Topologie (Bachelor)

zur Vorlesung im WiSe24/25

1. November 2024

Inhaltsverzeichnis

Konventionen

- TBD

Dies ist ein inoffizielles Skript zur Vorlesung Topologie im Wintersemester 24/25. Fehler und Verbesserungsvorschläge immer gerne an rasmus.raschke@uni-hamburg.de.

1 Mengentheoretische Topologie

1.1 Metrische Räume

Definition 1.1.1. Metrischer Raum

Ein **metrischer Raum** ist ein Paar (X, d), bestehend aus einer Menge X und einer Abstandsfunktion
$$d : X \times X \to \mathbb{R}, \tag{1.1.1}$$
genannt **Metrik**, die die folgenden Axiome erfüllt:

(M1) *Positivität*: $\forall x, y \in X : d(x, y) > 0$

(M2) *Symmetrie*: $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$

(M3) *Dreiecksungleichung*: $\forall x, y, z \in X : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Beispiele.

1. Im $\mathbb{R}^n$ ist die **Standardmetrik** oder **euklidische Metrik** für $x, y \in \mathbb{R}$ gegeben durch
$$d_2(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}. \tag{1.1.2}$$
2. Auf $(\mathbb{R}^n, d_n)$ ist eine Metrik durch
$$d_n(x, y) := \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \tag{1.1.3}$$
gegeben.
3. Die **Maximumsnorm** $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ ist gegeben durch
$$d_\infty(x, y) = \max_{i \in \{1,\dots,n\}} |x_i - y_i|. \tag{1.1.4}$$
4. Eine weitere Metrik auf $\mathbb{R}^n$ ist gegeben durch
$$d_{\sqrt{\cdot}}(x, y) = \sqrt{d_2(x, y)}. \tag{1.1.5}$$
Diese Metrik kommt nicht von einer Norm.
5. Die **diskrete Metrik** auf einer beliebigen Menge X ist gegeben durch
$$d(x, y) := \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}. \tag{1.1.6}$$
6. Auf $X = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ ist für $f, g \in X$ durch das Integral eine Metrik
$$d(f, g) := \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx \tag{1.1.7}$$
definiert.

Bemerkungen.

1. Wenn (X, d) ein metrischer Raum ist, so ist $Y \subseteq X$ als $(Y, d|_{Y \times Y})$ auch ein metrischer Raum.
2. Wenn (X_1, d_1) und (X_2, d_2) metrische Räume sind, so ist $(X_1 \times X_2, d_1 \times d_2)$ wieder ein metrischer Raum.
3. Vorsicht: Für eine Familie $(X_i, d_i)_{i \in I}$ ist der Sachverhalt komplizierter.

Definition 1.1.2. ϵ-Ball

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $x \in X$ und $\epsilon > 0$. Dann ist der **ϵ-Ball** mit x im Zentrum definiert als
$$B_\epsilon(x) := \{y \in X \,|\, d(x, y) < \epsilon\}. \tag{1.1.8}$$

Definition 1.1.3. Umgebung

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Menge $U \subseteq X$ heißt **Umgebung** von $x \in X$, falls ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(x) \subseteq U$ existiert.

Definition 1.1.4. Offen und Abgeschlossen

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $O \subseteq X$ heißt **offen**, falls für alle $x \in O$ ein $\epsilon > 0$ existiert, sodass $B_\epsilon(x) \subseteq O$ gilt. O ist also eine Umgebung all seiner Elemente.
Eine Menge $A \subseteq X$ heißt **abgeschlossen**, falls $X \backslash A$ offen ist.

Bemerkungen.

1. Sei $\epsilon > 0$ und (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist $B_\epsilon(x) \subseteq X$ offen und eine Umgebung von x.
2. ÜA: Sei (X, d) ein metrischer Raum und $x \in X$. Dann ist $\{x\}$ abgeschlossen.

Satz 1.1.5. Umgebungseigenschaften metrischer Räume

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gilt:

(U1) Jede Umgebung von $x \in X$ enthält x und X ist eine Umgebung von x.

(U2) Ist $U \subseteq X$ eine Umgebung von X und $U \subseteq V \subseteq X$, so ist V auch eine Umgebung von x.

(U3) Wenn U_1 und U_2 Umgebungen von x sind, so auch $U_1 \cap U_2$.

(U4) Ist $U \subseteq X$ eine Umgebung von x, so existiert eine weitere Teilmenge $V \subseteq X$, sodass U eine Umgebung von allen $y \in V$ ist.

Beweis.

1. Trivial.
2. Trivial.
3. Nach Voraussetzung existiert für $x \in U_1 \cap U_2$ ein $\epsilon_1 > 0$, sodass $B_{\epsilon_1}(x) \subseteq U_1$ und ein $\epsilon_2 > 0$, sodass $B_{\epsilon_2}(x) \subseteq U_2$. Definiere $\epsilon := \min(\epsilon_1, \epsilon_2)$. Dann gilt $B_\epsilon(X) \subseteq U_1$ und $B_\epsilon(x) \subseteq U_2$, also $B_\epsilon(x) \subseteq U_1 \cap U_2$.
4. Nach Voraussetzung existiert ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(x) \subseteq U$. Dann ist die Behauptung durch $V := B_\epsilon(x)$ erfüllt.

□

Satz 1.1.6. Eigenschaften offener Mengen

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gilt:

1. $\emptyset$ und X sind offen.
2. Sind $O_1, O_2 \subseteq X$ offen, so auch $O_1 \cap O_2$.
3. Ist $(O_i)_{i \in I}$ eine Familie offener Teilmengen $O_i \subseteq X$, so ist $\cup_i O_i$ auch offen.

Beweis.

1. Trivial.
2. Mit $\min(\epsilon_1, \epsilon_2)$ analog zum obigen Beweis.
3. Sei $x \in \cup_i O_i$. Dann existiert ein $i \in I$ mit $x \in O_i$, sodass ein $\epsilon > 0$ existiert mit $B_\epsilon(x) \subseteq O_i \subseteq \cup_i O_i$.

□

Satz 1.1.7. Eigenschaften abgeschlossener Mengen

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gilt:

(A1) $\emptyset$ und X sind abgeschlossen.

(A2) Wenn $A_1, A_2 \subseteq X$ abgeschlossene Teilmengen sind, so ist auch $A_1 \cup A_2$ abgeschlossen.

(A3) Seien $(A_i)_{i \in I}$ abgeschlossene Teilmengen von X. Dann ist $\cup_i A_i$ wieder abgeschlossen.

Beweis.

1. Da $\emptyset = X \backslash X$ und $X = X \backslash \emptyset$ gilt, sind X und $\emptyset$ gemäß Satz 1.1.6 offen.
2. Sei $A_1 = X \backslash O_1$ und $A_2 = X \backslash O_2$ mit $O_1, O_2 \subseteq X$ offen. Gemäß Satz 1.1.6 (2.) folgt
$$X \backslash (A_1 \cup A_2) = (X \backslash A_1) \cap (X \backslash A_2) = O_1 \cap O_2, \tag{1.1.9}$$
wobei $O_1 \cap O_2$ wieder offen ist.
3. Wir betrachten offene Teilmengen $O_i := X \backslash A_i$. Gemäß Satz 1.1.6 ist
$$X \backslash \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} X \backslash A_i = \bigcup_{i \in I} O_i \tag{1.1.10}$$
offen.

□

Definition 1.1.8. stetige Abbildung

Seien (X, d) und (Y, d') metrische Räume und $f : X \to Y$. Dann heißt f **stetig in** $x_0 \in X$, wenn für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass
$$d(x_0, x) < \delta \Rightarrow d'(f(x_0), f(x)) < \epsilon \tag{1.1.11}$$
gilt. f heißt **stetig**, falls dies für alle $x_0 \in X$ erfüllt ist.

Satz 1.1.9. Äquivalente Formulierung der Stetigkeit

Seien (X, d) und (Y, d') metrische Räume und $f : X \to Y$. Dann sind äquivalent:

1. f ist stetig.
2. V ist Umgebung von $f(x) \Rightarrow f^{-1}(V)$ ist eine Umgebung von x.
3. $O \in Y$ ist offen $\Rightarrow f^{-1}(O)$ ist offen in X.

4. $A \in Y$ ist abgeschlossen $\Rightarrow f^{-1}(A)$ ist abgeschlossen in X.

Beweis. (1. $\Rightarrow$ 2.): Sei V eine Umgebung von $f(x)$. Per Definition existiert ein $\epsilon > 0$, sodass $f(x) \in B_\epsilon(f(x)) \subseteq V$ gilt. Gemäß Annahme existiert ein $\delta > 0$ mit $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\epsilon(f(x))$. Daraus folgt, dass

$$B_\delta(x) \subseteq f^{-1}f(B_\delta(x)) \subseteq f^{-1}(B_\epsilon(f(x))) \subseteq f^{-1}(V). \tag{1.1.12}$$

Also ist $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x.
(2. $\Rightarrow$ 3.): O ist Umgebung all seiner Elemente.
(3. $\Rightarrow$ 4.): $Y \backslash A$ ist offen in Y, d.h. $f^{-1}(Y\backslash A) = f^{-1}(Y)\backslash f^{-1}(A) = X\backslash f^{-1}(A)$ ist offen in X. Also ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen.
(4. $\Rightarrow$ 1.): $Y\backslash B_\epsilon(f(x))$ ist abgeschlossen impliziert, dass $f^{-1}(Y\backslash B_\epsilon(f(x)))$ auch abgeschlossen ist. Damit folgt, dass $X\backslash f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$ abgeschlossen und damit $f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$ offen ist. Für $x \in f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$ existiert ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$, also auch $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\epsilon(f(x))$. □

Definition 1.1.10. Äquivalenz von Metriken

Seien d_1 und d_2 Metriken auf einer Menge X.

1. Gibt es $\alpha, \beta > 0$ mit
$$\alpha d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y) \tag{1.1.13}$$
für alle $x, y \in X$, so heißen d_1 und d_2 **stark äquivalent**.
2. d_1 und d_2 heißen **äquivalent**, falls es für jedes $x \in X$ und alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass
   (i) $d_1(x, y) < \delta \Rightarrow d_2(x, y) < \epsilon$
   (ii) $d_2(x, y) < \delta \Rightarrow d_1(x, y) < \epsilon$
   gilt.

Bemerkungen. 1. Genau dann, wenn d_1 und d_2 äquivalente Metriken sind, sind $\mathrm{id}_X : (X, d_1) \to (X, d_2)$ und $id_X : (X, d_2) \to (X, d_1)$ stetig.
2. d_1 und d_2 stark äquivalent impliziert, dass id_X gleichmäßig stetig ist.
3. Äquivalente Metriken ergeben die gleichen offenen (und abgeschlossenen) Mengen.

Beispiele. 1. Die d_1-, d_2- und d_∞-Metrik auf dem $\mathbb{R}^n$ sind stark äquivalent.
2. Sei $d_0(x, y) = |x^3 - y^3|$ und $d_2(x, y)$ die euklidische Metrik. Die Identität $\mathrm{id}_\mathbb{R}(\mathbb{R}, d_2) \to (\mathbb{R}, d_0)$ ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig.
3. Sei X eine beliebige Menge mit einer beliebigen Metrik d. Dann ist d äquivalent zu
$$d'(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} < 1 \tag{1.1.14}$$
für alle $x, y \in X$. Also ist *jede Metrik äquivalent zu einer beschränkten Metrik.*

1.2 Topologische Räume

Der Begriff des topologischen Raums wird durch Abstraktion der Eigenschaften offener Mengen und stetiger Abbildungen in metrischen Räumen konstruiert.

Definition 1.2.1. Topologischer Raum

Ein **topologischer Raum** ist ein Paar $(X, \mathcal{T})$, bestehend aus einer Menge X und einer Familie $\mathcal{T}$ von Teilmengen von X, sodass folgende Axiome erfüllt sind:
(O1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
(O2) $O_1, O_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$
(O3) Für eine Familie $(O_i)_{i\in I}$ mit $O_i \in \mathcal{T}$ für alle $i \in I$ folgt $\cup_{i\in I} O_i \in \mathcal{T}$.
$\mathcal{T}$ heißt **Topologie** auf X und alle $O \in \mathcal{T}$ heißen **offene Mengen**.

Bemerkung. Äquivalent dazu ist: Eine Topologie $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ist abgeschlossen unter endlichen Schnitten und beliebigen Vereinigungen.

Beispiele. 1. Metrische Räume (X, d) sind auch topologische Räume mit offenen Mengen gegeben durch d.
2. Auf einer beliebigen Menge X kann die **diskrete Topologie** $\mathcal{T} := \mathcal{P}(X)$ definiert werden, in der alle Teilmengen von X offen sind.
3. Auch kann auf beliebigem X die **indiskrete Topologie** oder **Klumpentopologie** durch $\mathcal{T} := \{\emptyset, X\}$ definiert werden.
4. Auf beliebigem X existiert die **koendliche Topologie**: $O \subseteq X$ ist offen genau dann, wenn $X\backslash O$ endlich ist

oder $O = \emptyset$ gilt.

Definition 1.2.2. Topologische Grundbegriffe

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

1. $A \subseteq X$ heißt **abgeschlossen**, falls $X \backslash A \in \mathcal{T}$.
2. Sei $x \in U \subseteq X$. Dann heißt U **Umgebung von** x, falls ein $O \in \mathcal{T}$ existiert, sodass $x \in O \subseteq U$ gilt.
3. Die Menge aller Umgebungen von X wird mit $\mathfrak{U}(x)$ bezeichnet und heißt **Umgebungssystem von** x.
4. Ein Punkt $x \in X$ heißt **Berührpunkt** von $B \subseteq X$, falls für alle $U \in \mathfrak{U}(x)$ gilt: $U \cap B \neq \emptyset$.
5. Die **abgeschlossene Hülle** von $B \subseteq X$ ist definiert als
$$\overline{B} := \bigcap_{B \subseteq C, C \text{ abg.}} C. \tag{1.2.1}$$
6. Ein Punkt $x \in X$ heißt **innerer Punkt** von $B \subseteq X$, falls es ein $U \in \mathfrak{U}(x)$ gibt, sodass $x \in U \subseteq B$ gilt.
7. Für $B \subseteq X$ ist
$$\mathring{B} := \bigcup_{O \subseteq B, O \text{ offen}} O \tag{1.2.2}$$
der **offene Kern** von B.
8. Der **Rand von** $A \subseteq X$ ist definiert als
$$\partial A := \{x \in X | \forall U \in \mathfrak{U}(x) : U \cap A \neq \emptyset \neq U \cap (X \backslash A)\}. \tag{1.2.3}$$

Satz 1.2.3. Eigenschaften bestimmter Mengen

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein top. Raum. Dann gilt:

1. Die abgeschlossenen Mengen von X erfüllen (A1)-(A3).
2. Die Umgebungen erfüllen (U1)-(U4).

Bemerkung. Eine Topologie kann äquivalent durch die Auflistung abgeschlossener Mengen definiert werden, wenn diese (A1)-(A3) erfüllen.

Definition 1.2.4. Stetigkeit in top. Räumen

Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{T}')$ top. Räume und $f : X \to Y$.

(i) f heißt **stetig in** $x \in X$, wenn für alle $U \in \mathfrak{U}(f(x))$ auch $f^{-1}(U) \in \mathfrak{U}(x)$ gilt.

(ii) f heißt **stetig**, falls für alle $O \in \mathcal{T}'$ gilt, dass $f^{-1}(O) \in \mathcal{T}$.

Satz 1.2.5. Eigenschaften von Abschluss und Innerem

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein top. Raum mit $A \in \mathcal{T}$. Dann gilt

1. (a) $\overline{A}$ ist abgeschlossen und $A \subseteq \overline{A}$.
   (b) $A = \overline{A}$ gilt genau dann, wenn A abgeschlossen ist.
   (c) $\overline{A}$ besteht aus der Menge der Berührpunkte von A.
2. (a) $\mathring{B}$ ist offen und $\mathring{B} \subseteq B$.
   (b) $B = \mathring{B}$ genau dann, wenn B offen ist.
   (c) $\mathring{B}$ besteht aus der Menge der inneren Punkte von B.

Beweis. (a) und (b) sind jeweils trivial. Wir beweisen 1(c). Angenommen, $x \in \overline{A}$ aber ist kein Berührpunkt von A. Dann existiert ein $U \in \mathfrak{U}(x)$, sodass $U \cap A = \emptyset$ gilt. Daraus folgt, dass $A \subseteq X \backslash U$ gilt, woraus $A \subseteq X \backslash O$ abgeschlossen folgt. Weiterhin existiert ein $O \in \mathcal{T}$ mit $x \in O \subseteq U$, also $X \backslash U \subseteq X \backslash O$. Dann ist aber $\overline{A} \subseteq X \backslash O$, also $x \notin \overline{A}$.
Jetzt nehmen an, dass x Berührpunkt ist, aber $x \notin \overline{A}$. Also folgt aus $x \in X \backslash \overline{A}$ offen, dass $V := X \backslash \overline{A} \in \mathfrak{U}(x)$, aber $V \cap A = \emptyset$, also ist x kein Berührpunkt im Widerspruch zur Annahme.
2 ist dual. □

Bemerkung. Folgendes gilt allgemein:

- Ist $A \subseteq B$, so auch $\mathring{A} \subseteq \mathring{B}$ und $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $\overset{\circ}{\overline{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$

Definition 1.2.6. Dichtheit

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein top. Raum. $A \subseteq X$ heißt **dicht**, falls $\overline{A} = X$. $A \subseteq X$ heißt hingegen **nirgends dicht**, falls $\mathring{\overline{A}} = \emptyset$.

Beispiele. 1. $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ ist dicht.
2. $[a, b] \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$ liegt nirgends dicht in $\mathbb{R}^2$.

Definition 1.2.7. Konvergenz in top. Räumen

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein top. Raum. Eine Folge $(x_i)_{i \in N}$ mit $x_i \in X$ **konvergiert** gegen $x \in X$, falls gilt: Für alle $U \in \mathfrak{U}(x)$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $x_n \in U$ für alle $n \geq N$ gilt.

Das heißt, fast alle x_n müssen in U liegen. Allgemein liefert dies deutlich pathologischere Beispiele als Konvergenz in metrischen Räumen.

Beispiel. Betrachte $(X, \{\emptyset, X\})$ mit $|X| \geq 2$. Dann liegt nur $U = X$ in $\mathfrak{U}(x)$, also konvergiert jede Folge gegen jedes $y \in X$.

1.3 Basen, Subbasen und Umgebungsbasen

Unser Ziel ist jetzt, auch nicht-endliche Topologien angeben zu können.

Definition 1.3.1. Basis und Subbasis

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein top. Raum.

(a) Eine Familie $\mathcal{B}$ heißt **Basis** der Topologie $\mathcal{T}$, falls alle $O \in \mathcal{T}$ als Vereinigung von $B_i \in \mathcal{B}$ geschrieben werden können:
$$\forall O \in \mathcal{T} : O = \bigcup_{j \in J} B_j. \tag{1.3.1}$$

(b) Eine Familie $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ heißt **Subbasis** der Topologie $\mathcal{T}$, falls jedes $O \in \mathcal{T}$ eine beliebige Vereinigung endlicher Schnitte von $S_i \in \mathcal{S}$ ist.

Beispiele. 1. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist
$$\mathcal{B} = \{B_\epsilon(x) \mid x \in X, \epsilon > 0\} \tag{1.3.2}$$
eine Basis für X.
2. Die diskrete Topologie $(X, \mathcal{P}(X))$ hat $\mathcal{B} = \{\{x\} | x \in X\}$ als Basis.
3. Die indiskrete Topologie $(X, \{X, \emptyset\})$ hat als Basis $\mathcal{B} = \{X\}$.
4. Jedes System beliebiger Teilmengen von X gibt eine Subbasis einer Topologie. Sei z.B. $\mathcal{S} := \{S\}_{i \in i}$ gewünscht. Dann konstruieren wir
$$\mathcal{B} = \{S_{i_1} \cap \cdots \cap S_{i_n} | n \in \mathbb{N},\, S_{i_k} \in \mathcal{S}\} \tag{1.3.3}$$
als Basis und definieren eine Topologie
$$\mathcal{T} = \left\{ \bigcup_{j \in J} (S_{i_1} \cap \cdots \cap S_{i_n})_j \right\}. \tag{1.3.4}$$

Das Gute an (Sub-)Basen ist, dass sie uns Arbeit ersparen:

Satz 1.3.2. Stetigkeit durch Basen

Eine Abbildung $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ zwischen top. Räumen ist stetig, falls:

(a) Ist $\mathcal{B}'$ eine Basis von $\mathcal{T}'$, so ist $f^{-1}(B_i') \in \mathcal{T}$ für alle $B_i' \in \mathcal{B}'$.

(b) Ist $\mathcal{S}'$ eine Subbasis von $\mathcal{T}'$; so ist $f^{-1}(S_i') \in \mathcal{T}$ für alle $S_i' \in \mathcal{S}'$.

Beweis. Folgt aus dem Verhalten von Urbildern bzgl. $\cup$ und $\cap$. □

Definition 1.3.3. Umgebungsbasis

Ein Mengensystem $\mathfrak{B}(x) \subseteq \mathfrak{U}(x)$ heißt **Umgebungsbasis** von x, falls für alle $U \in \mathfrak{U}(x)$ ein $B \in \mathfrak{B}(x)$ existiert, sodass $B \subseteq U$ gilt.

Beispiel. Sei (X, d) ein metrischer Raum mit $x \in X$. Dann ist $\mathfrak{B}(x) = \{B_{\frac{1}{n}}(x)\}$ eine Umgebungsbasis von x.

Satz 1.3.4. Stetigkeit durch Umgebungsbasen

Eine Abbildung $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ zwischen top. Räumen ist stetig, falls gilt: Ist für $f(x) \in Y$ $\mathfrak{B}(f(x))$ eine Umgebungsbasis von $f(x)$, so ist $f^{-1}(B) \in \mathfrak{U}(x)$ für alle $B \in \mathfrak{B}(f(x))$.

Definition 1.3.5. Abzählbarkeitsaxiome

Sei $(X,\mathcal{T})$ ein top. Raum. Die Abzählbarkeitsaxiome für X sind gegeben durch:

(AZ1) Jedes $x \in X$ besitzt eine abzählbare Umgebungsbasis.

(AZ2) $\mathcal{T}$ besitzt eine abzählbare Basis.

Beispiele.

1. Sei (X,d) ein metrischer Raum mit $x \in X$. Die Umgebungsbasis $\mathfrak{B}(x) = \{B_{\frac{1}{n}}(x) | n \in \mathbb{N}\}$ ist abzählbar, also erfüllt X (AZ1).
2. Betrachte $(\mathbb{R}^n, d)$ mit $d \in \{d_1, d_2, d_\infty\}$. Dann erfüllt $\mathbb{R}^n$ (AZ2) mit $\mathfrak{B} = \{B_{\frac{1}{m}}(x) | m \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{Q}^n\}$.

Bemerkungen.

1. Es gilt (AZ2) $\Rightarrow$ (AZ1): Ist $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Basis von $\mathcal{T}$, so ist
$$\mathfrak{B}(x) := \{B \in \mathcal{B} | x \in B\} \tag{1.3.5}$$
eine abzählbare Umgebungsbasis.
2. Es gilt (AZ1) $\not\Rightarrow$ (AZ2): Ist z.B. X überabzählbar mit der diskreten Topologie $(X, \mathcal{P}(X))$. Dann ist für alle $x \in X$ $\{x\}$ eine Umgebungsbasis, aber nicht abzählbar.

Satz 1.3.6. Topologisches Folgenkriterium

Sei $(X,\mathcal{T})$ ein top. Raum, der (AZ1) erfüllt. Dann gilt:

(a) $x \in \overline{A}$ für $A \subseteq X$ genau dann, wenn eine Folge (a_n) in A existiert, die gegen x konvergiert.

(b) $f : X \to Y$ ist stetig in $x \in X$ genau dann, wenn aus $x_n \to x$ auch $f(x_n) \to f(x)$ folgt.

Beweis.

(a) $(\Leftarrow)$ gilt immer, der Beweis funktioniert wie in Analysis.
$(\Rightarrow)$: Sei $x \in \overline{A}$ und $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Umgebungsbasis von x. Wir definieren iterativ $V_1 := U_1$, $V_n := V_{n-1} \cap U_n$. Es gilt $V_i \subseteq \mathfrak{U}(x)$ für alle i. Also ist $V_i \cap A \neq \emptyset$ für alle i. Wir wählen jeweils ein $a_i \in V_i \cap A$ und behaupten $a_n \to x$. Ist $W \in \mathfrak{U}(x)$ beliebig, so existiert ein i, sodass $U_i \in W$. Also ist $V_i \subseteq U_i \subseteq W$ und $V_l \in W$ für alle $l \geq i$. Damit folgt $a_l \in W$ für alle $l \geq i$, also $a_n \to x$.

(b) $(\Leftarrow)$ funktioniert auch wie in Analysis. $(\Rightarrow)$: $B \subseteq Y$ sei abgeschlossen in Y. Wähle $x \in \overline{f^{-1}(B)}$. Ziel ist, zu zeigen, dass aus $x \in f^{-1}(B)$ folgt, dass $f^{-1}(B) = \overline{f^{-1}(B)}$ gilt, und daraus wiederum $f^{-1}(B)$ abgeschlossen folgt.
Aus (a) folgt, dass eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $f^{-1}(B)$ mit $x_n \to x$ existiert. dann ist $f(x_n) \to f(x)$, aber $f(x_n) \in B$ für alle n. Damit gilt $f(x) \in B = \overline{B}$, also auch $x \in f^{-1}(B)$.

□

Satz 1.3.7. Vorstufe des Urysohnschen Einbettungssatzes

Sei $(X,\mathcal{T})$ ein top. Raum, der (AZ2) erfüllt. Dann gibt es eine abzählbare, dichte Teilmenge in X.

Beweis. $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seinen die Basismengen von $\mathcal{T}$. Wähle jeweils ein $P_n \in \mathcal{B}_n$. Wir behaupten, dass $P := \{P_n | n \in \mathbb{N}\}$ dicht für alle n ist. Sei dafür x beliebig. Für alle $U \in \mathfrak{U}(x)$ existiert ein $B_i \in \mathcal{B}_i$, sodass $x \in B_i \subseteq U$ gilt. Für alle $x \in X$ existiert also ein i, sodass $B_i \subseteq U$, also $P_i \subseteq U$ und $P \cap U \neq \emptyset$. □

1.4 Vergleich von Topologien

Definition 1.4.1. feiner und gröber

Seien $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ Topologien auf X. Dann heißt $\mathcal{T}_1$ **feiner** als $\mathcal{T}_2$ und $\mathcal{T}_2$ **gröber** als $\mathcal{T}_1$, wenn $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$ gilt, also jedes $O \in \mathcal{T}_2$ auch in $\mathcal{T}_1$ enthalten ist.

Bemerkungen.

1. $\mathcal{T}_1$ feiner als $\mathcal{T}_2$ gilt genau dann, wenn
$$\mathrm{id}_X : (X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_2) \tag{1.4.1}$$
stetig ist.
2. Allgemein haben es Abbildungen aus $(X, \mathcal{T}_1)$ leichter, stetig zu sein, als Abbildungen aus $(X, \mathcal{T}_2)$, da für $f : X \to Y$ stetig gelten muss, dass $f^{-1}(O') \in \mathcal{T}_1 \supseteq \mathcal{T}_2$.
3. Für Abbildungen nach X ist es genau umgekehrt.
4. Es gibt weniger konvergente Folgen in $(X, \mathcal{T}_1)$ als in $(X, \mathcal{T}_2)$.
5. Die indiskrete Topologie ist die feinste Topologie auf X, die diskrete Topologie die gröbste.
6. Topologien auf X bilden eine partiell geordnete Menge.

Definition 1.4.2. Homöomorphismus

Sei $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen. Dann heißt f **Homöomorphismus**, falls f stetig und bijektiv mit stetiger Umkehrabbildung ist.
Existiert ein Homöomorphismus zwischen X und Y, so heißen die Räume **homöomorph**, in Zeichen $X \cong Y$.

Beispiele. 1. Die Abbildung

$$f : [0,1) \to \mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 | \|x\| = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2 \tag{1.4.2}$$
$$t \mapsto \exp(2\pi i t) \tag{1.4.3}$$

ist stetig und bijektiv, aber f^{-1} ist nicht stetig.

2. Wir betrachten die abgeschlossene Kreisscheibe

$$\mathbb{D}^2 := \{x \in \mathbb{R}^2 | \|x\| \leq 1\} \tag{1.4.4}$$

ist homöomorph zum Quadrat $[-1,1] \times [-1,1]$. Beispielsweise kann $f : [-1,1]^2 \to \mathbb{D}^2$ durch Reskalieren und $g : \mathbb{D}^2 \to [-1,1]$ durch Aufblasen erreicht werden.

3. Es existiert ein Homöomorphismus

$$f : (-1,1) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \tag{1.4.5}$$
$$x \mapsto \frac{x}{1 - |x|}. \tag{1.4.6}$$

Dieser lässt sich auf (a,b) verallgemeinern, solange $a < b$ gilt.

4. Die **stereographische Projektion** ist ein Homöomorphismus

$$\varphi : \mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\} \backslash \{0,0,1\} \to \mathbb{C}, \tag{1.4.7}$$

gegeben durch $\varphi(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3}\right)$.

Definition 1.4.3. Abgeschlossene und offene Abbildungen

Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ heißt

1. **abgeschlossen**, falls für abgeschlossenes $A \subseteq X$ auch $f(A) \subseteq Y$ abgeschlossen ist.
2. **offen**, falls für offenes $O \subseteq X$ auch $f(O) \subseteq Y$ offen ist.

Satz 1.4.4. Homöomorphismen sind stetig, bijektiv und offen

Sei $f : X \to Y$ stetig, bijektiv und offen (oder abgeschlossen). Dann ist f ein Homöomorphismus.

Beweis. Sei $O' \subseteq Y$ offen und

$$f^{-1} : Y \to X \tag{1.4.8}$$

die Umkehrabbildung. Dann ist $(f^{-1})^{-1}(O) = f(O)$ offen. □

1.5 Unterräume

Definition 1.5.1. Unterraumtopologie

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein top. Raum und $Y \subseteq X$. Dann ist die **Unterraumtopologie** gegeben durch

$$\mathcal{T}_{X|Y} := \{O \cap Y | O \in \mathcal{T}\}. \tag{1.5.1}$$

Bemerkung. Das bedeutet, dass $B \subseteq Y$ genau dann offen ist, wenn ein $O \in \mathcal{T}$ existiert, sodass $B = O \cap Y$ gilt. Außerdem ist $A \subseteq Y$ genau dann abgeschlossen, wenn ein abgeschlossenes $A' \subseteq X$ mit $A = A' \cap Y$ existiert.

Satz 1.5.2. Stetigkeit und Inklusion

Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Z, \mathcal{T}')$ top. Räume mit $Y \subseteq X$.

(a) Die **Inklusionsabbildung**

$$\begin{aligned} \iota : Y &\mapsto X \\ y &\mapsto \iota(y) := y \end{aligned} \tag{1.5.2}$$

ist stetig.

(b) Eine Abbildung $f : Z \to Y$ ist genau dann stetig, wenn $\iota \circ f$ stetig ist.

Dieser Sachverhalt wird durch folgendes kommutierendes Diagramm ausgedrückt:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\iota\circ f"'] & Y \arrow[d, hook, "\iota"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Beweis.

(a) Sei $O \subseteq X$ offen, dann ist $\iota^{-1}(O) = O \cap Y$ offen nach Definition von $\mathcal{T}_{X|Y}$.

(b) ($\Rightarrow$): Seien f und ι stetig. Dann ist die Verkettung $\iota \circ f$ auch stetig.
($\Leftarrow$): Sei $B \subseteq Y$ offen, dann ist zu zeigen, dass $f^{-1}(B)$ auch offen ist. Es gilt $B \in \mathcal{T}_{X|Y}$ genau dann, wenn ein $O \subseteq \mathcal{T}$ mit $B = O \cap Y$ existiert. Daraus folgt

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(O \cap Y) = f^{-1}(\iota^{-1}(O)) = (\iota \circ f)^{-1}(O), \tag{1.5.3}$$

was offen nach Annahme ist.

$\square$

Bemerkung. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein top. Raum mit $Z \subseteq Y \subseteq X$. Dann gilt $\mathcal{T}_{X|Z} = \mathcal{T}_{(X|Y)|Z}$.

Definition 1.5.3. Einbettung

Seien $(X', \mathcal{T}')$ und $(X, \mathcal{T})$ top. Räume. Eine Abbildung $f : X' \to X$ heißt **Einbettung**, falls f ein Homöomorphismus auf $\mathrm{im}(f) = f(X')$ ist. Dabei trägt $f(X') \subseteq X$ die Unterraumtopologie.

Beispiele.

1. Die Funktion
$$\begin{aligned} f : [0,1) &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \exp(2\pi i t) \end{aligned} \tag{1.5.4}$$
ist keine Einbettung, weil $f : [0,1) \to f([0,1)) = \mathbb{S}^1$ kein Homöomorphismus ist.
2. Sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige, stetige Funktion. Dann ist der **Graph** von ϕ, gegeben durch
$$\begin{aligned} \Gamma_\phi : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ t &\mapsto (t, \phi(t)) \end{aligned} \tag{1.5.5}$$
eine Einbettung.
3. Einbettungen $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^3$ heißen **Knoten**.

⚠ Ist $f : X \to W$ stetig und $Y \subseteq X$ ein Unterraum mit der Topologie $\mathcal{T}_{X|Y}$, dann ist $f|_Y = f \circ \iota$ stetig. Die Umkehrung gilt jedoch nicht! Ist z.B.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to [0,1] \\ t &\mapsto f(t) := \begin{cases} 1, \ t \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \\ 0, \ t \in \mathbb{Q}, \end{cases} \end{aligned} \tag{1.5.6}$$

so ist $f|_{\mathbb{Q}}$ konstant, also auch stetig, aber f nicht.

1.6 Trennungsaxiome

Definition 1.6.1. Trennungsaxiome

Die Trennungsaxiome für topologische Räume $(X, \mathcal{T})$ sind gegeben durch:

(T1) Für alle $x, y \in X$, $x \neq y$ existieren Umgebungen $U \subseteq \mathfrak{U}(x)$ und $V \subseteq \mathfrak{U}(y)$ mit $x \neq V$ und $y \neq U$.

(T2) Für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ existieren Umgebungen $U \subseteq \mathfrak{U}(x)$ und $V \subseteq \mathfrak{U}(y)$ mit $U \cap V = \emptyset$.

(T3) Für $x \in X$ und abgeschlossenes $x \notin A \subseteq X$ existieren Umgebungen $U \in \mathfrak{U}(x)$ und $V \in \mathfrak{U}(A)$, sodass $U \cap V = \emptyset$.

(T4) Für abgeschlossene $A, B \subseteq X$ mit $A \cap B = \emptyset$ existieren Umgebungen $U \in \mathfrak{U}(A)$ und $V \in \mathfrak{U}(B)$, sodass $U \cap V = \emptyset$.

(T2) heißt auch **Hausdorffeigenschaft**. Räume, die (T2) erfüllen, heißen **Hausdorffräume**.

Definition 1.6.2. Reguläre und normale Räume

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein top. Raum.

(a) Erfüllt X (T2) und (T3), so heißt X **regulär**.

(b) Erfüllt X (T2) und (T4), so heißt X **normal**.

Bemerkungen.

1. Ist ein Raum hausdorffsch, so sind Grenzwerte eindeutig. Also ist z.B. $(X, \{\emptyset, X\})$ ist für $|X| \geq 2$ nicht hausdorffsch.
2. Es gilt (T2) $\Rightarrow$ (T1).

3. Jedoch gilt
$$(\text{T4}) \not\Rightarrow (\text{T3}) \not\Rightarrow (\text{T2}), \tag{1.6.1}$$
betrachte dafür z.B. den obigen nicht-Hausdorffraum. Dieser erfüllt (T3), da es keine abgeschlossenen $A \subseteq X$ mit $x \notin A$ gibt. Auch (T4) ist erfüllt.
4. (ÜA): Genau dann, wenn X (T1) erfüllt, ist $\{x\}$ abgeschlossen für alle $x \in X$.

Satz 1.6.3. Normalität impliziert Regularität

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein normaler top. Raum. Dann ist X auch regulär.

Beweis. X erfüllt (T2) und (T4), und (T2) impliziert (T1). Alos ist $\{x\}$ abgeschlossen. Ist $A \subseteq X$ abgeschlossen und $x \notin A$, so sind $\{x\}$ und A disjunkte und abgeschlossene Teilmengen. Also existieren Umgebungen $U \in \mathfrak{U}(\{x\}) = \mathfrak{U}(x)$ und $V \in \mathfrak{U}(A)$ mit $U \cap V = \emptyset$. □

Satz 1.6.4. Hausdorffeigenschaft entspricht abgeschlossener Diagonale

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein top. Raum und $\Delta := \{(x,x) | x \in X\} \subseteq X \times X$ die **Diagonale** mit der Topologie $\mathcal{T}_{X\times X} := \{O_1 \times O_2 | O_i \in \mathcal{T}\}$. X ist genau dann hausdorffsch, falls $\Delta \subseteq X \times X$ abgeschlossen ist.

Beweis. Seien $x, y \in X$ mit $x \neq y$. Das ist äquivalent zu $(x,y) \in (X \times X)\backslash\Delta$. Wir zeigen, dass die Hausdorffeigenschaft äquivalent dazu ist, dass das Komplement $(X \times X)\backslash\Delta$ offen ist. Äquivalent zu Δ abgeschlossen ist $(X \times X)\backslash\Delta$ offen. Das gilt genau dann, wenn für alle $(x,y) \in (X \times X)\backslash\Delta$ ein offenes $O \in X \times X$ existiert mit $(x,y) \in O$. O.B.d.A. sei $O = O_1 \times O_2$, also $x \in O_1$ und $y \in O_2$ mit $O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$. Das gilt genau dann, wenn X hausdorffsch ist. □

Satz 1.6.5. (T3) und (T4) über Umgebungsbasen

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein top. Raum.

(a) X erfüllt (T3) genau dann, wenn für alle $x \in X$ die abgeschlossenen Umgebungen von x eine Umgebungsbasis sind, also für alle $U \in \mathfrak{U}(x)$ ein abgeschlossenes $B \in \mathfrak{U}(x) \subseteq X$ existiert.

(b) X erfüllt genau dann (T4), wenn für alle abgeschlossenen $A \subseteq X$ gilt, dass die abgeschlossenen Umgebungen von A eine Umgebungsbasis von A bilden, also für alle $U \in \mathfrak{U}(A)$ ein abgeschlossenes $B \subseteq \mathfrak{U}(A)$ existiert, sodass $A \subseteq B \subseteq C$ gilt.

Bemerkung. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein (T4)-Raum und $A \subseteq X$ abgeschlossen. Dann existiert für alle $W \in \mathfrak{U}(A)$ ein offenes $U \in \mathfrak{U}(A)$, sodass $A \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq \overline{B} = B$.

Beweis. Die Rückrichtung ist eine ÜA, wir zeigen die Hinrichtung:

(a) (T3) gelte. Seien $x \in X$ und $W \in \mathfrak{U}(x)$ gegeben. Daraus folgt, dass ein $O \in \mathcal{T}$ mit $x \in O \subseteq W$ existiert. $X\backslash O$ ist abgeschlossen und $x \notin X\backslash O$. Mit (T3) folgt dann, dass $U \in \mathfrak{U}(x)$ und $V \in \mathfrak{U}(X\backslash O)$ mit $U \cap V = \emptyset$ existieren. Aus $V \in \mathfrak{U}(X\backslash O)$ folgt, dass ein $O' \in \mathcal{T}$ mit $(X\backslash O) \subseteq O' \subseteq V$ existiert. Wir behaupten, dass $X\backslash O' =: B$ die gewünschten Eigenschaften hat.

(i) $x \in X\backslash O'$: Wir haben $x \in U$ mit $U \cap V = \emptyset$, also ist $x \in X\backslash V \subseteq X\backslash O'$.

(ii) Es gilt $U \subseteq (X\backslash V) \subseteq (X\backslash O')$ mit $U \in \mathfrak{U}(x)$. Obermengen von Umgebungen sind selbst wieder Umgebungen.

(iii) $X\backslash O' \subseteq X\backslash(X\backslash O) = O \subseteq W$.

(b) Analog zu (a), wir ersetzen x durch A.

□

Satz 1.6.6. Vererbung der Trennungsaxiome auf Unterräume

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein top. Raum.

(a) Ist X hausdorffsch (oder regulär) und $Y \subseteq X$, so ist $(Y, \mathcal{T}_{X|Y})$ ebenfalls hausdorffsch (oder regulär).

(b) Ist X normal und $Y \subseteq X$ abgeschlossen, so ist auch $(Y, \mathcal{T}_{X|Y})$ normal.

Bemerkung. Wo liegt das Problem bei (b)? Seien $A, B \subseteq Y$ mit $A \cap B = \emptyset$. Dann ist $A = A' \cap Y$ und $B = B' \cap Y$. Ist $Y \subseteq X$ nicht abgeschlossen, so müssen A und B in X nicht abgeschlossen sind.

Beweis.

(a) Wir zeigen zuerst hausdorffsch. Seien $x_1, x_2 \in Y$ mit $x_1 \neq x_2$. Dann ist
Nun noch Regularität. Sei $x \in Y$ und $A' \subseteq Y$ abgeschlossen mit $x \neq A'$. Dann existiert ein abgeschlossenes A in X mit $A' = A \cap Y$. Aus A abgeschlossen und $x \in X$ folgt, dass $x \neq A$ ist. Da X regulär ist, existieren $U \in \mathfrak{U}^X(x)$ und $V \in \mathfrak{U}^X(A)$ mit $U \cap V = \emptyset$. Setze $U' := U \cap Y$ und $V' = V \cap Y$. Dann ist $U' \in \mathfrak{U}^Y(x)$ und $V' \in \mathfrak{U}^Y(A')$ mit $U' \cap V' = \emptyset$.

(b) Sei $Y \subseteq X$ abgeschlossen und $A', B' \subseteq Y$ abgeschlossen mit $A' \cap B' = \emptyset$. Da X normal ist, existieren abgeschlossene $A, B \subseteq X$ mit $A' = A \cap Y$ und $B' = B \cap Y$. Da Y abgeschlossen ist, sind A' und B' auch abgeschlossen in

X. Wegen (T3) sind A' und B' trennbar mit $U \in \mathfrak{U}^X(A')$ und $V \in \mathfrak{U}^X(B')$, sodass $U \cap V = \emptyset$. Dann sind die Mengen trennbar in Y mit $U \cap Y$ und $V \cap Y$.

□

Theorem 1.6.7. Fortsetzungssatz von Tietze

Sei X normal und $A \subseteq X$ abgeschlossen. Betrachte eine streng monotone Funktion

$$f : A \to \mathbb{R}. \tag{1.6.2}$$

Dann existiert eine stetige Fortsetzung

$$F : X \to \mathbb{R} \tag{1.6.3}$$

mit $F|_A = f$.

Dieses Theorem wollen wir nicht beweisen.

Bemerkung. Der Fortsetzungssatz kann verstärkt werden: Ist f nicht konstant, so gilt $\sup F = \sup f$ und $\inf F = \inf f$ mit $\inf f < F(x) < \sup f$ für alle $x \notin A$.

Theorem 1.6.8. Lemma von Urysohn

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein top. Raum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) X erfüllt (T4).

(b) Für alle abgeschlossenen Teilmengen $A \subseteq X$ und alle offenen Teilmengen U mit $A \subseteq U \subseteq X$ gilt: Es existiert eine **Urysohn-Funktion**:

$$\begin{aligned} f : X &\to [0,1] \subseteq \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) &:= \begin{cases} 0 \text{ für } x \in A \\ 1 \text{ für } x \in X \backslash U, \end{cases} \end{aligned} \tag{1.6.4}$$

die stetig auf $U \backslash A$ ist.

Beweis.

1. (b $\Rightarrow$ a): Sei f eine Urysohn-Funktion und $A, B \subseteq X$ abgeschlossen. Dann ist $U := X \backslash B$ offen und $A \subseteq U \subseteq X$. dann trennen $U_1 := f^{-1}[0, \frac{1}{2})$ und $U_2 := f^{-1}(\frac{1}{2}, 1]$ die Mengen A und B.
2. (a $\Rightarrow$ b): Dies beweisen wir konstruktiv. Sei $A \subseteq U \subseteq X$ gegeben, A abgeschlossen, U offen, und X erfülle (T4). Setze $U_0 := A$ und $U_1 := U$. Gemäß Satz 1.6.5 existiert offenes $U_{\frac{1}{2}}$ mit $A = U_0 \subseteq U_{\frac{1}{2}} \subseteq \overline{U}_{\frac{1}{2}} \subseteq U_1 = U$. Nun konstruieren wir eine 2-adische Schachtelung: Der nächste Schritt ist
$$A = U_0 \subseteq U_{\frac{1}{4}} \subseteq \overline{U}_{\frac{1}{4}} \subseteq U_{\frac{1}{2}} \subseteq \overline{U}_{\frac{1}{2}} \subseteq U_{\frac{3}{4}} \subseteq \overline{U}_{\frac{3}{4}} \subseteq U_1 = U. \tag{1.6.5}$$
Der $n+1$-te Schritt ist dann gegeben durch
$$A = U_0 \subseteq \cdots \subseteq U_{\frac{2k-1}{2^{n+1}}} \subseteq \overline{U}_{\frac{2k-1}{2^{n+1}}} \subseteq U_{\frac{k}{2^n}} \subseteq \overline{U}_{\frac{k}{2n}} \subseteq U_{\frac{k+1}{2^n}} \subseteq \cdots \subseteq U_1 = U. \tag{1.6.6}$$
Wir setzen $D := \left\{\frac{i}{2^n} | n, i \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq 2^n\right\}$. Sei $r, s \in D$ mit $r < s$, also $\overline{U}_r \subseteq U_s$. Für $t \in [0,1]$ sei $U_t := \bigcup_{r \leq t, r \in D} U_r$. Dann erhalten wir eine Urysohn-Funktion durch
$$f(x) := \begin{cases} \inf_{x \in U_t} \{0 \leq t \leq 1\} & \text{für } x \in U \\ 1 & \text{für } x \notin U \end{cases} \tag{1.6.7}$$
gegeben. Für $x \in A = U_0$ ist $f(x) = 0$. Ist $f(x) < t$, so existiert $r \in D$ mit $r < t$, sodass $x \in U_r$. Ist $f(x) > t$, existiert $r' \in D$ mit $r' > t$ und $x \notin \overline{U}_r$. Also sind
$$f^{-1}([0,t)) = \bigcup_{r \in D, r < t} U_r \tag{1.6.8}$$
und
$$f^{-1}((t,1]) = \bigcup_{r' \in D, r' > t} (X \backslash \overline{U}_{r'}) \tag{1.6.9}$$
offen. Damit ist
$$test \tag{1.6.10}$$
eine Subbasis von $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$.

□

1.7 Initialtopologie und Produkte

Wir wollen die Unterraumtopologie verallgemeinern:

Definition 1.7.1. Initialtopologie

Gegeben sei eine Menge X mit einer Familie topologischer Räume $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ und Abbildungen $f_i : X \to X_i$ für alle $i \in I$. Eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X heißt **Initialtopologie**, falls folgendes gilt:

Ist Y ein beliebiger top. Raum und $g : Y \to (X, \mathcal{T})$ eine Abbildung. Dann ist g stetig genau dann, wenn $f_i \circ g$ stetig für alle $i \in I$ ist. Dies ist äquivalent zu folgendem kommutierenden Diagramm:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f_i \circ g"'] & X \arrow[d, "f_i"] \\ & X_i \end{tikzcd}$$

Satz 1.7.2. Eindeutigkeit und Feinheit der Initialtopologie

Sei X und $(f_i : X \to X_i)_{i \in I}$ gegeben.

1. Dann gibt es auf X genau eine Initialtopologie bezüglich der $(f_i)_{i \in I}$.
2. Die Initialtopologie ist die gröbste Topologie auf X, sodass alle $(f_i)_{i \in I}$ stetig sind.
3. Eine Subbasis ist $\mathcal{S} := \bigcup_{i \in I} \{f_i^{-1}(O_i) | O_i \in \mathcal{T}_i\}$.

Beweis.

- f_i ist stetig, falls die Initaltopologie $\mathcal{T}$ auf X existiert. Betrachte folgendes kommutierendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd} (X, \mathcal{T}) \arrow[r, "g = \mathrm{id}_X"] \arrow[dr, "f_i"'] & (X, \mathcal{T}) \arrow[d, "f_i"] \\ & (X_i, \mathcal{T}_i) \end{tikzcd}$$

  Die Abbildung $\mathrm{id}_X : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T})$ ist immer stetig. Dann folgt, dass alle f_i stetig sind, denn $f_i = f_i \circ \mathrm{id}_X$.
- Eindeutigkeit: Angenommen, es gibt zwei $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ auf X. Betrachte

$$\begin{tikzcd} (X, \mathcal{T}_1) \arrow[r, "\mathrm{id}_X"] \arrow[dr, "f_i \circ g"'] & (X, \mathcal{T}_2) \arrow[d, "f_i"] \\ & X_i, \end{tikzcd}$$

  also ist $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.
- Subbasis: Da f_i stetig ist, muss $f^{-1}(O_i)$ offen sein in $(X, \mathcal{T})$ mit der Initialtopologie $\mathcal{T}$. Also ist $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$. $\mathcal{T}$ war die gröbste Topologie, also $\langle \mathcal{S} \rangle = \mathcal{T}$. Zu zeigen ist nun, dass $(X, \mathcal{T})$ mit $\mathcal{T} = \langle \mathcal{S} \rangle$ die universelle Eigenschaft erfüllt, also

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f_i \circ g"'] & (X, \mathcal{T}) \arrow[d, "f_i"] \\ & X_i \end{tikzcd}$$

  ist genau dann stetig, wenn $f_i \circ g$ stetig für alle $i \in I$ ist.
- Klar ist, dass aus der Stetigkeit von g folgt, dass $f_i \circ g$ stetig ist, weil alle f_i stetig sind.
- Wir nehmen an, dass $f_i \circ g$ stetig ist für alle $i \in I$. g ist stetig genau dann, wenn $g^{-1}(O)$ offen in Y für alle $O \in \mathcal{S}$ ist. Es genügt $O = f_i^{-1}(O_i)$ für beliebiges $i \in I$ zu zeigen. Es gilt:

$$g^{-1}(f_i^{-1}(O_i)) = (g^{-1} \circ f_i^{-1})(O_i) = \underbrace{(f_i \circ g)^{-1}}_{\text{stetig}} \underbrace{(O_i)}_{\in \mathcal{T}_i} \tag{1.7.1}$$

  ist offen.

□

Wir wollen nun Produkte von Mengen betrachten. Sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie von Mengen. Betrachte das kartesische Produkt

$$X = \prod_{i \in I} X_i \tag{1.7.2}$$

der Mengen X_i. Sei $x = (x_i)_{i \in I}$ mit $x_i \in X_i$. Dann betrachten wir die **Projektionsabbildung**

$$\begin{aligned} \pi_j : X &\to X_j \\ (x_i)_{i \in I} &\mapsto x_j \end{aligned} \tag{1.7.3}$$

$X = \prod X_i$ hat die universelle Eigenschaft: Die Abbildung $g : Z \to \prod X_i$ ist bijektiv mit Umkehrung $g_i : Z \to X_i$ für alle $i \in I$. Man setzt dafür $g_i \mapsto g(z) = (g_i(z))_{i \in I}$. Ziel ist, eine Topologie auf $X = \prod X_i$ zu definieren, falls alle X_i top. Räume sind.

Definition 1.7.3. Produkte

Sei $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume und $\prod_{i\in I} X_i =: X$ ihr Produkt (als Mengen). Dann heißt die Initialtopologie bezüglich der Projektion

$$\left(\pi_i : \prod_{j\in I} X_j \to X_i\right)_{i\in I} \tag{1.7.4}$$

Produkttopologie auf X.

Satz 1.7.4. Basis der Produkttopologie

Die Produkttopologie auf $X = \prod_{i\in I} X_i$ hat die Basis

$$\mathcal{B} := \left\{\prod_{i\in I} O_i | O_i \in \mathcal{T}_i, O_i = X_i \text{ für fast alle } i \in I\right\}. \tag{1.7.5}$$

Beweis. Betrachte die Projektion

$$\pi_i : \prod_{j\in I} X_j \to X_i. \tag{1.7.6}$$

Für $O_i \in \mathcal{T}_i$ ist $\pi_i^{-1}(O_i) = \prod_{j\in I} O_j$ mit

$$O_j = \begin{cases} O_i & \text{für } j = 1 \\ X_j & \text{für } j \neq i. \end{cases} \tag{1.7.7}$$

Endliche Schnitte davon geben die Elemente der Basis und das ist $\mathcal{B}$. □

Satz 1.7.5. Z

jeder Familie stetiger Abbildungen $(f_i : T \to X_i)_{i\in I}$ gibt es genau eine stetige Funtkion $f : T \to \prod X_i$ mit $\pi_i \circ f = f_i$ für alle $i \in I$, also kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "???"] \arrow[dr, "f_i"'] & \prod_{j\in I} X_j \arrow[d, "\pi_i"] \\ & X_i \end{tikzcd}$$

Beweis.

(i) f existiert als Abbildung von Mengen wegen der universellen Eigenschaft des kartesischen Produktes von Mengen.

(ii) Dieses f ist automatisch stetig wegen der universellen Eigenschaft der Initialtopologie: f_i sind alle stetig, π_i sind stetig.

□

2 Algebraische Topologie

2.1 ...