longrightarrow H_2O \, + \, CH_3COO^-(\text{acctat}) \qquad (3.5)$$

Når dette sker, vil pH stige gradvist, og noget af acetaten vil reagere med vandet. Lige før, at man man når ækvivalenspunktet, stiger pH kraftigt, da den aktuelle stofmængdekoncentration af eddikesyre er meget lav. Efter ækvivalenspunktet stiger pH igen meget kraftigt, da OH^- nu reagerer direkte med vandet. På den følgende figur ses der en titreringskurve af en svag syre:



Figur 3.3: Titreringskurve

På figuren ses det blandt andet, at grafen er fuldstændig lodret, der hvor ækvivalenspunktet er. Når man har fundet ækvivalenspunktet, kan man aflæse, hvor meget volumen, man har brugt af sin titrator. Derefter kan man udregne den, stofmængde der er blevet brugt af titratoren. Ækvivalenspunktet er der, hvor der er tilføjet en ækvivalent mængde af titratoren i forhold til, hvad den formelle stofmængde var af prøven. Her vises et eksempel:

Der blev brugt 20 mL af titratoren ved ækvivalenspunktet. Titratoren har en koncentration på 0,5 M. Stofmængden af prøven findes:

$$n_{titranden} = n_{titrator} = c_{titrator} \cdot V = 0,5\text{M} \cdot 0,02\text{L} = 0,01\text{mol} \tag{3.6}$$

3.7.1 Selve titreringen

Vi bestemmer mængden af jern(II) i en ukendt opløsning, dette opnås ved at lave en titrering, hvor man bruger kaliumpermanganat som tritrator. Reaktionen er følgende:

$$5\,Fe^{2+} + MnO_4^- + 8\,H^+ \longrightarrow Mn^{2+} + 5\,Fe^{3+} + 4\,H_2O$$

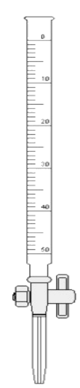
Bemærk, at fra reaktionsligningen ses det, at forholdet mellem titratoren og jern(II) er 5 til 1.

3.8 Metode

3.8.1 Materialer

- Burette fra figur 3.4a
- 1 50 mL bægerglas
- 2 100 mL bægerglas
- 2 stk 10 mL fuld pipette

(a) bægerglas



(b) Burette

3.8.2 Kemikalier

- Fe(II) Opløsning

- Kaliumpermangant

- Svovlsyre

3.8.3 Opsætning

Opløsninger, der skal bruges til både titranden og titrator, vil stå ved instruktors kateter. Titratoren overføres til et 100 mL bægerglas, og titranden overføres til et 50 mL bægerglas ved hjælp af en 10 mL fuldpipette. Din instruktor vil vise dig, hvordan man gør dette. Når titratoren og titranden er blevet fyldt i bægerglassene, tages det over til jeres bord.

3.8.4 Fremgangsmåde

100 mL bægerglasset med titrator tages og bruges til at fylde buretten op.
Det er meget vigtigt, at burten står til at være lukket!
100 mL bægerglasset med titratoren stilles under burten, og der åbnes kort for buretten for derefter at lukke den igen. Dette er fordi, at man gerne vil have alle luftbobler ud.

Bægerglasset med titranden stilles under burten, og der tilføjes nogle dråber indikator. Man noterer startvolumenet af titratoren. Åbn for buretten og sørg for, at dråbehastigheden er i et passende tempo, ca. to dråber i sekundet.
Når der begynder at komme farve i bægerglasset, sættes dråbehastigheden ned til ca. en halv dråbe per sekund. Der holdes nu godt øje med farveskift.
Man er først ved ækvivalenspunktet, når farven efter et minut endnu ikke er forsvundet, idet den sidste dråbe tilsættes.
Når ækvivalenspunktet er nået, noteres det i data-afsnittet.
Titreringen gentages en til gang, hvor der igen hentes 10 mL af titranden, og buretten atter fyldes op, og samme fremgangsmåde benyttes.

3.9 Data

Tabel 3.4: Tabel til rådata

Titreringsforsøg	Volumen brugt	Koncentration af titrator

3.9.1 Databehandling

I dette afsnit kan der indsættes de behandlede data i den følgende tabel:

Tabel 3.5: Tabel til behandlet data

Titreringsforsøg	Stofmængde af titrator	Stofmængde af titrand

Kapitel 4

Biologi

4.1 Introduktion

I dette kompendium forsøges der at sætte læseren ind i nogle dele af biologien, og give nogle redskaber til videre arbejde med biologi. Dette er ikke et direkte billede af, hvad biologi på gymnasiet er, da faget biologi ofte er et sekundært fag og derfor bliver drejet i forhold til studieretning. Biologien i dette kompendium skal derfor ses som en repræsentation af biologi, når den står alene, men det er vigtigt at huske, at der ligesom med andre fag kan være både sjove og kedelige sider! Hvis der opstår tvivl omkring enten kompendiet eller biologi på gymnasiet, kan underviserne altid spørges.

Biologien er studiet af alt levende. Det omfatter både dyrs adfærd og anatomi, planters opbygning, svampe, små bakterier, mekanismer i celler og klimaet. På den her masterclass vil der blive fortalt om frugter, fylogeni og blæksprutter.

4.2 Frugter

Hvad tænker man på, når man siger 'frugt'? Måske tænker man på et æble eller en pære, eller måske en vandmelon. Man tænker hvert fald på noget sødt og friskt, men der er faktisk flere frugter, der ikke kan spises og en del frugter, som man til hverdag kalder for grøntsager.
Definitionen på en frugt er: en enhed der gror ud fra en blomst på en plante. Altså er alt, der gror fra en blomst, en frugt. Planten bruger frugten til at sprede sine frø, men strategien er forskellig, alt efter hvilken type frugt det er. Der findes fire typer frugter, og de kan ses i tabel 4.1.

Tabel 4.1: Forskellige frugttyper

	Tør	**våd**
Mange Frø	Kapsel	Bær
Få frø	Nød	Stenfrugt

Ud fra figuren kan vi tage tomatplanten som et eksempel. En tomat gror der, hvor blomsten sad, og der er frø i, og derfor er det en frugt. En tomat er våd, og derfor må det enten være et bær eller en stenfrugt.

Tomater har også mange frø, og må derfor være et bær. Et eksempel på en kapsel er for eksempel en ært eller en kapsel med birkesfrø i. Der er også nogle gange beskrevet en femte frugttype, der kaldes kernefrugt. Det er for eksempel æbler og pærer, som kan være svære at putte i en af de andre kategorier.

De fleste frugter er delt op i tre dele. Exocarpen er yderst – den svarer til skindet på en blomme. Mesocarpen er i midten – den svarer til den søde, bløde del af en blomme. Endocarpen er inderst – på en blomme svarer det til stenen. Inde i endocarpen ligger frøet, som består af en frøskal, en frøhvide og kimen, som er "selve frøet", altså det der spirer og bliver til en ny plante. [2]

4.2.1 Opgaver

1. Hvilken slags frugt er en hasselnød?

2. Hvilken slags frugt er en mandel?

3. Hvilken slags frugt er en agurk?

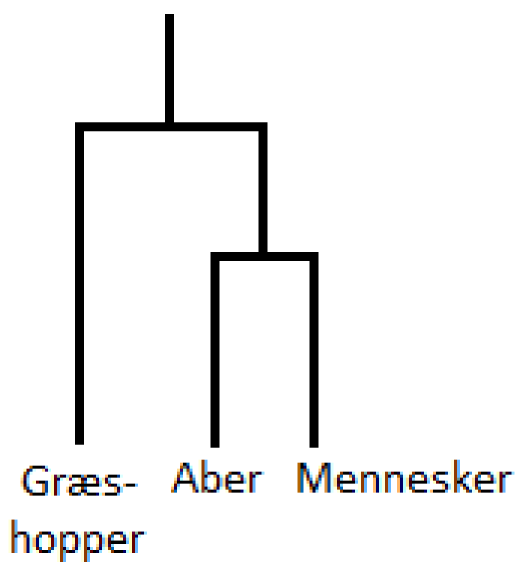
Figur 4.1: Frugter

4. Som nævnt før bruges frugter til at sprede frø. Planter med bær håber, at et dyr kommer og spiser deres frugter, når de er modne, og frøene i frugten passerer så igennem fordøjelsen og bliver skidt ud igen – oven i købet med ekstra gødning. Hvilke strategier kunne de andre frugter gøre brug af?

5. Frøet består af en skal, en hvide, og en kim. Hvilke funktioner kunne de tre dele have?

4.3 Fylogeni

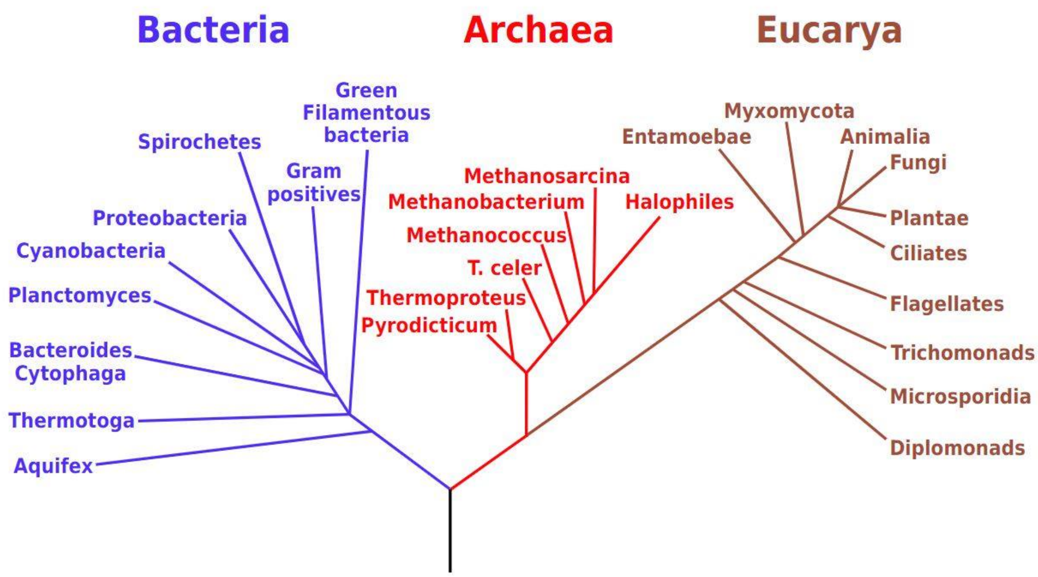
Fylogeni er studiet af slægtskab. Det er dog ikke slægtskabet mellem individer, men slægtskabet mellem arter eller grupper af organismer. Derfor kan vi med fylogenien se på hvordan forskellige arter er udviklet igennem tidens løb i forhold til hinanden. For eksempel kan vi undersøge slægtskabet mellem mennesker, aber og græshopper. Der vil man finde, at mennesker er nærmere beslægtet med aber, end vi er med græshopper. Når man taler om fylogeni, kan det dog være svært at visualisere, hvis bare man beskriver slægtskabet, og derfor er fylogeni næsten altid afbilledet i fylogenetiske træer. Det fylogenetiske træ for mennesker, aber og græshopper kan ses på figur 4.2



Figur 4.2: En fylogeni over slægtskabet mellem græshopper, aber og mennesker.

Ud fra dette træ kan det ses, at aber og mennesker er nærmere beslægtet med hinanden end med græshopperne, fordi stregerne mødes tidligere. Man kan forestille sig, at jo længere op af figuren man går, jo mere tilbage i tiden går man. Der hvor stregerne fra aber og mennesker mødes kaldes den sidste fælles stamform for aber og mennesker.

Livets træ er et populært navn for et fylogenetisk træ, der beskriver alle kendte organismer. En version af livets træ kan ses på figur 4.3. Det viser meget overordnede kategorier i stedet for mindre grupper eller arter.

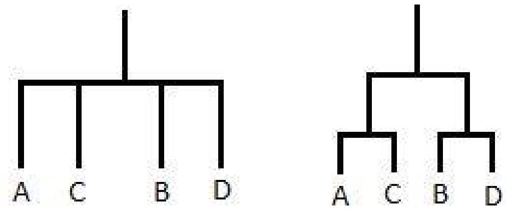


Figur 4.3: Livets fylogenetiske træ

Generelt deler man alle former for liv i de tre riger: bakterier, arkæer, og eukaryoter. Animalia – dyr, Fungi – svampe, og Plantae – planter, er nok de mest kendte navne på dette træ, og de kan alle findes under eukaryoterne. En anden meget vigtig gruppe på dette træ er cyanobakterierne. Selvom de er bakterier, er de de første fotosyntetiserende organismer på Jorden.

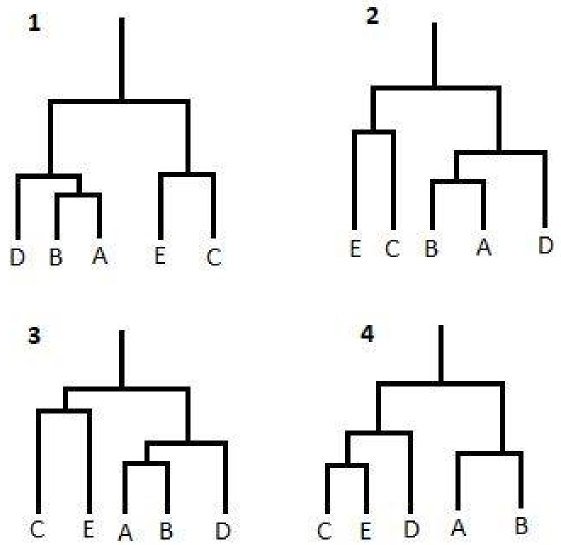
4.3.1 Opgaver

1. Hvad er forskellen mellem slægtskabet på arterne A, B, C, og D i de fylogenetiske træer på figur 4.4



Figur 4.4

2. Hvilke af de fylogenetiske træer i figur 4.5 viser den samme fylogeni - slægtskab?

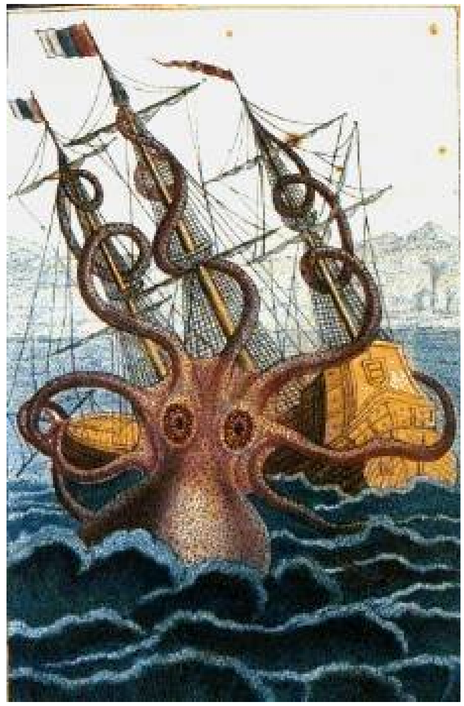


Figur 4.5

3. Tegn et fylogenetisk træ ud fra følgende beskrivelse: Art C er tættest beslægtet med art A. Art D er tættere beslægtet med art A end med art B. Art E er tættest beslægtet med art D.

4.4 Blæksprutter

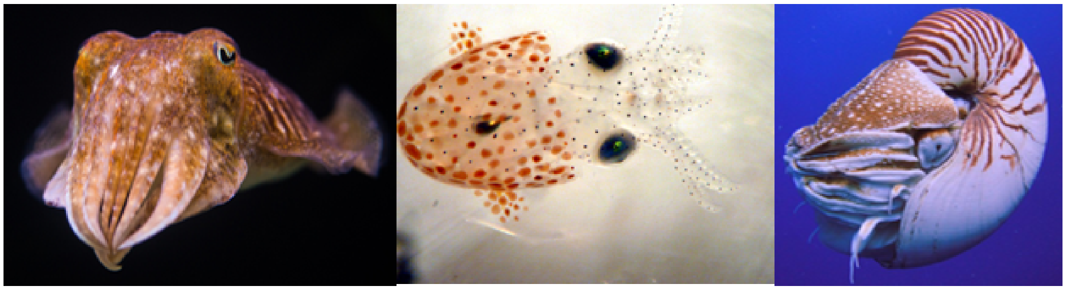
De mest populære historier omkring blæksprutter handler om gigantiske eksemplarer som for eksempel Kraken. Disse blæksprutter kom op af dybet og kastede sig over skibe og dræbte alle om bord.



Figur 4.6: Kraken den ottearmede blæksprutte

Men disse historier kan også have haft noget bund i virkeligheden. Blæksprutten på figur 4.6 er en ottearmet blæksprutte, men en af de største blæksprutter der er blevet målt er en tiarmet blæksprutte – kæmpeblæksprutten – der kan blive op til 18 m lang. Til sammenligning er Rundetårn 35 m, så der skal kun to kæmpeblæksprutter til at nå op på toppen af Rundetårn. Der findes også kolossalblæksprutten, som er endnu større, men der er ikke blevet fanget nok af dem til at kunne sige noget om deres generelle størrelse. Kæmpeblæksprutten befinder sig helt ned til 600 m dybde, mens kolossalblæksprutten højst sandsynligt jager endnu længere nede. En normal ubåd dykker kun 250 m ned.

De blæksprutter, man normalt beskæftiger sig med, er typisk ikke så store, men de er mindst ligeså spændende. På figur 4.7 herunder kan det ses hvor mange forskellige typer af blæksprutter. der findes ud over de tiarmede og ottearmede blæksprutter.



Figur 4.7: fra venstre: cuttlefish (engelsk), cuttlefish (engelsk), nautilus

Blæksprutter er bløddyr og hedder på latin Cephalopoda. De er karakteriseret ved at have et antal fangarme omkring munden som de bruger til at fange og håndtere deres bytte. Blæksprutter er kendt som utrolig intelligente dyr, og de har været på Jorden meget længe. Blæksprutter har cirka det samme antal neuroner – nerveceller – som en hund, og to tredjedele af dem er placeret i deres arme, mens en tredjedel er formet som en donut og ligger rundt om spiserøret.

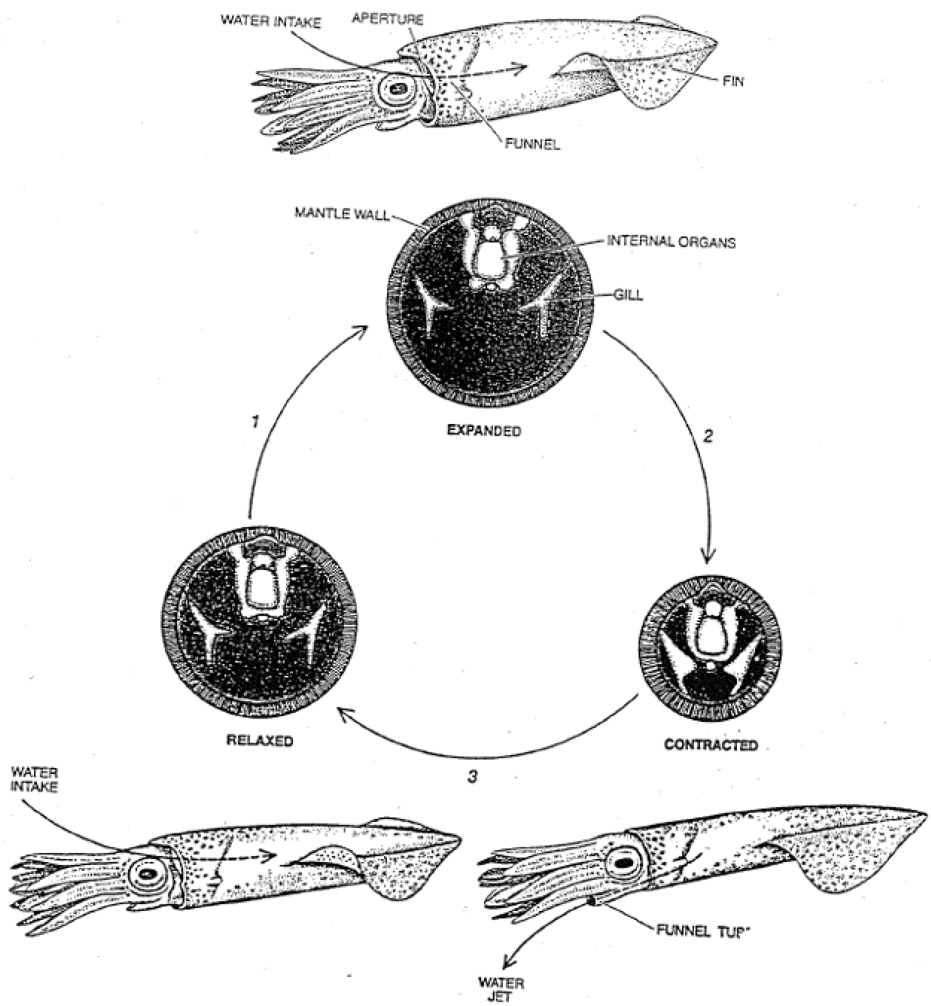
Et vidne om blæksprutters kløgtighed kan findes, hvis man læser historien om et akvarium, som ikke kunne forstå hvorfor fiskene i deres ene akvarium forsvandt. Efter at have installeret et overvågningskamera fandt man ud af, at blæksprutten i akvariet ved siden af hver aften kravlede ud af sit eget akvarium og ned i fiskenes for at spise, hvorefter den kravlede tilbage til sit eget akvarium og lukkede låget efter sig, så de ansatte ikke skulle ane uråd.

4.4.1 De tiarmede blæksprutter og Loligo

De tiarmede blæksprutter har i alt 8 arme og 2 tentakler, der er placeret rundt om munden. På indersiden af armene og yderst på tentaklerne sidder der sugekopper på små stilke, som blæksprutten bruger til at holde byttet fast med. Sugekopperne er et lille bæger af muskler og har små tænder i kanten.

Overalt på blæksprutter kan man finde små rød-brune pletter. Det er kromatoforerne. De står for farveskiftet i blæksprutter og kontrolleres af nervesystemet. Når blæksprutten spænder sine muskler, bliver den mørkere, og når den slapper af, bliver den lysere. Der er også små, hvide, reflekterende iridocyter. De er på finnernes lyse underside. Kroppen er strømlinet i begge ender, så længe armene holdes samlede, og langsomme bevægelser kan laves ved at bevæge de trekantede finner.

De tiarmede blæksprutter kan dog også bevæge sig utrolig hurtigt. Det gør de ved at lade vand flyde ind i deres kappe, og derefter trække sig hurtigt sammen. Det gør, at vandet skydes ud af deres siphon som en jetstrøm og de bliver skudt fremad i vandet. Mekanismen kan ses i figur 4.8 herunder. Loligo kan accelerere fra hvile til en fart på 2 m/s ved hjælp af en enkelt sammentrækning. De hurtigste tiarmede bläksprutter kan endda skyde sig selv op af vandet og "flyve".



Figur 4.8: Her kan ses en tegning over hvordan de ti-armede blæksprutter bevæger sig

4.4.2 Anatomi

- **Øjne:**
  Blæksprutternes øjne er meget lig vores egne og har også en linse, der dog ikke er formet som vores. Den er hård og sidder inden i øjet.

Blæksprutter kan se forskel på lys og mørke og danner sig et komplet billede af, hvad de ser på ligesom os, men de kan ikke se farver.

- **Radula:**
  Radulaen bliver på dansk også kaldt for raspetungen, og er et træk den har tilfælles med andre bløddyr. [3] Den bruges til at findele føden og holde det fast så det ikke falder ud af munden på blæksprutten.

- **Det reproduktive system:**
  Hunlige blæksprutter har ovarier og nidamentale kirtler, og hanlige blæksprutter har testikler. Ovarierne bærer æggene, og er lidt gulligt og slimet. De nidamentale kirtler gør æggene hårde, inden de skal ud i vandet gennem æggelederne, så der er større chance for, at de overlever. Testiklerne ligger i hannerne det samme sted som ovarierne i hunnerne, men er slankere og væsken i dem er mere flydende og hvidlig.

- **Spiserøret:**
  Spiserøret går fra næbbet ned til maven og har til formål at føre maden og starte nedbrydelsen. På vejen går den igennem den donut-formede hjerne, hvilket også er grunden til, at blæksprutten ikke kan spise for store stykker af mad, da det ellers ville sætte sig fast i hjernen.

- **Maven:**
  I maven foregår størstedelen af madens nedbrydelse. Det er en oval struktur, der sidder mellem spiserøret og maveblindsækken. Maveblindsækken, tarmen, og anus: Maveblindsækken er foldet for at få så stort et overfladeareal som muligt til optagelse af den nedbrudte føde. Fra maveblindsækken løber resten af maden gennem tarmen og op til anus, som har sin udmunding oppe ved siphonen. Restprodukter bliver skyllet væk gennem siphonens vandstrøm.

- **Blæksækken:**
  Blæksækken ligner en lille sort streg og indeholder blækspruttens blæk. Blækket sprøjtes ud af siphonen, når blæksprutten føler sig truet, og ved hjælp af kromatoforerne skifter blæksprutten farve, så den matcher blækket.

- **Gæller:**
  Gællerne er hvide fjerlignende strukturer, der gør, at blæksprutterne kan trække vejret under vandet ligesom fisk. Når vand kommer ind i kappen bruges gællerne til at trække ilt ud af vandet og smide CO2.

De er foldet, så de får så stort et overfladeareal som muligt.

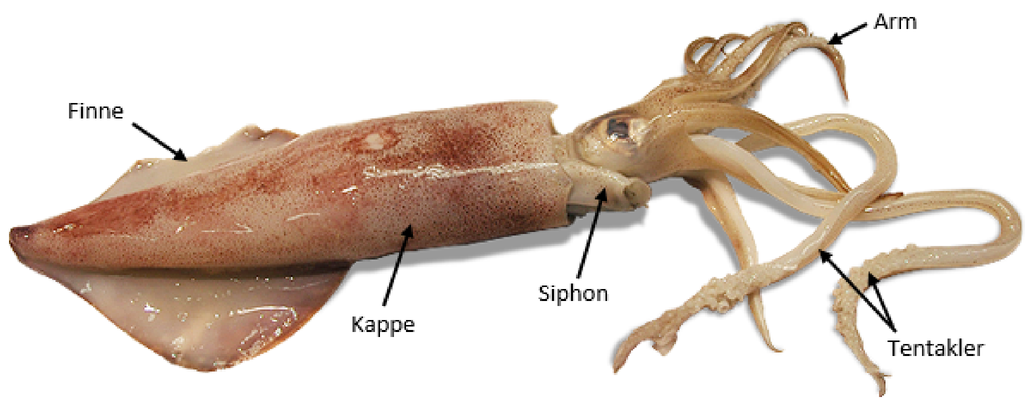
- **Hjerter og nyrer:**
En blæksprutte har tre hjerter. To gællehjerter der sidder ved foden af hver gælle og pumper blodet fra kroppen op i gællerne, og et hjerte der pumper blodet fra gællerne rundt i kroppen. Blodet i en blæksprutte er farveløst og bliver blåt, når det kommer ud i luften. Det er fordi, det bruger det kobberholdige hæmocyanin i stedet for hæmoglobin til at transportere ilt. Nyrens funktion er blandt andet at rense blodet for affaldsstoffer, og er i blæksprutten placeret oven på hjertet.

- **Hjernen:**
Hjernen er som nævnt før stærkt udviklet i blæksprutter. Den er placeret imellem øjnene og ligger rundt om spiserøret.

- **Gladius:**
Blæksprutten bliver holdt stiv af en fjerformet skal – gladius – der sidder i kappen. Det er hvad, der er tilbage af dens forfædres hårde ydre skal. [1]

4.5 Dissektionsvejledning

af tiarmet blæksprutte (Loligo)



Figur 4.9: Loligos ydre morfologi

Loligos ydre morfologi

1. Se på huden: overalt er der rødbrune pletter, det er kromatoforerne. Man kan måske også se hvidlige pletter på den lyse underside af finnerne. Det er iridocyter.

2. Se og mærk på tentaklerne, armene, og deres sugekopper.

3. Tentaklerne er nogle gange trukket tilbage i lommer under øjnene. Skær lommerne op for at se hvor lange tentaklerne er.

Indre morfologi

4. Se på siphonen – den har en mekanisme, der gør at vand ikke flyder ind igennem den. Hvorfor det?

5. Læg blæksprutten på ryggen og skær eller klip kappen op. Den mørke side er ryggen.

6. Skær siderne af kappen af, så de ikke er i vejen.

7. De organer, I kan finde i blæksprutten, kan ses på figur 4.9, 4.10 og 4.11 og er beskrevet i afsnittet 'Anatomi'. Prøv at se om I kan finde dem alle, men pas på med at prikke hul på blæksækken.

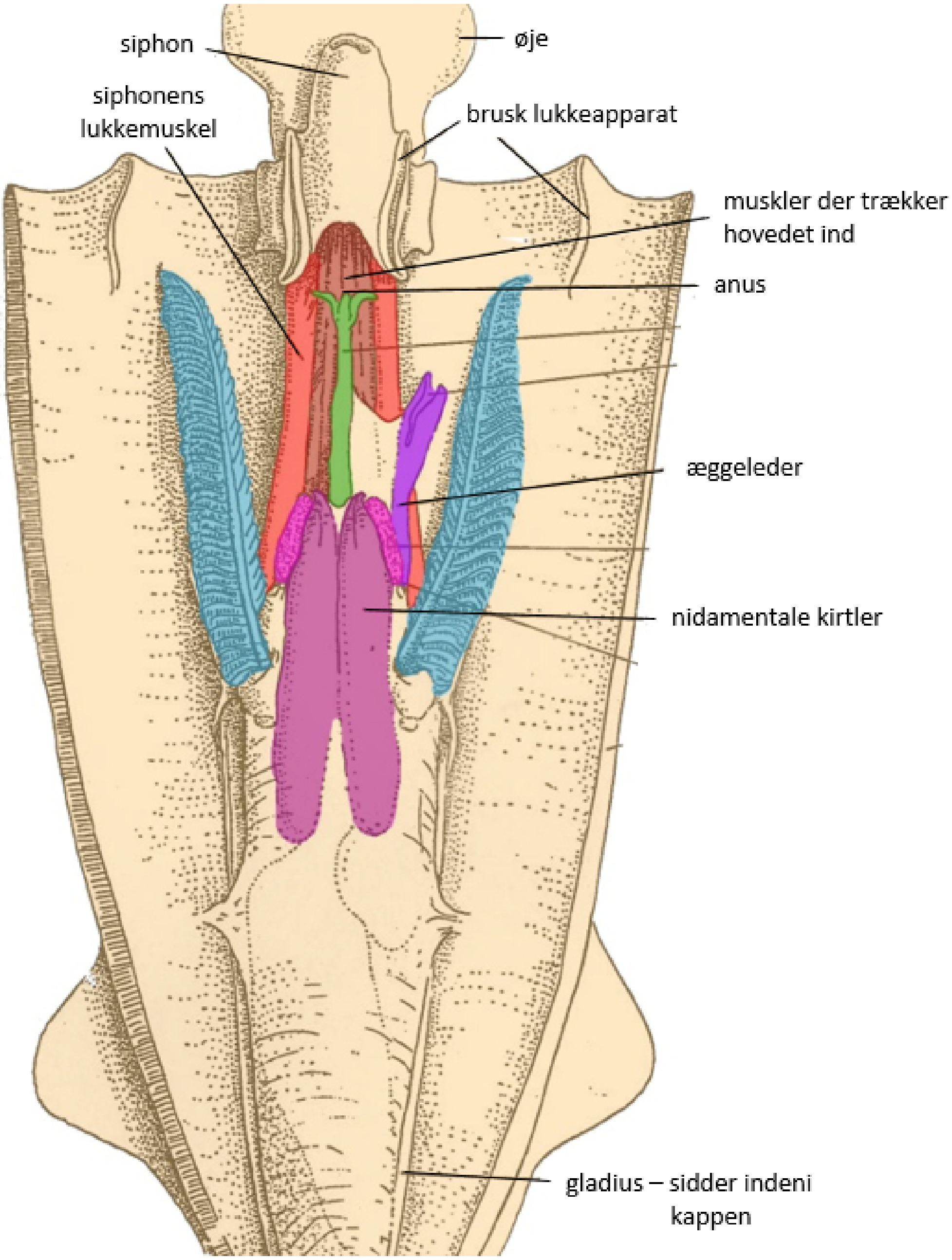
8. Vær opmærksom på, at nogle organer kun er i enten hunnerne eller hannerne. Hvilke organer er der tale om?

9. Prøv at finde et æg eller en sperm og kig på det i mikroskopet – spørg en underviser hvordan man klargør sådan et præparat.

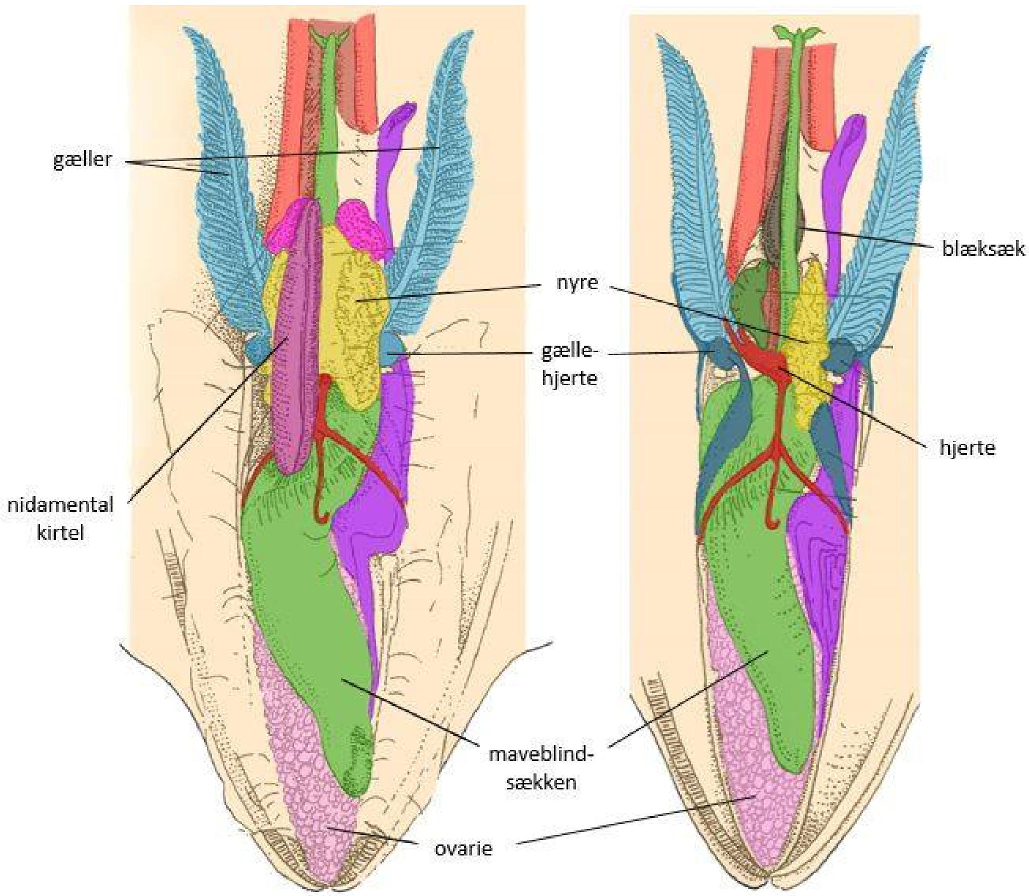
10. Hvis I skærer forsigtigt mellem øjnene, vil I kunne se hjernen.

11. Skær igennem øjet og se, om I kan finde linsen.

12. Inde i næbbet er radulaen, en form for ru tunge, som er meget svær at få fat på.



Figur 4.10: Loligos anatomi



Figur 4.11: Loligos anatomi

Bibliografi

[1] Sea Grant Consortium. *SQUID DISSECTION*. Engelsk. URL: http://njseagrant.org/wp-content/uploads/2014/03/squid_dissection.pdf (sidst set 17.03.2019).

[2] Ole B. Lyshede og Gunnar Rylander Hansen. *Julens nødder*. Engelsk. URL: http://botaniskforening.dk/wp-content/uploads/2015/12/Julens_noedder.pdf (sidst set 27.04.2003).

[3] Åse Jespersen og Jørgen Lützen. *Zoologisk morfologi*. Dansk. 4. udg. Gyldendal, 2012. ISBN: 978-87-02-12764-5.

[4] Laura Møller Jensen og Søren Munthe Kim Bruun Hans Birger Jensen. *Isis Kemi C (Læreplan 2017)*. Dansk. Systime, 2018. ISBN: 9788761689214.

[5] Hans C. Ohanian. *Ohaninan Physics*. Engelsk. 2. udg. W W Norton & Co Inc, 1994. ISBN: 978-03-93957860.

[6] Jens Kraaer og Birgitte Merci Lund Per Holck. *Orbit B*. Dansk. 2. udg. Systime, 2017. ISBN: 978-87-61652829.

[7] Penubag og Victor Blacus. *Electromagnetic Spectrum*. Engelsk. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Electromagnetic-Spectrum.svg (sidst set 28.01.2019).