1 Tutorium 17.04.25

1.1 Wiederholung - Komplexe Zahlen

Mit Sicherheit erinnert ihr euch noch gut an die komplexen Zahlen:

Definition 1.1.1. Komplexe Zahlen

Der Körper $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ mit

$$\mathbb{C} := \{(a, b) \in \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{R}\} \tag{1.1.1}$$

und den Operationen

$$\begin{aligned} + : \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ (a, b), (c, d) &\mapsto (a, b) + (c, d) := (a + c, b + d), \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

genannt Addition, und

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ (a, b), (c, d) &\mapsto (a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc), \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

genannt Multiplikation, nennen wir den Körper der **komplexen Zahlen**. Die Zahl $a = \mathrm{Re}(a, b)$ heißt **Realteil**, die Zahl $b = \mathrm{Im}(a, b)$ **Imaginärteil** von z.

Meist führt man die *komplexe Einheit* i ein, sodass $(a, b) = a + bi$ für $i^2 := -1$ gilt. Dies erleichtert Rechnungen, ist aber rein symbolischer Natur. Fundamental ist, dass hier ein Körper vorliegt: Sowohl $(\mathbb{C}, +)$ als auch $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ sind Gruppen (das könnt ihr gerne zur Übung nachprüfen, vor allem die Inversen sollte man einmal konstruiert haben). Bereits aus MfP1 kennt ihr die *komplexe Konjugation*

$$\begin{aligned} \bar{\cdot} : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z = a + bi &\mapsto \overline{z} := a - bi. \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

Geometrisch entspricht dies einer Spiegelung an der reellen Achse. Auf $\mathbb{C}$ definieren wir außerdem den *Absolutwert* oder *Betrag* durch

$$\begin{aligned} |\cdot| : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto |z| := \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

mit einigen wichtigen Eigenschaften:

(M1) Positivität: $|z| \geq 0$ mit $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

(M2) Multiplikativität: $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

(M3) Subadditivität (Dreiecksungleichung): $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Sowohl die Multiplikativität als auch die Subadditivität kann man induktiv auf beliebige endliche Produkte bzw. Summen ausweiten.

Damit erhalten wir eine Möglichkeit, aus geometrischen Überlegungen verschiedene Formen für komplexe Zahlen herzuleiten. Ausgehend von der *kartesischen Form* $z = a + bi$ definieren wir den **Radius** von z als $r := |z|$. Das **(Haupt-)Argument** von z ist dessen eingeschränkter Polarwinkel $\phi \in (-\pi, \pi]$, das aus trigonometrischen Überlegungen hergeleitet werden kann. Damit erhalten wir die *Polarform* und mit der Eulerschen Formel auch die *trigonometrische Form*:

$$z = r \exp(i\phi) = r(\cos\phi + i \sin\phi). \tag{1.1.6}$$

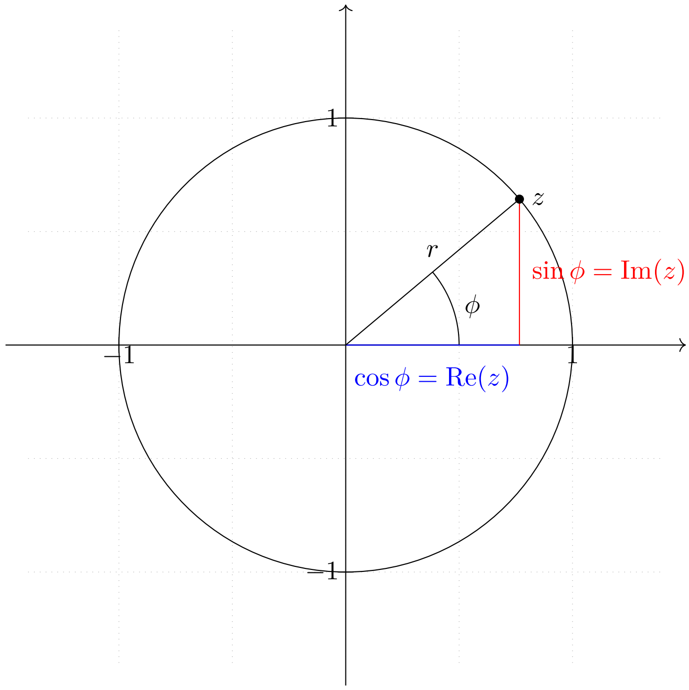


Abbildung 1: Die Einheitskreislinie $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{C}$ mit der komplexen Zahl $z = r\exp(i\phi)$.

Nicht immer ist es ganz so einfach, das Argument aus der kartesischen Form zu ermitteln. Wir illustrieren dies mal wie folgt:

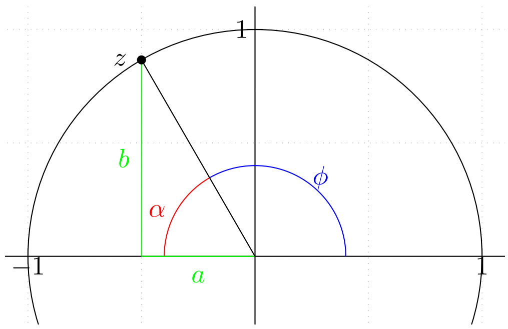


Abbildung 2: In diesem Fall lässt sich der Polarwinkel von $z = a + ib$ nicht direkt ableiten. Wir erhalten $\cos\alpha = \frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ und damit $\phi = \pi - \arccos\left(\frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = \arccos\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$. Dabei nutzt man, dass $\arccos(x) = \pi - \arccos(-x)$ gilt.

Wir wollen nun die wichtigen topologischen Begriffe auf $\mathbb{C}$ betrachten. Die Topologie der komplexen Ebene wird von der Metrik induziert:

Definition 1.1.2. Topologie auf $\mathbb{C}$

Der **offene ϵ-Ball** in $\mathbb{C}$ ist die Teilmenge

$$B_\epsilon(z) := \{x \in \mathbb{C} \mid |z - x| < \epsilon\} \tag{1.1.7}$$

mit Radius ϵ und Mittelpunkt z. Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{C}$ ist genau dann offen, wenn für alle $z \in X$ gilt, dass $B_\epsilon(z) \subseteq X$ für ein $\epsilon > 0$ erfüllt ist.

Man erinnere sich daran, dass eine abgeschlossene Menge darauf aufbauend definiert ist: Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{C}$ heißt *abgeschlossen*, wenn ihr Komplement $\mathbb{C} \setminus A$ offen ist. Eine Menge kann sowohl abgeschlossen als auch offen sein. Wir brauchen noch weitere Grundbegriffe der Topologie:

Definition 1.1.3. Zusammenhang und Gebiet

(i) Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{C}$ heißt **zusammenhängend**, wenn sie sich nicht in zwei offene, disjunkte, nicht-leere Teilmengen zerlegen lässt. Äquivalent dazu ist, dass bei einer Zerlegung $A = B \cup C$ mit B, C offen und disjunkt A oder B die leere Menge sein muss.

(ii) Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{C}$ heißt **Gebiet**, wenn sie zusammenhängend, offen und nicht-leer ist.

Mit diesem Wissen sollte es uns leichter fallen, Teilmengen von $\mathbb{C}$ zu charakterisieren. Das versuchen wir zur Übung gleich einmal:

Übung. Skizziere folgende Teilmengen von $\mathbb{C}$:

(a) $M_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid 3 \leq |z| \leq 10\}$

(b) $M_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z^2) > 0\}$

(c) $M_3 := \{z \in \mathbb{C}^* \mid \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) \leq 2\}$

Entscheide außerdem, ob die angegebenen Mengen Gebiete (in der von der Metrik induzierten Topologie) sind.

Lösung. (a) Hier hat man wahrscheinlich schon ein Bild vor Augen, denn wenn man die Polardarstellung $z = r\exp(i\phi)$ einsetzt, erhält man unmittelbar

$$3 \leq |r| \leq 10, \tag{1.1.8}$$

da $|\exp(i\phi)| = 1$. Wir erhalten also einen *Kreisring*, wie unten abgebildet. Die Menge ist außerdem offensichtlich nicht offen, denn jeder Randpunkt $z \in \partial M_1$ besitzt keinen offenen ϵ-Ball $B_\epsilon(z)$, der noch ganz in M_1 liegt. Also kann M_1 kein Gebiet sein.

(b) Wir setzen $z = a + bi$ an und erhalten die Ungleichung

$$\mathrm{Re}\big((a+bi)^2\big) = \mathrm{Re}\big(a^2 - b^2 + 2iab\big) = a^2 - b^2 > 0. \tag{1.1.9}$$

Dies ist äquivalent zu $a^2 > b^2$, die Menge wird also nach unten beschränkt durch die Raumdiagonalen $\Delta_{(a,a)}$ und $\Delta_{(a,-a)}$. Wir erhalten den Longitudinalschnitt eines Kegels, wobei der Ursprung ausgenommen wird. Diese Menge ist offen, denn für alle $z \in M_2$ liegt der offene ϵ-Ball mit $\epsilon < \frac{a}{2}$ für beliebiges a auf der Diagonale noch ganz in M_2. Jedoch ist die Menge kein Gebiet, da sie nicht zusammenhängend ist.

(c) Wir setzen erneut $z = a + bi$ an und machen folgende Feststellung:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}. \tag{1.1.10}$$

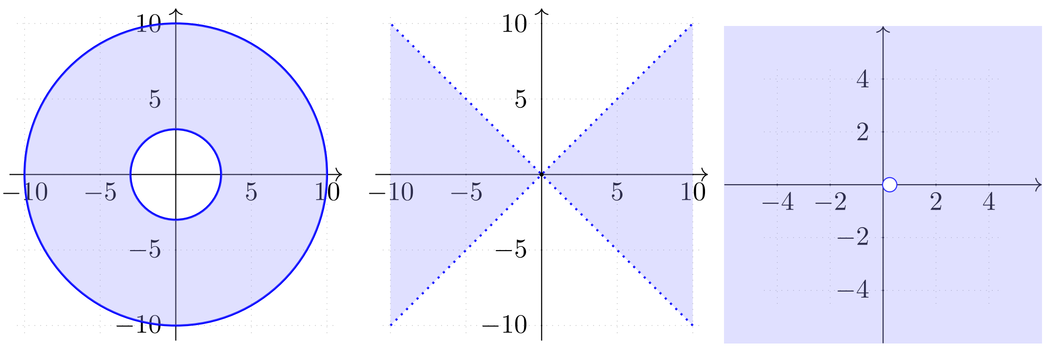
Also ist die Ungleichung durch

$$\frac{a}{a^2+b^2} \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq a^2 - \frac{a}{2} + b^2 \tag{1.1.11}$$

gegeben. Quadratische Ergänzung liefert

$$0 \leq \left(a^2 - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} + b^2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^2 \leq \left(a^2 - \frac{1}{4}\right)^2 + b^2, \tag{1.1.12}$$

was gerade die Gleichung eines Kreises mit Radius $\frac{1}{4}$ darstellt, der auf $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ zentriert ist. Man sollte beachten, dass die Ungleichung so gestellt ist, dass die Menge ganz $\mathbb{C}$ ohne den Inhalt des Kreises darstellt. Dies ist aus den gleichen Gründen wie für M_1 kein Gebiet, denn die Punkte auf der Kreislinie haben keine offene Umgebung in M_3.



Eine weitere sehr wichtige Ungleichung wollen wir zur Übung beweisen:

Satz 1.1.4. Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Seien $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{C}$ endlich viele komplexe Zahlen. Dann gilt die **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i\right|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2. \tag{1.1.13}$$

Beweis. Für den Beweis brauchen wir zwei Vorüberlegungen. Erst einmal bemerken wir, dass die Gleichung immer gilt, wenn $\sum_i |x_i|^2 \sum_i |y_i|^2 = 0$, da dann alle x_i oder alle y_i verschwinden müssen. Wir müssen den Beweis also nur noch für $\sum_i |x_i|^2 \sum_i |y_i|^2 > 0$ führen. Die andere Vorüberlegung ist etwas technisch[a] Seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Da Quadrate reeller Zahlen immer positiv sind, stellen wir fest:

$$\begin{aligned} 0 \leq (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 &= \alpha^2\delta^2 + \beta^2\gamma^2 - 2\alpha\beta\gamma\delta \\ &= \alpha^2\beta^2 - \alpha^2\beta^2 + \gamma^2\delta^2 - \gamma^2\delta^2 + \alpha^2\delta^2 + \beta^2\gamma^2 - 2\alpha\beta\gamma\delta \\ &= (\alpha^2 + \gamma^2)(\beta^2 + \delta^2) - (\alpha^2\beta^2 + \gamma^2\delta^2 + 2\alpha\beta\gamma\delta) \\ &= (\alpha^2 + \gamma^2)(\beta^2 + \delta^2) - (\alpha\beta + \gamma\delta)^2. \end{aligned}$$

Umstellen liefert nun eine Ungleichung, derer wir uns später bedienen:

$$(*)\ (\alpha\beta+\gamma\delta)^2 \le (\alpha^2+\gamma^2)(\beta^2+\delta^2). \tag{1.1.14}$$

Nun beweisen wir endlich die Ungleichung mit vollständiger Induktion:
Für den Induktionsanfang brauchen wir nur (M2):

$$|x\overline{y}|^2 = (|x||\overline{y}|)^2 = |x|^2|y|^2. \tag{1.1.15}$$

Hier gilt sogar Gleichheit. Die Induktionsvoraussetzung (IV) ist, dass die Aussage für $n-1$ gezeigt ist. Da beide Seiten positiv sind, können wir in der IV die Wurzel ziehen:

$$\left|\sum_{i=1}^{n-1} x_i\overline{y}_i\right| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1}|x_i|^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1}|y_i|^2}. \tag{1.1.16}$$

Für den Induktionsschritt müssen wir die Aussage für n beweisen. Das geht nun relativ schnell:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y}_i\right| &= \left|x_n\overline{y}_n + \sum_{i=1}^{n-1} x_i\overline{y}_i\right| \le |x_n\overline{y}_n| + \left|\sum_{i=1}^{n-1} x_i\overline{y}_i\right| \\ &\le^{\mathrm{IV}} |x_n||y_n| + \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1}|x_i|^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1}|y_i|^2} \le^{(*)} \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2}\end{aligned}$$

Im ersten Schritt haben wir die Dreiecksungleichung ausgenutzt, gefolgt von der Induktionsvoraussetzung. Den letzten Schritt können wir mit unserer Ungleichung $(*)$ direkt folgern, indem wir $\alpha := |x_n|$, $\beta := |y_n|$, $\gamma := \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1}|x_i|^2}$ und $\delta := \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1}|y_i|^2}$ setzen. □

[a] Wer denkt, die folgenden Umformungen fielen vom Himmel, kann versuchen, es von vorn nach hinten anzugehen. Dann ist es viel offensichtlicher.

1.2 Funktionentheorie ist *nicht* reelle Analysis in zwei Variablen

Wenn wir nun zur Analysis auf $\mathbb{C}$ übergehen, ist man leicht verleitet, den $\mathbb{R}-$Vektorraum-Isomorphismus $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ so zu interpretieren, dass Funktionentheorie doch eigentlich nichts anderes sei als Analysis im $\mathbb{R}^2$. Das ist aber ein fataler Fehler! Der Schlüssel liegt darin, dass auf $\mathbb{C}$ eine andere Struktur, die Multiplikation mit komplexen Zahlen, definiert ist, die über die Vektorraumstruktur des $\mathbb{R}^2$ hinausgeht.
In der reellen Analysis war die Erkenntnis, dass sich differenzierbare Funktionen durch ihr Differential annähern lassen, fundamental. Ist $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine beliebige, reell-differenzierbare Funktion, so ist ihr Differential am Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ eine reell-lineare Abbildung

$$\begin{aligned} df_p : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ x &\mapsto df_p(x). \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

Mit der Wahl einer Basis des $\mathbb{R}^2$ lässt sich das Differential als Matrix

$$Df_p := \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}\right|_p \tag{1.2.2}$$

darstellen, genannt *Funktionalmatrix*. Dies ist also einfach eine Matrix der Form $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ mit vier reellen Einträgen.
Wie sieht das im Komplexen aus? Ist ein komplex-lineares Differential auch einfach eine beliebige 2×2-Matrix mit reellen Einträgen? Fangen wir mal mit der komplexen Linearität an:

Definition 1.2.1. Komplex-Lineare Abbildung

Eine Abbildung $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt **komplex-linear**, falls für alle $z_1, z_2, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ gilt:

$$A(\lambda z_1 + \mu z_2) = \lambda A(z_1) + \mu A(z_2). \tag{1.2.3}$$

Wir fordern für eine Funktion $f : \mathbb{C} \to C$ nun, dass das Differential $df_p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nicht bloß linear, sondern komplex-linear ist. Bereits erwähnt habe ich, dass Addition nichts Neues ist. Diese funktioniert auf $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{C}$ völlig analog, nämlich komponentenweise. Neu ist hingegen die Multiplikation mit einer komplexen Zahl, aber was bedeutet das für die darstellende Matrix für das Differential? Wenn wir nur Multiplikation mit komplexen Zahlen betrachten wollen und uns nicht für Addition interessieren, liegt es nahe, erst einmal nur $\mathbb{C}$ mit Multiplikation zu betrachten. Wir gehen es noch langsamer an und schauen, was passiert, wenn wir nur komplexe Zahlen mit Radius $r = 1$ zulassen, also die Einheitskreislinie $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}$ anschauen. Praktischerweise ist $(\mathbb{S}^1, \cdot)$ eine Gruppe, die einer uns bekannten Gruppe sehr ähnlich sieht. Sind $z_1 = \exp(i\phi_1)$ und $z_2 = \exp(i\phi_2)$ zwei komplexe, normierte Zahlen, so ist ihr Produkt gegeben durch

$$z_1 z_2 = \exp(i(\phi_1+\phi_2)). \tag{1.2.4}$$

Dass sich die Winkel addieren, ist der entscheidende Hinweis für den gesuchten Isomorphismus:

Satz 1.2.2. Multiplikation ist Rotation

Es existiert ein Gruppen-Isomorphismus $(\mathbb{S}^1, \cdot) \cong \mathrm{SO}(2)$ zwischen dem Einheitskreis

$$\mathbb{S}^1 := \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{C} \tag{1.2.5}$$

mit komplexer Multiplikation und der speziellen orthogonalen Matrizengruppe.

Beweis. Aus MfP2 wissen wir, dass sich SO(2)-Matrizen parametrisieren lassen als

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} =: R(\phi) \tag{1.2.6}$$

mit $\phi \in (-\pi, \pi]$. Darauf aufbauend ist der Isomorphismus mit der Polarform schnell konstruiert: Wir behaupten, dass

$$\begin{aligned} \psi : (\mathbb{S}^1, \cdot) &\to \mathrm{SO}(2) \\ \exp(i\phi) &\mapsto \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.2.7}$$

passt. Dabei haben wir den Einheitskreis in der komplexen Ebene mit komplexen Zahlen des Radius $r = 1$ identifiziert. Also fehlen nur noch die Eigenschaften:

(I1) Gruppenhomomorphismus: Seien $\exp(i\phi_1), \exp(i\phi_2) \in \mathbb{S}^1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \psi(\exp(i\phi_1)) \cdot \psi(\exp(i\phi_2)) &= \begin{pmatrix} \cos\phi_1 & -\sin\phi_1 \\ \sin\phi_1 & \cos\phi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi_2 & -\sin\phi_2 \\ \sin\phi_2 & \cos\phi_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\phi_1\cos\phi_2 - \sin\phi_1\sin\phi_2 & -(\sin\phi_2\cos\phi_1 + \sin\phi_1\cos\phi_2) \\ \sin\phi_1\cos\phi_2 + \sin\phi_2\cos\phi_1 & -\sin\phi_1\sin\phi_2 + \cos\phi_1\cos\phi_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\phi_1+\phi_2) & -\sin(\phi_1+\phi_2) \\ \sin(\phi_1+\phi_2) & \cos(\phi_1+\phi_2) \end{pmatrix} = \psi(\exp(i\phi_1 + \phi_2)) \\ &= \psi(\exp(i\phi_1)\exp(i\phi_2)). \end{aligned}$$

Benutzt haben wir dabei lediglich die beiden gängigen Additionstheoreme.

(I2) Bijektiv: Das ist tatsächlich trivial, man kann die Inverse von ψ Dank der Parametrisierung von SO(2) direkt ablesen.

□

Das ist doch mal ein Ergebnis. Jetzt wissen wir, dass Multiplikation mit komplexen Einheiten äquivalent zu Rotationen in der Ebene sind. Aber was passiert, wenn man beliebige komplexe Zahlen und nicht nur normierte zulässt? Das Verhalten kennen wir schon aus der linearen Algebra: Multiplikation mit einem reellen Skalar bewirkt eine Streckung oder Stauchung. Komplex-lineare Abbildungen werden also von Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} r\cos\phi & -r\sin\phi \\ r\sin\phi & r\cos\phi \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \tag{1.2.8}$$

repräsentiert. Dies ist auf $\mathbb{C}$ gerade die Multiplikation mit der komplexen Zahl $z = \alpha + i\beta \neq 0$ und eine starke Einschränkung gegenüber dem reellen Fall! Betrachten wir z.B. die Multiplikation mit $z = i \in \mathbb{C}$, dann entspricht dies der linearen Abbildung

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.2.9}$$

also der Drehung um 90° gegen den Uhrzeigersinn.

Eine komplex-differenzierbare Funktion muss also nicht bloß lokal wie eine reell-lineare Abbildung, sondern sogar wie eine Drehskalierung aussehen. Diese reichere Struktur wird viele, sehr schöne Phänomene in der Funktionentheorie zur Folge haben.

Da wir nun so weit sind, bietet sich noch ein Vergleich der Funktionalmatrix mit der neuen Differentialmatrix an: Fassen wir $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ auf als $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) = f_1(x, y) + if_2(x, y)$ und vergleichen, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \beta &= \frac{\partial f_2}{\partial x} = -\frac{\partial f_1}{\partial y}. \end{aligned}$$

Überraschung (oder auch nicht), das sind die **Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen**. Diese entsprechen also der Anforderung, dass unsere Funktion komplex-differenzierbar ist.