Topologie (Bachelor)

zur Vorlesung von Prof. Dr. Birgit Richter

17. Oktober 2024

Inhaltsverzeichnis

Konventionen

- TBD

Dies ist ein inoffizielles Skript zur Vorlesung Topologie bei Prof. Dr. Birgit Richter im Wintersemester 24/25. Fehler und Verbesserungsvorschläge immer gerne an rasmus.raschke@uni-hamburg.de.

1 Mengentheoretische Topologie

1.1 Metrische Räume

Definition 1.1.1. Metrischer Raum

Ein **metrischer Raum** ist ein Paar (X, d), bestehend aus einer Menge X und einer Abstandsfunktion

$$d : X \times X \to \mathbb{R}, \tag{1.1.1}$$

genannt **Metrik**, die die folgenden Axiome erfüllt:

(M1) *Positivität*: $\forall x, y \in X : d(x, y) > 0$

(M2) *Symmetrie*: $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$

(M3) *Dreiecksungleichung*: $\forall x, y, z \in X : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Beispiele.

1. Im $\mathbb{R}^n$ ist die **Standardmetrik** oder **euklidische Metrik** für $x, y \in \mathbb{R}$ gegeben durch
$$d_2(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}. \tag{1.1.2}$$
2. Auf $(\mathbb{R}^n, d_n)$ ist eine Metrik durch
$$d_n(x, y) := \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \tag{1.1.3}$$
gegeben.
3. Die **Maximumsnorm** $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ ist gegeben durch
$$d_\infty(x, y) = \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} |x_i - y_i|. \tag{1.1.4}$$
4. Eine weitere Metrik auf $\mathbb{R}^n$ ist gegeben durch
$$d_{\sqrt{\cdot}}(x, y) = \sqrt{d_2(x, y)}. \tag{1.1.5}$$
Diese Metrik kommt nicht von einer Norm.
5. Die **diskrete Metrik** auf einer beliebigen Menge X ist gegeben durch
$$d(x, y) := \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}. \tag{1.1.6}$$
6. Auf $X = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ ist für $f, g \in X$ durch das Integral eine Metrik
$$d(f, g) := \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx \tag{1.1.7}$$
definiert.

Bemerkungen.

1. Wenn (X, d) ein metrischer Raum ist, so ist $Y \subseteq X$ als $(Y, d|_{Y \times Y})$ auch ein metrischer Raum.
2. Wenn (X_1, d_1) und (X_2, d_2) metrische Räume sind, so ist $(X_1 \times X_2, d_1 \times d_2)$ wieder ein metrischer Raum.
3. Vorsicht: Für eine Familie $(X_i, d_i)_{i \in I}$ ist der Sachverhalt komplizierter.

Definition 1.1.2. ϵ-Ball

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $x \in X$ und $\epsilon > 0$. Dann ist der **ϵ-Ball** mit x im Zentrum definiert als

$$B_\epsilon(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\}. \tag{1.1.8}$$

Definition 1.1.3. Umgebung

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Menge $U \subseteq X$ heißt **Umgebung** von $x \in X$, falls ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(x) \subseteq U$ existiert.

Definition 1.1.4. Offen und Abgeschlossen

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $O \subseteq X$ heißt **offen**, falls für alle $x \in O$ ein $\epsilon > 0$ existiert, sodass $B_\epsilon(x) \subseteq O$ gilt. O ist also eine Umgebung all seiner Elemente.
Eine Menge $A \subseteq X$ heißt **abgeschlossen**, falls $X \backslash A$ offen ist.

Bemerkungen.

1. Sei $\epsilon > 0$ und (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist $B_\epsilon(x) \subseteq X$ offen und eine Umgebung von x.
2. ÜA: Sei (X, d) ein metrischer Raum und $x \in X$. Dann ist $\{x\}$ abgeschlossen.

Satz 1.1.5. Umgebungseigenschaften metrischer Räume

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gilt:

1. Jede Umgebung von $x \in X$ enthält x und X ist eine Umgebung von x.
2. Ist $U \subseteq X$ eine Umgebung von X und $U \subseteq V \subseteq X$, so ist V auch eine Umgebung von x.
3. Wenn U_1 und U_2 Umgebungen von x sind, so auch $U_1 \cap U_2$.
4. Ist $U \subseteq X$ eine Umgebung von x, so existiert eine weitere Teilmenge $V \subseteq X$, sodass U eine Umgebung von allen $y \in V$ ist.

Beweis.

1. Trivial.
2. Trivial.
3. Nach Voraussetzung existiert für $x \in U_1 \cap U_2$ ein $\epsilon_1 > 0$, sodass $B_{\epsilon_1}(x) \subseteq U_1$ und ein $\epsilon_2 > 0$, sodass $B_{\epsilon_2}(x) \subseteq U_2$. Definiere $\epsilon := \min(\epsilon_1, \epsilon_2)$. Dann gilt $B_\epsilon(X) \subseteq U_1$ und $B_\epsilon(x) \subseteq U_2$, also $B_\epsilon(x) \subseteq U_1 \cap U_2$.
4. Nach Voraussetzung existiert ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(x) \subseteq U$. Dann ist die Behauptung durch $V := B_\epsilon(x)$ erfüllt.

$\square$

Satz 1.1.6. Eigenschaften offener Mengen

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gilt:

1. $\emptyset$ und X sind offen.
2. Sind $O_1, O_2 \subseteq X$ offen, so auch $O_1 \cap O_2$.
3. Ist $(O_i)_{i \in I}$ eine Familie offener Teilmengen $O_i \subseteq X$, so ist $\cup_i O_i$ auch offen.

Beweis.

1. Trivial.
2. Mit $\min(\epsilon_1, \epsilon_2)$ analog zum obigen Beweis.
3. Sei $x \in \cup_i O_i$. Dann existiert ein $i \in I$ mit $x \in O_i$, sodass ein $\epsilon > 0$ existiert mit $B_\epsilon(x) \subseteq O_i \subseteq \cup_i O_i$.

$\square$

Satz 1.1.7. Eigenschaften abgeschlossener Mengen

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gilt:

1. $\emptyset$ und X sind abgeschlossen.
2. Wenn $A_1, A_2 \subseteq X$ abgeschlossene Teilmengen sind, so ist auch $A_1 \cup A_2$ abgeschlossen.
3. Seien $(A_i)_{i \in I}$ abgeschlossene Teilmengen von X. Dann ist $\cup_i A_i$ wieder abgeschlossen.

Beweis.

1. Da $\emptyset = X \backslash X$ und $X = X \backslash \emptyset$ gilt, sind X und $\emptyset$ gemäß Satz 1.1.6 offen.
2. Sei $A_1 = X \backslash O_1$ und $A_2 = X \backslash O_2$ mit $O_1, O_2 \subseteq X$ offen. Gemäß Satz 1.1.6 (2.) folgt
$$X \backslash (A_1 \cup A_2) = (X \backslash A_1) \cap (X \backslash A_2) = O_1 \cap O_2, \tag{1.1.9}$$
wobei $O_1 \cap O_2$ wieder offen ist.
3. Wir betrachten offene Teilmengen $O_i := X \backslash A_i$. Gemäß Satz 1.1.6 ist
$$X \backslash \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} X \backslash A_i = \bigcup_{i \in I} O_i \tag{1.1.10}$$
offen.

$\square$

2 Algebraische Topologie

2.1 ...