

---

---

# Topologie (Bachelor)

## zur Vorlesung im WiSe24/25

27. Oktober 2024

---

---

### Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Mengentheoretische Topologie</b>	<b>2</b>
1.1	Metrische Räume	2
1.2	Topologische Räume	4
1.3	Basen, Subbasen und Umgebungsbasen	6
1.4	Vergleich von Topologien	7
1.5	Unterräume	8
1.6	Trennungsaxiome	9
<b>2</b>	<b>Algebraische Topologie</b>	<b>11</b>
2.1	...	11

### Konventionen

- TBD

Dies ist ein inoffizielles Skript zur Vorlesung Topologie im Wintersemester 24/25. Fehler und Verbesserungsvorschläge immer gerne an [rasmus.raschke@uni-hamburg.de](mailto:rasmus.raschke@uni-hamburg.de).

# 1 Mengentheoretische Topologie

## 1.1 Metrische Räume

### Definition 1.1.1. Metrischer Raum

Ein **metrischer Raum** ist ein Paar  $(X, d)$ , bestehend aus einer Menge  $X$  und einer Abstandsfunktion

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}, \quad (1.1.1)$$

genannt **Metrik**, die die folgenden Axiome erfüllt:

(M1) *Positivität*:  $\forall x, y \in X : d(x, y) > 0$

(M2) *Symmetrie*:  $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$

(M3) *Dreiecksungleichung*:  $\forall x, y, z \in X : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

**Beispiele.** 1. Im  $\mathbb{R}^n$  ist die **Standardmetrik** oder **euklidische Metrik** für  $x, y \in \mathbb{R}^n$  gegeben durch

$$d_2(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}. \quad (1.1.2)$$

2. Auf  $(\mathbb{R}^n, d_n)$  ist eine Metrik durch

$$d_n(x, y) := \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \quad (1.1.3)$$

gegeben.

3. Die **Maximumsnorm**  $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$  ist gegeben durch

$$d_\infty(x, y) = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |x_i - y_i|. \quad (1.1.4)$$

4. Eine weitere Metrik auf  $\mathbb{R}^n$  ist gegeben durch

$$d_{\sqrt{\cdot}}(x, y) = \sqrt{d_2(x, y)}. \quad (1.1.5)$$

Diese Metrik kommt nicht von einer Norm.

5. Die **diskrete Metrik** auf einer beliebigen Menge  $X$  ist gegeben durch

$$d(x, y) := \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}. \quad (1.1.6)$$

6. Auf  $X = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  ist für  $f, g \in X$  durch das Integral eine Metrik

$$d(f, g) := \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx \quad (1.1.7)$$

definiert.

**Bemerkungen.** 1. Wenn  $(X, d)$  ein metrischer Raum ist, so ist  $Y \subseteq X$  als  $(Y, d|_{Y \times Y})$  auch ein metrischer Raum.

2. Wenn  $(X_1, d_1)$  und  $(X_2, d_2)$  metrische Räume sind, so ist  $(X_1 \times X_2, d_1 \times d_2)$  wieder ein metrischer Raum.

3. Vorsicht: Für eine Familie  $(X_i, d_i)_{i \in I}$  ist der Sachverhalt komplizierter.

### Definition 1.1.2. $\epsilon$ -Ball

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum,  $x \in X$  und  $\epsilon > 0$ . Dann ist der  **$\epsilon$ -Ball** mit  $x$  im Zentrum definiert als

$$B_\epsilon(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\}. \quad (1.1.8)$$

### Definition 1.1.3. Umgebung

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Eine Menge  $U \subseteq X$  heißt **Umgebung** von  $x \in X$ , falls ein  $\epsilon > 0$  mit  $B_\epsilon(x) \subseteq U$  existiert.

### Definition 1.1.4. Offen und Abgeschlossen

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Eine Teilmenge  $O \subseteq X$  heißt **offen**, falls für alle  $x \in O$  ein  $\epsilon > 0$  existiert, sodass  $B_\epsilon(x) \subseteq O$  gilt.  $O$  ist also eine Umgebung all seiner Elemente.

Eine Menge  $A \subseteq X$  heißt **abgeschlossen**, falls  $X \setminus A$  offen ist.

**Bemerkungen.** 1. Sei  $\epsilon > 0$  und  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Dann ist  $B_\epsilon(x) \subseteq X$  offen und eine Umgebung von  $x$ .

2. ÜA: Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $x \in X$ . Dann ist  $\{x\}$  abgeschlossen.

### Satz 1.1.5. Umgebungseigenschaften metrischer Räume

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Dann gilt:

- (U1) Jede Umgebung von  $x \in X$  enthält  $x$  und  $X$  ist eine Umgebung von  $x$ .
- (U2) Ist  $U \subseteq X$  eine Umgebung von  $X$  und  $U \subseteq V \subseteq X$ , so ist  $V$  auch eine Umgebung von  $x$ .
- (U3) Wenn  $U_1$  und  $U_2$  Umgebungen von  $x$  sind, so auch  $U_1 \cap U_2$ .
- (U4) Ist  $U \subseteq X$  eine Umgebung von  $x$ , so existiert eine weitere Teilmenge  $V \subseteq X$ , sodass  $U$  eine Umgebung von allen  $y \in V$  ist.

#### Beweis.

1. Trivial.
2. Trivial.
3. Nach Voraussetzung existiert für  $x \in U_1 \cap U_2$  ein  $\epsilon_1 > 0$ , sodass  $B_{\epsilon_1}(x) \subseteq U_1$  und ein  $\epsilon_2 > 0$ , sodass  $B_{\epsilon_2}(x) \subseteq U_2$ . Definiere  $\epsilon := \min(\epsilon_1, \epsilon_2)$ . Dann gilt  $B_\epsilon(x) \subseteq U_1$  und  $B_\epsilon(x) \subseteq U_2$ , also  $B_\epsilon(x) \subseteq U_1 \cap U_2$ .
4. Nach Voraussetzung existiert ein  $\epsilon > 0$  mit  $B_\epsilon(x) \subseteq U$ . Dann ist die Behauptung durch  $V := B_\epsilon(x)$  erfüllt.

□

### Satz 1.1.6. Eigenschaften offener Mengen

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Dann gilt:

1.  $\emptyset$  und  $X$  sind offen.
2. Sind  $O_1, O_2 \subseteq X$  offen, so auch  $O_1 \cap O_2$ .
3. Ist  $(O_i)_{i \in I}$  eine Familie offener Teilmengen  $O_i \subseteq X$ , so ist  $\cup_i O_i$  auch offen.

#### Beweis.

1. Trivial.
2. Mit  $\min(\epsilon_1, \epsilon_2)$  analog zum obigen Beweis.
3. Sei  $x \in \cup_i O_i$ . Dann existiert ein  $i \in I$  mit  $x \in O_i$ , sodass ein  $\epsilon > 0$  existiert mit  $B_\epsilon(x) \subseteq O_i \subseteq \cup_i O_i$ .

□

### Satz 1.1.7. Eigenschaften abgeschlossener Mengen

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Dann gilt:

- (A1)  $\emptyset$  und  $X$  sind abgeschlossen.
- (A2) Wenn  $A_1, A_2 \subseteq X$  abgeschlossene Teilmengen sind, so ist auch  $A_1 \cup A_2$  abgeschlossen.
- (A3) Seien  $(A_i)_{i \in I}$  abgeschlossene Teilmengen von  $X$ . Dann ist  $\cup_i A_i$  wieder abgeschlossen.

#### Beweis.

1. Da  $\emptyset = X \setminus X$  und  $X = X \setminus \emptyset$  gilt, sind  $X$  und  $\emptyset$  gemäß Satz 1.1.6 offen.
2. Sei  $A_1 = X \setminus O_1$  und  $A_2 = X \setminus O_2$  mit  $O_1, O_2 \subseteq X$  offen. Gemäß Satz 1.1.6 (2.) folgt

$$X \setminus (A_1 \cup A_2) = (X \setminus A_1) \cap (X \setminus A_2) = O_1 \cap O_2, \quad (1.1.9)$$

wobei  $O_1 \cap O_2$  wieder offen ist.

3. Wir betrachten offene Teilmengen  $O_i := X \setminus A_i$ . Gemäß Satz 1.1.6 ist

$$X \setminus \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} X \setminus A_i = \bigcup_{i \in I} O_i \quad (1.1.10)$$

offen.

□

### Definition 1.1.8. stetige Abbildung

Seien  $(X, d)$  und  $(Y, d')$  metrische Räume und  $f : X \rightarrow Y$ . Dann heißt  $f$  **stetig in**  $x_0 \in X$ , wenn für alle  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, sodass

$$d(x_0, x) < \delta \Rightarrow d'(f(x_0), f(x)) < \epsilon \quad (1.1.11)$$

gilt.  $f$  heißt **stetig**, falls dies für alle  $x_0 \in X$  erfüllt ist.

### Satz 1.1.9. Äquivalente Formulierung der Stetigkeit

Seien  $(X, d)$  und  $(Y, d')$  metrische Räume und  $f : X \rightarrow Y$ . Dann sind äquivalent:

1.  $f$  ist stetig.
2.  $V$  ist Umgebung von  $f(x) \Rightarrow f^{-1}(V)$  ist eine Umgebung von  $x$ .
3.  $O \subseteq Y$  ist offen  $\Rightarrow f^{-1}(O)$  ist offen in  $X$ .

4.  $A \in Y$  ist abgeschlossen  $\Rightarrow f^{-1}(A)$  ist abgeschlossen in  $X$ .

**Beweis.** (1.  $\Rightarrow$  2.): Sei  $V$  eine Umgebung von  $f(x)$ . Per Definition existiert ein  $\epsilon > 0$ , sodass  $f(x) \in B_\epsilon(f(x)) \subseteq V$  gilt. Gemäß Annahme existiert ein  $\delta > 0$  mit  $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\epsilon(f(x))$ . Daraus folgt, dass

$$B_\delta(x) \subseteq f^{-1}f(B_\delta(x)) \subseteq f^{-1}(B_\epsilon(f(x))) \subseteq f^{-1}(V). \quad (1.1.12)$$

Also ist  $f^{-1}(V)$  eine Umgebung von  $x$ .

(2.  $\Rightarrow$  3.):  $O$  ist Umgebung all seiner Elemente.

(3.  $\Rightarrow$  4.):  $Y \setminus A$  ist offen in  $Y$ , d.h.  $f^{-1}(Y \setminus A) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(A) = X \setminus f^{-1}(A)$  ist offen in  $X$ . Also ist  $f^{-1}(A)$  abgeschlossen.

(4.  $\Rightarrow$  1.):  $Y \setminus B_\epsilon(f(x))$  ist abgeschlossen impliziert, dass  $f^{-1}(Y \setminus B_\epsilon(f(x)))$  auch abgeschlossen ist. Damit folgt, dass  $X \setminus f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$  abgeschlossen und damit  $f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$  offen ist. Für  $x \in f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$  existiert ein  $\delta > 0$  mit  $B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$ , also auch  $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\epsilon(f(x))$ .  $\square$

### Definition 1.1.10. Äquivalenz von Metriken

Seien  $d_1$  und  $d_2$  Metriken auf einer Menge  $X$ .

1. Gibt es  $\alpha, \beta > 0$  mit

$$\alpha d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y) \quad (1.1.13)$$

für alle  $x, y \in X$ , so heißen  $d_1$  und  $d_2$  **stark äquivalent**.

2.  $d_1$  und  $d_2$  heißen **äquivalent**, falls es für jedes  $x \in X$  und alle  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, sodass

(i)  $d_1(x, y) < \delta \Rightarrow d_2(x, y) < \epsilon$

(ii)  $d_2(x, y) < \delta \Rightarrow d_1(x, y) < \epsilon$

gilt.

**Bemerkungen.** 1. Genau dann, wenn  $d_1$  und  $d_2$  äquivalente Metriken sind, sind  $\text{id}_X : (X, d_1) \rightarrow (X, d_2)$  und  $\text{id}_X : (X, d_2) \rightarrow (X, d_1)$  stetig.

2.  $d_1$  und  $d_2$  stark äquivalent impliziert, dass  $\text{id}_X$  gleichmäßig stetig ist.

3. Äquivalente Metriken ergeben die gleichen offenen (und abgeschlossenen) Mengen.

**Beispiele.** 1. Die  $d_1$ -,  $d_2$ - und  $d_\infty$ -Metrik auf dem  $\mathbb{R}^n$  sind stark äquivalent.

2. Sei  $d_0(x, y) = |x^3 - y^3|$  und  $d_2(x, y)$  die euklidische Metrik. Die Identität  $\text{id}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, d_2) \rightarrow (\mathbb{R}, d_0)$  ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig.

3. Sei  $X$  eine beliebige Menge mit einer beliebigen Metrik  $d$ . Dann ist  $d$  äquivalent zu

$$d'(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} < 1 \quad (1.1.14)$$

für alle  $x, y \in X$ . Also ist *jede Metrik äquivalent zu einer beschränkten Metrik*.

## 1.2 Topologische Räume

Der Begriff des topologischen Raums wird durch Abstraktion der Eigenschaften offener Mengen und stetiger Abbildungen in metrischen Räumen konstruiert.

### Definition 1.2.1. Topologischer Raum

Ein **topologischer Raum** ist ein Paar  $(X, \mathcal{T})$ , bestehend aus einer Menge  $X$  und einer Familie  $\mathcal{T}$  von Teilmengen von  $X$ , sodass folgende Axiome erfüllt sind:

(O1)  $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

(O2)  $O_1, O_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$

(O3) Für eine Familie  $(O_i)_{i \in I}$  mit  $O_i \in \mathcal{T}$  für alle  $i \in I$  folgt  $\cup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}$ .

$\mathcal{T}$  heißt **Topologie** auf  $X$  und alle  $O \in \mathcal{T}$  heißen **offene Mengen**.

**Bemerkung.** Äquivalent dazu ist: Eine Topologie  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$  ist abgeschlossen unter endlichen Schnitten und beliebigen Vereinigungen.

**Beispiele.** 1. Metrische Räume  $(X, d)$  sind auch topologische Räume mit offenen Mengen gegeben durch  $d$ .

2. Auf einer beliebigen Menge  $X$  kann die **diskrete Topologie**  $\mathcal{T} := \mathcal{P}(X)$  definiert werden, in der alle Teilmengen von  $X$  offen sind.

3. Auch kann auf beliebigem  $X$  die **indiskrete Topologie** oder **Klumpentopologie** durch  $\mathcal{T} := \{\emptyset, X\}$  definiert werden.

4. Auf beliebigem  $X$  existiert die **koendliche Topologie**:  $O \subseteq X$  ist offen genau dann, wenn  $X \setminus O$  endlich ist

oder  $O = \emptyset$  gilt.

### Definition 1.2.2. Topologische Grundbegriffe

Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum.

1.  $A \subseteq X$  heißt **abgeschlossen**, falls  $X \setminus A \in \mathcal{T}$ .
2. Sei  $x \in U \subseteq X$ . Dann heißt  $U$  **Umgebung von  $x$** , falls ein  $O \in \mathcal{T}$  existiert, sodass  $x \in O \subseteq U$  gilt.
3. Die Menge aller Umgebungen von  $x$  wird mit  $\mathfrak{U}(x)$  bezeichnet und heißt **Umgebungssystem von  $x$** .
4. Ein Punkt  $x \in X$  heißt **Berührungspunkt** von  $B \subseteq X$ , falls für alle  $U \in \mathfrak{U}(x)$  gilt:  $U \cap B \neq \emptyset$ .
5. Die **abgeschlossene Hülle** von  $B \subseteq X$  ist definiert als

$$\bar{B} := \bigcap_{B \subseteq X, C \text{ abg.}} C. \quad (1.2.1)$$

6. Ein Punkt  $x \in X$  heißt **innerer Punkt** von  $B \subseteq X$ , falls es ein  $U \in \mathfrak{U}(x)$  gibt, sodass  $x \in U \subseteq B$  gilt.
7. Für  $B \subseteq X$  ist

$$\overset{\circ}{B} := \bigcup_{O \subseteq B, O \text{ offen}} O \quad (1.2.2)$$

der **offene Kern** von  $B$ .

8. Der **Rand von  $A \subseteq X$**  ist definiert als

$$\partial A := \{x \in X \mid \forall U \in \mathfrak{U}(x) : U \cap A \neq \emptyset \neq U \cap (X \setminus A)\}. \quad (1.2.3)$$

### Satz 1.2.3. Eigenschaften bestimmter Mengen

Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein top. Raum. Dann gilt:

1. Die abgeschlossenen Mengen von  $X$  erfüllen (A1)-(A3).
2. Die Umgebungen erfüllen (U1)-(U4).

**Bemerkung.** Eine Topologie kann äquivalent durch die Auflistung abgeschlossener Mengen definiert werden, wenn diese (A1)-(A3) erfüllen.

### Definition 1.2.4. Stetigkeit in top. Räumen

Seien  $(X, \mathcal{T})$  und  $(Y, \mathcal{T}')$  top. Räume und  $f : X \rightarrow Y$ .

- (i)  $f$  heißt **stetig in  $x \in X$** , wenn für alle  $U \in \mathfrak{U}(f(x))$  auch  $f^{-1}(U) \in \mathfrak{U}(x)$  gilt.
- (ii)  $f$  heißt **stetig**, falls für alle  $O \in \mathcal{T}'$  gilt, dass  $f^{-1}(O) \in \mathcal{T}$ .

### Satz 1.2.5. Eigenschaften von Abschluss und Innerem

Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein top. Raum mit  $A \in \mathcal{T}$ . Dann gilt

1. (a)  $\bar{A}$  ist abgeschlossen und  $A \subseteq \bar{A}$ .  
(b)  $A = \bar{A}$  gilt genau dann, wenn  $A$  abgeschlossen ist.  
(c)  $\bar{A}$  besteht aus der Menge der Berührungspunkte von  $A$ .
2. (a)  $\overset{\circ}{B}$  ist offen und  $\overset{\circ}{B} \subseteq B$ .  
(b)  $B = \overset{\circ}{B}$  genau dann, wenn  $B$  offen ist.  
(c)  $\overset{\circ}{B}$  besteht aus der Menge der inneren Punkte von  $B$ .

**Beweis.** (a) und (b) sind jeweils trivial. Wir beweisen 1(a). Angenommen,  $x \in \bar{A}$  aber ist kein Berührungspunkt von  $A$ . Dann existiert ein  $U \in \mathfrak{U}(x)$ , sodass  $U \cap A = \emptyset$  gilt. Daraus folgt, dass  $A \subseteq X \setminus U$  gilt, woraus  $A \subseteq X \setminus O$  abgeschlossen folgt. Weiterhin existiert ein  $O \in \mathcal{T}$  mit  $x \in O \subseteq U$ , also  $X \setminus U \subseteq X \setminus O$ . Dann ist aber  $\bar{A} \subseteq X \setminus O$ , also  $x \notin \bar{A}$ . Jetzt nehmen an, dass  $x$  Berührungspunkt ist, aber  $x \notin \bar{A}$ . Also folgt aus  $x \in X \setminus \bar{A}$  offen, dass  $V := X \setminus \bar{A} \in \mathfrak{U}(x)$ , aber  $V \cap A = \emptyset$ , also ist  $x$  kein Berührungspunkt im Widerspruch zur Annahme.  $\square$

**Bemerkung.** Folgendes gilt allgemein:

- Ist  $A \subseteq B$ , so auch  $\bar{A} \subseteq \bar{B}$  und  $\overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{B}$ .
- $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
- $\overset{\circ}{A \cap B} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$

### Definition 1.2.6. Dichtheit

Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein top. Raum.  $A \subseteq X$  heißt **dicht**, falls  $\bar{A} = X$ .  $A \subseteq X$  heißt hingegen **nirgends dicht**, falls  $\overset{\circ}{\bar{A}} = \emptyset$ .

**Beispiele.** 1.  $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$  ist dicht.

2.  $(a, b) \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $(a, b)$  nirgends dicht in  $\mathbb{R}$ .

### Definition 1.2.7. Konvergenz in top. Räumen

Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein top. Raum. Eine Folge  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  mit  $x_i \in X$  **konvergiert** gegen  $x \in X$ , falls gilt: Für alle  $U \in \mathcal{U}(x)$  existiert ein  $N \in \mathbb{N}$ , sodass  $x_n \in U$  für alle  $n \geq N$  gilt.

Das heißt, fast alle  $x_n$  müssen in  $U$  liegen. Allgemein liefert dies deutlich pathologischere Beispiele als Konvergenz in metrischen Räumen.

**Beispiel.** Betrachte  $(X, \{\emptyset, X\})$  mit  $|X| \geq 2$ . Dann liegt nur  $U = X$  in  $\mathcal{U}(x)$ , also konvergiert jede Folge gegen jedes  $y \in X$ .

## 1.3 Basen, Subbasen und Umgebungsbasen

Unser Ziel ist jetzt, auch nicht-endliche Topologien angeben zu können.

### Definition 1.3.1. Basis und Subbasis

Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein top. Raum.

- (a) Eine Familie  $\mathcal{B}$  heißt **Basis** der Topologie  $\mathcal{T}$ , falls alle  $O \subseteq \mathcal{T}$  als Vereinigung von  $B_i \in \mathcal{B}$  geschrieben werden können:

$$\forall O \in \mathcal{T} : O = \bigcup_{j \in J} B_j. \quad (1.3.1)$$

- (b) Eine Familie  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$  heißt **Subbasis** der Topologie  $\mathcal{T}$ , falls jedes  $O \in \mathcal{T}$  eine beliebige Vereinigung endlicher Schnitte von  $S_i \in \mathcal{S}$  ist.

**Beispiele.** 1. Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Dann ist

$$\mathcal{B} = \{B_\epsilon(x) \mid x \in X, \epsilon > 0\} \quad (1.3.2)$$

eine Basis für  $X$ .

2. Die diskrete Topologie  $(X, \mathcal{P}(X))$  hat  $\mathcal{B} = \{\{x\} \mid x \in X\}$  als Basis.

3. Die indiskrete Topologie  $(X, \{X, \emptyset\})$  hat als Basis  $\mathcal{B} = \{X\}$ .

4. Jedes System beliebiger Teilmengen von  $X$  gibt eine Subbasis einer Topologie. Sei z.B.  $\mathcal{S} := \{S_i\}_{i \in I}$  gewünscht. Dann konstruieren wir

$$\mathcal{B} = \{S_{i_1} \cap \dots \cap S_{i_n} \mid S_{i_j} \in \mathcal{S}\} \quad (1.3.3)$$

als Basis und definieren eine Topologie

$$\mathcal{T} = \left\{ \bigcup_{j \in J} (S_{i_1} \cap \dots \cap S_{i_n})_j \right\}. \quad (1.3.4)$$

Das Gute an (Sub-)Basen ist, dass sie uns Arbeit ersparen:

### Satz 1.3.2. Stetigkeit durch Basen

Eine Abbildung  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$  zwischen top. Räumen ist stetig, falls:

- (a) Ist  $\mathcal{B}'$  eine Basis von  $\mathcal{T}'$ , so ist  $f^{-1}(B'_i) \in \mathcal{T}$  für alle  $B'_i \in \mathcal{B}'$ .  
 (b) Ist  $\mathcal{S}'$  eine Subbasis von  $\mathcal{T}'$ ; so ist  $f^{-1}(S'_i) \in \mathcal{T}$  für alle  $S'_i \in \mathcal{S}'$ .

**Beweis.** Folgt aus dem Verhalten von Urbildern bzgl.  $\cup$  und  $\cap$ . □

### Definition 1.3.3. Umgebungsbasis

Ein Mengensystem  $\mathfrak{B}(x) \subseteq \mathcal{U}(x)$  heißt **Umgebungsbasis** von  $x$ , falls für alle  $U \in \mathcal{U}(x)$  ein  $B \in \mathfrak{B}(x)$  existiert, sodass  $B \subseteq U$  gilt.

**Beispiel.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum mit  $x \in X$ . Dann ist  $\mathfrak{B}(x) = \{B_{\frac{1}{n}}(x)\}$  eine Umgebungsbasis von  $x$ .

### Satz 1.3.4. Stetigkeit durch Umgebungsbasen

Eine Abbildung  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$  zwischen top. Räumen ist stetig, falls gilt: Ist für  $f(x) \in Y$   $\mathfrak{B}(f(x))$  eine Umgebungsbasis von  $f(x)$ , so ist  $f^{-1}(B) \in \mathcal{U}(x)$  für alle  $B \in \mathfrak{B}(f(x))$ .

### Definition 1.3.5. Abzählbarkeitsaxiome

Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein top. Raum. Die Abzählbarkeitsaxiome für  $X$  sind gegeben durch:

- (AZ 1) Jedes  $x \in X$  besitzt eine abzählbare Umgebungsbasis.  
 (AZ 2)  $\mathcal{T}$  besitzt eine abzählbare Basis.

- Beispiele.** 1. Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum mit  $x \in X$ . Die Umgebungsbasis  $\mathfrak{B}(x) = \{B_{\frac{1}{n}}(x) | n \in \mathbb{N}\}$  ist abzählbar, also erfüllt  $X$  (AZ1).
2. Betrachte  $(\mathbb{R}^n, d)$  mit  $d \in \{d_1, d_2, d_\infty\}$ . Dann erfüllt  $\mathbb{R}^n$  (AZ2) mit  $\mathfrak{B} = \{B_{\frac{1}{m}}(x) | m \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{Q}^n\}$ .

**Bemerkungen.** 1. Es gilt (AZ2)  $\Rightarrow$  (AZ1): Ist  $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  eine abzählbare Basis von  $\mathcal{T}$ , so ist

$$\mathfrak{B}(x) := \{B \in \mathcal{B} | x \in B\} \quad (1.3.5)$$

eine abzählbare Umgebungsbasis.

2. Es gilt (AZ1)  $\not\Rightarrow$  (AZ2): Ist z.B.  $X$  überabzählbar mit der diskreten Topologie  $(X, \mathcal{P}(X))$ . Dann ist für alle  $x \in X$   $\{x\}$  eine Umgebungsbasis, aber nicht abzählbar.

### Satz 1.3.6. Topologisches Folgenkriterium

Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein top. Raum, der (AZ1) erfüllt. Dann gilt:

- (a)  $x \in \overline{A}$  für  $A \subseteq X$  genau dann, wenn eine Folge  $(a_n)$  in  $A$  existiert, die gegen  $x$  konvergiert.
- (b)  $f : X \rightarrow Y$  ist stetig in  $x \in X$  genau dann, wenn aus  $x_n \rightarrow x$  auch  $f(x_n) \rightarrow f(x)$  folgt.

**Beweis.**

- (a)  $(\Leftarrow)$  gilt immer, der Beweis funktioniert wie in Analysis.

$(\Rightarrow)$ : Sei  $x \in \overline{A}$  und  $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  eine abzählbare Umgebungsbasis von  $x$ . Wir definieren iterativ  $V_1 := U_1$ ,  $V_n := V_{n-1} \cap U_n$ . Es gilt  $V_i \subseteq \mathfrak{U}(x)$  für alle  $i$ . Also ist  $V_i \cap A \neq \emptyset$  für alle  $i$ . Wir wählen jeweils ein  $a_i \in V_i \cap A$  und behaupten  $a_n \rightarrow x$ . Ist  $W \in \mathfrak{U}(x)$  beliebig, so existiert ein  $i$ , sodass  $U_i \subseteq W$ . Also ist  $V_i \subseteq U_i \subseteq W$  und  $V_l \subseteq W$  für alle  $l \geq i$ . Damit folgt  $a_l \in W$  für alle  $l \geq i$ , also  $a_n \rightarrow x$ .

- (b)  $(\Leftarrow)$  funktioniert auch wie in Analysis.  $(\Rightarrow)$ :  $B \subseteq Y$  sei abgeschlossen in  $Y$ . Wähle  $x \in \overline{f^{-1}(B)}$ . Ziel ist, zu zeigen, dass aus  $x \in f^{-1}(B)$  folgt, dass  $f^{-1}(B) = \overline{f^{-1}(B)}$  gilt, und daraus wiederum  $f^{-1}(B)$  abgeschlossen folgt.

Aus (a) folgt, dass eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $f^{-1}(B)$  mit  $x_n \rightarrow x$  existiert. dann ist  $f(x_n) \rightarrow f(x)$ , aber  $f(x_n) \in B$  für alle  $n$ . Damit gilt  $f(x) \in B = \overline{B}$ , also auch  $x \in f^{-1}(B)$ .

□

### Satz 1.3.7. Vorstufe des Urysohnschen Einbettungssatzes

Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein top. Raum, der (AZ2) erfüllt. Dann gibt es eine abzählbare, dichte Teilmenge in  $X$ .

**Beweis.**  $(\mathcal{B}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  seien die Basismengen von  $\mathcal{T}$ . Wähle jeweils ein  $P_n \in \mathcal{B}_n$ . Wir behaupten, dass  $P := \{P_n | n \in \mathbb{N}\}$  dicht für alle  $n$  ist. Sei dafür  $x$  beliebig. Für alle  $U \in \mathfrak{U}(x)$  existiert ein  $B_i \in \mathcal{B}_i$ , sodass  $x \in B_i \subseteq U$  gilt. Für alle  $x \in X$  existiert also ein  $i$ , sodass  $B_i \subseteq U$ , also  $P_i \subseteq U$  und  $P \cap U \neq \emptyset$ .

□

## 1.4 Vergleich von Topologien

### Definition 1.4.1. feiner und gröber

Seien  $\mathcal{T}_1$  und  $\mathcal{T}_2$  Topologien auf  $X$ . Dann heißt  $\mathcal{T}_1$  **feiner** als  $\mathcal{T}_2$  und  $\mathcal{T}_2$  **gröber** als  $\mathcal{T}_1$ , wenn  $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$  gilt, also jedes  $O \in \mathcal{T}_2$  auch in  $\mathcal{T}_1$  enthalten ist.

**Bemerkungen.** 1.  $\mathcal{T}_1$  feiner als  $\mathcal{T}_2$  gilt genau dann, wenn

$$\text{id}_X : (X, \mathcal{T}_1) \rightarrow (X, \mathcal{T}_2) \quad (1.4.1)$$

stetig ist.

2. Allgemein haben es Abbildungen aus  $(X, \mathcal{T}_1)$  leichter, stetig zu sein, als Abbildungen aus  $(X, \mathcal{T}_2)$ , da für  $f : X \rightarrow Y$  stetig gelten muss, dass  $f^{-1}(O') \in \mathcal{T}_1 \supseteq \mathcal{T}_2$ .
3. Für Abbildungen nach  $X$  ist es genau umgekehrt.
4. Es gibt weniger konvergente Folgen in  $(X, \mathcal{T}_1)$  als in  $(X, \mathcal{T}_2)$ .
5. Die indiskrete Topologie ist die feinste Topologie auf  $X$ , die diskrete Topologie die gröbste.
6. Topologien auf  $X$  bilden eine partiell geordnete Menge.

### Definition 1.4.2. Homöomorphismus

Sei  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$  eine Abbildung zwischen topologischen Räumen. Dann heißt  $f$  **Homöomorphismus**, falls  $f$  stetig und bijektiv mit stetiger Umkehrabbildung ist.

Existiert ein Homöomorphismus zwischen  $X$  und  $Y$ , so heißen die Räume **homöomorph**, in Zeichen  $X \cong Y$ .

**Beispiele.** 1. Die Abbildung

$$f : [0, 1) \rightarrow \mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 | \|x\| = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2 \quad (1.4.2)$$

$$t \mapsto \exp(2\pi it) \quad (1.4.3)$$

ist stetig und bijektiv, aber  $f^{-1}$  ist nicht stetig.

2. Wir betrachten die abgeschlossene Kreisscheibe

$$\mathbb{D}^2 := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\} \quad (1.4.4)$$

ist homöomorph zum Quadrat  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ . Beispielsweise kann  $f : [-1, 1]^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$  durch Reskalieren und  $g : \mathbb{D}^2 \rightarrow [-1, 1]$  durch Aufblasen erreicht werden.

3. Es existiert ein Homöomorphismus

$$f : (-1, 1) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.4.5)$$

$$x \mapsto \frac{x}{1 - |x|}. \quad (1.4.6)$$

Dieser lässt sich auf  $(a, b)$  verallgemeinern, solange  $a < b$  gilt.

4. Die **stereographische Projektion** ist ein Homöomorphismus

$$\varphi : \mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\} \setminus \{0, 0, 1\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad (1.4.7)$$

gegeben durch  $\varphi(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3}\right)$ .

### Definition 1.4.3. Abgeschlossene und offene Abbildungen

Eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt

1. **abgeschlossen**, falls für abgeschlossenes  $A \subseteq X$  auch  $f(A) \subseteq Y$  abgeschlossen ist.
2. **offen**, falls für offenes  $O \subseteq X$  auch  $f(O) \subseteq Y$  offen ist.

### Satz 1.4.4. Homöomorphismen sind stetig, bijektiv und offen

Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig, bijektiv und offen (oder abgeschlossen). Dann ist  $f$  ein Homöomorphismus.

**Beweis.** Sei  $O' \subseteq Y$  offen und

$$f^{-1} : Y \rightarrow X \quad (1.4.8)$$

die Umkehrabbildung. Dann ist  $(f^{-1})^{-1}(O) = f(O)$  offen.  $\square$

## 1.5 Unterräume

### Definition 1.5.1. Unterraumtopologie

Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein top. Raum und  $Y \subseteq X$ . Dann ist die **Unterraumtopologie** gegeben durch

$$\mathcal{T}_{X|Y} := \{O \cap Y \mid O \in \mathcal{T}\}. \quad (1.5.1)$$

**Bemerkung.** Das bedeutet, dass  $B \subseteq Y$  genau dann offen ist, wenn ein  $O \in \mathcal{T}$  existiert, sodass  $B = O \cap Y$  gilt. Außerdem ist  $A \subseteq Y$  genau dann abgeschlossen, wenn ein abgeschlossenes  $A' \subseteq X$  mit  $A = A' \cap Y$  existiert.

### Satz 1.5.2. Stetigkeit und Inklusion

Seien  $(X, \mathcal{T})$  und  $(Z, \mathcal{T}')$  top. Räume mit  $Y \subseteq X$ .

(a) Die **Inklusionsabbildung**

$$\begin{aligned} \iota : Y &\hookrightarrow X \\ y &\mapsto \iota(y) := y \end{aligned} \quad (1.5.2)$$

ist stetig.

(b) Eine Abbildung  $f : Z \rightarrow Y$  ist genau dann stetig, wenn  $\iota \circ f$  stetig ist.

Dieser Sachverhalt wird durch folgendes kommutierendes Diagramm ausgedrückt:

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow \iota \circ f & \downarrow \iota \\ & & X \end{array}$$

**Beweis.**

(a) Sei  $O \subseteq X$  offen, dann ist  $\iota^{-1}(O) = O \cap Y$  offen nach Definition von  $\mathcal{T}_{X|Y}$ .

(b) ( $\Rightarrow$ ): Seien  $f$  und  $\iota$  stetig. Dann ist die Verkettung  $\iota \circ f$  auch stetig.

( $\Leftarrow$ ): Sei  $B \subseteq Y$  offen, dann ist zu zeigen, dass  $f^{-1}(B)$  auch offen ist. Es gilt  $B \in \mathcal{T}_{X|Y}$  genau dann, wenn ein  $O \subseteq \mathcal{T}$  mit  $B = O \cap Y$  existiert. Daraus folgt

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(O \cap Y) = f^{-1}(\iota^{-1}(O)) = (\iota \circ f)^{-1}(O), \quad (1.5.3)$$

was offen nach Annahme ist.



**Bemerkung.** Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein top. Raum mit  $Z \subseteq Y \subseteq X$ . Dann gilt  $\mathcal{T}_{X|Z} = \mathcal{T}_{(X|Y)|Z}$ .

### Definition 1.5.3. Einbettung

Seien  $(X', \mathcal{T}')$  und  $(X, \mathcal{T})$  top. Räume. Eine Abbildung  $f : X' \rightarrow X$  heißt **Einbettung**, falls  $f$  ein Homöomorphismus auf  $\text{im}(f) = f(X')$  ist. Dabei trägt  $f(X') \subseteq X$  die Unterraumtopologie.

**Beispiele.** 1. Die Funktion

$$\begin{aligned} f : [0, 1) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \exp(2\pi it) \end{aligned} \quad (1.5.4)$$

ist keine Einbettung, weil  $f : [0, 1) \rightarrow f([0, 1)) = \mathbb{S}^1$  kein Homöomorphismus ist.

2. Sei  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine beliebige, stetige Funktion. Dann ist der **Graph** von  $\phi$ , gegeben durch

$$\begin{aligned} \Gamma_\phi : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ t &\mapsto (t, \phi(t)) \end{aligned} \quad (1.5.5)$$

eine Einbettung.

3. Einbettungen  $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  heißen **Knoten**.

⚠ Ist  $f : X \rightarrow W$  stetig und  $Y \subseteq X$  ein Unterraum mit der Topologie  $\mathcal{T}_{X|Y}$ , dann ist  $f|_Y = f \circ \iota$  stetig. Die Umkehrung gilt jedoch nicht! Ist z.B.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow [0, 1] \\ t &\mapsto f(t) := \begin{cases} 1, & t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 0, & t \in \mathbb{Q}, \end{cases} \end{aligned} \quad (1.5.6)$$

so ist  $f|_{\mathbb{Q}}$  konstant, also auch stetig, aber  $f$  nicht.

## 1.6 Trennungsaxiome

### Definition 1.6.1. Trennungsaxiome

Die Trennungsaxiome für topologische Räume  $(X, \mathcal{T})$  sind gegeben durch:

- (T1) Für alle  $x, y \in X$ ,  $x \neq y$  existieren Umgebungen  $U \subseteq \mathfrak{U}(x)$  und  $V \subseteq \mathfrak{U}(y)$  mit  $x \neq V$  und  $y \neq U$ .
  - (T2) Für alle  $x, y \in X$  mit  $x \neq y$  existieren Umgebungen  $U \subseteq \mathfrak{U}(x)$  und  $V \subseteq \mathfrak{U}(y)$  mit  $U \cap V = \emptyset$ .
  - (T3) Für  $x \in X$  und abgeschlossenes  $x \notin A \subseteq X$  existieren Umgebungen  $U \in \mathfrak{U}(x)$  und  $V \in \mathfrak{U}(A)$ , sodass  $U \cap V = \emptyset$ .
  - (T4) Für abgeschlossene  $A, B \subseteq X$  mit  $A \cap B = \emptyset$  existieren Umgebungen  $U \in \mathfrak{U}(A)$  und  $V \in \mathfrak{U}(B)$ , sodass  $U \cap V = \emptyset$ .
- (T2) heißt auch **Hausdorffeigenschaft**. Räume, die (T2) erfüllen, heißen **Hausdorffräume**.

### Definition 1.6.2. Reguläre und normale Räume

Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein top. Raum.

- (a) Erfüllt  $X$  (T2) und (T3), so heißt  $X$  **regulär**.
- (b) Erfüllt  $X$  (T2) und (T4), so heißt  $X$  **normal**.

**Bemerkungen.** 1. Ist ein Raum hausdorffsch, so sind Grenzwerte eindeutig. Also ist z.B.  $(X, \{\emptyset, X\})$  ist für  $|X| \geq 2$  nicht hausdorffsch.

2. Es gilt (T2)  $\Rightarrow$  (T1).

3. Jedoch gilt

$$(T4) \not\Rightarrow (T3) \not\Rightarrow (T2), \quad (1.6.1)$$

betrachte dafür z.B. den obigen nicht-Hausdorffraum. Dieser erfüllt (T3), da es keine abgeschlossenen  $A \subseteq X$  mit  $x \notin A$  gibt. Auch (T4) ist erfüllt.

4. (ÜA): Genau dann, wenn  $X$  (T1) erfüllt, ist  $\{x\}$  abgeschlossen für alle  $x \in X$ .

### Satz 1.6.3. Normalität impliziert Regularität

Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein normaler top. Raum. Dann ist  $X$  auch regulär.

**Beweis.**  $X$  erfüllt (T2) und (T4), und (T2) impliziert (T1). Also ist  $\{x\}$  abgeschlossen. Ist  $A \subseteq X$  abgeschlossen und  $x \notin A$ , so sind  $\{x\}$  und  $A$  disjunkte und abgeschlossene Teilmengen. Also existieren Umgebungen  $U \in \mathfrak{U}(\{x\}) = \mathfrak{U}(x)$  und  $V \in \mathfrak{U}(A)$  mit  $U \cap V = \emptyset$ . □

**Satz 1.6.4. Hausdorffeigenschaft entspricht abgeschlossener Diagonale**

Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein top. Raum und  $\Delta := \{(x, x) | x \in X\} \subseteq X \times X$  die **Diagonale** mit der Topologie  $\mathcal{T}_{X \times X} := \{O_1 \times O_2 | O_i \in \mathcal{T}\}$ .  $X$  ist genau dann hausdorffsch, falls  $\Delta \subseteq X \times X$  abgeschlossen ist.

**Beweis.** Seien  $x, y \in X$  mit  $x \neq y$ . Das ist äquivalent zu  $(x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta$ . Wir zeigen, dass die Hausdorffeigenschaft äquivalent dazu ist, dass das Komplement  $(X \times X) \setminus \Delta$  offen ist. Äquivalent zu  $\Delta$  abgeschlossen ist  $(X \times X) \setminus \Delta$  offen. Das gilt genau dann, wenn für alle  $(x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta$  ein offenes  $O \in X \times X$  existiert mit  $(x, y) \in O$ . O.B.d.. sei  $O = O_1 \times O_2$ , also  $x \in O_1$  und  $y \in O_2$  mit  $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ . Das gilt genau dann, wenn  $X$  hausdorffsch ist.  $\square$

**Satz 1.6.5. (T3) und (T4) über Umgebungsbasen**

Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein top. Raum.

- (a)  $X$  erfüllt (T3) genau dann, wenn für alle  $x \in X$  die abgeschlossenen Umgebungen von  $x$  eine Umgebungsbasis sind, also für alle  $U \in \mathfrak{U}(x)$  ein abgeschlossenes  $B \in \mathfrak{U}(x) \subseteq X$  existiert.
- (b)  $X$  erfüllt genau dann (T4), wenn für alle abgeschlossenen  $A \subseteq X$  gilt, dass die abgeschlossenen Umgebungen von  $A$  eine Umgebungsbasis von  $A$  bilden, also für alle  $U \in \mathfrak{U}(A)$  ein abgeschlossenes  $B \subseteq \mathfrak{U}(A)$  existiert, sodass  $A \subseteq B \subseteq C$  gilt.

**Bemerkung.** Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein (T4)-Raum und  $A \subseteq X$  abgeschlossen. Dann existiert für alle  $W \in \mathfrak{U}(A)$  ein offenes  $U \in \mathfrak{U}(A)$ , sodass  $A \subseteq U \subseteq \bar{U} \subseteq B = B$ .

**Beweis.** Die Rückrichtung ist eine ÜA, wir zeigen die Hinrichtung:

- (a) (T3) gelte. Seien  $x \in X$  und  $W \in \mathfrak{U}(x)$  gegeben. Daraus folgt, dass ein  $O \in \mathcal{T}$  mit  $x \in O \subseteq W$  existiert.  $X \setminus O$  ist abgeschlossen und  $x \notin X \setminus O$ . Mit (T3) folgt dann, dass  $U \in \mathfrak{U}(x)$  und  $V \in \mathfrak{U}(X \setminus O)$  mit  $U \cap V = \emptyset$  existieren. Aus  $V \in \mathfrak{U}(X \setminus O)$  folgt, dass ein  $O' \in \mathcal{T}$  mit  $(X \setminus O) \subseteq O' \subseteq V$  existiert. Wir behaupten, dass  $X \setminus O' =: B$  die gewünschten Eigenschaften hat.
  - (i)  $x \in X \setminus O'$ : Wir haben  $x \in U$  mit  $U \cap V = \emptyset$ , also ist  $x \in X \setminus V \subseteq X \setminus O'$ .
  - (ii) Es gilt  $U \subseteq (X \setminus V) \subseteq (X \setminus O')$  mit  $U \in \mathfrak{U}(x)$ . Obermengen von Umgebungen sind selbst wieder Umgebungen.
  - (iii)  $X \setminus O' \subseteq X \setminus (X \setminus O) = O \subseteq W$ .
- (b) Analog zu (a), wir ersetzen  $x$  durch  $A$ .

$\square$

**Satz 1.6.6. Vererbung der Trennungsaxiome auf Unterräume**

Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein top. Raum.

- (a) Ist  $X$  hausdorffsch (oder regulär) und  $Y \subseteq X$ , so ist  $(Y, \mathcal{T}_{X|Y})$  ebenfalls hausdorffsch (oder regulär).
- (b) Ist  $X$  normal und  $Y \subseteq X$  abgeschlossen, so ist auch  $(Y, \mathcal{T}_{X|Y})$  normal.

**Bemerkung.** Wo liegt das Problem bei (b)? Seien  $A, B \subseteq Y$  mit  $A \cap B = \emptyset$ . Dann ist  $A = A' \cap Y$  und  $B = B' \cap Y$ . Ist  $Y \subseteq X$  nicht abgeschlossen, so müssen  $A$  und  $B$  in  $X$  nicht abgeschlossen sein.

## 2 Algebraische Topologie

### 2.1 ...