

---

---

# Algebra (Bachelor)

zur Vorlesung von Prof. Dr. Tobias Dykerhoff

October 16, 2024

---

---

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Gruppen und Symmetrie</b>	<b>2</b>
1.1	Grundbegriffe . . . . .	2
1.2	Untergruppen . . . . .	3

### Konventionen

- TBD

Dies ist ein inoffizielles Skript zur Vorlesung Algebra bei Prof. Dr. Tobias Dykerhoff im Wintersemester 24/25. Fehler und Verbesserungsvorschläge immer gerne an [rasmus.raschke@uni-hamburg.de](mailto:rasmus.raschke@uni-hamburg.de).

# 1 Gruppen und Symmetrie

**Bemerkung.** Wir möchten Gruppentheorie zunächst motivieren: Man betrachte einen Tetraeder. Um dessen Symmetrien zu erfassen, könnten wir z.B. schauen, welche Bewegungen diesen in sich selbst überführen. Es gibt vier Rotationsachsen, die eine Ecke und eine Fläche durchdringen und bei Rotation um  $120^\circ$  den Tetraeder in sich selbst überführen. Weiterhin gibt es drei  $180^\circ$ -Rotationsachsen mittig durch gegenüberliegende Kanten. Auch die Identität lässt den Tetraeder unverändert. Also gibt es  $1 + 4 \cdot 2 + 3 = 12$  Symmetrien. Gruppen bieten eine Möglichkeit, solche Symmetrien und deren Verkettungen zu erfassen und zu untersuchen.

## 1.1 Grundbegriffe

### Definition 1.1.1. Gruppe

Eine **Gruppe** ist ein Paar  $(G, \circ)$ , bestehend aus einer Menge<sup>a</sup>  $G$  und einer Abbildung

$$\circ : G \times G \rightarrow G \quad (1.1.1)$$

$$(g, h) \mapsto g \circ h \quad (1.1.2)$$

mit folgenden Eigenschaften:

1. Für alle  $g_1, g_2, g_3 \in G$  gilt das Assoziativgesetz:  $(g_1 \circ g_2) \circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3)$ .
2. Es gibt ein Element  $e \in G$ , sodass gilt:
  - Für jedes  $g \in G$  gilt  $e \circ g = g$ .
  - Für jedes  $g \in G$  existiert ein  $g' \in G$  mit  $g' \circ g = e$ .

Die Abbildung  $\circ$  heißt **Verknüpfung**, ein Element  $e \in G$  mit den Eigenschaften aus 2. heißt **neutrales Element**, und ein Element  $g' \in G$  zu gegebenem  $g \in G$  mit Eigenschaft 2b heißt **Inverses** von  $g$ .

<sup>a</sup>im ZFC-Axiomensystem

**Bemerkung.** Übungsaufgabe:

Sei  $(G, \circ)$  eine Gruppe. Dann gelte:

1. Das neutrale Element  $e \in G$  ist eindeutig bestimmt, außerdem gelte  $\forall g \in G : g \circ e = g$ .
2. Zu gegebenem  $g \in G$  ist das Inverse  $g' \in G$  eindeutig bestimmt und erfüllt zudem  $g \circ g' = e$ .
3. Für  $n \geq 3$  hängt das Produkt von Gruppenelementen  $g_1, g_2, \dots, g_n$  nicht von der Klammerung ab.

**Beispiele.** Wir geben einige Beispiele für Gruppen:

1. Die Gruppe  $(\mathbb{Z}, +)$  der ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$  mit der Addition  $+$ .
2. Für einen Körper  $\mathbb{K}$  existiert die additive Gruppe  $(\mathbb{K}, +)$  und die multiplikative Gruppe  $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ .
3. Für jede Menge  $M$  existiert die **symmetrische Gruppe**  $(\mathfrak{S}_M, \circ)$ , wobei  $\mathfrak{S}_M$  die Menge der bijektiven Selbstabbildungen von  $M$  und  $\circ$  die Komposition ist. Für  $n \geq 1$  vereinbaren wir  $\mathfrak{S}_n := \mathfrak{S}_{\{1, 2, \dots, n\}}$ . Wir vereinbaren als Konvention die **Zykelschreibweise**. Z.B. in  $\mathfrak{S}_3$  existieren Zykel

$$\sigma : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\} \quad (1.1.3)$$

$$1 \mapsto 2 \quad (1.1.4)$$

$$2 \mapsto 1 \quad (1.1.5)$$

$$3 \mapsto 3, \quad (1.1.6)$$

auch darstellbar als

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (1.1.7)$$

oder (12).

4. Für  $n \geq 1$  und einen Körper  $\mathbb{K}$  ist die **allgemeine lineare Gruppe**  $GL(n, \mathbb{K})$  definiert, wobei

$$GL(n, \mathbb{K}) := \{A \in \mathbb{K}^{n \times n} \mid \det A \neq 0\} \quad (1.1.8)$$

Die Menge der invertierbaren  $n \times n$ -Matrizen mit Einträgen in  $\mathbb{K}$  ist. Typische Beispiele für Körper sind  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_q$  mit  $q = p^n$ ,  $p$  prim.

ÜA:  $|GL(n, \mathbb{F}_q)| = ?$ .

**Bemerkung.** Um den alltäglichen Gebrauch von Gruppen zu vereinfachen, machen wir folgende Vereinbarungen:

1. Wir bezeichnen  $(G, \circ)$  üblicherweise einfach mit  $G$  und lassen  $\circ$  implizit.
2. Für  $g, h \in G$  schreiben wir  $gh = g \circ h$ , für  $e \in G$  schreiben wir 1 und für  $g'$  schlicht  $g^{-1}$ .
3. Gilt  $g \circ h = h \circ g$  für alle  $g, h \in G$ , so heißt  $G$  **abelsch**. In diesem Fall wird die Verknüpfung oft mit  $+$ , das neutrale Element mit 0 und das inverse Element mit  $-g$  bezeichnet.
4. Gemäß obiger ÜA zur Klammerung schreiben wir einfach  $g_1 g_2 \cdots g_n \in G$  ohne Klammerung.
5. Für eine Gruppe  $G$  bezeichnen wir die Kardinalität

$$|G| \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\} \quad (1.1.9)$$

als **Ordnung** von  $G$ .

## 1.2 Untergruppen

### Definition 1.2.1. Untergruppe

Sei  $(G, \circ)$  eine Gruppe. Eine Teilmenge  $H \subseteq G$  heißt **Untergruppe**, falls gilt:

1.  $H \neq \emptyset$
2. Abgeschlossenheit: Für alle  $a, b \in H$  gilt  $ab^{-1} \in H$ .

Wir verwenden dann die Notation  $H \leq G$ , um Untergruppen zu kennzeichnen.

**Bemerkung.** Übungsaufgabe: Sei  $G$  eine Gruppe und  $H \leq G$  eine Untergruppe. Dann gilt:

1. Aus Eigenschaft 1: Da  $H \neq \emptyset$ , existiert ein  $a \in H$ .
2. Aus Eigenschaft 2:  $a \cdot a^{-1} = e \in H$ .
3. Aus Eigenschaft 2: Für jedes  $a \in H$  gilt  $a^{-1} = e \cdot a^{-1} \in H$ .
4. Aus Eigenschaft 2: Für jedes  $a, b \in H$  gilt  $ab = a \cdot (b^{-1})^{-1} \in H$ .

Also:  $H \subseteq G$  ist eine Untergruppe genau dann, wenn folgende alternativen Eigenschaften gelten:

- 1.\*  $e_G \in H$
- 2.\* Für alle  $a, b \in H$  muss  $a \cdot b \in H$  gelten.
- 3.\* Für alle  $a \in H$  ist  $a^{-1} \in H$ .

Die andere Richtung der Äquivalenz ist trivial. Daraus folgt auch, dass  $(H, \circ|_{H \times H})$  mit von  $G$  eingeschränkter Verknüpfung  $\circ|_{H \times H}$  ist eine Gruppe.

**Beispiele.** Einige Beispiele für Untergruppen sind:

1.  $(G, \circ) = (\mathbb{R}, +)$  hat  $(\mathbb{Z}, +)$  als Untergruppe mit  $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ .

2. Sei  $n \geq 1$  und  $\mathbb{K}$  ein Körper. Die **spezielle lineare Gruppe**

$$\mathrm{SL}(n, \mathbb{K}) := \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) \mid \det A = 1\} \leq \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) \quad (1.2.1)$$

ist eine Untergruppe von  $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ .

3. Für  $n \geq 1$  und einen Körper  $\mathbb{K}$  ist die **orthogonale Gruppe**

$$\mathrm{O}(n, \mathbb{K}) := \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) \mid A^T A = I_n\} \leq \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) \quad (1.2.2)$$

definiert, die auch eine Untergruppe von  $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$  ist.

4. Seien  $H_1, H_2 \leq G$  Untergruppen. Dann ist  $H_1 \cap H_2 \leq G$  auch eine Untergruppe. So kann z.B. die **spezielle orthogonale Gruppe**

$$\mathrm{SO}(n, \mathbb{K}) := \mathrm{O}(n, \mathbb{K}) \cap \mathrm{SL}(n, \mathbb{K}) \quad (1.2.3)$$

als Untergruppe von  $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$  konstruiert werden.

5. Etwas allgemeiner: Für jede Familie  $\{H_i\}_{i \in I}$  von Untergruppen  $H_i \leq G$  gilt:

$$\bigcap_{i \in I} H_i \leq G \quad (1.2.4)$$

ist wieder eine Untergruppe.

### Definition 1.2.2. Erzeugte Untergruppe

Sei  $G$  eine Gruppe und  $M \subseteq G$  eine beliebige Teilmenge. Dann heißt die **Untergruppe**

$$\langle M \rangle := \bigcup_{H \leq G, M \subseteq H} H \leq G \quad (1.2.5)$$

die **von  $M$  erzeugte Untergruppe** von  $G$ .