

Differentialregning

UNF København

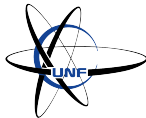
Ungdommens Naturvidenskabelige Forening

14. september 2023



Program

- 1 Differentialkvotienten
- 2 Afledte af vigtige funktioner
- 3 Regneregler for differentialkvotienter



- 1 Differentialkvotienten
- 2 Afledte af vigtige funktioner
- 3 Regneregler for differentialkvotienter



Definition

Lad en funktion f være defineret på et åbent interval (a, b) , og lad to punkter x_0 og x_1 ligge i (a, b) . *Sekanten* tilhørende f mellem x_0 og x_1 er den rette linje, der går gennem $f(x_0)$ og $f(x_1)$.



Definition

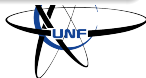
Lad en funktion f være defineret på et åbent interval (a, b) , og lad to punkter x_0 og x_1 ligge i (a, b) . *Sekanten* tilhørende f mellem x_0 og x_1 er den rette linje, der går gennem $f(x_0)$ og $f(x_1)$.

Bemærkning

Hældningen for sekanten er givet ved

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

som er veldefineret, så længe $x_1 \neq x_0$ (ellers får vi division med nul).



Definition

Lad en funktion f være defineret på et åbent interval (a, b) , og lad to punkter x_0 og x_1 ligge i (a, b) . *Sekanten* tilhørende f mellem x_0 og x_1 er den rette linje, der går gennem $f(x_0)$ og $f(x_1)$.

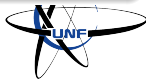
Bemærkning

Hældningen for sekanten er givet ved

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

som er veldefineret, så længe $x_1 \neq x_0$ (ellers får vi division med nul).

Tegning på tavlen.



Betragt hældningen af sekanten

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$



Betragt hældningen af sekanten

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Lader vi $\Delta x = x_1 - x_0$, kan vi omskrive ovenstående til

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$



Differenskvotienten

Betragt hældningen af sekanten

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Lader vi $\Delta x = x_1 - x_0$, kan vi omskrive ovenstående til

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Denne størrelse kaldes differenskvotienten i x_0 . Vi er interesseret i denne størrelse, som Δx nærmer sig 0.



Hvis $g(x)$ er en funktion, da skal *grænseværdien*

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

forstås som den værdi, $g(x)$ nærmer sig, idet x nærmer sig a (fra en vilkårlig retning). Nogle gange findes grænseværdier, og andre gange gør de ikke.



Eksempler på grænseværdier

•

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x), \quad f(x) = x + 3.$$



Eksempler på grænseværdier

- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x), \quad f(x) = x + 3.$

- $\lim_{x \rightarrow 0} g(x), \quad g(x) = \begin{cases} -1 & \text{for } x < 0 \\ 0 & \text{for } x = 0 \\ 1 & \text{for } x > 0 \end{cases}$



Eksempler på grænseværdier

- $$\lim_{x \rightarrow 0} f(x), \quad f(x) = x + 3.$$

- $$\lim_{x \rightarrow 0} g(x), \quad g(x) = \begin{cases} -1 & \text{for } x < 0 \\ 0 & \text{for } x = 0 \\ 1 & \text{for } x > 0 \end{cases}$$

- $$\lim_{x \rightarrow 0} h(x), \quad h(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \neq 0 \\ 0 & \text{for } x = 0 \end{cases}$$



Definition

Lad f være en funktion defineret på et åbent interval (a, b) , og lad x_0 ligge i (a, b) . Såfremt grænseværdien

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

eksisterer, kaldes denne for *differentialkvotienten* i x_0 og betegnes $f'(x_0)$. $f'(x_0)$ udtales "f mærke af x_0 " og kaldes også for den *afledte* af f i x_0 . Hvis differentialkvotienten eksisterer i x_0 , siger vi, at f er differentiabel i x_0 .



- $f(x) = a$ (en konstant funktion).



- $f(x) = a$ (en konstant funktion). $f'(x) = 0$.



- $f(x) = a$ (en konstant funktion). $f'(x) = 0$.
- $f(x) = x^2$.



- $f(x) = a$ (en konstant funktion). $f'(x) = 0$.
- $f(x) = x^2$. $f'(x) = 2x$.



Sætning

Lad f og g være funktioner, der begge er differentiable i x_0 . Da gælder

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$



Regneregler: addition

Bevis: Husk, at funktionen $f + g$ er defineret ved $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.



Regneregler: addition

Bevis: Husk, at funktionen $f + g$ er defineret ved $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$. Vi opstiller differenskvotienten

$$\begin{aligned}\frac{(f + g)(x_0 + \Delta x) - (f + g)(x_0)}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) + g(x_0 + \Delta x) - (f(x_0) + g(x_0))}{\Delta x} \\ &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x},\end{aligned}$$



Regneregler: addition

Bevis: Husk, at funktionen $f + g$ er defineret ved $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$. Vi opstiller differenskvotienten

$$\begin{aligned}\frac{(f + g)(x_0 + \Delta x) - (f + g)(x_0)}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) + g(x_0 + \Delta x) - (f(x_0) + g(x_0))}{\Delta x} \\ &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x},\end{aligned}$$

og ved at tage grænseværdien $\Delta x \rightarrow 0$ på begge sider af lighedstegnet får vi

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

som ønsket.



Bemærkning

Med et fuldstændigt analogt bevis kan man vise, at $(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$.



Regneregler: addition

Bemærkning

Med et fuldstændigt analogt bevis kan man vise, at $(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$.

Eksempel

Lad $f(x) = x^2 + 5$. Vi ved, at differentialkvotienten af 5 er 0. Vi ved også fra tidligere, at x^2 har differentialkvotienten $2x$. Dermed fås per ovenstående sætning, at $f'(x) = 2x + 0 = 2x$.

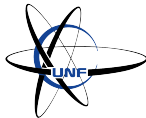


Lad os tage en opgavepause, inden vi fortsætter med nogle vigtige eksempler. Arbejd med opgave 1.1 til 1.4.



Program

- 1 Differentialkvotienten
- 2 Afledte af vigtige funktioner
- 3 Regneregler for differentialkvotienter



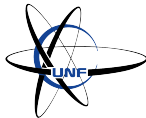
Før så vi, at $(x^2)' = 2x$. I har også vist i opgaverne, at $x' = 1$. Er der et generelt mønster for polynomier?



Før så vi, at $(x^2)' = 2x$. I har også vist i opgaverne, at $x' = 1$. Er der et generelt mønster for polynomier?

Sætning

Funktionen $f(x) = x^n$ for et heltal $n \geq 1$ har den afledte $f'(x) = nx^{n-1}$.



Før så vi, at $(x^2)' = 2x$. I har også vist i opgaverne, at $x' = 1$. Er der et generelt mønster for polynomier?

Sætning

Funktionen $f(x) = x^n$ for et heltal $n \geq 1$ har den afledte $f'(x) = nx^{n-1}$.

Eksempel

Lad $f(x) = 5x^4 - 3x^2 + 8x + 10$. Første led har den afledte $5 \cdot 4x^{4-1} = 20x^3$. Andet led har den afledte $3 \cdot 2x^{2-1} = 6x$, mens tredje led har den afledte 8, og sidste led er en konstant, som dermed har den afledte 0. Alt i alt fås

$$f'(x) = 20x^3 - 6x + 8.$$



Sætning

Funktionerne \cos og \sin er begge differentiable i alle punkter med

$$\cos'(x) = -\sin(x) \quad \text{og} \quad \sin'(x) = \cos(x).$$



Andre vigtige funktioner

Sætning

Funktionerne \cos og \sin er begge differentiable i alle punkter med

$$\cos'(x) = -\sin(x) \quad \text{og} \quad \sin'(x) = \cos(x).$$

Et bevis bygger på nogle fundamentale resultater for grænseovergange involverende cosinus og sinus. Se en mere uddybende forklaring i materialet.



Andre vigtige funktioner

Sætning

Funktionerne \cos og \sin er begge differentiable i alle punkter med

$$\cos'(x) = -\sin(x) \quad \text{og} \quad \sin'(x) = \cos(x).$$

Et bevis bygger på nogle fundamentale resultater for grænseovergange involverende cosinus og sinus. Se en mere uddybende forklaring i materialet.

Sætning

Vi har

$$(e^x)' = e^x \quad \text{og} \quad \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

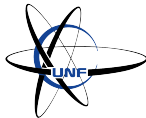


Program

- 1 Differentialkvotienten
- 2 Afledte af vigtige funktioner
- 3 Regneregler for differentialkvotienter



Hvordan udregner man differentialkvotienten af et produkt af funktioner?



Hvordan udregner man differentialkvotienten af et produkt af funktioner?

Sætning (Produktreglen)

Lad f og g være funktioner, der begge er differentiable i et punkt x_0 . Da gælder

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$



Hvordan udregner man differentialkvotienten af et produkt af funktioner?

Sætning (Produktreglen)

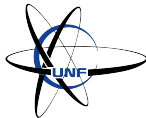
Lad f og g være funktioner, der begge er differentiable i et punkt x_0 . Da gælder

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Vi gennemgår beviset på tavlen. Derefter gennemgår vi et eksempel med $f(x) = x^3 \cos(x)$.



Hvordan differentierer man en brøk af to funktioner?



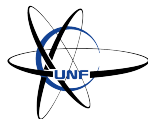
Kvotientreglen

Hvordan differentierer man en brøk af to funktioner?

Sætning (Kvotientreglen)

Lad f og g være funktioner, der begge er differentiable i punktet x_0 . Antag, at $g(x_0) \neq 0$. Da gælder

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$



Hvordan differentierer man en brøk af to funktioner?

Sætning (Kvotientreglen)

Lad f og g være funktioner, der begge er differentiable i punktet x_0 . Antag, at $g(x_0) \neq 0$. Da gælder

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Idéen i beviset minder om den for produktreglen. Vi gennemgår eksemplet $f(x) = \cos(x)/x$.



Hvordan differentierer man en sammensat funktion, altså en funktion på formen $g(f(x))$?



Hvordan differentierer man en sammensat funktion, altså en funktion på formen $g(f(x))$?

Sætning (Kædereglen)

Lad f være en funktion, der er differentiabel i punktet x_0 , og antag, at g er en funktion, som er differentiabel i punktet $f(x_0)$. Da er sammensætningen $g \circ f$ differentiabel i x_0 med differentialkvotient

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$



Hvordan differentierer man en sammensat funktion, altså en funktion på formen $g(f(x))$?

Sætning (Kædereglen)

Lad f være en funktion, der er differentiabel i punktet x_0 , og antag, at g er en funktion, som er differentiabel i punktet $f(x_0)$. Da er sammensætningen $g \circ f$ differentiabel i x_0 med differentialkvotient

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Se beviset i materialet. Vi gennemgår eksemplet $f(x) = \sin(4x^2)$.



Resten af workshoppen er opgaveregning. Undervejs skal I ikke tøve med at stille spørgsmål. Opgaverne er 2.1 til 2.8 på side 12 og 13.

Bemærk: Der er nyttige tabeller på side 11.

Skulle nogle blive hurtigt færdige, er der et anvendelsesafsnit omkring optimering i materialet.



Tak for denne gang

Andre arrangementer (foredrag, workshops og andet) i UNF København kan ses her:

<https://unf.dk/aktiviteter/?department=kbh>

Information om vores sommer-sciencecamps kan ses her: <https://unf.dk/sciencecamps/>

