

Workshop i lineær algebra

UNF København

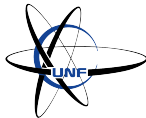
Ungdommens Naturvidenskabelige Forening

29-09-2022



Program

- 1 Funktioner
- 2 Lineære ligningssystemer og matricer
- 3 Vektorrum



Program

- 1 Funktioner
- 2 Lineære ligningssystemer og matricer
- 3 Vektorrum



Definition

En *mængde* er en samling af forskellige objekter (kaldet *elementer*). Hvis a er et element i mængden A , skriver vi $a \in A$. Hvis a ikke ligger i A , skriver vi $a \notin A$.



Definition

En *mængde* er en samling af forskellige objekter (kaldet *elementer*). Hvis a er et element i mængden A , skriver vi $a \in A$. Hvis a ikke ligger i A , skriver vi $a \notin A$.

Eksempel

$\{1, 2, 3\}$ er en mængde med tre elementer, nemlig heltallene 1, 2 og 3. $\{a, b\}$ er en mængde med to elementer, nemlig bogstaverne a og b .



Definition

En *mængde* er en samling af forskellige objekter (kaldet *elementer*). Hvis a er et element i mængden A , skriver vi $a \in A$. Hvis a ikke ligger i A , skriver vi $a \notin A$.

Eksempel

$\{1, 2, 3\}$ er en mængde med tre elementer, nemlig heltallene 1, 2 og 3. $\{a, b\}$ er en mængde med to elementer, nemlig bogstaverne a og b .

Definition

Der findes en mængde uden nogle elementer, $\{\}$. Denne betegnes \emptyset og kaldes *den tomme mængde*.



Nogle interessante (uendelige) mængder

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \quad (\text{de naturlige tal})$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \quad (\text{heltallene})$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\} \quad (\text{de rationale tal})$$

$$\mathbb{R} = \{a, a_1 a_2 a_3 \dots \mid a \in \mathbb{Z}, 0 \leq a_i \leq 9 \text{ for alle } i\} \quad (\text{de reelle tal})$$



Definition

Lad A og B være mængder. Hvis det for alle $a \in A$ gælder, at $a \in B$, da er A en *delmængde* af B , og vi skriver $A \subseteq B$.



Definition

Lad A og B være mængder. Hvis det for alle $a \in A$ gælder, at $a \in B$, da er A en *delmængde* af B , og vi skriver $A \subseteq B$.

Eksempel

$\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$, og vi har inklusionerne $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. Inklusionen $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ skyldes, at et heltal a også kan skrives som $a/1$, og $a/1$ ligger klart i \mathbb{Q} .



Definition

En *funktion/afbildning* f fra mængden A til mængden B er en sammenknytning af elementer i A til elementer i B således, at et $a \in A$ tilknyttes netop ét element $f(a) \in B$. En funktion fra A til B betegnes $f : A \rightarrow B$. A kaldes *definitions-mængden*, og B kaldes *værdimængden*.



Eksempler og ikke-eksempler

- (1) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ givet ved forskriften $f(x) = x^2$ er en funktion. Et element $x \in \mathbb{R}$ tilknyttes netop elementet x^2 .



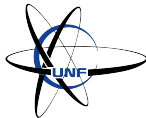
Eksempler og ikke-eksempler

- (1) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ givet ved forskriften $f(x) = x^2$ er en funktion. Et element $x \in \mathbb{R}$ tilknyttes netop elementet x^2 .
- (2) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ givet ved $g(x) = x^2$ er *ikke* en funktion.



Eksempler og ikke-eksempler

- (1) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ givet ved forskriften $f(x) = x^2$ er en funktion. Et element $x \in \mathbb{R}$ tilknyttes netop elementet x^2 .
- (2) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ givet ved $g(x) = x^2$ er *ikke* en funktion. F.eks. har vi $g(1/2) = 1/4$, så $1/2$ tilknyttes elementet $1/4$, men $1/4 \notin \mathbb{Z}$.



Eksempler og ikke-eksempler

- (1) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ givet ved forskriften $f(x) = x^2$ er en funktion. Et element $x \in \mathbb{R}$ tilknyttes netop elementet x^2 .
- (2) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ givet ved $g(x) = x^2$ er *ikke* en funktion. F.eks. har vi $g(1/2) = 1/4$, så $1/2$ tilknyttes elementet $1/4$, men $1/4 \notin \mathbb{Z}$.
- (3) Lad $A = \{1, 2, 3\}$ og $B = \{a, b, c\}$. Definér $h : A \rightarrow B$ ved

$$h(x) = \begin{cases} a & \text{hvis } x \text{ er et primtal} \\ b & \text{hvis } x \text{ er lige} \\ c & \text{ellers} \end{cases}$$



Eksempler og ikke-eksempler

- (1) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ givet ved forskriften $f(x) = x^2$ er en funktion. Et element $x \in \mathbb{R}$ tilknyttes netop elementet x^2 .
- (2) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ givet ved $g(x) = x^2$ er *ikke* en funktion. F.eks. har vi $g(1/2) = 1/4$, så $1/2$ tilknyttes elementet $1/4$, men $1/4 \notin \mathbb{Z}$.
- (3) Lad $A = \{1, 2, 3\}$ og $B = \{a, b, c\}$. Definér $h : A \rightarrow B$ ved

$$h(x) = \begin{cases} a & \text{hvis } x \text{ er et primtal} \\ b & \text{hvis } x \text{ er lige} \\ c & \text{ellers} \end{cases}$$

Er h en funktion?



Opgave 1.1 til 1.6 side 4 og 5 i kompendiet.



Program

- 1 Funktioner
- 2 Lineære ligningssystemer og matricer
- 3 Vektorrum



Lineære ligningssystemer

Fra gymnasiet kender vi lineære ligningssystemer med to ligninger og to ubekendte. F.eks. kan vi løse for x og y i:

$$3x - 4y = 6$$

$$x + 5y = 2.$$

Dette svarer også til at finde linjernes skæringspunkt.



Lineære ligningssystemer

Fra gymnasiet kender vi lineære ligningssystemer med to ligninger og to ubekendte. F.eks. kan vi løse for x og y i:

$$3x - 4y = 6$$

$$x + 5y = 2.$$

Dette svarer også til at finde linjernes skæringspunkt.

Hvad gør vi med mange ligninger med mange ubekendte?



Lemma

Givet et lineært ligningssystem

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

med n variable (kaldet x_1, x_2, \dots, x_n) og m ligninger, hvor alle koefficienter a_{ij} og b_i er reelle tal, da vil følgende operationer ikke ændre på løsningsmængden for ligningssystemet:

- (1) Ombytning af to ligninger.*
- (2) At gange en konstant $c \neq 0$ på en ligning.*
- (3) At lægge en ligning ganget med en konstant til en anden ligning.*

Definition

En $m \times n$ -matrix A er et skema af elementer fra \mathbb{R} med m rækker og n søjler:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{ij} indikerer elementet i den i 'te række og j 'te søjle.



Reduceret echelonform

Definition

En $m \times n$ -matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

siges at være på *reduceret echelonform* hvis der eksisterer et $r \geq 0$ og indekser $1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n$, sådan at:

① For alle $1 \leq s \leq r$ gælder

$$a_{ij_s} = \begin{cases} 1, & \text{hvis } i = s \\ 0, & \text{hvis } i \neq s \end{cases}$$

② For alle $1 \leq j < j_s$ gælder at $a_{sj} = 0$.

③ For alle $r < i \leq m$ og $1 \leq j \leq n$ gælder $a_{ij} = 0$.

De to matricer

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -10 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

er på reduceret echelonform.



De to matricer

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

er ikke på reduceret echelonform. B siges dog at være på *echelonform*.



Definition

For en matrix kan vi foretage tre typer af operationer:

- (1) Ombytning af to rækker.
- (2) Multiplikation af en række med en konstant forskellig fra nul.
- (3) At lægge en række ganget en konstant til en anden række.



Definition

For en matrix kan vi foretage tre typer af operationer:

- (1) Ombytning af to rækker.
- (2) Multiplikation af en række med en konstant forskellig fra nul.
- (3) At lægge en række ganget en konstant til en anden række.

Bemærk ligheden med operationerne for ligninger!



Et eksempel

Lad os omdanne matricen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & -2 \\ 6 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

til en matrix på reduceret echelonform med de tre operationer.



Tag et kig på opgave 2.1, 2.2 og 2.3 på side 12 og 13. I skal ikke nå det hele, I skal bare blive komfortable med at reducere matricer.



Totalmatricer og Gauss-elimination

Definition

Til et lineært ligningssystem

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

knytter vi *totalmatricen*

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Til ligningssystemet

$$3x - 4y = 6$$

$$x + 5y = 2$$



Til ligningssystemet

$$3x - 4y = 6$$

$$x + 5y = 2$$

har vi totalmatricen

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -4 & 6 \\ 1 & 5 & 2 \end{array} \right).$$



Eksempel

Til ligningssystemet

$$3x - 4y = 6$$

$$x + 5y = 2$$

har vi totalmatricen

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -4 & 6 \\ 1 & 5 & 2 \end{array} \right).$$

Tricket er simpelthen bare at aflæse koefficienterne foran variablene.



Vores metode til ligningsløsning

- (1) Opskriv totalmatricen for ligningssystemet.
- (2) Reducér totalmatricen til en matrix på reduceret echelonform.
- (3) Aflæs ligningssystemet for den reducerede matrix for at se løsningen.



Vores metode til ligningsløsning

- (1) Opskriv totalmatricen for ligningssystemet.
- (2) Reducér totalmatricen til en matrix på reduceret echelonform.
- (3) Aflæs ligningssystemet for den reducerede matrix for at se løsningen.

Vi tager nogle eksempler på denne procedure.



Eksempel 1 (netop én løsning)

Vi tager det nu genkendelige eksempel

$$3x - 4y = 6$$

$$x + 5y = 2.$$

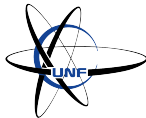


Eksempel 2 (ingen løsninger)

Betragt ligningssystemet

$$x + 2y = 3$$

$$4x + 8y = 11.$$



Eksempel 2 (ingen løsninger)

Betragt ligningssystemet

$$x + 2y = 3$$

$$4x + 8y = 11.$$

Totalmatricen for systemet er

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 11 \end{array} \right).$$



Eksempel 3 (uendeligt mange løsninger)

Betragt ligningssystemet

$$2x + y + 7z - 3w = 0$$

$$5x - y + 4z + 4z = -6$$

$$7x + 11z + w = -6.$$

Dette ligningssystem har totalmatricen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 7 & -3 & 0 \\ 5 & -1 & 4 & 4 & -6 \\ 7 & 0 & 11 & 1 & -6 \end{array} \right)$$



Eksempel 3 (uendeligt mange løsninger)

Betragt ligningssystemet

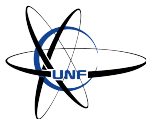
$$2x + y + 7z - 3w = 0$$

$$5x - y + 4z + 4z = -6$$

$$7x + 11z + w = -6.$$

Dette ligningssystem har totalmatricen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 7 & -3 & 0 \\ 5 & -1 & 4 & 4 & -6 \\ 7 & 0 & 11 & 1 & -6 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{11}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{6}{7} \\ 0 & 1 & \frac{27}{7} & -\frac{23}{7} & \frac{12}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$



Opgave 2.4 - 2.15 i kompendiet på side 13 til 15.



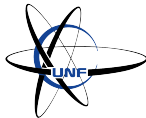
Definition

En *addition* på en mængde V er en funktion $+: V \times V \rightarrow V$. En (reel) skalar-multiplikation på V er en funktion $\cdot: \mathbb{R} \times V \rightarrow V$. I stedet for at skrive $+(v, w)$ skriver vi $v + w$, og i stedet for $\cdot(a, v)$ skriver vi $a \cdot v$.



Program

- 1 Funktioner
- 2 Lineære ligningssystemer og matricer
- 3 Vektorrum**



Addition og skalarmultiplikation

Definition

En *addition* på en mængde V er en funktion $+: V \times V \rightarrow V$. En (reel) skalar-multiplikation på V er en funktion $\cdot: \mathbb{R} \times V \rightarrow V$. I stedet for at skrive $+(v, w)$ skriver vi $v + w$, og i stedet for $\cdot(a, v)$ skriver vi $a \cdot v$.



Addition og skalarmultiplikation

Definition

En *addition* på en mængde V er en funktion $+: V \times V \rightarrow V$. En (reel) skalar-multiplikation på V er en funktion $\cdot: \mathbb{R} \times V \rightarrow V$. I stedet for at skrive $+(v, w)$ skriver vi $v + w$, og i stedet for $\cdot(a, v)$ skriver vi $a \cdot v$.

Eksempel

Den sædvanlige addition på \mathbb{R} er en reel addition. F.eks. er $3 + 7 = 10$. Ligeledes er den sædvanlige multiplikation en reel skalar-multiplikation. F.eks. er $3 \cdot 7 = 21$.



Addition og skalarmultiplikation

Definition

En *addition* på en mængde V er en funktion $+: V \times V \rightarrow V$. En (reel) skalar-multiplikation på V er en funktion $\cdot: \mathbb{R} \times V \rightarrow V$. I stedet for at skrive $+(v, w)$ skriver vi $v + w$, og i stedet for $\cdot(a, v)$ skriver vi $a \cdot v$.

Eksempel

Den sædvanlige addition på \mathbb{R} er en reel addition. F.eks. er $3 + 7 = 10$. Ligeledes er den sædvanlige multiplikation en reel skalar-multiplikation. F.eks. er $3 \cdot 7 = 21$.

Bemærkning

Ofte udelader vi gangetegnet \cdot , hvis det er implicit, at det skal være det. Hvis f.eks. $a, b \in \mathbb{R}$ er to reelle tal, skriver vi som regel bare ab for $a \cdot b$.

Definition

Et reelt vektorrum V er en mængde med en addition $+$ og en reel multiplikation \cdot , så følgende regler gælder:

- 1 $u + v = v + u$ for alle $u, v \in V$ (den *kommutative* egenskab for addition).
- 2 $u + (v + w) = (u + v) + w$ for alle $u, v, w \in V$ (den *associative* egenskab for addition).
- 3 Der eksisterer et element $0 \in V$, så $v + 0 = v$ for alle $v \in V$ (eksistens af *additivt neutralelement*).
- 4 For alle $u \in V$ findes et $v \in V$ så $u + v = 0$ (eksistens af en *additiv invers*).
- 5 For alle $u \in V$ og $a, b \in \mathbb{R}$ gælder $a(bu) = (ab)u$ (den *associative* egenskab for multiplikation).
- 6 For alle $v \in V$ gælder $1v = v$ (*multiplikativ identitet*).
- 7 For alle $a, b \in \mathbb{R}$ og $u, v \in V$ gælder $a(u + v) = au + av$ og $(a + b)u = au + bu$ (de *distributive* egenskaber).

Eksempler på vektorrum

$\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \dots, \mathbb{R}^n$ er blandt de vigtigste eksempler på reelle vektorrum.



Eksempler på vektorrum

$\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \dots, \mathbb{R}^n$ er blandt de vigtigste eksempler på reelle vektorrum.

Andre interessante eksempler er $\mathbb{R}[x]$ og $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.



Proposition

Lad V være et reelt vektorrum. Det additive neutralelement 0 er unikt.



Egenskaber for vektorrum

Proposition

Lad V være et reelt vektorrum. Det additive neutralelement 0 er unikt.

Proposition

Lad V være et reelt vektorrum. For alle $u \in V$ er det additive invers-element unikt.



Egenskaber for vektorrum

Proposition

Lad V være et reelt vektorrum. Det additive neutralelement 0 er unikt.

Proposition

Lad V være et reelt vektorrum. For alle $u \in V$ er det additive invers-element unikt.

Det giver derfor mening at skrive $-v$ for den additive inverse for v .



Proposition

For alle reelle vektorrum V gælder $0v = 0$ for alle $v \in V$ (hvor 0 på venstresiden skal forstås som tallet 0 , mens 0 på højresiden af lighedstegnet er $0 \in V$).



Proposition

For alle reelle vektorrum V gælder $0v = 0$ for alle $v \in V$ (hvor 0 på venstresiden skal forstås som tallet 0 , mens 0 på højresiden af lighedstegnet er $0 \in V$).

Proposition

Lad V være et reelt vektorrum. For alle $v \in V$ gælder $(-1)v = -v$.



Opgave 3.1 - 3.9 på side 18.

