
Tutorium MfP4 - SoSe 25

zur Vorlesung von PD Dr. Holtkamp

1. August 2025

Inhaltsverzeichnis

1	Tutorium 10.04.25	3
1.1	Organisatorisches	3
1.2	Literaturempfehlungen	3
2	Tutorium 17.04.25	4
2.1	Wiederholung - Komplexe Zahlen	4
3	Tutorium 24.04.25	8
3.1	Atlanten, Orientierungen und der Satz von Stokes	8
4	Tutorium 08.05.25	10
4.1	Funktionentheorie ist <i>nicht</i> reelle Analysis in zwei Variablen	10
5	Tutorium 15.05.25	12
5.1	Der Cauchysche Integralsatz	12
5.2	Die Cauchysche Integralformel und der Potenzreihenentwicklungssatz	12
6	Tutorium 18.06.2025	15
6.1	Vektorräume und Basen	15
6.2	Lineare Operatoren auf Hilberträumen	16
6.3	Spektren und Orthogonalprojektion	17
7	Tutorium 26.06.25	19
7.1	Lineare Operatoren auf Hilberträumen	19
7.2	Basisdarstellung linearer Operatoren	20
8	Tutorium 03.07.25	22
8.1	Endlich-Dimensionale Spektralsätze	22
8.2	Spektralsätze für kompakte Operatoren	22
8.3	Banach-Algebren und $*$ -Algebren	23
8.4	Spektralsatz für beschränkte Operatoren	25

Konventionen

- Wir schreiben für einen Körper \mathbb{K} kurz $\mathbb{K}^* := \mathbb{K} \setminus \{0\}$.
- Real- und Imaginärteil werden mit $\operatorname{Re}(\cdot)$ respektive $\operatorname{Im}(\cdot)$ bezeichnet, das Bild einer Abbildung f hingegen mit $\operatorname{im}(f)$.
- Echte Teilmengen tragen das Symbol \subset , allgemeine Teilmengen das Symbol \subseteq .

Dies sind meine Tutoriumsnotizen für Mathe für Physiker 4. Falls Ihr Fehler findet, sagt immer gerne Bescheid. Allgemein sind die Notizen oft schnell von mir für meine eigene Tutoriumsvorbereitung getippt, erwartet also bitte kein voll ausgearbeitetes \LaTeX -Skript.

1 Tutorium 10.04.25

1.1 Organisatorisches

- Festlegung des allgemeinen Tutoriumtermins. Ort: Voraussichtlich wieder Geomatikum, wenn Raum verfügbar.
- Fahrplan MfP4: Differentialgeometrie, Funktionentheorie, Funktionalanalysis
- Wünsche für das Tutorium? Vergleich letzte Semester, konkrete Vorstellungen, etc.
- MathNet-Wolke, Moodle, Homepage, Telegram-Gruppe

1.2 Literaturempfehlungen

Zur Differentialgeometrie kennt ihr bereits meine Empfehlungen von letztem Semester. Zur Funktionentheorie:

- Jänich, [Funktionentheorie](#): Sehr angenehm zu lesendes Buch, vor allem, wenn man vielleicht auch an gut geschriebenen Büchern und Anekdoten Spaß hat.
- Salamon, [Funktionentheorie](#): Das Buch basiert auf Ahlfors, Complex Analysis, einem beachtlich guten Standardwerk im englischen Raum. Etwas trockener als Jänich, eher im typischen Mathe-Stil.
- Needham, [Visual Complex Analysis](#): Das (englischsprachige) Buch kann man am besten nebenher lesen, wenn man sich für die geometrische Intuition hinter der Funktionentheorie interessiert.

Zur Funktionalanalysis: Hier ist das Skript kaum zu schlagen, da die Themenwahl wirklich sehr speziell auf das Notwendigste für die Physik gelegt wurde. Die meisten Mathebücher würden die Konzepte aus dem zweiten Semesterteil auf zwei ganze Semester aufteilen. Und dazu kommt noch mehr Maßtheorie. . . . Nichtsdestotrotz, ein bisschen was fällt mir ein:

- Kaballo, [Grundkurs Funktionalanalysis](#): Das Buch ist aus einem MfP-ähnlichen Modul entstanden und daher einigermaßen geeignet. Allgemein ist das Buch relativ nett geschrieben.
- Hall, [Quantum Theory for Mathematicians](#): Hier wird die Funktionalanalysis aus Sicht der Physik mit mittelmäßigem mathematischen Anspruch betrachtet. Mathematisch streng veranlagte Leute können mit dem Buch oft nicht so viel anfangen, manchen gereicht es aber auch zur Rettung. Einfach mal reinlesen :)

Im Allgemeinen ist MfP4 meiner Erfahrung nach, vor allem wenn noch Differentialgeometrie abgefragt wird, sehr gut machbar, vor allem im Vergleich zu den sehr dichten MfP2- und MfP3-Modulen. Erfahrungsgemäß mögen viele die Funktionentheorie sehr und können damit gut umgehen. Funktionalanalysis fällt hingegen meist schwer, da das Thema vielen weniger intuitiv scheint. Im besten Fall findet man aber an beidem Gefallen, im schlimmsten Fall kommt man mit DiffGeo und Funktionentheorie sicher durch die Klausur.

2 Tutorium 17.04.25

2.1 Wiederholung - Komplexe Zahlen

Mit Sicherheit erinnert ihr euch noch gut an die komplexen Zahlen:

Definition 2.1.1. Komplexe Zahlen

Der Körper $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ mit

$$\mathbb{C} := \{(a, b) \in \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{R}\} \quad (2.1.1)$$

und den Operationen

$$\begin{aligned} + : \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ (a, b), (c, d) &\mapsto (a, b) + (c, d) := (a + c, b + d), \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

genannt Addition, und

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ (a, b), (c, d) &\mapsto (a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc), \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

genannt Multiplikation, nennen wir den Körper der **komplexen Zahlen**. Die Zahl $a = \operatorname{Re}(a, b)$ heißt **Realteil**, die Zahl $b = \operatorname{Im}(a, b)$ **Imaginärteil** von z .

Meist führt man die *komplexe Einheit* i ein, sodass $(a, b) = a + bi$ für $i^2 := -1$ gilt. Dies erleichtert Rechnungen, ist aber rein symbolischer Natur. Fundamental ist, dass hier ein Körper vorliegt: Sowohl $(\mathbb{C}, +)$ als auch (\mathbb{C}^*, \cdot) sind Gruppen (das könnt ihr gerne zur Übung nachprüfen, vor allem die Inversen sollte man einmal konstruiert haben). Bereits aus MfP1 kennt ihr die *komplexe Konjugation*

$$\begin{aligned} \bar{\cdot} : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z = a + bi &\mapsto \bar{z} := a - bi. \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Geometrisch entspricht dies einer Spiegelung an der reellen Achse. Auf \mathbb{C} definieren wir außerdem den *Absolutwert* oder *Betrag* durch

$$\begin{aligned} |\cdot| : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{R} \\ z &\mapsto |z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2} \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

mit einigen wichtigen Eigenschaften:

(M1) Positivität: $|z| \geq 0$ mit $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

(M2) Multiplikativität: $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$

(M3) Subadditivität (Dreiecksungleichung): $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Sowohl die Multiplikativität als auch die Subadditivität kann man induktiv auf beliebige **endliche** Produkte bzw. Summen ausweiten.

Damit erhalten wir eine Möglichkeit, aus geometrischen Überlegungen verschiedene Formen für komplexe Zahlen herzuleiten. Ausgehend von der *kartesischen Form* $z = a + bi$ definieren wir den **Radius** von z als $r := |z|$. Das **(Haupt-)Argument** von z ist dessen eingeschränkter Polarwinkel $\varphi \in (-\pi, \pi]$, das aus trigonometrischen Überlegungen hergeleitet werden kann. Damit erhalten wir die *Polarform* und mit der Eulerschen Formel auch die *trigonometrische Form*:

$$z = r \exp(i\varphi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (2.1.6)$$

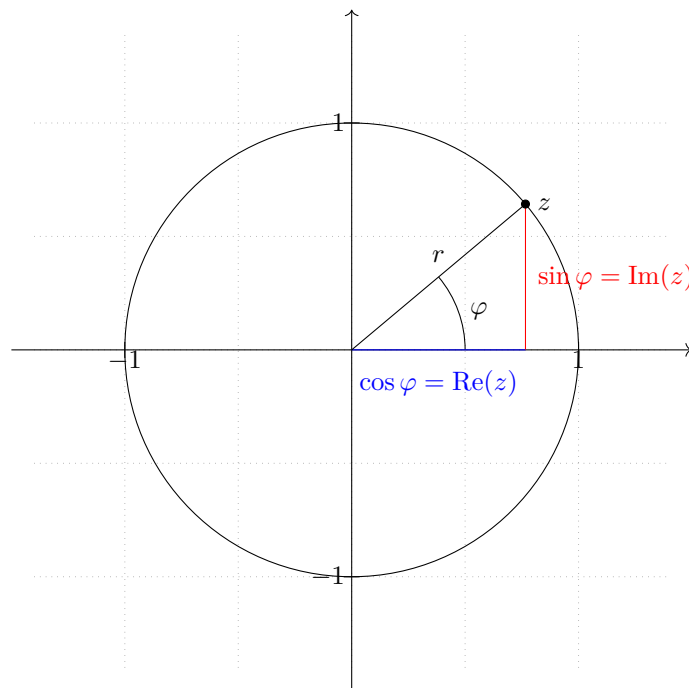


Abbildung 1: Die Einheitskreislinie $S^1 \hookrightarrow \mathbb{C}$ mit der komplexen Zahl $z = r \exp(i\varphi)$.

Nicht immer ist es ganz so einfach, das Argument aus der kartesischen Form zu ermitteln. Wir illustrieren dies mal wie folgt:

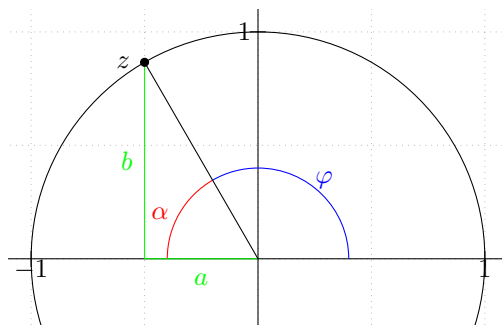


Abbildung 2: In diesem Fall lässt sich der Polarwinkel von $z = a + ib$ nicht direkt ableiten. Wir erhalten $\cos \alpha = \frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ und damit $\varphi = \pi - \arccos\left(\frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = \arccos\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$. Dabei nutzt man, dass $\arccos(x) = \pi - \arccos(-x)$ gilt.

Wir wollen nun die wichtigen topologischen Begriffe auf \mathbb{C} betrachten. Die Topologie der komplexen Ebene wird von der Metrik induziert:

Definition 2.1.2. Topologie auf \mathbb{C}

Der **offene ϵ -Ball** in \mathbb{C} ist die Teilmenge

$$B_\epsilon(z) := \{x \in \mathbb{C} \mid |z - x| < \epsilon\} \quad (2.1.7)$$

mit Radius ϵ und Mittelpunkt z . Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{C}$ ist genau dann offen, wenn für alle $z \in X$ gilt, dass $B_\epsilon(z) \subseteq X$ für ein $\epsilon > 0$ erfüllt ist.

Man erinnere sich daran, dass eine abgeschlossene Menge darauf aufbauend definiert ist: Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{C}$ heißt *abgeschlossen*, wenn ihr Komplement $\mathbb{C} \setminus A$ offen ist. Eine Menge kann sowohl abgeschlossen als auch offen sein. Wir brauchen noch weitere Grundbegriffe der Topologie:

Definition 2.1.3. Zusammenhang und Gebiet

- (i) Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{C}$ heißt **zusammenhängend**, wenn sie sich nicht in zwei **offene, disjunkte, nicht-leere** Teilmengen zerlegen lässt. Äquivalent dazu ist, dass bei einer Zerlegung $A = B \cup C$ mit B, C offen und disjunkt A oder B die leere Menge sein muss.
- (ii) Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{C}$ heißt **Gebiet**, wenn sie zusammenhängend, offen und nicht-leer ist.

Mit diesem Wissen sollte es uns leichter fallen, Teilmengen von \mathbb{C} zu charakterisieren. Das versuchen wir zur Übung

gleich einmal:

Übung. Skizziere folgende Teilmengen von \mathbb{C} :

- (a) $M_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid 3 \leq |z| \leq 10\}$
- (b) $M_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z^2) > 0\}$
- (c) $M_3 := \{z \in \mathbb{C}^* \mid \operatorname{Re}(\frac{1}{z}) \leq 2\}$

Entscheide außerdem, ob die angegebenen Mengen Gebiete (in der von der Metrik induzierten Topologie) sind.

Lösung. (a) Hier hat man wahrscheinlich schon ein Bild vor Augen, denn wenn man die Polardarstellung $z = r \exp(i\varphi)$ einsetzt, erhält man unmittelbar

$$3 \leq |r| \leq 10, \quad (2.1.8)$$

da $|\exp(i\varphi)| = 1$. Wir erhalten also einen *Kreisring*, wie unten abgebildet. Die Menge ist außerdem offensichtlich nicht offen, denn jeder Randpunkt $z \in \partial M_1$ besitzt keinen offenen ϵ -Ball $B_\epsilon(z)$, der noch ganz in M_1 liegt. Also kann M_1 kein Gebiet sein.

(b) Wir setzen $z = a + bi$ an und erhalten die Ungleichung

$$\operatorname{Re}((a + bi)^2) = \operatorname{Re}(a^2 - b^2 + 2iab) = a^2 - b^2 > 0. \quad (2.1.9)$$

Dies ist äquivalent zu $a^2 > b^2$, die Menge wird also nach unten beschränkt durch die Raumdiagonalen $\Delta_{(a,a)}$ und $\Delta_{(a,-a)}$. Wir erhalten den Longitudinalschnitt eines Kegels, wobei der Ursprung ausgenommen wird. Diese Menge ist offen, denn für alle $z \in M_2$ liegt der offene ϵ -Ball mit $\epsilon < \frac{a}{2}$ für beliebiges a auf der Diagonale noch ganz in M_2 . Jedoch ist die Menge kein Gebiet, da sie nicht zusammenhängend ist.

(c) Wir setzen erneut $z = a + bi$ an und machen folgende Feststellung:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}. \quad (2.1.10)$$

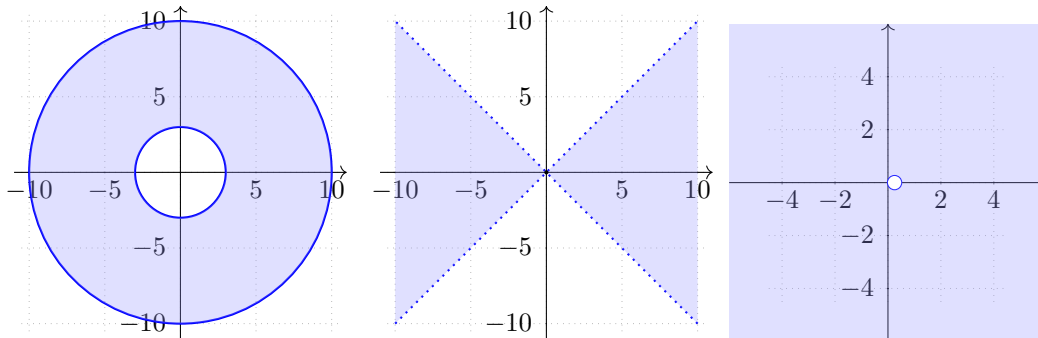
Also ist die Ungleichung durch

$$\frac{a}{a^2 + b^2} \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq a^2 - \frac{a}{2} + b^2 \quad (2.1.11)$$

gegeben. Quadratische Ergänzung liefert

$$0 \leq \left(a - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} + b^2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^2 \leq \left(a - \frac{1}{4}\right)^2 + b^2, \quad (2.1.12)$$

was gerade die Gleichung eines Kreises mit Radius $\frac{1}{4}$ darstellt, der auf $(\frac{1}{4}, 0)$ zentriert ist. Man sollte beachten, dass die Ungleichung so gestellt ist, dass die Menge ganz \mathbb{C} ohne den Inhalt des Kreises darstellt. Dies ist aus den gleichen Gründen wie für M_1 kein Gebiet, denn die Punkte auf der Kreislinie haben keine offene Umgebung in M_3 .



Eine weitere sehr wichtige Ungleichung wollen wir zur Übung beweisen:

Satz 2.1.4. Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Seien $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{C}$ endlich viele komplexe Zahlen. Dann gilt die **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i \right|^2 \leq \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \sum_{i=1}^n |y_i|^2. \quad (2.1.13)$$

Beweis. Für den Beweis brauchen wir zwei Vorüberlegungen. Erst einmal bemerken wir, dass die Gleichung immer gilt, wenn $\sum_i |x_i|^2 \sum_i |y_i|^2 = 0$, da dann alle x_i oder alle y_i verschwinden müssen. Wir müssen den Beweis also nur noch für $\sum_i |x_i|^2 \sum_i |y_i|^2 > 0$ führen. Die andere Vorüberlegung ist etwas technisch^a Seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Da Quadrate

reeller Zahlen immer positiv sind, stellen wir fest:

$$\begin{aligned}
 0 &\leq (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 = \alpha^2\delta^2 + \beta^2\gamma^2 - 2\alpha\beta\gamma\delta \\
 &= \alpha^2\beta^2 - \alpha^2\beta^2 + \gamma^2\delta^2 - \gamma^2\delta^2 + \alpha^2\delta^2 + \beta^2\gamma^2 - 2\alpha\beta\gamma\delta \\
 &= (\alpha^2 + \gamma^2)(\beta^2 + \delta^2) - (\alpha^2\beta^2 + \gamma^2\delta^2 + 2\alpha\beta\gamma\delta) \\
 &= (\alpha^2 + \gamma^2)(\beta^2 + \delta^2) - (\alpha\beta + \gamma\delta)^2.
 \end{aligned}$$

Umstellen liefert nun eine Ungleichung, derer wir uns später bedienen:

$$(*) (\alpha\beta + \gamma\delta)^2 \leq (\alpha^2 + \gamma^2)(\beta^2 + \delta^2). \quad (2.1.14)$$

Nun beweisen wir endlich die Ungleichung mit vollständiger Induktion:

Für den Induktionsanfang brauchen wir nur (M2):

$$|x\bar{y}|^2 = (|x||\bar{y}|)^2 = |x|^2|y|^2. \quad (2.1.15)$$

Hier gilt sogar Gleichheit. Die Induktionsvoraussetzung (IV) ist, dass die Aussage für $n-1$ gezeigt ist. Da beide Seiten positiv sind, können wir in der IV die Wurzel ziehen:

$$\left| \sum_{i=1}^{n-1} x_i \bar{y}_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} |x_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} |y_i|^2}. \quad (2.1.16)$$

Für den Induktionsschritt müssen wir die Aussage für n beweisen. Das geht nun relativ schnell:

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i \right| &= \left| x_n \bar{y}_n + \sum_{i=1}^{n-1} x_i \bar{y}_i \right| \leq |x_n \bar{y}_n| + \left| \sum_{i=1}^{n-1} x_i \bar{y}_i \right| \\
 &\stackrel{\text{IV}}{\leq} |x_n| |y_n| + \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} |x_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} |y_i|^2} \stackrel{(*)}{\leq} \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n |y_i|^2}
 \end{aligned}$$

Im ersten Schritt haben wir die Dreiecksungleichung ausgenutzt, gefolgt von der Induktionsvoraussetzung. Den letzten Schritt können wir mit unserer Ungleichung (*) direkt folgern, indem wir $\alpha := |x_n|$, $\beta := |y_n|$, $\gamma := \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} |x_i|^2}$ und $\delta := \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} |y_i|^2}$ setzen. □

^aWer denkt, die folgenden Umformungen fielen vom Himmel, kann versuchen, es von vorn nach hinten anzugehen. Dann ist es viel offensichtlicher.

3 Tutorium 24.04.25

Da sich das kommende Blatt ganz um Differentialformen drehen wird, wollen wir uns die neuen Begriffe zur Differentialgeometrie aus MFP4 nochmal genauer ansehen:

3.1 Atlanten, Orientierungen und der Satz von Stokes

Die zentrale Definition dieses Abschnittes ist die des Atlas:

Definition 3.1.1. Atlas

Sei M eine k -Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n . Wir nennen eine Familie

$$\mathfrak{A} := \{\varphi_j : T_j \rightarrow V_j\}_{j \in J} \quad (3.1.1)$$

von *lokalen Parametrisierungen* mit $\cup_{j \in J} V_j = M$ einen **Atlas** von M

Was ist die Motivation hinter dieser Definition? Um integrieren zu können, müssen wir das Verhalten einer Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ charakterisieren können. Das Leitmotiv der Differentialgeometrie ist es, dafür die lokale Ähnlichkeit einer MFK auszunutzen: Ist $\psi : U \rightarrow \hat{U}$ eine Karte mit $U \subset M$ und $\hat{U} \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, so können wir die Stetigkeit von f auf die Stetigkeit von $f \circ \psi^{-1} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit unseren gewohnten Definitionen zurückführen. Wir bemerken aber ein Problem: Atlanten sind nicht eindeutig. Wir wollen natürlich nicht, dass unsere Definition von der Wahl eines Atlas abhängt. Das Problem kann man auf mehrere Arten lösen, in der Vorlesung wurde das zusammen mit der Orientierung verpackt:

Definition 3.1.2. Orientierung

Sei M eine k -Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n . Existiert ein Atlas \mathfrak{A} von M , sodass die Kartenwechselabbildung für sich schneidende Parametrisierungen orientierungserhaltend ist, heißt M **orientierbar**. Können wir weitere lokale Parametrisierungen zu \mathfrak{A} hinzufügen, ohne eine Änderung der Orientierung zu bewirken, heißen diese **positiv orientiert**, andernfalls **negativ orientiert**.

Wir fassen die Orientierung einer MFK als Äquivalenzklasse auf und bezeichnen (M, \mathfrak{A}) als **orientierte MFK**.

Das war eine ganz schöne Menge, aber jetzt haben wir, was wir wollten: Eine MFK ist entweder nicht orientierbar, oder es gibt genau zwei Orientierungen bzw. Äquivalenzklassen von Atlanten auf M . Im Skript wird fortan die positive Orientierung gewählt. Sind die lokalen Parametrisierungen von Klasse \mathcal{C}^∞ , nennt man \mathfrak{A} auch *glatte Struktur* auf M .¹ Wir wollen nun Orientierungen auf $n - 1$ -dimensionale Hyperflächen ausweiten.

Definition 3.1.3. Orientierung des Tangentialraums

Sei (M, \mathfrak{A}) eine orientierte k -UMF des \mathbb{R}^n mit positiv orientierter lokaler Parametrisierung φ . Für jedes $p \in M$ ist

$$(\partial_1 \varphi_p, \dots, \partial_k \varphi_p) \quad (3.1.2)$$

eine positiv orientierte Basis von $T_p M$. Die Orientierung aller weiteren Basen wird relativ dazu festgesetzt.

Für eine Hyperfläche $M \subseteq \mathbb{R}^{n \geq 2}$ mit Standardorientierung erhalten wir so ein bezüglich \mathfrak{A} positiv orientiertes **Einheitsnormalenfeld** auf M : Dies ist ein stetiges Vektorfeld $\nu : M \rightarrow \mathbb{R}^n$, sodass für alle $p \in M$ $\nu(p)$ ein Einheitsnormalenvektor von M ist und gilt: Ist (v_1, \dots, v_{n-1}) eine positiv orientierte Basis von $T_p M$, so ist $(\nu(p), v_1, \dots, v_{n-1})$ eine positiv orientierte Basis des \mathbb{R}^n . Die wahre Erkenntnis ist dabei:

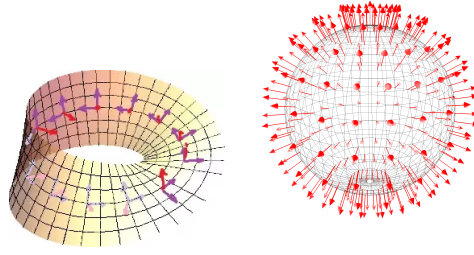
Satz 3.1.4. Orientierung durch Einheitsnormalenfelder

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Hyperfläche. Ist M orientiert, so existiert ein positiv orientiertes Einheitsnormalenfeld. Existiert umgekehrt ein Einheitsnormalenfeld auf M , so definiert dieses eine Orientierung der Hyperfläche.

Das hilft uns schon einmal in der Vorstellung, wenn man bedenkt, dass Einheitsnormalenfelder für 2-Mannigfaltigkeiten recht anschaulich sind. Darüber hinaus lässt sich so auch der Rand ∂M einer MFK M orientieren, indem man randadaptierte Parametrisierungen mit einheitlicher Orientierung auf den Rand einschränkt.

Beispiel. Betrachte das Möbiusband $M \subseteq \mathbb{R}^3$ und die 2-Sphäre $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$. Beide sind 2-Mannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^3 . Man betrachte folgendes Bild:

¹Wer diese Definition über Äquivalenzklassen nicht so hilfreich findet, kann auch mit **maximalen Atlanten** arbeiten: Ein Atlas \mathfrak{A} heißt **maximal**, wenn er nicht die echte Teilmenge irgendeines anderen Atlas ist.



Erkennbar ist, dass sich das Möbiusband nicht orientieren lässt, während die Sphäre durch das Vektorfeld mit $\|v\| = 1$ bereits positiv orientiert ist.

Wir haben also jetzt alle Werkzeuge, um Integration auf der gesamten (Unter-)Mannigfaltigkeit über lokale Parametrisierungen zu verstehen. Ziel ist, eine stetige k -Form auf $U \subseteq \mathbb{R}^n$ über eine Teilmenge $A \subseteq M$ einer orientierten k -Untermannigfaltigkeit zu integrieren. Gibt es eine einzelne Parametrisierung $\varphi : T \rightarrow V \subseteq M$ mit $A \subseteq V$, so definieren wir Integration über A durch

$$\int_{(A, \mathfrak{A})} \omega := \int_{\varphi^{-1}(A)} \varphi^* \omega. \quad (3.1.3)$$

Andernfalls sei

$$(\varphi_j : T_j \rightarrow V_j \subseteq M)_{j \in J} \quad (3.1.4)$$

eine endliche Familie von lokalen Parametrisierungen mit $A \subseteq \cup_{j \in J} V_j$. Wir nehmen uns eine der Überdeckung $(V_j)_j$ untergeordnete Partition der Eins

$$\alpha_j : \bigcup_{l \in J} V_l \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.1.5)$$

her und teilen A gewissermaßen auf die Träger der Partition der Eins auf mit $A_j := A \cap \text{supp}(\alpha_j) \subseteq V_j$. Jetzt können wir endlich integrieren: ω heißt *integrierbar über A* , falls ω über alle A_j integrierbar ist. Dann setzen wir

$$\int_{(A, \mathfrak{A})} \omega := \sum_{j=1}^m \int_{\varphi_j^{-1}(A_j)} (\alpha_j \circ \varphi_j) \cdot (\varphi_j^* \omega), \quad (3.1.6)$$

zerstückeln das Integral also über die Partitions Mengen. Mit diesem Verständnis springen wir dann auch direkt zu einem der schönsten Sätze:

Theorem 3.1.5. Stokesscher Integralsatz

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und ω eine glatte $(k-1)$ -Form auf U mit $k \geq 2$. Sei $M \subseteq U$ eine k -Untermannigfaltigkeit. Für jedes Kompaktum $A \subseteq M$ mit glattem Rand ∂A , orientiert durch M , gilt:

$$\int_A d\omega = \int_{\partial A} \omega. \quad (3.1.7)$$

Daraus erhalten wir eine schöne Aussage für unberandete, kompakte Mannigfaltigkeiten M . Ist $M \subseteq U$ wie oben, aber $\partial M = \emptyset$, so erhalten wir direkt

$$\int_M d\omega = \int_{\emptyset} \omega = 0. \quad (3.1.8)$$

Es gibt noch viele weitere schöne Aussagen, die daraus folgen und einen expliziten Zusammenhang zu exakten Differentialformen aufzeigen. Tatsächlich bekommen wir dadurch konkrete Äquivalenzen, die Exaktheit und Geschlossenheit mit bestimmten Integralen gleichsetzen. Für die Interessierten: Dies findet man unter den Stichworten *De Rahm-Kohomologie* und *De Rahm-Theorem*.

4 Tutorium 08.05.25

Nachdem ihr nun voll in die Funktionentheorie eingestiegen seid, wollen wir uns damit etwas näher beschäftigen:

4.1 Funktionentheorie ist *nicht* reelle Analysis in zwei Variablen

Wenn wir nun zur Analysis auf \mathbb{C} übergehen, ist man leicht verleitet, den \mathbb{R} -**Vektorraum**-Isomorphismus $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ so zu interpretieren, dass Funktionentheorie doch eigentlich nichts anderes sei als Analysis im \mathbb{R}^2 . Das ist aber ein fataler Fehler! Der Schlüssel liegt darin, dass auf \mathbb{C} eine andere Struktur, die Multiplikation mit komplexen Zahlen, definiert ist, die über die Vektorraumstruktur des \mathbb{R}^2 hinausgeht.

In der reellen Analysis war die Erkenntnis, dass sich differenzierbare Funktionen durch ihr Differential annähern lassen, fundamental. Ist $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine beliebige, reell-differenzierbare Funktion, so ist ihr Differential am Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ eine reell-lineare Abbildung

$$\begin{aligned} df_p : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\mapsto df_p(x). \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

Mit der Wahl einer Basis des \mathbb{R}^2 lässt sich das Differential als Matrix

$$Df_p := \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{array} \right) \bigg|_p \quad (4.1.2)$$

darstellen, genannt *Funktionalmatrix*. Dies ist also einfach eine Matrix der Form $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ mit vier reellen Einträgen.

Wie sieht das im Komplexen aus? Ist ein komplex-lineares Differential auch einfach eine beliebige 2×2 -Matrix mit reellen Einträgen? Fangen wir mal mit der komplexen Linearität an:

Definition 4.1.1. Komplex-Lineare Abbildung

Eine Abbildung $A : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **komplex-linear**, falls für alle $z_1, z_2, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ gilt:

$$A(\lambda z_1 + \mu z_2) = \lambda A(z_1) + \mu A(z_2). \quad (4.1.3)$$

Wir fordern für eine Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ nun, dass das Differential $df_p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ nicht bloß linear, sondern komplex-linear ist. Bereits erwähnt habe ich, dass Addition nichts Neues ist. Diese funktioniert auf \mathbb{R}^2 und \mathbb{C} völlig analog, nämlich komponentenweise. Neu ist hingegen die Multiplikation mit einer komplexen Zahl, aber was bedeutet das für die darstellende Matrix für das Differential? Wenn wir nur Multiplikation mit komplexen Zahlen betrachten wollen und uns nicht für Addition interessieren, liegt es nahe, erst einmal nur \mathbb{C} mit Multiplikation zu betrachten. Wir gehen es noch langsamer an und schauen, was passiert, wenn wir nur komplexe Zahlen mit Radius $r = 1$ zulassen, also die Einheitskreislinie $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}$ anschauen. Praktischerweise ist (\mathbb{S}^1, \cdot) eine Gruppe, die einer uns bekannten Gruppe sehr ähnlich sieht. Sind $z_1 = \exp(i\varphi_1)$ und $z_2 = \exp(i\varphi_2)$ zwei komplexe, normierte Zahlen, so ist ihr Produkt gegeben durch

$$z_1 z_2 = \exp(i(\varphi_1 + \varphi_2)). \quad (4.1.4)$$

Dass sich die Winkel addieren, ist der entscheidende Hinweis für den gesuchten Isomorphismus:

Satz 4.1.2. Multiplikation ist Rotation

Es existiert ein Gruppen-Isomorphismus $(\mathbb{S}^1, \cdot) \cong \text{SO}(2)$ zwischen dem Einheitskreis

$$\mathbb{S}^1 := \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{C} \quad (4.1.5)$$

mit komplexer Multiplikation und der speziellen orthogonalen Matrizenengruppe.

Beweis. Aus MfP2 wissen wir, dass sich $\text{SO}(2)$ -Matrizen parametrisieren lassen als

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} =: R(\varphi) \quad (4.1.6)$$

mit $\varphi \in (-\pi, \pi]$. Darauf aufbauend ist der Isomorphismus mit der Polarform schnell konstruiert: Wir behaupten, dass

$$\begin{aligned} \psi : (\mathbb{S}^1, \cdot) &\rightarrow \text{SO}(2) \\ \exp(i\varphi) &\mapsto \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

passt. Dabei haben wir den Einheitskreis in der komplexen Ebene mit komplexen Zahlen des Radius $r = 1$ identifiziert. Also fehlen nur noch die Eigenschaften:

(I1) Gruppenhomomorphismus: Seien $\exp(i\varphi_1), \exp(i\varphi_2) \in \mathbb{S}^1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\psi(\exp(i\varphi_1)) \cdot \psi(\exp(i\varphi_2)) &= \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 \\ \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 & -(\sin \varphi_2 \cos \varphi_1 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2) \\ \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_2 \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) & -\sin(\varphi_1 + \varphi_2) \\ \sin(\varphi_1 + \varphi_2) & \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \end{pmatrix} = \psi(\exp(i\varphi_1 + \varphi_2)) \\ &= \psi(\exp(i\varphi_1) \exp(i\varphi_2)).\end{aligned}$$

Benutzt haben wir dabei lediglich die beiden gängigen Additionstheoreme.

(I2) Bijektiv: Das ist tatsächlich trivial, man kann die Inverse von ψ Dank der Parametrisierung von $SO(2)$ direkt ablesen.

□

Das ist doch mal ein Ergebnis. Jetzt wissen wir, dass Multiplikation mit komplexen Einheiten äquivalent zu Rotationen in der Ebene sind. Aber was passiert, wenn man beliebige komplexe Zahlen und nicht nur normierte zulässt? Das Verhalten kennen wir schon aus der linearen Algebra: Multiplikation mit einem reellen Skalar bewirkt eine Streckung oder Stauchung. Komplex-lineare Abbildungen werden also von Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} r \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ r \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \quad (4.1.8)$$

repräsentiert. Dies ist auf \mathbb{C} gerade die Multiplikation mit der komplexen Zahl $z = \alpha + i\beta \neq 0$ und eine starke Einschränkung gegenüber dem reellen Fall! Betrachten wir z.B. die Multiplikation mit $z = i \in \mathbb{C}$, dann entspricht dies der linearen Abbildung

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.1.9)$$

also der Drehung um 90° gegen den Uhrzeigersinn.

Eine komplex-differenzierbare Funktion muss also nicht bloß lokal wie eine reell-lineare Abbildung, sondern sogar wie eine Drehskalierung aussehen. Diese reichere Struktur wird viele, sehr schöne Phänomene in der Funktionentheorie zur Folge haben.

Da wir nun so weit sind, bietet sich noch ein Vergleich der Funktionalmatrix mit der neuen Differentialmatrix an: Fassen wir $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ auf als $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) = f_1(x, y) + if_2(x, y)$ und vergleichen, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \beta &= \frac{\partial f_2}{\partial x} = -\frac{\partial f_1}{\partial y}.\end{aligned}$$

Überraschung (oder auch nicht), das sind die **Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen**. Diese entsprechen also der Anforderung, dass unsere Funktion komplex-differenzierbar ist.

5 Tutorium 15.05.25

5.1 Der Cauchysche Integralsatz

In dieser und letzter Woche habt ihr den ersten zentralen Satz der Funktionentheorie kennengelernt:

Theorem 5.1.1. Cauchyscher Integralsatz, 1. Fassung

Wenn

1. $U \subseteq \mathbb{C}$ eine **offene**, nicht-leere Teilmenge ist,
2. $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine **holomorphe** Funktion ist und
3. Γ ein null-homologer Zykel in U ist, gilt:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0. \quad (5.1.1)$$

Dies ist unser erstes Ergebnis, das aus der starken Bedingung der Holomorphie folgt, was wir im Folgenden ein wenig illustrieren wollen. Dazu vergleichen wir erst einmal ein komplexes Kurvenintegral mit einem reellen Linienintegral, um direkt zu sehen, dass 5.1.1 nicht auf \mathbb{R}^2 stimmt.

Beispiel. Betrachte die konstanten Funktionen $f_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ und $f_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_{\mathbb{C}}(z) = f_{\mathbb{R}}(x, y) := 1$. Diese Funktionen unterscheiden sich lediglich in ihrem Definitionsbereich. Betrachte nun die Einheitskreislinie $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}$ beziehungsweise $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^2$. Auf \mathbb{C} können wir die Einheitskreislinie mit dem null-homologen Zykel

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ t &\mapsto \exp(2\pi i t) \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

durchlaufen. Mit dem Cauchyschen Integralsatz folgt unmittelbar

$$\int_{\gamma} f_{\mathbb{C}}(z) dz = 0. \quad (5.1.3)$$

Auf \mathbb{R}^2 können wir das Kurvenintegral als Integral über eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit der Parametrisierung

$$\begin{aligned} \psi : [-\pi, \pi) &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ t &\mapsto (\cos t, \sin t) \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

ausrechnen. Das vektorielle Linienelement ist über die Gramsche Determinante der Parametrisierung zugänglich:

$$g(t) = \left\| \begin{pmatrix} \cos' t \\ \sin' t \end{pmatrix} \right\|^2 = \sin^2 t + \cos^2 t = 1. \quad (5.1.5)$$

Wir erhalten also

$$\int_{\mathbb{S}^1} f_{\mathbb{R}}(x, y) ds(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{g(t)} f(\psi(t)) dt = \int_{-\pi}^{\pi} dt = 2\pi \neq 0. \quad (5.1.6)$$

Bei der Linienintegration auf \mathbb{R}^2 erhält man auf diese Art also wie gewohnt die Bogenlänge von \mathbb{S}^1 .

Wohlgemerkt muss man bei dem Beispiel etwas vorsichtig sein, da die allgemeine Form des Linienelements

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

wie man es aus der Physik kennt, keine Differentialform darstellt, denn Differentialformen sind lediglich Linearkombinationen und Dachprodukte von 1-Formen, jedoch keine Quadrate. Da das Thema ja eine gewisse Relevanz besitzt, wollen wir einmal versuchen, die gleiche Rechnung mit Differentialformen durchzuziehen. Die globale Parametrisierung ψ bleibt bestehen, wir brauchen aber eine geeignete 1-Form, die, heuristisch argumentiert, die Länge eines Tangentialvektors in $T\mathbb{S}^1$ auswertet. Diese ist gerade gegeben durch

$$\omega_{\mathbb{S}^1} := -y dx + x dy.$$

Das Integral lässt sich damit wie erwartet ausrechnen:

$$\int_{\mathbb{S}^1} \omega = \int_{-\pi}^{\pi} \psi^* \omega = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi. \quad (5.1.7)$$

5.2 Die Cauchysche Integralformel und der Potenzreihenentwicklungssatz

In der Vorlesung habt ihr ohne Beweis, dass diese Definition immer standhält, die Windungszahl definiert, die zentral für eine Erweiterung des Cauchyschen Integralsatzes war:

Definition 5.2.1. Windungszahl

Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein geschlossener Weg und $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $\zeta \notin \text{im}(\gamma)$. Dann heißt die **ganze Zahl**

$$j(\zeta; \gamma) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - \zeta} \quad (5.2.1)$$

Windungszahl von γ .

Hier wäre eigentlich ein Beweis notwendig, dass der Index tatsächlich immer eine ganze Zahl und darüber hinaus **homotopieinvariant** ist. Dies wollen wir zumindest kurz illustrieren: Man definiert dazu für zwei Punkte $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ mit $\frac{z_0}{|z_0|} \neq -\frac{z_1}{|z_1|}$ ², den Drehwinkel θ , der benötigt wird, um $\frac{z_0}{|z_0|}$ auf $\frac{z_1}{|z_1|}$ abzubilden. Eine beliebige Kurve γ mit Bild in \mathbb{C} lässt sich dann in Teilstücke γ_i zerlegen, die jeweils ganz in der oberen oder unteren offenen Halbebene liegen. Wenn wir dann

$$j(0; \gamma) := \frac{1}{2\pi} \sum_i \theta_i$$

setzen, erhalten wir eine formale Konstruktion der Windungszahl, mit der die Behauptungen leicht folgen. Ist nämlich γ eine geschlossene Kurve, die in n hinreichend kurze Teilstücke γ_i zerlegt sei, so muss wegen der Geschlossenheit für den ersten und letzten Punkt $\frac{\gamma(t_0)}{|\gamma(t_0)|} = \frac{\gamma(t_n)}{|\gamma(t_n)|}$ gelten. Setzen wir das in unsere Definition des Drehwinkels ein, erhalten wir

$$\exp\left(i \sum_{i=1}^n \theta_i\right) \frac{\gamma(t_0)}{|\gamma(t_0)|} = \frac{\gamma(t_n)}{|\gamma(t_n)|} = \frac{\gamma(t_0)}{|\gamma(t_0)|}, \quad (5.2.2)$$

also $\exp(i \sum_{i=1}^n \theta_i) = 1$, womit die Behauptung folgt. Ein rigoroser Beweis dazu findet sich z.B. im Werk von Jänich. Mit dieser Definition wagen wir uns auch direkt an den nächsten großen Satz:

Theorem 5.2.2. Cauchysche Integralformel, Umlaufzahlversion

Sei

1. $U \subseteq \mathbb{C}$ offen,
2. $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ ein geschlossener, null-homologer Weg,
3. $\zeta \in U$ mit $\zeta \notin \text{im}(\gamma)$ und
4. $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ **holomorph**.

Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz = j(\zeta; \gamma) f(\zeta). \quad (5.2.3)$$

Dieses sehr schöne Resultat zeigt uns, dass es bei holomorphen Funktionen genügt, ein bestimmtes Integral um einen ausgezeichneten Punkt zu kennen, um auf den Funktionswert an diesem Punkt zu schließen. Neben nützlichen Anwendungen für Berechnungen ist aber vor allem das folgende Resultat als Folgerung daraus essentiell für das Verständnis komplexer Funktionen:

Theorem 5.2.3. Potenzreihenentwicklungssatz

Wenn $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist, so ist f komplex-analytisch.

Das ist eine enorm starke Charakterisierung holomorpher Funktionen! Dies bedeutet anschaulich, dass es für jedes $z_0 \in U$ und jeden Radius $r \in \mathbb{R}^+$ eine Kreisscheibe $\mathbb{D}_r^2(z_0) \subseteq U$ gibt, sodass

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad (5.2.4)$$

für alle $z \in \mathbb{D}_r^2(z_0)$ gilt und die Potenzreihe einen Konvergenzradius $\geq r$ hat. Die Koeffizienten lassen sich errechnen mit

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_r^2(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad (5.2.5)$$

für alle $0 < \epsilon < r$, wobei es in Anwendungen oft praktischere Wege gibt, die Koeffizienten zu bestimmen. Auch wichtig ist die Abschätzung

$$|a_n| \leq \frac{\max(|f(\zeta)| \mid \zeta \in \overline{\mathbb{D}_\epsilon^2(z_0)})}{\epsilon^n} \quad (5.2.6)$$

für alle $0 < \epsilon < r$.

Daraus lernen wir, dass die Theorie holomorpher Funktionen sich insbesondere mit Funktionen beschäftigt, die lokal eine Potenzreihendarstellung besitzen. Als Übung schauen wir uns die Implikationen dieser Einschränkung genauer an.

Übung. Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ für $U \subseteq \mathbb{C}$ offen eine holomorphe Funktion. Zeige, dass die n -te Ableitung $f^{(n)}$ stets

$$|f^{(n)}(z)| \leq n^n n! \quad (5.2.7)$$

erfüllt.

²Dies garantiert, dass die Punkte nicht diametral gegenüberliegend sind.

Lösung. Zunächst einmal präzisieren wir Ungleichung 5.2.6, indem wir uns daran erinnern, wie die Taylorreihe einer Funktion aussieht und daraus eine (zugegebenermaßen relativ offensichtliche) Form für die Koeffizienten ableiten:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (5.2.8)$$

Damit nimmt die Ungleichung die Form

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n! \max_{|z-z_0|=r_0} (|f(z)|)}{r_0^n} =: \frac{n!M}{r_0^n} \quad (5.2.9)$$

an. Da f stetig und $|z - z_0| = r_0$ kompakt ist, ist das Maximum M beschränkt. Angenommen, $|f^{(n)}(z)| > n^n n!$ würde gelten. Dann erhielten wir

$$\frac{n!M}{r_0^n} > n!n^n \Leftrightarrow M > (nr_0)^n, \quad (5.2.10)$$

was nicht sein kann, da M beschränkt ist, die rechte Seite jedoch für $r_0 \neq 0$ nicht. \square

Zum Abschluss heben wir noch das Korollar hervor, welches die Besonderheit holomorpher Funktionen ganz anschaulich präsentiert:

Satz 5.2.4. Holomorphie und Diffbarkeit

Jede holomorphe Funktion ist beliebig oft stetig differenzierbar, also insbesondere von Klasse \mathcal{C}^∞ .

6 Tutorium 18.06.2025

6.1 Vektorräume und Basen

Zunächst wollen wir uns in diesem Tutorium mit den verschiedenen Basisbegriffen auseinandersetzen, die ihr im Laufe der Zeit kennengelernt habt. Grundlegend sind dabei lediglich die Standardbegriffe wie lineare Abhängigkeit und Spann einer Menge von Vektoren.

Definition 6.1.1. Hamel-Basis

Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum. Eine Teilmenge $B \subseteq V$ heißt **Hamel-Basis** oder **algebraische Basis** von V , falls gilt:

(b1) Für alle endlichen Teilmengen $\{v_1, \dots, v_m\} \subseteq B$ folgt aus

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = 0$$

mit $\lambda_i \in \mathbb{K}$ auch $\lambda_i = 0$ für alle i .

(b2) Für alle $v \in V$ existieren **endliche** Familien $(\lambda_i) \subseteq \mathbb{K}$ und $(v_i) \subseteq B$, sodass $v = \sum_i \lambda_i v_i$ gilt.

Solche Basen nennen wir nun Hamel-Basen, um sie von Hilbertbasen stärker abzugrenzen. Besonders achten sollte man in der Definition auf (b2), da wir ausdrücklich nur endlich-dimensionale Linearkombinationen zulassen, auch, wenn $\dim V = \infty$ gilt. Wir geben ohne Beweis einen wichtigen Satz an:

Theorem 6.1.2. Jeder VR hat eine Basis

Jeder Vektorraum hat eine Hamel-Basis.

Der Beweis des Theorems ist gar nicht so kompliziert, aber die Aussage ist äquivalent zum Auswahlaxiom. Das heißt, dass solche Basen im schlimmsten Fall nicht-konstruktiv sind, z.B. kann man die Basis von \mathbb{R} aufgefasset als \mathbb{Q} -Vektorraum nicht angeben. Wir wissen aber sicher, dass eine existiert! Für unendlich-dimensionale Vektorräume sind derartige Basen aber oft sehr unhandlich:

Beispiel. Betrachte den Raum der quadratintegrierbaren Funktionen auf $[0, 2\pi]$, $L^2([0, 2\pi])$. Die Menge

$$B := 1 \cup \{\sin(nx), \cos(nx) \mid n \in \{1, 2, \dots\}\}$$

ist keine Hamel-Basis für diesen Raum, denn bereits die bekannte Sägezahn-Funktion mit Normamplitude und -periode kann als Fourier-Reihe

$$f(t) := -\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin(2\pi k t)}{k} \quad (6.1.1)$$

nur mit (abzählbar) unendlich vielen Basisvektoren dargestellt werden. Eine Hamel-Basis für diesen Raum wäre also bei weitem unhandlicher als B .

Für einen Hilbertraum H ist also klar, dass wir auf der Suche nach einem Basisbegriff sind, der unendliche Linearkombinationen zulässt und dabei gut mit der unendlich-dimensionalen Struktur interagiert. Dieser Begriff ist der der Hilbertbasis:

Definition 6.1.3. Hilbertbasis

Sei H ein (Prä-)Hilbertraum. Eine **Hilbertbasis** für H ist eine Familie $(e_i)_{i \in I} \subseteq H$, sodass für alle $i \in I$ gilt:

(H1) Orthogonalität: $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$

(H2) Normierung: $\|e_i\| = 1$

(H3) Vollständigkeit: $\text{span}(e_i \mid i \in I)$ ist dicht in H .

Eine Familie, die (H1) und (H2) erfüllt, heißt **Orthonormalsystem (ONS)** für H .

Der Kern der neuen Definition liegt dabei in (H3). Diese etwas kryptische Aussage ist äquivalent dazu, dass sich jedes $x \in H$ darstellen lässt als

$$x = \sum_{i \in I} \langle e_i, x \rangle e_i. \quad (6.1.2)$$

Da wir auch unendliche Indexmengen I zulassen, kann diese Linearkombination (aufgefasset als Folge) also aus unendlich vielen Basisvektoren bestehen. **Dies zeigt, dass Hilbertbasen im Allgemeinen keine Hamelbasen sind!** Lediglich für $\dim H < \infty$ ist eine Hilbertbasis gleichzeitig eine Hamelbasis. Schauen wir uns mal eine Übung an, die sich mit solchen Basen leicht lösen lässt:

Übung. Betrachte den Raum $\ell_{\mathbb{C}}^2$ der quadratsummierbaren Zahlenfolgen. Zur Erinnerung: Dieser besteht aus Folgen $c = (c_i)_{i \in I}$ mit $c_i \in \mathbb{C}$ und $\sum_{i \in I} |c_i|^2 < \infty$.

a) Gib eine (möglichst einfache) Hilbertbasis für diesen Raum an.

b) Betrachte den unendlich-dimensionalen Einheitsball

$$\mathbb{D}^{\infty} := \{c \in \ell_{\mathbb{C}}^2 \mid \|c\| \leq 1\} \subseteq \ell_{\mathbb{C}}^2.$$

Beweise: \mathbb{D}^∞ ist abgeschlossen und beschränkt, aber nicht folgenkompakt.^a

^aErinnerung: Ein Raum heißt folgenkompakt, wenn jede Folge eine konvergente Teilfolge besitzt.

Lösung. a) Eine Basis ist gegeben durch $(e_i)_{i=1}^\infty \subseteq \ell_{\mathbb{C}}^2$ mit

$$e_i := (\dots, 0, \underbrace{1}_{i\text{-te Stelle}}, 0, \dots).$$

Die Axiome sind schnell abgehakt, denn offensichtlich gilt $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ und $\|e_i\| = 1$. Ist $c \in \ell_{\mathbb{C}}^2$ irgendeine Folge, so ist

$$\sum_{i=1}^{\infty} \langle e_i, c \rangle e_i = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i = c. \quad (6.1.3)$$

b) Wir beweisen erst Abgeschlossenheit und Beschränktheit: \mathbb{D}^∞ ist offensichtlich beschränkt, denn für alle $c \in \mathbb{D}^\infty$ gilt $\|c\| \leq 1$ gemäß Definition. Außerdem ist die Menge abgeschlossen: Sei dazu $(c_n) \in \mathbb{D}^\infty$ eine Folge in \mathbb{D}^∞ mit Grenzwert $c \in \ell_{\mathbb{C}}^2$, also $\|c_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|c\|$. Da $\|c_n\| \leq 1$ gilt, muss auch $\|c\| \leq 1$ gelten, also $c \in \mathbb{D}^\infty$, womit \mathbb{D}^∞ abgeschlossen ist. Nun zeigen wir, dass die Menge nicht kompakt sein kann. Betrachte dazu die Folge $(e_i)_{i=1}^\infty$ von Basisvektoren in $\ell_{\mathbb{C}}^2$. Für $i \neq j$ gilt immer $\|e_i - e_j\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. Dementsprechend ist jede Teilfolge von dieser Folge keine Cauchy-Folge, kann also nicht konvergieren. \square

Zur allgemeinen Beruhigung können wir sicherstellen:

Theorem 6.1.4. Existenzsatz von Hilbertbasen

Jeder Hilbertraum hat eine Hilbertbasis.

Wir kommen gleich noch einmal zur Nützlichkeit von Basen zurück, nachdem wir uns lineare Abbildungen näher angesehen haben.

6.2 Lineare Operatoren auf Hilberträumen

Nun wenden wir uns den gewohnten linearen Abbildungen zu, aber auf Hilberträumen. Um uns nicht zu sehr zu wiederholen, folgen wir vorerst dem Buch *Kaballo: Grundkurs Funktionalanalysis* für eine inhaltlich identische, aber anders aufgearbeitete Version der Vorlesungsthemen.

Definition 6.2.1. Lineare Operatoren

Seien V, W \mathbb{K} -Vektorräume. Eine Abbildung

$$T : V \rightarrow W$$

heißt **linearer Operator**, falls für alle $u, v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

$$T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v).$$

Der **Kern** von T ist der Unterraum

$$\ker(T) := \{v \in V \mid T(v) = 0\} \leq V.$$

Das **Bild** von T ist der Unterraum

$$\operatorname{im}(T) := \{T(v) \mid v \in V\} \leq W.$$

Nach der ganzen Mühe von wegen Analysis auf Vektorräumen führen wir sodann den Stetigkeitsbegriff für diese Abbildungen ein:

Definition 6.2.2. Stetige Operatoren

Seien $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ normierte Vektorräume^a und $T : V \rightarrow W$ ein linearer Operator. Dann sind äquivalent:

(S1) T ist stetig in $v \in V$.

(S2) T ist gleichmäßig stetig auf V .

(S3) $\exists C \geq 0 : \forall v \in V : \|T(v)\| \leq C\|v\|$.

(S4) $\|T\| := \sup_{\|v\| \leq 1} \|T(v)\| < \infty$.

Der in (S4) definierte Ausdruck heißt **Operatornorm** von T .

^aDie Norm unterdrücken wir künftig in der Notation.

Nachdem all diese Ausdrücke äquivalent sind, können wir jeden davon nutzen, um Stetigkeit zu definieren, und dann zeigen, dass die anderen Aussagen daraus folgen. Praktisch von Bedeutung ist insbesondere (S4) mit der Operatornorm, die uns sagt, dass T genau dann stetig ist, wenn die Einheitskugel auf V , \mathbb{D}_V , auf eine beschränkte Teilmenge von W abbildet. Dies rechtfertigt die Bezeichnung beschränkte lineare Operatoren für stetige lineare Operatoren. Damit erhalten wir ein paar neue Räume:

Definition 6.2.3. Linearformen

Seien V, W normierte \mathbb{K} -Vektorräume.

- Der Raum $L(V, W)$ mit der Operatornorm bezeichnet den *normierten Vektorraum der stetigen linearen Operatoren* $T : V \rightarrow W$ und wir setzen $L(V, V) =: L(V)$.
- Der Dualraum $V' := L(V, \mathbb{K})$ heißt **Raum der linearen Funktionale** oder **Raum der Linearformen** von V und ist ein Banachraum.

Aus der Vorlesung erinnern wir an den Darstellungssatz von Riesz, der garantiert, dass zu jedem $T \in V'$ genau ein $v \in V$ existiert, sodass

$$\forall w \in H : T(w) = \langle w, v \rangle$$

und $\|T\| = \|v\|$ gilt. Außerdem ist für ein $v \in H$ die Abbildung

$$v \mapsto \langle v, \cdot \rangle$$

ein stetiges Funktional mit Norm $\|v\|$.

Beispiel. Sei K ein metrisches Kompaktum mit $x \in K$. Das **Dirac-Funktional** $\delta_x \in \mathcal{C}(K)'$ ist definiert durch

$$\forall f \in \mathcal{C}(K) : \delta_x[f] := f(x).$$

Der Raum $\mathcal{C}(K)$ wird, wie zuletzt erwähnt, mit der Supremumsnorm versehen. Wir haben also

$$|\delta_x[f]| = |f(x)| \leq \|f\|_\infty$$

nach Definition der Supremumsnorm, also auch $\|\delta_x\| \leq 1$. Für die konstante Funktion $c : t \mapsto 1$ haben wir offensichtlich $\|f\|_\infty = 1$ und $|\delta_x[f]| = 1$, also folgt

$$\|\delta_x\| = \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} |\delta_x[f]| = 1$$

und δ_x ist eine stetige Linearform.

Nun fixieren wir $\lambda_i \in \mathbb{K}$ sowie $x_i \in K$ und definieren damit die Linearform

$$L := \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{x_i}.$$

Aus der Dreiecksungleichung folgt

$$\|L\| = \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \left| \sum_i \lambda_i f(x_i) \right| \leq \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \sum_i |\lambda_i| |f(x_i)| \leq \sum_i |\lambda_i|.$$

Wir wählen ein $f \in \mathcal{C}(K)$ mit $\|f\| = 1$ und $\lambda_i f(x_i) = |\lambda_i|$ (dies ist gerechtfertigt nach der Konstruktion der Testfunktionen in MfP3). Dann gilt $L[f] = \sum_i |\lambda_i|$ nach Konstruktion, sodass

$$\|L\| = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|.$$

Bevor wir zu Projektoren übergehen, wollen wir noch einen sehr wichtigen Satz hervorheben. Dazu erinnere man sich daran, dass eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ topologischer Räume offen heißt, wenn Bilder offener Mengen wieder offen sind.³

Theorem 6.2.4. Satz von der offenen Abbildung (Banach-Schauder)

Seien V, W komplexe Banachräume und $T : V \rightarrow W$ ein komplex-linearer Operator. Dann gilt:

1. Die Einschränkung $T|_{\text{im}(T)} : V \rightarrow \text{im}(T)$ ist genau dann offen, wenn $\text{im}(T) \leq W$ abgeschlossen ist.
2. Jeder lineare, surjektive und stetige Operator ist offen.

Daraus folgt sofort ein weiterer wichtiger Satz:

Satz 6.2.5. Satz vom stetigen Inversen

Seien V, W komplexe Banachräume und $T \in L(V, W)$ eine bijektiver Operator. Dann ist die Inverse

$$T^{-1} : W \rightarrow V$$

auch stetig.

6.3 Spektren und Orthogonalprojektion

Im letzten Tutorium habt ihr euch bereits mit Frederic orthogonale Projektoren angeschaut. Wir wollen im Schnelldurchlauf die wichtigsten Aussagen zusammenfassen und erinnern noch einmal daran, dass ein Operator $T \in L(H)$ positiv heißt, wenn $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ für alle $x \in H$ gilt. Dann schreiben wir $T \geq 0$ und setzen für $R \in L(H)$ $T \leq R$ genau dann, wenn $0 \leq R - T$ gilt.

³Man erinnere sich, dass Stetigkeit anders herum funktioniert: Urbilder offener Mengen sind offen für stetige Abbildungen.

Satz 6.3.1. Eigenschaften orthogonaler Projektoren

Sei H ein Hilbertraum und $p : H \rightarrow U \leq H$ ein orthogonaler Projektor auf den abgeschlossenen Unterraum U . Seien $p_i : H \rightarrow U_i \leq H$ weitere orthogonale Projektoren auf abgeschlossene Unterräume und $f \in L(H)$. Dann gilt:

- (P1) p ist stetig, selbstadjungiert und idempotent. Dies charakterisiert darüber hinaus einen orthogonalen Projektor.
- (P2) $f(U) \subseteq U \Leftrightarrow f \circ p = p \circ f \circ p$.
- (P3) $f(U) \subseteq U$ und $f(U^\perp) \subseteq U^\perp$ genau dann, wenn $f \circ p = p \circ f$.
- (P4) $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1$ impliziert, dass $p_1 \circ p_2$ ein orthogonaler Projektor mit Bild $U_1 \cap U_2$ ist.
- (P5) $p_1 \circ p_2 = 0 \Rightarrow p_2 \circ p_1 = 0$. Dann gilt außerdem $U_1 \perp U_2$ und $p_1 + p_2$ ist ein orthogonaler Projektor auf den abg. Unterraum $U_1 \oplus U_2$.
- (P6) $p_1 \leq p_2 \Leftrightarrow \|p_1(x)\| \leq \|p_2(x)\|$ für alle $x \in H$.
- (P7) $0 \leq p \leq \text{id}_H$.

Anhand von Orthogonalprojektoren sollt ihr auf dem aktuellen Blatt euch an Spektren von Operatoren herantasten. Dazu erst einmal eine kurze Motivation: Für endlich-dimensionale Vektorräume galt die Dimensionsformel, da die kurze exakte Sequenz von Abbildungen

$$0 \rightarrow \ker(A) \xrightarrow{\iota} V \xrightarrow{A} \text{im}(A) \rightarrow 0 \quad (6.3.1)$$

für eine lineare Transformation $A : V \rightarrow W$ zerfällt, also

$$V = \ker(A) \oplus \text{im}(A) \quad (6.3.2)$$

und damit

$$\dim V = \dim \ker(A) + \dim \text{im}(A) \quad (6.3.3)$$

gilt. Wird aber min. einer dieser Terme in der Summe unendlich, hat diese keine Aussagekraft mehr, sodass ein Operator $T : V \rightarrow W$ für unendlich-dimensionale Vektorräume V, W nicht automatisch bijektiv ist, falls er surjektiv oder injektiv ist. Betrachten wir ein $R \in L(V)$ mit Skalar λ , der kein Eigenwert von R ist, so muss $L - \lambda \text{id}_V$ zwar injektiv sein, aber kann an der Surjektivität scheitern. Genau das Verhalten wollen wir einfangen:

Definition 6.3.2. Spektrum und Resolvente

Sei B ein komplexer Banachraum, $D(T) \leq B$ dicht und $T : D(T) \rightarrow B$ ein linearer Operator. Wir setzen $L_\lambda := L - \lambda \text{id}$ für $\lambda \in \mathbb{C}$. Die **Resolventenmenge** von T ist definiert als

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid L_\lambda \text{ ist bijektiv mit stetiger Umkehr}\}$$

und das **Spektrum** von T als $\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T)$. Falls L_λ injektiv ist, heißt $R := L_\lambda^{-1}$ die **Resolvente** von T . Die Elemente der Resolventenmenge heißen **reguläre Werte** für T .

Beispiel. Für einen Projektor $p : H \rightarrow p(H)$ auf einem Hilbertraum H mit $p(H) \neq \{0\}$ und $p(H) \neq H$ lässt sich das Spektrum leicht bestimmen. Da p weder die Identität noch die Nullabbildung ist, erhalten wir eine kanonische Zerlegung $H = p(H) \oplus p(H)^\perp$, wobei $p(H) =: U$ und $p(H)^\perp =: U^\perp$ nicht leer sind. Nach Definition eines Projektors ist aber $p(U^\perp) = 0$, also $U^\perp = \ker(p) \neq \{0\}$, womit p nicht bijektiv sein kann. Also ist L_0 nicht umkehrbar und damit $0 \in \sigma(p)$. Weiterhin gilt $(p - \text{id})(U) = p(U) - \text{id}(U)$, aber $p(U) = U$ und damit $L_1 = 0$. Also ist auch $1 \in \sigma(p)$. Wir behaupten, dass dies das gesamte Spektrum ist und müssen noch zeigen, dass p auf $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ tatsächlich invertierbar ist. Dafür gibt es mehrere Methoden, die euch überlassen sind.

Einen kleinen Trick für die Resolvente wollen wir noch erwähnen. Oft ist es sehr schwierig, die Resolventenformel direkt abzulesen, aber man kann sich **informell** ein bisschen aushelfen und dann zeigen, dass das, was man da konstruiert hat, tatsächlich ein beidseitiges, stetiges Inverses ist. Dazu sei $T : V \rightarrow V$ ein stetiger Operator und $P(x) := \sum_{i=0}^n a_i x^i$ ein Polynom auf $\mathbb{C}[x]$. Wir nennen $P(x)$ das Vernichtungspolynom oder Annihilatorpolynom von T , falls formell $P(T) = 0$ gilt. Beispielsweise hat der Operator $\pi : T \rightarrow T$, der lediglich $\pi^2 = \pi$ erfüllt, das Vernichtungspolynom $P_\pi(x) = x^2 - x$, denn

$$P(\pi) = \pi^2 - \pi = \pi - \pi = 0.$$

Seien $x, y \in \mathbb{C}$ beliebig. Durch geschickte Umformung kann man den Ausdruck $P(x) - P(y)$ in die Form

$$P(x) - P(y) = (x - y)Q(x, y)$$

bringen, wobei $Q(x, y)$ ein Restpolynom in x und y ist. Wenn man nun für P das Vernichtungspolynom des Operators T benutzt und formell $T = y$ setzt, erhält man

$$(P_T(x) - P_T(T))\text{id} = P_T(x)\text{id} = (x\text{id} - T)Q(x, T).$$

Wenn $P(x) \neq 0$ gilt, kann man die Gleichung nach $(x\text{id} - T)^{-1}$ umstellen:

$$\frac{1}{x\text{id} - T} = \frac{1}{P_T(x)} Q(x, T)$$

und erhält so einen Ansatz für die Resolvente.

7 Tutorium 26.06.25

Nachdem auf dem aktuellen Blatt die inzwischen hoffentlich gut etablierten beschränkten Operatoren auf Hilberträumen eine Rolle spielen, wollen wir uns diese ein bisschen näher ansehen.

7.1 Lineare Operatoren auf Hilberträumen

Nun wenden wir uns den gewohnten linearen Abbildungen zu, aber auf Hilberträumen. Um uns nicht zu sehr zu wiederholen, folgen wir vorerst dem Buch *Kaballo: Grundkurs Funktionalanalysis* für eine inhaltlich identische, aber anders aufgearbeitete Version der Vorlesungsthemen.

Definition 7.1.1. Lineare Operatoren

Seien V, W \mathbb{K} -Vektorräume. Eine Abbildung

$$T : V \rightarrow W$$

heißt **linearer Operator**, falls für alle $u, v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

$$T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v).$$

Der **Kern** von T ist der Unterraum

$$\ker(T) := \{v \in V \mid T(v) = 0\} \leq V.$$

Das **Bild** von T ist der Unterraum

$$\operatorname{im}(T) := \{T(v) \mid v \in V\} \leq W.$$

Nach der ganzen Mühe von wegen Analysis auf Vektorräumen führen wir sodann den Stetigkeitsbegriff für diese Abbildungen ein:

Definition 7.1.2. Stetige Operatoren

Seien $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ normierte Vektorräume^a und $T : V \rightarrow W$ ein linearer Operator. Dann sind äquivalent:

(S1) T ist stetig in $v \in V$.

(S2) T ist gleichmäßig stetig auf V .

(S3) $\exists C \geq 0 : \forall v \in V : \|T(v)\| \leq C\|v\|$.

(S4) $\|T\| := \sup_{\|v\| \leq 1} \|T(v)\| < \infty$.

Der in (S4) definierte Ausdruck heißt **Operatornorm** von T .

^aDie Norm unterdrücken wir künftig in der Notation.

Nachdem all diese Ausdrücke äquivalent sind, können wir jeden davon nutzen, um Stetigkeit zu definieren, und dann zeigen, dass die anderen Aussagen daraus folgen. Praktisch von Bedeutung ist insbesondere (S4) mit der Operatornorm, die uns sagt, dass T genau dann stetig ist, wenn die Einheitskugel auf V , \mathbb{D}_V , auf eine beschränkte Teilmenge von W abbildet. Dies rechtfertigt die Bezeichnung beschränkte lineare Operatoren für stetige lineare Operatoren. Damit erhalten wir ein paar neue Räume:

Definition 7.1.3. Linearformen

Seien V, W normierte \mathbb{K} -Vektorräume.

- Der Raum $L(V, W)$ mit der Operatornorm bezeichnet den *normierten Vektorraum der stetigen linearen Operatoren* $T : V \rightarrow W$ und wir setzen $L(V, V) =: L(V)$.
- Der Dualraum $V' := L(V, \mathbb{K})$ heißt **Raum der linearen Funktione** oder **Raum der Linearformen** von V und ist ein Banachraum.

Aus der Vorlesung erinnern wir an den Darstellungssatz von Riesz, der garantiert, dass zu jedem $T \in V'$ genau ein $v \in V$ existiert, sodass

$$\forall w \in H : T(w) = \langle w, v \rangle$$

und $\|T\| = \|v\|$ gilt. Außerdem ist für ein $v \in H$ die Abbildung

$$v \mapsto \langle v, \cdot \rangle$$

ein stetiges Funktional mit Norm $\|v\|$.

Beispiel. Sei K ein metrisches Kompaktum mit $x \in K$. Das **Dirac-Funktional** $\delta_x \in \mathcal{C}(K)'$ ist definiert durch

$$\forall f \in \mathcal{C}(K) : \delta_x[f] := f(x).$$

Der Raum $\mathcal{C}(K)$ wird, wie zuletzt erwähnt, mit der Supremumsnorm versehen. Wir haben also

$$|\delta_x[f]| = |f(x)| \leq \|f\|_\infty$$

nach Definition der Supremumsnorm, also auch $\|\delta_x\| \leq 1$. Für die konstante Funktion $c : t \mapsto 1$ haben wir offensichtlich

$\|f\|_\infty = 1$ und $|\delta_x[f]| = 1$, also folgt

$$\|\delta_x\| = \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} |\delta_x[f]| = 1$$

und δ_x ist eine stetige Linearform.

Nun fixieren wir $\lambda_i \in \mathbb{K}$ sowie $x_i \in K$ und definieren damit die Linearform

$$L := \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{x_i}.$$

Aus der Dreiecksungleichung folgt

$$\|L\| = \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \left| \sum_i \lambda_i f(x_i) \right| \leq \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \sum_i |\lambda_i| |f(x_i)| \leq \sum_i |\lambda_i|.$$

Wir wählen ein $f \in \mathcal{C}(K)$ mit $\|f\| = 1$ und $\lambda_i f(x_i) = |\lambda_i|$ (dies ist gerechtfertigt nach der Konstruktion der Testfunktionen in MfP3). Dann gilt $L[f] = \sum_i |\lambda_i|$ nach Konstruktion, sodass

$$\|L\| = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|.$$

Bevor wir zu Projektoren übergehen, wollen wir noch einen sehr wichtigen Satz hervorheben. Dazu erinnere man sich daran, dass eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ topologischer Räume offen heißt, wenn Bilder offener Mengen wieder offen sind.⁴

Theorem 7.1.4. Satz von der offenen Abbildung (Banach-Schauder)

Seien V, W komplexe Banachräume und $T : V \rightarrow W$ ein komplex-linearer Operator. Dann gilt:

1. Die Einschränkung $T|_{\text{im}(T)} : V \rightarrow \text{im}(T)$ ist genau dann offen, wenn $\text{im}(T) \leq W$ abgeschlossen ist.
2. Jeder lineare, surjektive und stetige Operator ist offen.

Daraus folgt sofort ein weiterer wichtiger Satz:

Satz 7.1.5. Satz vom stetigen Inversen

Seien V, W komplexe Banachräume und $T \in L(V, W)$ eine bijektiver Operator. Dann ist die Inverse

$$T^{-1} : W \rightarrow V$$

auch stetig.

7.2 Basisdarstellung linearer Operatoren

In der endlich-dimensionalen linearen Algebra war es eine zentrale Technik, für eine lineare Transformation $A : V \rightarrow W$ von Vektorräumen den Isomorphismus $V \cong \mathbb{R}^n, W \cong \mathbb{R}^m$ zu nutzen und die euklidische ONB in beiden Räumen zu wählen, um A als Matrix $\mathcal{M}_{\mathbb{R}^m}^{\mathbb{R}^n}(A) \in \text{Mat}_{\mathbb{R}}(n, m)$ darzustellen. Offensichtlich wird das in den allgemein unendlich-dimensionalen Hilberträumen mit unserem endlichen Matrixbegriff kaum möglich sein, wir können aber dennoch hoffen, dass die Standard-Hilbertbasis in ℓ^2 eine ähnliche Funktion erfüllt. Auf dem aktuellen Blatt wird dies stark illustriert, da ihr die Stetigkeit verschiedenster Operatoren auf ℓ^2 mittels der Standardbasis nachrechnen werdet.

Bemerkung. (a) Man betrachte also Hilberträume H mit HB $(e_i)_{i \in I}$ und G mit HB $(f_j)_{j \in J}$ sowie einen linearen Operator $T \in L(H, G)$. Da sich jedes $x \in H$ mittels seiner Fourierkoeffizienten $\alpha_i := \langle e_i, x \rangle$ in der Hilbertbasis als $x = \sum_{i \in I} \alpha_i e_i$ darstellen lässt, können wir schreiben:

$$T(x) = T\left(\sum_{i \in I} \alpha_i e_i\right) = \sum_{i \in I} \alpha_i T(e_i) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \alpha_i \beta_{ij} f_j \quad (7.2.1)$$

wobei wir $\beta_{ij} := \langle T e_i, f_j \rangle$ setzen. Die β_{ij} können informell als die Einträge einer unendlich-dimensionalen Matrix aufgefasst werden.

- (b) Die Bessel-Ungleichung für $x \in H$ zeigt, dass die Folge der Fourierkoeffizienten $(\alpha_i)_{i \in I}$ von x ein Element in $\ell^2(I)$ definieren mit $\sum_{i \in I} |\alpha_i|^2 \leq \|x\|^2$. Dies rechtfertigt die Definition des **Fourier-Operators**

$$\mathcal{F} : H \rightarrow \ell^2(I) \quad (7.2.2)$$

$$x \mapsto (\alpha_i)_{i \in I} \quad (7.2.3)$$

mit $\|\mathcal{F}\| \leq 1$. Der Operator ist immer ein Epimorphismus und genau dann ein Monomorphismus, wenn das zugrundeliegende ONS auch maximal, also eine Hilbertbasis, ist. Da jeder Hilbertraum eine Hilbertbasis hat, vermittelt der Fourier-Operator den Isomorphismus $H \cong \ell^2(I)$.⁵

- (c) Sei nun $T \in L(H)$ ein Endomorphismus. Mit dem Fourier-Operator können wir einen Operator $\mathcal{M}(T) := \mathcal{F} T \mathcal{F}^{-1}$ definieren, der auf $\ell^2(I)$ wirkt und unitär äquivalent zu T ist. Betrachtet man nun die Hilberträume $L^2(\Omega)$ für einen messbaren Raum $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\ell_{\mathbb{C}}^2$, so können wir auf diese Art unsere Observable im *Schrödinger-Bild* als partielle

⁴Man erinnere sich, dass Stetigkeit anders herum funktioniert: Urbilder offener Mengen sind offen für stetige Abbildungen.

⁵Ist H sogar separabel, so steigt der Fourier-Operator ab zu einem Isomorphismus $H \cong \ell_{\mathbb{C}}^2$, indem man \mathbb{N} als Indexmenge zugrundelegt.

Differential-Operatoren auf $L^2(\Omega)$ oder mittels des Fourier-Operators als Matrix-Operatoren im *Heisenberg-Bild* auf $\ell_{\mathbb{C}}^2$ realisieren. Die Fragen bezüglich Beschränktheit dieser Operatoren sowie Spektrum und Resolvente sind hochgradig nicht-trivial und Gegenstand der letzten zwei Kapitel der Vorlesung.

Übung. Wir betrachten den Operator $T : U \rightarrow \ell^2$, definiert auf der Standard-Hilbertbasis $(e_i)_{i \in I}$ von ℓ^2 durch

$$T(e_i) = \frac{1}{i+1} \sum_{k \leq i} e_k,$$

wobei U der Unterraum der Folgen mit endlichem Träger und $\sum_i |\alpha_i| \leq 1$ ist. Ist der Operator stetig? Beweise deine Behauptung.

Lösung. Der Operator ist stetig. Dazu sei $x \in U$ eine Folge mit Fourierkoeffizienten α_i und $\|x\| = 1$. Wir schauen uns die Operatornorm von T an:

$$\|T(x)\|^2 = \left\| \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i T(e_i) \right\|^2 = \left\| \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha_i}{i+1} \sum_{k \leq i} e_k \right\|^2 = \left\| \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=i}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k+1} e_i \right\|^2$$

Die letzte Gleichheit sieht man ein, wenn man die Summe als Folge ausschreibt. Diese hat nämlich die Gestalt

$$\left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{2} + \dots, \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{3} + \dots, \dots \right). \quad (7.2.4)$$

Nun wenden wir noch die Dreiecksungleichung (für endliche Summen!) an und erinnern an das Basel-Problem:

$$\|T(x)\|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \left| \sum_{k=i}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k+1} \right|^2 \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^2} \underbrace{\left(\sum_{k=i}^{\infty} |\alpha_k| \right)^2}_{\leq 1} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(i+1)^2} \leq \frac{\pi^2}{6} \quad (7.2.5)$$

Das liefert also $\|T\| \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}}$ und damit die Behauptung. □

8 Tutorium 03.07.25

Heute wenden wir uns endlich dem Ziel des Abschnittes Funktionalanalysis zu: Den Spektralsätzen. Dazu betrachten wir in aller Ruhe bekanntes Gebiet, decken ein paar Grundlagen ab und wenden uns dann dem Spektralsatz für Operatoren auf unendlich-dimensionalen Hilberträumen zu.

8.1 Endlich-Dimensionale Spektralsätze

Das schöne an endlich-dimensionalen Räumen ist, dass ein Endomorphismus

$$T : V \rightarrow V$$

durch Wahl einer Basis von V immer als Matrix dargestellt werden kann. Das führt uns vom Begriff der Eigenwerte:

Definition 8.1.1. Eigenwert

Sei V ein endlich-dimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum und $T \in \text{End}(V)$. Dann heißt $\lambda \in \mathbb{K}$ **Eigenwert** von T , falls

$$Tx = \lambda x$$

eine nicht-triviale Lösung $x \neq 0$ besitzt. Analog definieren wir das Spektrum $\sigma(T)$ sowie die Resolventenmenge $\rho(T)$ und die Resolvente

$$R_\lambda = (T - \lambda \text{id}_V)^{-1}.$$

Natürlich ist dies nichts anderes als Eigenwerttheorie mit neuen Begriffen:

Satz 8.1.2. Eigenwertsatz für endlich-dimensionale Räume

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper \mathbb{K} und

$$T : V \rightarrow V$$

ein Endomorphismus mit darstellender Matrix $\mathcal{M}_T \in \text{Mat}_{\mathbb{K}}$. Dann gilt:

- (a) Die Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{K}$ von \mathcal{M}_T sind die Lösungen der charakteristischen Gleichung
$$\det(\mathcal{M}_T - \lambda \text{id}_V) = 0.$$
- (b) Jeder lineare Operator (Endomorphismus) auf einem endlich-dimensionalen \mathbb{C} -Vektorraum hat mindestens einen Eigenwert.
- (c) Die Eigenwerte von T sind invariant unter Wahl einer Basis, i.e. jede andere darstellende Matrix \mathcal{M}'_T hat die gleichen Eigenwerte wie \mathcal{M}_T .

Das alles ist die gewohnte Theorie aus MfP1/2 und der Physik allgemein. Für diese Theorie hattet ihr bereits einige Spektralsätze:

Theorem 8.1.3. Spektralsatz für Prähilberträume - Diagonalisierung

Sei V ein endlich-dimensionaler Prähilbertraum über \mathbb{R} oder \mathbb{C} und $T \in \text{End}(V)$ ein normaler Endomorphismus mit Eigenwerten in \mathbb{K} . Dann existiert eine Orthonormalbasis von V , in der \mathcal{M}_T Diagonalgestalt hat.

Um auch auf einer Metaebene an MfP4 zu erinnern, formuliere ich diesen Satz nun noch einmal mit leicht anderen Worten:

Theorem 8.1.4. Spektralsatz für Prähilberträume - Spektralzerlegung

Jede normale Matrix $M \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n)$ hat eine Spektralzerlegung

$$M = S \Sigma S^* \tag{8.1.1}$$

mit einer Diagonalmatrix $\Sigma \in \text{Mat}_{\mathbb{K}}(n)$ und einer unitären Matrix $U \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n)$.

Wir werden im Folgenden sehen, dass diese Angewohnheit, Spektralsätze in verschiedenen Versionen anzugeben, nicht nur sehr üblich, sondern auch sehr nützlich ist. Wir haben nun ein Ziel vor Augen: Der Spektralsatz für endlich-dimensionale Prähilberträume soll auf beliebige Hilberträume verallgemeinert werden. Dabei kommt direkt ein erstes Problem auf: Nicht jeder lineare Operator ist im unendlich-dimensionalen Fall stetig.

8.2 Spektralsätze für kompakte Operatoren

Die erste Klasse von Operatoren, die ihr euch angesehen habt, sind in diesem Kontext nicht besonders spannend. Für kompakte Operatoren kann man den Spektralsatz für endlich-dim. Räume fast mutatis mutandis verallgemeinern.

Definition 8.2.1. Kompakte Operatoren

Ein Operator $T : X \rightarrow Y$ zwischen normierten Vektorräumen heißt **kompakt linear** oder **vollständig stetig linear**, falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- (a) T ist linear und für jede beschränkte Teilmenge $A \subseteq X$ ist das Bild $T(A) \subseteq Y$ relativ kompakt, also $\overline{T(A)}$ ist kompakt.
- (b) T ist linear und für jede beschränkte Folge $(x_n) \in X$ hat $(T(x_n))_n \subseteq Y$ eine konvergente Teilfolge.

Mit der Definition von Kompaktheit als Folgenkompaktheit sieht man schnell ein, dass diese Definitionen völlig äquivalent sind. Die Charakterisierung solcher Operatoren habt ihr euch letzte Woche mit Frederic angesehen, daher konzentrieren wir uns auf den Spektralsatz. Dazu erinnern wir kurz an Selbstadjungiertheit im Falle von Operatoren:

Satz 8.2.2. Adjungierter Operator

Seien G, H Hilberträume und $T : \mathcal{D}(H) \rightarrow G$ ein dicht-definierter Operator, d.h. $\overline{\mathcal{D}(H)} = H$, sodass $x \mapsto \langle T(x), y \rangle$ stetig ist für ein $y \in G$. Dann existiert genau ein $z \in \mathcal{D}(T)$ mit

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, z \rangle.$$

Wir nennen den durch $\langle x, T^*(y) \rangle = \langle T(x), y \rangle$ definierten Operator

$$T^* : \mathcal{D}(T^*) \rightarrow H$$

den zu T **adjungierten Operator** mit

$$\mathcal{D}(T^*) := \{y \in G \mid x \mapsto \langle T(x), y \rangle \text{ stetig}\}.$$

Bemerkung. Es ist tatsächlich notwendig, dichte Definiertheit zu fordern. Wäre dem nicht so, kann $\mathcal{D}(T)^\perp \neq \emptyset$ gelten. Dann finden wir ein $u \in \mathcal{D}(T)$ und es gilt:

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle x, u \rangle = \langle x, z + u \rangle.$$

In diesem Fall wäre T^* also nicht mehr eindeutig definiert. Der Beweis, dass T^* existiert, ist abseits davon nur eine einfache Anwendung des Rieszschen Darstellungssatzes.

Für Endomorphismen haben wir zusätzliche Kriterien:

Definition 8.2.3. Symmetrische und selbstadjungierte Operatoren

Ein linearer Operator $T : \mathcal{D}(T) \subseteq H \rightarrow H$ heißt:

- (a) **symmetrisch**, wenn $\langle x, T(y) \rangle = \langle T(x), y \rangle$ für alle $x, y \in \mathcal{D}(T)$ gilt, also $\mathcal{D}(T) \subseteq \mathcal{D}(T^*)$ gilt.
- (b) **normal**, wenn $T^*T = TT^*$, also auch $\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T^*)$, gilt.^a
- (c) **selbstadjungiert**, wenn $T = T^*$, also $\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T^*)$ gilt.

^aEinfach nur, weil ich es amüsant finde, möchte ich anmerken, dass ein Operator **paranormal** heißt, wenn $\|T(x)\|^2 \leq \|T^2(x)\| \|x\|$ gilt.

Ist T ein beschränkter Operator, der auf ganz H definiert ist, so fallen die Definitionen natürlich deutlich simpler aus. Damit können wir nun den angepriesenen analogen Spektralsatz formulieren:

Theorem 8.2.4. Spektralsatz - Kompakte Operatoren

Sei H ein komplexer Hilbertraum und $T \in L(H)$ ein kompakt-normaler Operator. Dann gibt es eine Nullfolge $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $\lambda_i \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda_i| \geq |\lambda_{i+1}|$ und eine Hilbertraumbasis $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$, sodass

$$S(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i \alpha_i e_i =: \Sigma(x) \tag{8.2.1}$$

gilt, wobei $\alpha_i = \langle e_i, x \rangle$ der i -te Fourierkoeffizient ist. Dies definiert einen kompakten normalen Operator Σ mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) Σ ist genau dann selbstadjungiert, wenn alle λ_i reell sind.
- (ii) Es gilt $\sigma(\Sigma) = \sigma(S) = \{0\} \cup \{\lambda_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.
- (iii) Darüber hinaus gilt $\ker(\lambda_i \text{id}_H - \Sigma) = \text{span}(e_i \mid \lambda_i = \lambda_j) \text{ für ein } \lambda_j \neq 0$.

Vor allem Bedingung (ii) zeigt die große Ähnlichkeit zum Spektrum endlich-dimensionaler Endomorphismen.

8.3 Banach-Algebren und *-Algebren

Im Skript wird nun im Folgenden immer wieder von \circ -Algebren gesprochen, ohne, dass diese je definiert werden. Das wollen wir im Tutorium ein bisschen abfedern, bevor wir den vollen Spektralsatz angehen. Dazu beginnen wir ganz langsam mit der Definition einer Algebra:

Definition 8.3.1. Algebra

Eine **\mathbb{K} -Algebra** über einem Körper \mathbb{K} ist ein \mathbb{K} -Vektorraum (\mathfrak{A}, \circ) , auf dem neben Vektoraddition und Skalarmultiplikation noch eine Multiplikation

$$\circ : \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A} \quad (8.3.1)$$

mit folgenden Eigenschaften:

$$(A1) \quad (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$$

$$(A2) \quad x \circ (y + z) = x \circ y + x \circ z$$

$$(A3) \quad (x + y) \circ z = x \circ z + y \circ z$$

$$(A4) \quad \lambda(x \circ y) = (\lambda x) \circ y = x \circ (\lambda y)$$

für alle $x, y, z \in \mathfrak{A}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ definiert ist.

Gilt zusätzlich $x \circ y = y \circ x$, so heißt (\mathfrak{A}, \circ) **kommutative Algebra**.

Gibt es eine Einheit $e \in \mathfrak{A}$ mit $e \circ x = x \circ e = x$, so heißt (\mathfrak{A}, \circ) **unitale Algebra**.^a

^aKünftig unterdrücken wir \circ notationell.

Dies dient nur der Kenntnissnahme, wir wollen unsere Algebren direkt mit analytischer Struktur versehen, um damit Funktionanalysis machen zu können:

Definition 8.3.2. Banach-Algebra

Eine **Banach-Algebra** ist eine \mathbb{K} -Algebra \mathfrak{B} , sodass \mathfrak{B} ein Banachraum ist und für alle $x, y \in \mathfrak{B}$ gilt:

$$\|x \circ y\| \leq \|x\| \circ \|y\|.$$

Ist \mathfrak{B} unital, fordern wir zusätzlich $\|e\| = 1$.

Erkennbar ist, dass hier also eigentlich gar nicht viel passiert. Wir versehen Banachräume einfach nur mit einer weiteren Struktur, zu der ihr schon überraschend viele Beispiele in der Physik gesehen habt. Die Bedingung an die Norm kann man als eine Kompatibilitätsbedingung von analytischer und Algebra-Struktur auffassen.

- Beispiele.** (i) Die (langweiligen) Räume \mathbb{R} und \mathbb{C} werden mit der gewöhnlichen Multiplikation zu Banachalgebren.
(ii) Überraschender ist vielleicht, dass $\mathcal{C}[a, b]$, der Raum der stetigen Funktionen auf $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, eine unitale Banach-Algebra bildet. Das können wir aber ganz leicht hinbekommen, indem wir punktweise Multiplikation $(f \circ g)(t) := f(t)g(t)$ definieren.
(iii) In anderen Kontexten sind Matrix-Banachalgebren sehr wichtig. Der Raum der komplexen, quadratischen Matrizen ist eine nicht-kommutative Banach-Algebra mit Matrixmultiplikation.

So wichtig, dass wir es aus den Beispielen ausgliedern, ist die folgende Banach-Algebra: Sei X ein komplexer Banachraum. Dann ist der Raum der stetigen, linearen Operatoren $\mathfrak{L}(X)$ eine unitale Banach-Algebra. Man setzt $e = \text{id}_X$ und definiert als Norm die **Operatornorm**. In dieser gilt praktischerweise

$$\|T_1 T_2\| \leq \|T_1\| \|T_2\|$$

für beschränkte Operatoren. Für unitale Banach-Algebren entwickelt man ganz analog eine Spektraltheorie:

Ein Element $x \in \mathfrak{B}$ heißt **invertierbar**, wenn ein $x^{-1} \in \mathfrak{B}$ mit $x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = e$ existiert. Dann definieren wir die Resolventenmenge $\rho(x)$ und das Spektrum $\sigma(x)$ von $x \in \mathfrak{B}$ völlig analog. **An diesem Punkt erkennt man: Eigentlich haben wir die ganze Zeit auf der Banach-Algebra der Operatoren gearbeitet!** Für Hilberträume und damit für die Quantenmechanik braucht man noch mehr Struktur:

Definition 8.3.3. Stern-Algebren

Sei \mathfrak{B} eine Banach-Algebra über \mathbb{C} .

- (a) \mathfrak{B} heißt **Banach-*-Algebra** oder **involutive Banachalgebra**, wenn zusätzlich eine Involution

$$* : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}$$

mit folgenden Eigenschaften definiert ist:

$$(*1) \quad (x^*)^* = x$$

$$(*2) \quad (x \circ y)^* = y^* \circ x^*$$

$$(*3) \quad (\lambda x + \mu y)^* = \bar{\lambda} x^* + \bar{\mu} y^*$$

$$(*4) \quad \|x\| = \|x^*\|.$$

- (b) Eine komplexe Banach-*-Algebra heißt **C^* -Algebra**, falls zusätzlich $\|a^* a\| = \|a\|^2$ gilt.

Einige der Eigenschaften sollten euch verdächtig bekannt vorkommen. Es handelt sich bei der Involution, im weitesten Sinne, um eine Verallgemeinerung der komplexen Konjugation auf \mathbb{C} . Und tatsächlich stellt sich heraus, dass die beschränkten linearen Operatoren $\mathfrak{L}(H)$ auf einem komplexen Hilbertraum H eine C^* -Algebra bilden, wobei die Involution durch Adjunktion $T \mapsto T^*$ gegeben ist. Für den Spektralsatz brauchen wir außerdem:

Definition 8.3.4. *-Morphismen, Repräsentation

Seien $(\mathfrak{A}, \circ, *)$ und $(\mathfrak{B}, \cdot, \dagger)$ C^* -Algebren. Eine Abbildung

$$\varphi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$$

heißt ***-Morphismus**, falls:

- (i) $\forall x, y \in \mathfrak{A} : \varphi(x \circ y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$.
- (ii) $\forall x \in \mathfrak{A} : \varphi(x^*) = \varphi(x)^\dagger$.

Ist φ zusätzlich bijektiv, so heißt φ ***-Isomorphismus**. Ein *-Morphismus

$$\Phi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathcal{L}(H)$$

in die C^* -Algebra der stetigen linearen Operatoren auf einem Hilbertraum H heißt **Hilbertraum-Darstellung** von \mathfrak{A} auf H .

Ein großes Ziel der folgenden Spektralsätze sind solche Hilbertraum-Darstellungen. Und wir können mal wieder ein Theorem zur Beruhigung angeben:

Theorem 8.3.5. Theorem von Gelfand-Naimark

Jede C^* -Algebra \mathfrak{A} ist isometrisch *-isomorph zu einer C^* -Unteralgebra der beschränkten linearen Operatoren auf einem Hilbertraum H .

8.4 Spektralsatz für beschränkte Operatoren

Nun können wir endlich den Spektralsatz vernünftig verstehen:

Theorem 8.4.1. Spektralsatz - Stetiger Funktionalkalkül

Sei H ein Hilbertraum und $T \in L(H)$ ein symmetrischer Operator. Dann gibt es einen unitalen *-Morphismus

$$\Phi : \mathcal{C}(\sigma(T)) \rightarrow L(H)$$

mit den Eigenschaften:

- (S1) Stetigkeit: $\exists C > 0 : \|\Phi(f)\| \leq C\|f\|_\infty$.
- (S2) Unitalität: $\Phi(\text{id}) = T$.
- (S3) $T\psi = \lambda\psi \Rightarrow \Phi(f)\psi = f(\lambda)\psi$.
- (S4) $\sigma(\Phi(f)) = \{f(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(T)\}$
- (S5) $f \geq 0 \Rightarrow \Phi(f) \geq 0$.
- (S6) (S1) wird zu $\|\Phi(f)\| = \|f\|_\infty$ verschärft.

Wenn man nun etwas schludrig $f(T)$ für $\Phi(f)$ schreibt, wird damit klar, dass wir nun eine Möglichkeit haben, Funktionen auf Operatoren darzustellen, so wird der Funktion $x \mapsto x^n$ beispielsweise der Operator T^3 zugeordnet. Einen völlig analogen Satz erhält man für einen beschränkten Funktionalkalkül, indem man die beschränkten Borelfunktionen auf \mathbb{R} anstelle von \mathcal{C} betrachtet. Die allgemeine Idee eines Funktionalkalküls kennt ihr aus der Physik gut genug: Wenn der Hamiltonoperator \hat{H} eine Hilbertraumbasis aus Eigenvektoren e_i mit Eigenwerten λ_i hat, so wollen wir

$$\Phi(f) = f(\hat{H}) := \exp\left(-\frac{it\hat{H}}{\hbar}\right)$$

definieren und sicherstellen, dass

$$f(\hat{H})e_i = f(\lambda_i)e_i$$

noch immer gilt. Genau das leistet ein Funktionalkalkül, erweitert die Idee aber auch auf kontinuierliche Spektren. Wir springen ein wenig, um noch ein sehr nützliches Resultat zu haben:

Theorem 8.4.2. Spektralsatz - Spektrale Realisierung

Sei $T \in L(H)$ ein symmetrischer Operator auf einem Hilbertraum H . Dann existiert eine **spektrale Realisierung** von H , bestehend aus endlichen Maßen $(\mu_i)_{i \geq 1}$ auf $\sigma(T)$ und einem unitären Operator

$$U : H \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n L^2(\mathbb{R}, d\mu_i)$$

mit

$$(UTU^{-1}f)_i(\lambda) = \lambda f_i(\lambda)$$

für $f = (f_1, f_2, \dots) \in \oplus L^2$.

In der Tat lässt sich also jeder symmetrische Operator sozusagen als Multiplikationsoperator diagonalisieren.