

---

---

# Tutorium MfP4 - SoSe 25

## zur Vorlesung von PD Dr. Holtkamp

10. Mai 2025

---

---

### Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Tutorium 10.04.25</b>	<b>2</b>
1.1	Organisatorisches . . . . .	2
1.2	Literaturempfehlungen . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Tutorium 17.04.25</b>	<b>3</b>
2.1	Wiederholung - Komplexe Zahlen . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Tutorium 24.04.25</b>	<b>7</b>
3.1	Atlanten, Orientierungen und der Satz von Stokes . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Tutorium 08.05.25</b>	<b>9</b>
4.1	Funktionentheorie ist <i>nicht</i> reelle Analysis in zwei Variablen . . . . .	9
<b>5</b>	<b>Tutorium 15.05.25</b>	<b>11</b>
5.1	Der Cauchysche Integralsatz . . . . .	11
5.2	Die Cauchysche Integralformel und der Potenzreihenentwicklungssatz . . . . .	11

### Konventionen

- Wir schreiben für einen Körper  $\mathbb{K}$  kurz  $\mathbb{K}^* := \mathbb{K} \setminus \{0\}$ .
- Real- und Imaginärteil werden mit  $\operatorname{Re}(\cdot)$  respektive  $\operatorname{Im}(\cdot)$  bezeichnet, das Bild einer Abbildung  $f$  hingegen mit  $\operatorname{im}(f)$ .
- Echte Teilmengen tragen das Symbol  $\subset$ , allgemeine Teilmengen das Symbol  $\subseteq$ .

Dies sind meine Tutoriumsnotizen für Mathe für Physiker 4. Falls Ihr Fehler findet, sagt immer gerne Bescheid. Allgemein sind die Notizen oft schnell von mir für meine eigene Tutoriumsvorbereitung getippt, erwartet also bitte kein voll ausgearbeitetes L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X-Skript.

# 1 Tutorium 10.04.25

## 1.1 Organisatorisches

- Festlegung des allgemeinen Tutoriumtermins. Ort: Voraussichtlich wieder Geomatikum, wenn Raum verfügbar.
- Fahrplan MfP4: Differentialgeometrie, Funktionentheorie, Funktionalanalysis
- Wünsche für das Tutorium? Vergleich letzte Semester, konkrete Vorstellungen, etc.
- MathNet-Wolke, Moodle, Homepage, Telegram-Gruppe

## 1.2 Literaturempfehlungen

Zur Differentialgeometrie kennt ihr bereits meine Empfehlungen von letztem Semester. Zur Funktionentheorie:

- Jänich, [Funktionentheorie](#): Sehr angenehm zu lesendes Buch, vor allem, wenn man vielleicht auch an gut geschriebenen Büchern und Anekdoten Spaß hat.
- Salamon, [Funktionentheorie](#): Das Buch basiert auf Ahlfors, Complex Analysis, einem beachtlich guten Standardwerk im englischen Raum. Etwas trockener als Jänich, eher im typischen Mathe-Stil.
- Needham, [Visual Complex Analysis](#): Das (englischsprachige) Buch kann man am besten nebenher lesen, wenn man sich für die geometrische Intuition hinter der Funktionentheorie interessiert.

Zur Funktionalanalysis: Hier ist das Skript kaum zu schlagen, da die Themenwahl wirklich sehr speziell auf das Notwendigste für die Physik gelegt wurde. Die meisten Mathebücher würden die Konzepte aus dem zweiten Semesterteil auf zwei ganze Semester aufteilen. Und dazu kommt noch mehr Maßtheorie. . . . Nichtsdestotrotz, ein bisschen was fällt mir ein:

- Kaballo, [Grundkurs Funktionalanalysis](#): Das Buch ist aus einem MfP-ähnlichen Modul entstanden und daher einigermaßen geeignet. Allgemein ist das Buch relativ nett geschrieben.
- Hall, [Quantum Theory for Mathematicians](#): Hier wird die Funktionalanalysis aus Sicht der Physik mit mittelmäßigem mathematischen Anspruch betrachtet. Mathematisch streng veranlagte Leute können mit dem Buch oft nicht so viel anfangen, manchen gereicht es aber auch zur Rettung. Einfach mal reinlesen :)

Im Allgemeinen ist MfP4 meiner Erfahrung nach, vor allem wenn noch Differentialgeometrie abgefragt wird, sehr gut machbar, vor allem im Vergleich zu den sehr dichten MfP2- und MfP3-Modulen. Erfahrungsgemäß mögen viele die Funktionentheorie sehr und können damit gut umgehen. Funktionalanalysis fällt hingegen meist schwer, da das Thema vielen weniger intuitiv scheint. Im besten Fall findet man aber an beidem Gefallen, im schlimmsten Fall kommt man mit DiffGeo und Funktionentheorie sicher durch die Klausur.

# 2 Tutorium 17.04.25

## 2.1 Wiederholung - Komplexe Zahlen

Mit Sicherheit erinnert ihr euch noch gut an die komplexen Zahlen:

### Definition 2.1.1. Komplexe Zahlen

Der Körper  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  mit

$$\mathbb{C} := \{(a, b) \in \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{R}\} \quad (2.1.1)$$

und den Operationen

$$\begin{aligned} + : \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ (a, b), (c, d) &\mapsto (a, b) + (c, d) := (a + c, b + d), \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

genannt Addition, und

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ (a, b), (c, d) &\mapsto (a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc), \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

genannt Multiplikation, nennen wir den Körper der **komplexen Zahlen**. Die Zahl  $a = \operatorname{Re}(a, b)$  heißt **Realteil**, die Zahl  $b = \operatorname{Im}(a, b)$  **Imaginärteil** von  $z$ .

Meist führt man die *komplexe Einheit*  $i$  ein, sodass  $(a, b) = a + bi$  für  $i^2 := -1$  gilt. Dies erleichtert Rechnungen, ist aber rein symbolischer Natur. Fundamental ist, dass hier ein Körper vorliegt: Sowohl  $(\mathbb{C}, +)$  als auch  $(\mathbb{C}^*, \cdot)$  sind Gruppen (das könnt ihr gerne zur Übung nachprüfen, vor allem die Inversen sollte man einmal konstruiert haben). Bereits aus MfP1 kennt ihr die *komplexe Konjugation*

$$\begin{aligned} \bar{\cdot} : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z = a + bi &\mapsto \bar{z} := a - bi. \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Geometrisch entspricht dies einer Spiegelung an der reellen Achse. Auf  $\mathbb{C}$  definieren wir außerdem den *Absolutwert* oder *Betrag* durch

$$\begin{aligned} |\cdot| : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{R} \\ z &\mapsto |z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2} \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

mit einigen wichtigen Eigenschaften:

(M1) Positivität:  $|z| \geq 0$  mit  $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

(M2) Multiplikativität:  $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$

(M3) Subadditivität (Dreiecksungleichung):  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ .

Sowohl die Multiplikativität als auch die Subadditivität kann man induktiv auf beliebige **endliche** Produkte bzw. Summen ausweiten.

Damit erhalten wir eine Möglichkeit, aus geometrischen Überlegungen verschiedene Formen für komplexe Zahlen herzuleiten. Ausgehend von der *kartesischen Form*  $z = a + bi$  definieren wir den **Radius** von  $z$  als  $r := |z|$ . Das **(Haupt-)Argument** von  $z$  ist dessen eingeschränkter Polarwinkel  $\varphi \in (-\pi, \pi]$ , das aus trigonometrischen Überlegungen hergeleitet werden kann. Damit erhalten wir die *Polarform* und mit der Eulerschen Formel auch die *trigonometrische Form*:

$$z = r \exp(i\varphi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (2.1.6)$$

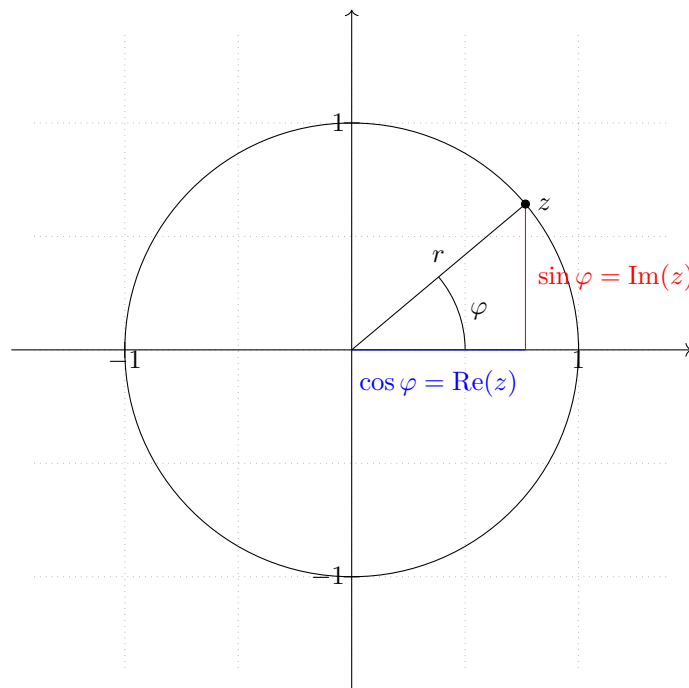


Abbildung 1: Die Einheitskreislinie  $S^1 \hookrightarrow \mathbb{C}$  mit der komplexen Zahl  $z = r \exp(i\varphi)$ .

Nicht immer ist es ganz so einfach, das Argument aus der kartesischen Form zu ermitteln. Wir illustrieren dies mal wie folgt:

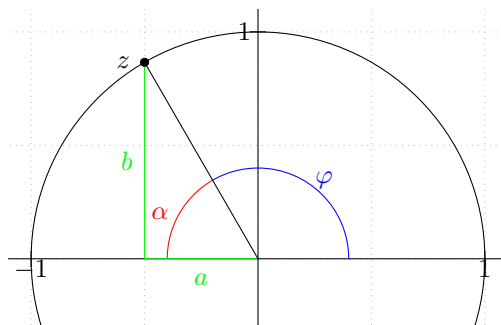


Abbildung 2: In diesem Fall lässt sich der Polarwinkel von  $z = a + ib$  nicht direkt ableiten. Wir erhalten  $\cos \alpha = \frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}}$  und damit  $\varphi = \pi - \arccos\left(\frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = \arccos\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ . Dabei nutzt man, dass  $\arccos(x) = \pi - \arccos(-x)$  gilt.

Wir wollen nun die wichtigen topologischen Begriffe auf  $\mathbb{C}$  betrachten. Die Topologie der komplexen Ebene wird von der Metrik induziert:

### Definition 2.1.2. Topologie auf $\mathbb{C}$

Der **offene  $\epsilon$ -Ball** in  $\mathbb{C}$  ist die Teilmenge

$$B_\epsilon(z) := \{x \in \mathbb{C} \mid |z - x| < \epsilon\} \quad (2.1.7)$$

mit Radius  $\epsilon$  und Mittelpunkt  $z$ . Eine Teilmenge  $X \subseteq \mathbb{C}$  ist genau dann offen, wenn für alle  $z \in X$  gilt, dass  $B_\epsilon(z) \subseteq X$  für ein  $\epsilon > 0$  erfüllt ist.

Man erinnere sich daran, dass eine abgeschlossene Menge darauf aufbauend definiert ist: Eine Teilmenge  $A \subseteq \mathbb{C}$  heißt *abgeschlossen*, wenn ihr Komplement  $\mathbb{C} \setminus A$  offen ist. Eine Menge kann sowohl abgeschlossen als auch offen sein. Wir brauchen noch weitere Grundbegriffe der Topologie:

### Definition 2.1.3. Zusammenhang und Gebiet

- (i) Eine Teilmenge  $A \subseteq \mathbb{C}$  heißt **zusammenhängend**, wenn sie sich nicht in zwei **offene, disjunkte, nicht-leere** Teilmengen zerlegen lässt. Äquivalent dazu ist, dass bei einer Zerlegung  $A = B \cup C$  mit  $B, C$  offen und disjunkt  $A$  oder  $B$  die leere Menge sein muss.
- (ii) Eine Teilmenge  $A \subseteq \mathbb{C}$  heißt **Gebiet**, wenn sie zusammenhängend, offen und nicht-leer ist.

Mit diesem Wissen sollte es uns leichter fallen, Teilmengen von  $\mathbb{C}$  zu charakterisieren. Das versuchen wir zur Übung

gleich einmal:

**Übung.** Skizziere folgende Teilmengen von  $\mathbb{C}$ :

- (a)  $M_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid 3 \leq |z| \leq 10\}$
- (b)  $M_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z^2) > 0\}$
- (c)  $M_3 := \{z \in \mathbb{C}^* \mid \operatorname{Re}(\frac{1}{z}) \leq 2\}$

Entscheide außerdem, ob die angegebenen Mengen Gebiete (in der von der Metrik induzierten Topologie) sind.

**Lösung.** (a) Hier hat man wahrscheinlich schon ein Bild vor Augen, denn wenn man die Polardarstellung  $z = r \exp(i\varphi)$  einsetzt, erhält man unmittelbar

$$3 \leq |r| \leq 10, \quad (2.1.8)$$

da  $|\exp(i\varphi)| = 1$ . Wir erhalten also einen *Kreisring*, wie unten abgebildet. Die Menge ist außerdem offensichtlich nicht offen, denn jeder Randpunkt  $z \in \partial M_1$  besitzt keinen offenen  $\epsilon$ -Ball  $B_\epsilon(z)$ , der noch ganz in  $M_1$  liegt. Also kann  $M_1$  kein Gebiet sein.

(b) Wir setzen  $z = a + bi$  an und erhalten die Ungleichung

$$\operatorname{Re}((a + bi)^2) = \operatorname{Re}(a^2 - b^2 + 2iab) = a^2 - b^2 > 0. \quad (2.1.9)$$

Dies ist äquivalent zu  $a^2 > b^2$ , die Menge wird also nach unten beschränkt durch die Raumdiagonalen  $\Delta_{(a,a)}$  und  $\Delta_{(a,-a)}$ . Wir erhalten den Longitudinalschnitt eines Kegels, wobei der Ursprung ausgenommen wird. Diese Menge ist offen, denn für alle  $z \in M_2$  liegt der offene  $\epsilon$ -Ball mit  $\epsilon < \frac{a}{2}$  für beliebiges  $a$  auf der Diagonale noch ganz in  $M_2$ . Jedoch ist die Menge kein Gebiet, da sie nicht zusammenhängend ist.

(c) Wir setzen erneut  $z = a + bi$  an und machen folgende Feststellung:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}. \quad (2.1.10)$$

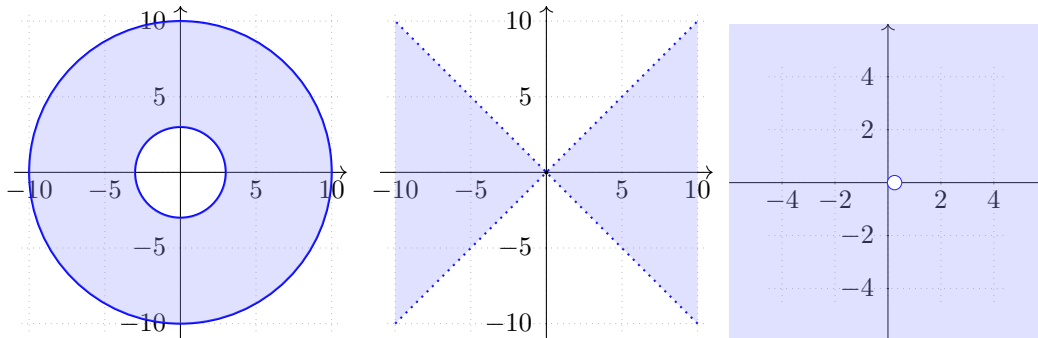
Also ist die Ungleichung durch

$$\frac{a}{a^2 + b^2} \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq a^2 - \frac{a}{2} + b^2 \quad (2.1.11)$$

gegeben. Quadratische Ergänzung liefert

$$0 \leq \left(a - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} + b^2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^2 \leq \left(a - \frac{1}{4}\right)^2 + b^2, \quad (2.1.12)$$

was gerade die Gleichung eines Kreises mit Radius  $\frac{1}{4}$  darstellt, der auf  $(\frac{1}{4}, 0)$  zentriert ist. Man sollte beachten, dass die Ungleichung so gestellt ist, dass die Menge ganz  $\mathbb{C}$  ohne den Inhalt des Kreises darstellt. Dies ist aus den gleichen Gründen wie für  $M_1$  kein Gebiet, denn die Punkte auf der Kreislinie haben keine offene Umgebung in  $M_3$ .



Eine weitere sehr wichtige Ungleichung wollen wir zur Übung beweisen:

#### Satz 2.1.4. Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Seien  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{C}$  endlich viele komplexe Zahlen. Dann gilt die **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i \right|^2 \leq \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \sum_{i=1}^n |y_i|^2. \quad (2.1.13)$$

**Beweis.** Für den Beweis brauchen wir zwei Vorüberlegungen. Erst einmal bemerken wir, dass die Gleichung immer gilt, wenn  $\sum_i |x_i|^2 \sum_i |y_i|^2 = 0$ , da dann alle  $x_i$  oder alle  $y_i$  verschwinden müssen. Wir müssen den Beweis also nur noch für  $\sum_i |x_i|^2 \sum_i |y_i|^2 > 0$  führen. Die andere Vorüberlegung ist etwas technisch<sup>a</sup> Seien  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ . Da Quadrate

reeller Zahlen immer positiv sind, stellen wir fest:

$$\begin{aligned}
0 &\leq (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 = \alpha^2\delta^2 + \beta^2\gamma^2 - 2\alpha\beta\gamma\delta \\
&= \alpha^2\beta^2 - \alpha^2\beta^2 + \gamma^2\delta^2 - \gamma^2\delta^2 + \alpha^2\delta^2 + \beta^2\gamma^2 - 2\alpha\beta\gamma\delta \\
&= (\alpha^2 + \gamma^2)(\beta^2 + \delta^2) - (\alpha^2\beta^2 + \gamma^2\delta^2 + 2\alpha\beta\gamma\delta) \\
&= (\alpha^2 + \gamma^2)(\beta^2 + \delta^2) - (\alpha\beta + \gamma\delta)^2.
\end{aligned}$$

Umstellen liefert nun eine Ungleichung, derer wir uns später bedienen:

$$(*) (\alpha\beta + \gamma\delta)^2 \leq (\alpha^2 + \gamma^2)(\beta^2 + \delta^2). \quad (2.1.14)$$

Nun beweisen wir endlich die Ungleichung mit vollständiger Induktion:

Für den Induktionsanfang brauchen wir nur (M2):

$$|x\bar{y}|^2 = (|x||\bar{y}|)^2 = |x|^2|y|^2. \quad (2.1.15)$$

Hier gilt sogar Gleichheit. Die Induktionsvoraussetzung (IV) ist, dass die Aussage für  $n-1$  gezeigt ist. Da beide Seiten positiv sind, können wir in der IV die Wurzel ziehen:

$$\left| \sum_{i=1}^{n-1} x_i \bar{y}_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} |x_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} |y_i|^2}. \quad (2.1.16)$$

Für den Induktionsschritt müssen wir die Aussage für  $n$  beweisen. Das geht nun relativ schnell:

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i \right| &= \left| x_n \bar{y}_n + \sum_{i=1}^{n-1} x_i \bar{y}_i \right| \leq |x_n \bar{y}_n| + \left| \sum_{i=1}^{n-1} x_i \bar{y}_i \right| \\
&\leq^{\text{IV}} |x_n| |y_n| + \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} |x_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} |y_i|^2} \leq^{(*)} \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n |y_i|^2}
\end{aligned}$$

Im ersten Schritt haben wir die Dreiecksungleichung ausgenutzt, gefolgt von der Induktionsvoraussetzung. Den letzten Schritt können wir mit unserer Ungleichung (\*) direkt folgern, indem wir  $\alpha := |x_n|$ ,  $\beta := |y_n|$ ,  $\gamma := \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} |x_i|^2}$  und  $\delta := \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} |y_i|^2}$  setzen. □

---

<sup>a</sup>Wer denkt, die folgenden Umformungen fielen vom Himmel, kann versuchen, es von vorn nach hinten anzugehen. Dann ist es viel offensichtlicher.

# 3 Tutorium 24.04.25

Da sich das kommende Blatt ganz um Differentialformen drehen wird, wollen wir uns die neuen Begriffe zur Differentialgeometrie aus MFP4 nochmal genauer ansehen:

## 3.1 Atlanten, Orientierungen und der Satz von Stokes

Die zentrale Definition dieses Abschnittes ist die des Atlas:

### Definition 3.1.1. Atlas

Sei  $M$  eine  $k$ -Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ . Wir nennen eine Familie

$$\mathfrak{A} := \{\varphi_j : T_j \rightarrow V_j\}_{j \in J} \quad (3.1.1)$$

von *lokalen Parametrisierungen* mit  $\cup_{j \in J} V_j = M$  einen **Atlas** von  $M$

Was ist die Motivation hinter dieser Definition? Um integrieren zu können, müssen wir das Verhalten einer Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  charakterisieren können. Das Leitmotiv der Differentialgeometrie ist es, dafür die lokale Ähnlichkeit einer MFK auszunutzen: Ist  $\psi : U \rightarrow \tilde{U}$  eine Karte mit  $U \subset M$  und  $\tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^k$  offen, so können wir die Stetigkeit von  $f$  auf die Stetigkeit von  $f \circ \psi^{-1} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit unseren gewohnten Definitionen zurückführen. Wir bemerken aber ein Problem: Atlanten sind nicht eindeutig. Wir wollen natürlich nicht, dass unsere Definition von der Wahl eines Atlas abhängt. Das Problem kann man auf mehrere Arten lösen, in der Vorlesung wurde das zusammen mit der Orientierung verpackt:

### Definition 3.1.2. Orientierung

Sei  $M$  eine  $k$ -Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ . Existiert ein Atlas  $\mathfrak{A}$  von  $M$ , sodass die Kartenwechselabbildung für sich schneidende Parametrisierungen orientierungserhaltend ist, heißt  $M$  **orientierbar**. Können wir weitere lokale Parametrisierungen zu  $\mathfrak{A}$  hinzufügen, ohne eine Änderung der Orientierung zu bewirken, heißen diese **positiv orientiert**, andernfalls **negativ orientiert**.

Wir fassen die Orientierung einer MFK als Äquivalenzklasse auf und bezeichnen  $(M, \mathfrak{A})$  als **orientierte MFK**.

Das war eine ganz schöne Menge, aber jetzt haben wir, was wir wollten: Eine MFK ist entweder nicht orientierbar, oder es gibt genau zwei Orientierungen bzw. Äquivalenzklassen von Atlanten auf  $M$ . Im Skript wird fortan die positive Orientierung gewählt. Sind die lokalen Parametrisierungen von Klasse  $\mathcal{C}^\infty$ , nennt man  $\mathfrak{A}$  auch *glatte Struktur* auf  $M$ .<sup>1</sup> Wir wollen nun Orientierungen auf  $n - 1$ -dimensionale Hyperflächen ausweiten.

### Definition 3.1.3. Orientierung des Tangentialraums

Sei  $(M, \mathfrak{A})$  eine orientierte  $k$ -UMF des  $\mathbb{R}^n$  mit positiv orientierter lokaler Parametrisierung  $\varphi$ . Für jedes  $p \in M$  ist

$$(\partial_1 \varphi_p, \dots, \partial_k \varphi_p) \quad (3.1.2)$$

eine positiv orientierte Basis von  $T_p M$ . Die Orientierung aller weiteren Basen wird relativ dazu festgesetzt.

Für eine Hyperfläche  $M \subseteq \mathbb{R}^{n \geq 2}$  mit Standardorientierung erhalten wir so ein bezüglich  $\mathfrak{A}$  positiv orientiertes **Einheitsnormalenfeld** auf  $M$ : Dies ist ein stetiges Vektorfeld  $\nu : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ , sodass für alle  $p \in M$   $\nu(p)$  ein Einheitsnormalenvektor von  $M$  ist und gilt: Ist  $(v_1, \dots, v_{n-1})$  eine positiv orientierte Basis von  $T_p M$ , so ist  $(\nu(p), v_1, \dots, v_{n-1})$  eine positiv orientierte Basis des  $\mathbb{R}^n$ . Die wahre Erkenntnis ist dabei:

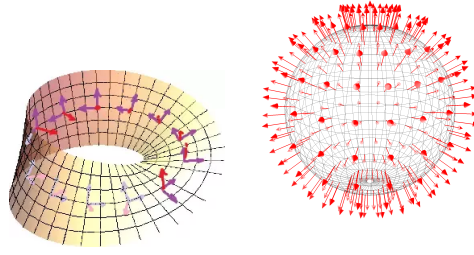
### Satz 3.1.4. Orientierung durch Einheitsnormalenfelder

Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Hyperfläche. Ist  $M$  orientiert, so existiert ein positiv orientiertes Einheitsnormalenfeld. Existiert umgekehrt ein Einheitsnormalenfeld auf  $M$ , so definiert dieses eine Orientierung der Hyperfläche.

Das hilft uns schon einmal in der Vorstellung, wenn man bedenkt, dass Einheitsnormalenfelder für 2-Mannigfaltigkeiten recht anschaulich sind. Darüber hinaus lässt sich so auch der Rand  $\partial M$  einer MFK  $M$  orientieren, indem man randadaptierte Parametrisierungen mit einheitlicher Orientierung auf den Rand einschränkt.

**Beispiel.** Betrachte das Möbiusband  $M \subseteq \mathbb{R}^3$  und die 2-Sphäre  $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ . Beide sind 2-Mannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^3$ . Man betrachte folgendes Bild:

<sup>1</sup>Wer diese Definition über Äquivalenzklassen nicht so hilfreich findet, kann auch mit **maximalen Atlanten** arbeiten: Ein Atlas  $\mathfrak{A}$  heißt **maximal**, wenn er nicht die echte Teilmenge irgendeines anderen Atlas ist.



Erkennbar ist, dass sich das Möbiusband nicht orientieren lässt, während die Sphäre durch das Vektorfeld mit  $\|v\| = 1$  bereits positiv orientiert ist.

Wir haben also jetzt alle Werkzeuge, um Integration auf der gesamten (Unter-)Mannigfaltigkeit über lokale Parametrisierungen zu verstehen. Ziel ist, eine stetige  $k$ -Form auf  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  über eine Teilmenge  $A \subseteq M$  einer orientierten  $k$ -Untermannigfaltigkeit zu integrieren. Gibt es eine einzelne Parametrisierung  $\varphi : T \rightarrow V \subseteq M$  mit  $A \subseteq V$ , so definieren wir Integration über  $A$  durch

$$\int_{(A, \mathfrak{A})} \omega := \int_{\varphi^{-1}(A)} \varphi^* \omega. \quad (3.1.3)$$

Andernfalls sei

$$(\varphi_j : T_j \rightarrow V_j \subseteq M)_{j \in J} \quad (3.1.4)$$

eine endliche Familie von lokalen Parametrisierungen mit  $A \subseteq \cup_{j \in J} V_j$ . Wir nehmen uns eine der Überdeckung  $(V_j)_j$  untergeordnete Partition der Eins

$$\alpha_j : \bigcup_{l \in J} V_l \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.1.5)$$

her und teilen  $A$  gewissermaßen auf die Träger der Partition der Eins auf mit  $A_j := A \cap \text{supp}(\alpha_j) \subseteq V_j$ . Jetzt können wir endlich integrieren:  $\omega$  heißt *integrierbar über  $A$* , falls  $\omega$  über alle  $A_j$  integrierbar ist. Dann setzen wir

$$\int_{(A, \mathfrak{A})} \omega := \sum_{j=1}^m \int_{\varphi_j^{-1}(A_j)} (\alpha_j \circ \varphi_j) \cdot (\varphi_j^* \omega), \quad (3.1.6)$$

zerstückeln das Integral also über die Partitions Mengen. Mit diesem Verständnis springen wir dann auch direkt zu einem der schönsten Sätze:

### Theorem 3.1.5. Stokesscher Integralsatz

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $\omega$  eine glatte  $(k-1)$ -Form auf  $U$  mit  $k \geq 2$ . Sei  $M \subseteq U$  eine  $k$ -Untermannigfaltigkeit. Für jedes Kompaktum  $A \subseteq M$  mit glattem Rand  $\partial A$ , orientiert durch  $M$ , gilt:

$$\int_A d\omega = \int_{\partial A} \omega. \quad (3.1.7)$$

Daraus erhalten wir eine schöne Aussage für unberandete, kompakte Mannigfaltigkeiten  $M$ . Ist  $M \subseteq U$  wie oben, aber  $\partial M = \emptyset$ , so erhalten wir direkt

$$\int_M d\omega = \int_{\emptyset} \omega = 0. \quad (3.1.8)$$

Es gibt noch viele weitere schöne Aussagen, die daraus folgen und einen expliziten Zusammenhang zu exakten Differentialformen aufzeigen. Tatsächlich bekommen wir dadurch konkrete Äquivalenzen, die Exaktheit und Geschlossenheit mit bestimmten Integralen gleichsetzen. Für die Interessierten: Dies findet man unter den Stichworten *De Rahm-Kohomologie* und *De Rahm-Theorem*.



# 4 Tutorium 08.05.25

Nachdem ihr nun voll in die Funktionentheorie eingestiegen seid, wollen wir uns damit etwas näher beschäftigen:

## 4.1 Funktionentheorie ist *nicht* reelle Analysis in zwei Variablen

Wenn wir nun zur Analysis auf  $\mathbb{C}$  übergehen, ist man leicht verleitet, den  $\mathbb{R}$ -**Vektorraum**-Isomorphismus  $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$  so zu interpretieren, dass Funktionentheorie doch eigentlich nichts anderes sei als Analysis im  $\mathbb{R}^2$ . Das ist aber ein fataler Fehler! Der Schlüssel liegt darin, dass auf  $\mathbb{C}$  eine andere Struktur, die Multiplikation mit komplexen Zahlen, definiert ist, die über die Vektorraumstruktur des  $\mathbb{R}^2$  hinausgeht.

In der reellen Analysis war die Erkenntnis, dass sich differenzierbare Funktionen durch ihr Differential annähern lassen, fundamental. Ist  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine beliebige, reell-differenzierbare Funktion, so ist ihr Differential am Punkt  $p \in \mathbb{R}^2$  eine reell-lineare Abbildung

$$\begin{aligned} df_p : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\mapsto df_p(x). \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

Mit der Wahl einer Basis des  $\mathbb{R}^2$  lässt sich das Differential als Matrix

$$Df_p := \left( \begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{array} \right) \bigg|_p \quad (4.1.2)$$

darstellen, genannt *Funktionalmatrix*. Dies ist also einfach eine Matrix der Form  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  mit vier reellen Einträgen.

Wie sieht das im Komplexen aus? Ist ein komplex-lineares Differential auch einfach eine beliebige  $2 \times 2$ -Matrix mit reellen Einträgen? Fangen wir mal mit der komplexen Linearität an:

### Definition 4.1.1. Komplex-Lineare Abbildung

Eine Abbildung  $A : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt **komplex-linear**, falls für alle  $z_1, z_2, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$  gilt:

$$A(\lambda z_1 + \mu z_2) = \lambda A(z_1) + \mu A(z_2). \quad (4.1.3)$$

Wir fordern für eine Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  nun, dass das Differential  $df_p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  nicht bloß linear, sondern komplex-linear ist. Bereits erwähnt habe ich, dass Addition nichts Neues ist. Diese funktioniert auf  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{C}$  völlig analog, nämlich komponentenweise. Neu ist hingegen die Multiplikation mit einer komplexen Zahl, aber was bedeutet das für die darstellende Matrix für das Differential? Wenn wir nur Multiplikation mit komplexen Zahlen betrachten wollen und uns nicht für Addition interessieren, liegt es nahe, erst einmal nur  $\mathbb{C}$  mit Multiplikation zu betrachten. Wir gehen es noch langsamer an und schauen, was passiert, wenn wir nur komplexe Zahlen mit Radius  $r = 1$  zulassen, also die Einheitskreislinie  $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}$  anschauen. Praktischerweise ist  $(\mathbb{S}^1, \cdot)$  eine Gruppe, die einer uns bekannten Gruppe sehr ähnlich sieht. Sind  $z_1 = \exp(i\varphi_1)$  und  $z_2 = \exp(i\varphi_2)$  zwei komplexe, normierte Zahlen, so ist ihr Produkt gegeben durch

$$z_1 z_2 = \exp(i(\varphi_1 + \varphi_2)). \quad (4.1.4)$$

Dass sich die Winkel addieren, ist der entscheidende Hinweis für den gesuchten Isomorphismus:

### Satz 4.1.2. Multiplikation ist Rotation

Es existiert ein Gruppen-Isomorphismus  $(\mathbb{S}^1, \cdot) \cong \text{SO}(2)$  zwischen dem Einheitskreis

$$\mathbb{S}^1 := \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{C} \quad (4.1.5)$$

mit komplexer Multiplikation und der speziellen orthogonalen Matrizenengruppe.

**Beweis.** Aus MfP2 wissen wir, dass sich  $\text{SO}(2)$ -Matrizen parametrisieren lassen als

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} =: R(\varphi) \quad (4.1.6)$$

mit  $\varphi \in (-\pi, \pi]$ . Darauf aufbauend ist der Isomorphismus mit der Polarform schnell konstruiert: Wir behaupten, dass

$$\begin{aligned} \psi : (\mathbb{S}^1, \cdot) &\rightarrow \text{SO}(2) \\ \exp(i\varphi) &\mapsto \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

passt. Dabei haben wir den Einheitskreis in der komplexen Ebene mit komplexen Zahlen des Radius  $r = 1$  identifiziert. Also fehlen nur noch die Eigenschaften:

(I1) Gruppenhomomorphismus: Seien  $\exp(i\varphi_1), \exp(i\varphi_2) \in \mathbb{S}^1$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned}\psi(\exp(i\varphi_1)) \cdot \psi(\exp(i\varphi_2)) &= \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 \\ \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 & -(\sin \varphi_2 \cos \varphi_1 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2) \\ \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_2 \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) & -\sin(\varphi_1 + \varphi_2) \\ \sin(\varphi_1 + \varphi_2) & \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \end{pmatrix} = \psi(\exp(i\varphi_1 + \varphi_2)) \\ &= \psi(\exp(i\varphi_1) \exp(i\varphi_2)).\end{aligned}$$

Benutzt haben wir dabei lediglich die beiden gängigen Additionstheoreme.

(I2) Bijektiv: Das ist tatsächlich trivial, man kann die Inverse von  $\psi$  Dank der Parametrisierung von  $SO(2)$  direkt ablesen.

□

Das ist doch mal ein Ergebnis. Jetzt wissen wir, dass Multiplikation mit komplexen Einheiten äquivalent zu Rotationen in der Ebene sind. Aber was passiert, wenn man beliebige komplexe Zahlen und nicht nur normierte zulässt? Das Verhalten kennen wir schon aus der linearen Algebra: Multiplikation mit einem reellen Skalar bewirkt eine Streckung oder Stauchung. Komplex-lineare Abbildungen werden also von Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} r \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ r \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \quad (4.1.8)$$

repräsentiert. Dies ist auf  $\mathbb{C}$  gerade die Multiplikation mit der komplexen Zahl  $z = \alpha + i\beta \neq 0$  und eine starke Einschränkung gegenüber dem reellen Fall! Betrachten wir z.B. die Multiplikation mit  $z = i \in \mathbb{C}$ , dann entspricht dies der linearen Abbildung

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.1.9)$$

also der Drehung um  $90^\circ$  gegen den Uhrzeigersinn.

Eine komplex-differenzierbare Funktion muss also nicht bloß lokal wie eine reell-lineare Abbildung, sondern sogar wie eine Drehskalierung aussehen. Diese reichere Struktur wird viele, sehr schöne Phänomene in der Funktionentheorie zur Folge haben.

Da wir nun so weit sind, bietet sich noch ein Vergleich der Funktionalmatrix mit der neuen Differentialmatrix an: Fassen wir  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  auf als  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $f(x, y) = f_1(x, y) + if_2(x, y)$  und vergleichen, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \beta &= \frac{\partial f_2}{\partial x} = -\frac{\partial f_1}{\partial y}.\end{aligned}$$

Überraschung (oder auch nicht), das sind die **Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen**. Diese entsprechen also der Anforderung, dass unsere Funktion komplex-differenzierbar ist.

# 5 Tutorium 15.05.25

## 5.1 Der Cauchysche Integralsatz

In dieser und letzter Woche habt ihr den ersten zentralen Satz der Funktionentheorie kennengelernt:

### Theorem 5.1.1. Cauchyscher Integralsatz, 1. Fassung

Wenn

1.  $U \subseteq \mathbb{C}$  eine **offene**, nicht-leere Teilmenge ist,
2.  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine **holomorphe** Funktion ist und
3.  $\Gamma$  ein null-homologer Zykel in  $U$  ist, gilt:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0. \quad (5.1.1)$$

Dies ist unser erstes Ergebnis, das aus der starken Bedingung der Holomorphie folgt, was wir im Folgenden ein wenig illustrieren wollen. Dazu vergleichen wir erst einmal ein komplexes Kurvenintegral mit einem reellen Linienintegral, um direkt zu sehen, dass 5.1.1 nicht auf  $\mathbb{R}^2$  stimmt.

**Beispiel.** Betrachte die konstanten Funktionen  $f_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $f_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f_{\mathbb{C}}(z) = f_{\mathbb{R}}(x, y) := 1$ . Diese Funktionen unterscheiden sich lediglich in ihrem Definitionsbereich. Betrachte nun die Einheitskreislinie  $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}$  beziehungsweise  $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ . Auf  $\mathbb{C}$  können wir die Einheitskreislinie mit dem null-homologen Zykel

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ t &\mapsto \exp(2\pi i t) \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

durchlaufen. Mit dem Cauchyschen Integralsatz folgt unmittelbar

$$\int_{\gamma} f_{\mathbb{C}}(z) dz = 0. \quad (5.1.3)$$

Auf  $\mathbb{R}^2$  können wir das Kurvenintegral als Integral über eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit der Parametrisierung

$$\begin{aligned} \psi : [-\pi, \pi) &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ t &\mapsto (\cos t, \sin t) \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

ausrechnen. Das vektorielle Linienelement ist über die Gramsche Determinante der Parametrisierung zugänglich:

$$g(t) = \left\| \begin{pmatrix} \cos' t \\ \sin' t \end{pmatrix} \right\|^2 = \sin^2 t + \cos^2 t = 1. \quad (5.1.5)$$

Wir erhalten also

$$\int_{\mathbb{S}^1} f_{\mathbb{R}}(x, y) ds(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{g(t)} f(\psi(t)) dt = \int_{-\pi}^{\pi} dt = 2\pi \neq 0. \quad (5.1.6)$$

Bei der Linienintegration auf  $\mathbb{R}^2$  erhält man auf diese Art also wie gewohnt die Bogenlänge von  $\mathbb{S}^1$ .

Wohlgemerkt muss man bei dem Beispiel etwas vorsichtig sein, da die allgemeine Form des Linienelements

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

wie man es aus der Physik kennt, keine Differentialform darstellt, denn Differentialformen sind lediglich Linearkombinationen und Dachprodukte von 1-Formen, jedoch keine Quadrate. Da das Thema ja eine gewisse Relevanz besitzt, wollen wir einmal versuchen, die gleiche Rechnung mit Differentialformen durchzuziehen. Die globale Parametrisierung  $\psi$  bleibt bestehen, wir brauchen aber eine geeignete 1-Form, die, heuristisch argumentiert, die Länge eines Tangentialvektors in  $T\mathbb{S}^1$  auswertet. Diese ist gerade gegeben durch

$$\omega_{\mathbb{S}^1} := -y dx + x dy.$$

Das Integral lässt sich damit wie erwartet ausrechnen:

$$\int_{\mathbb{S}^1} \omega = \int_{-\pi}^{\pi} \psi^* \omega = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi. \quad (5.1.7)$$

## 5.2 Die Cauchysche Integralformel und der Potenzreihenentwicklungssatz

In der Vorlesung habt ihr ohne Beweis, dass diese Definition immer standhält, die Windungszahl definiert, die zentral für eine Erweiterung des Cauchyschen Integralsatzes war:

**Definition 5.2.1. Windungszahl**

Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  ein geschlossener Weg und  $\zeta \in \mathbb{C}$  mit  $\zeta \notin \text{im}(\gamma)$ . Dann heißt die **ganze Zahl**

$$j(\zeta; \gamma) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - \zeta} \quad (5.2.1)$$

**Windungszahl** von  $\gamma$ .

Hier wäre eigentlich ein Beweis notwendig, dass der Index tatsächlich immer eine ganze Zahl und darüber hinaus **homotopieinvariant** ist. Dies wollen wir zumindest kurz illustrieren: Man definiert dazu für zwei Punkte  $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$  mit  $\frac{z_0}{|z_0|} \neq -\frac{z_1}{|z_1|}$ <sup>2</sup>, den Drehwinkel  $\theta$ , der benötigt wird, um  $\frac{z_0}{|z_0|}$  auf  $\frac{z_1}{|z_1|}$  abzubilden. Eine beliebige Kurve  $\gamma$  mit Bild in  $\mathbb{C}$  lässt sich dann in Teilstücke  $\gamma_i$  zerlegen, die jeweils ganz in der oberen oder unteren offenen Halbebene liegen. Wenn wir dann

$$j(0; \gamma) := \frac{1}{2\pi} \sum_i \theta_i$$

setzen, erhalten wir eine formale Konstruktion der Windungszahl, mit der die Behauptungen leicht folgen. Ist nämlich  $\gamma$  eine geschlossene Kurve, die in  $n$  hinreichend kurze Teilstücke  $\gamma_i$  zerlegt sei, so muss wegen der Geschlossenheit für den ersten und letzten Punkt  $\frac{\gamma(t_0)}{|\gamma(t_0)|} = \frac{\gamma(t_n)}{|\gamma(t_n)|}$  gelten. Setzen wir das in unsere Definition des Drehwinkels ein, erhalten wir

$$\exp\left(i \sum_{i=1}^n \theta_i\right) \frac{\gamma(t_0)}{|\gamma(t_0)|} = \frac{\gamma(t_n)}{|\gamma(t_n)|} = \frac{\gamma(t_0)}{|\gamma(t_0)|}, \quad (5.2.2)$$

also  $\exp(i \sum_{i=1}^n \theta_i) = 1$ , womit die Behauptung folgt. Ein rigoroser Beweis dazu findet sich z.B. im Werk von Jänich. Mit dieser Definition wagen wir uns auch direkt an den nächsten großen Satz:

**Theorem 5.2.2. Cauchysche Integralformel, Umlaufzahlversion**

Sei

1.  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen,
2.  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  ein geschlossener, null-homologer Weg,
3.  $\zeta \in U$  mit  $\zeta \notin \text{im}(\gamma)$  und
4.  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  **holomorph**.

Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz = j(\zeta; \gamma) f(\zeta). \quad (5.2.3)$$

Dieses sehr schöne Resultat zeigt uns, dass es bei holomorphen Funktionen genügt, ein bestimmtes Integral um einen ausgezeichneten Punkt zu kennen, um auf den Funktionswert an diesem Punkt zu schließen. Neben nützlichen Anwendungen für Berechnungen ist aber vor allem das folgende Resultat als Folgerung daraus essentiell für das Verständnis komplexer Funktionen:

**Theorem 5.2.3. Potenzreihenentwicklungssatz**

Wenn  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph ist, so ist  $f$  komplex-analytisch.

Das ist eine enorm starke Charakterisierung holomorpher Funktionen! Dies bedeutet anschaulich, dass es für jedes  $z_0 \in U$  und jeden Radius  $r \in \mathbb{R}^+$  eine Kreisscheibe  $\mathbb{D}_r^2(z_0) \subseteq U$  gibt, sodass

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad (5.2.4)$$

für alle  $z \in \mathbb{D}_r^2(z_0)$  gilt und die Potenzreihe einen Konvergenzradius  $\geq r$  hat. Die Koeffizienten lassen sich errechnen mit

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_r^2(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad (5.2.5)$$

für alle  $0 < \epsilon < r$ , wobei es in Anwendungen oft praktischere Wege gibt, die Koeffizienten zu bestimmen. Auch wichtig ist die Abschätzung

$$|a_n| \leq \frac{\max(|f(\zeta)| \mid \zeta \in \overline{\mathbb{D}_\epsilon^2(z_0)})}{\epsilon^n} \quad (5.2.6)$$

für alle  $0 < \epsilon < r$ .

Daraus lernen wir, dass die Theorie holomorpher Funktionen sich insbesondere mit Funktionen beschäftigt, die lokal eine Potenzreihendarstellung besitzen. Als Übung schauen wir uns die Implikationen dieser Einschränkung genauer an.

**Übung.** Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  für  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen eine holomorphe Funktion. Zeige, dass die  $n$ -te Ableitung  $f^{(n)}$  stets

$$|f^{(n)}(z)| \leq n^n n! \quad (5.2.7)$$

erfüllt.

<sup>2</sup>Dies garantiert, dass die Punkte nicht diametral gegenüberliegend sind.

**Lösung.** Zunächst einmal präzisieren wir Ungleichung 5.2.6, indem wir uns daran erinnern, wie die Taylorreihe einer Funktion aussieht und daraus eine (zugegebenermaßen relativ offensichtliche) Form für die Koeffizienten ableiten:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (5.2.8)$$

Damit nimmt die Ungleichung die Form

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n! \max_{|z-z_0|=r_0} (|f(z)|)}{r_0^n} =: \frac{n!M}{r_0^n} \quad (5.2.9)$$

an. Da  $f$  stetig und  $|z - z_0| = r_0$  kompakt ist, ist das Maximum  $M$  beschränkt. Angenommen,  $|f^{(n)}(z)| > n^n n!$  würde gelten. Dann erhielten wir

$$\frac{n!M}{r_0^n} > n!n^n \Leftrightarrow M > (nr_0)^n, \quad (5.2.10)$$

was nicht sein kann, da  $M$  beschränkt ist, die rechte Seite jedoch für  $r_0 \neq 0$  nicht.  $\square$

Zum Abschluss heben wir noch das Korollar hervor, welches die Besonderheit holomorpher Funktionen ganz anschaulich präsentiert:

**Satz 5.2.4. Satz von Goursat**

Jede holomorphe Funktion ist beliebig oft stetig differenzierbar, also insbesondere von Klasse  $\mathcal{C}^\infty$ .