Topologie (Bachelor)

zur Vorlesung von Prof. Dr. Birgit Richter

18. Oktober 2024

Inhaltsverzeichnis

Konventionen

- TBD

Dies ist ein inoffizielles Skript zur Vorlesung Topologie bei Prof. Dr. Birgit Richter im Wintersemester 24/25. Fehler und Verbesserungsvorschläge immer gerne an rasmus.raschke@uni-hamburg.de.

1 Mengentheoretische Topologie

1.1 Metrische Räume

Definition 1.1.1. Metrischer Raum

Ein **metrischer Raum** ist ein Paar (X, d), bestehend aus einer Menge X und einer Abstandsfunktion

$$d : X \times X \to \mathbb{R}, \tag{1.1.1}$$

genannt **Metrik**, die die folgenden Axiome erfüllt:

(M1) *Positivität*: $\forall x, y \in X : d(x, y) > 0$

(M2) *Symmetrie*: $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$

(M3) *Dreiecksungleichung*: $\forall x, y, z \in X : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Beispiele.

1. Im $\mathbb{R}^n$ ist die **Standardmetrik** oder **euklidische Metrik** für $x, y \in \mathbb{R}$ gegeben durch
$$d_2(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}. \tag{1.1.2}$$
2. Auf $(\mathbb{R}^n, d_n)$ ist eine Metrik durch
$$d_n(x, y) := \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \tag{1.1.3}$$
gegeben.
3. Die **Maximumsnorm** $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ ist gegeben durch
$$d_\infty(x, y) = \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} |x_i - y_i|. \tag{1.1.4}$$
4. Eine weitere Metrik auf $\mathbb{R}^n$ ist gegeben durch
$$d_{\sqrt{\cdot}}(x, y) = \sqrt{d_2(x, y)}. \tag{1.1.5}$$
Diese Metrik kommt nicht von einer Norm.
5. Die **diskrete Metrik** auf einer beliebigen Menge X ist gegeben durch
$$d(x, y) := \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}. \tag{1.1.6}$$
6. Auf $X = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ ist für $f, g \in X$ durch das Integral eine Metrik
$$d(f, g) := \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx \tag{1.1.7}$$
definiert.

Bemerkungen.

1. Wenn (X, d) ein metrischer Raum ist, so ist $Y \subseteq X$ als $(Y, d|_{Y \times Y})$ auch ein metrischer Raum.
2. Wenn (X_1, d_1) und (X_2, d_2) metrische Räume sind, so ist $(X_1 \times X_2, d_1 \times d_2)$ wieder ein metrischer Raum.
3. Vorsicht: Für eine Familie $(X_i, d_i)_{i \in I}$ ist der Sachverhalt komplizierter.

Definition 1.1.2. ϵ-Ball

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $x \in X$ und $\epsilon > 0$. Dann ist der **ϵ-Ball** mit x im Zentrum definiert als

$$B_\epsilon(x) := \{y \in X \,|\, d(x, y) < \epsilon\}. \tag{1.1.8}$$

Definition 1.1.3. Umgebung

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Menge $U \subseteq X$ heißt **Umgebung** von $x \in X$, falls ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(x) \subseteq U$ existiert.

Definition 1.1.4. Offen und Abgeschlossen

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $O \subseteq X$ heißt **offen**, falls für alle $x \in O$ ein $\epsilon > 0$ existiert, sodass $B_\epsilon(x) \subseteq O$ gilt. O ist also eine Umgebung all seiner Elemente.
Eine Menge $A \subseteq X$ heißt **abgeschlossen**, falls $X \backslash A$ offen ist.

Bemerkungen.

1. Sei $\epsilon > 0$ und (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist $B_\epsilon(x) \subseteq X$ offen und eine Umgebung von x.
2. ÜA: Sei (X, d) ein metrischer Raum und $x \in X$. Dann ist $\{x\}$ abgeschlossen.

Satz 1.1.5. Umgebungseigenschaften metrischer Räume

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gilt:

(U1) Jede Umgebung von $x \in X$ enthält x und X ist eine Umgebung von x.

(U2) Ist $U \subseteq X$ eine Umgebung von X und $U \subseteq V \subseteq X$, so ist V auch eine Umgebung von x.

(U3) Wenn U_1 und U_2 Umgebungen von x sind, so auch $U_1 \cap U_2$.

(U4) Ist $U \subseteq X$ eine Umgebung von x, so existiert eine weitere Teilmenge $V \subseteq X$, sodass U eine Umgebung von allen $y \in V$ ist.

Beweis.

1. Trivial.
2. Trivial.
3. Nach Voraussetzung existiert für $x \in U_1 \cap U_2$ ein $\epsilon_1 > 0$, sodass $B_{\epsilon_1}(x) \subseteq U_1$ und ein $\epsilon_2 > 0$, sodass $B_{\epsilon_2}(x) \subseteq U_2$. Definiere $\epsilon := \min(\epsilon_1, \epsilon_2)$. Dann gilt $B_\epsilon(X) \subseteq U_1$ und $B_\epsilon(x) \subseteq U_2$, also $B_\epsilon(x) \subseteq U_1 \cap U_2$.
4. Nach Voraussetzung existiert ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(x) \subseteq U$. Dann ist die Behauptung durch $V := B_\epsilon(x)$ erfüllt.

$\square$

Satz 1.1.6. Eigenschaften offener Mengen

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gilt:

1. $\emptyset$ und X sind offen.
2. Sind $O_1, O_2 \subseteq X$ offen, so auch $O_1 \cap O_2$.
3. Ist $(O_i)_{i \in I}$ eine Familie offener Teilmengen $O_i \subseteq X$, so ist $\cup_i O_i$ auch offen.

Beweis.

1. Trivial.
2. Mit $\min(\epsilon_1, \epsilon_2)$ analog zum obigen Beweis.
3. Sei $x \in \cup_i O_i$. Dann existiert ein $i \in I$ mit $x \in O_i$, sodass ein $\epsilon > 0$ existiert mit $B_\epsilon(x) \subseteq O_i \subseteq \cup_i O_i$.

$\square$

Satz 1.1.7. Eigenschaften abgeschlossener Mengen

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gilt:

(A1) $\emptyset$ und X sind abgeschlossen.

(A2) Wenn $A_1, A_2 \subseteq X$ abgeschlossene Teilmengen sind, so ist auch $A_1 \cup A_2$ abgeschlossen.

(A3) Seien $(A_i)_{i \in I}$ abgeschlossene Teilmengen von X. Dann ist $\cup_i A_i$ wieder abgeschlossen.

Beweis.

1. Da $\emptyset = X \backslash X$ und $X = X \backslash \emptyset$ gilt, sind X und $\emptyset$ gemäß Satz 1.1.6 offen.
2. Sei $A_1 = X \backslash O_1$ und $A_2 = X \backslash O_2$ mit $O_1, O_2 \subseteq X$ offen. Gemäß Satz 1.1.6 (2.) folgt
$$X \backslash (A_1 \cup A_2) = (X \backslash A_1) \cap (X \backslash A_2) = O_1 \cap O_2, \tag{1.1.9}$$
wobei $O_1 \cap O_2$ wieder offen ist.
3. Wir betrachten offene Teilmengen $O_i := X \backslash A_i$. Gemäß Satz 1.1.6 ist
$$X \backslash \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} X \backslash A_i = \bigcup_{i \in I} O_i \tag{1.1.10}$$
offen.

$\square$

Definition 1.1.8. stetige Abbildung

Seien (X, d) und (Y, d') metrische Räume und $f : X \to Y$. Dann heißt f **stetig in** $x_0 \in X$, wenn für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass
$$d(x_0, x) < \delta \Rightarrow d'(f(x_0), f(x)) < \epsilon \tag{1.1.11}$$
gilt. f heißt **stetig**, falls dies für alle $x_0 \in X$ erfüllt ist.

Satz 1.1.9. Äquivalente Formulierung der Stetigkeit

Seien (X, d) und (Y, d') metrische Räume und $f : X \to Y$. Dann sind äquivalent:

1. f ist stetig.
2. V ist Umgebung von $f(x) \Rightarrow f^{-1}(V)$ ist eine Umgebung von x.
3. $O \in Y$ ist offen $\Rightarrow f^{-1}(O)$ ist offen in X.

4. $A \in Y$ ist abgeschlossen $\Rightarrow f^{-1}(A)$ ist abgeschlossen in X.

Beweis. (1. $\Rightarrow$ 2.): Sei V eine Umgebung von $f(x)$. Per Definition existiert ein $\epsilon > 0$, sodass $f(x) \in B_\epsilon(f(x)) \subseteq V$ gilt. Gemäß Annahme existiert ein $\delta > 0$ mit $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\epsilon(f(x))$. Daraus folgt, dass

$$B_\delta(x) \subseteq f^{-1}f(B_\delta(x)) \subseteq f^{-1}(B_\epsilon(f(x))) \subseteq f^{-1}(V). \tag{1.1.12}$$

Also ist $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x.
(2. $\Rightarrow$ 3.): O ist Umgebung all seiner Elemente.
(3. $\Rightarrow$ 4.): $Y \backslash A$ ist offen in Y, d.h. $f^{-1}(Y\backslash A) = f^{-1}(Y)\backslash f^{-1}(A) = X\backslash f^{-1}(A)$ ist offen in X. Also ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen.
(4. $\Rightarrow$ 1.): $Y\backslash B_\epsilon(f(x))$ ist abgeschlossen impliziert, dass $f^{-1}(Y\backslash B_\epsilon(f(x)))$ auch abgeschlossen ist. Damit folgt, dass $X\backslash f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$ abgeschlossen und damit $f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$ offen ist. Für $x \in f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$ existiert ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$, also auch $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\epsilon(f(x))$. □

Definition 1.1.10. Äquivalenz von Metriken

Seien d_1 und d_2 Metriken auf einer Menge X.

1. Gibt es $\alpha, \beta > 0$ mit
$$\alpha d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq \beta d_1(x,y) \tag{1.1.13}$$
für alle $x, y \in X$, so heißen d_1 und d_2 **stark äquivalent**.
2. d_1 und d_2 heißen **äquivalent**, falls es für jedes $x \in X$ und alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass
   (i) $d_1(x,y) < \delta \Rightarrow d_2(x,y) < \epsilon$
   (ii) $d_2(x,y) < \delta \Rightarrow d_1(x,y) < \epsilon$
   gilt.

Bemerkungen. 1. Genau dann, wenn d_1 und d_2 äquivalente Metriken sind, sind $\mathrm{id}_X : (X, d_1) \to (X, d_2)$ und $id_X : (X, d_2) \to (X, d_1)$ stetig.
2. d_1 und d_2 stark äquivalent impliziert, dass id_X gleichmäßig stetig ist.
3. Äquivalente Metriken ergeben die gleichen offenen (und abgeschlossenen) Mengen.

Beispiele. 1. Die d_1-, d_2- und d_∞-Metrik auf dem $\mathbb{R}^n$ sind stark äquivalent.
2. Sei $d_0(x,y) = |x^3 - y^3|$ und $d_2(x,y)$ die euklidische Metrik. Die Identität $\mathrm{id}_\mathbb{R}(\mathbb{R}, d_2) \to (\mathbb{R}, d_0)$ ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig.
3. Sei X eine beliebige Menge mit einer beliebigen Metrik d. Dann ist d äquivalent zu
$$d'(x,y) := \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)} < 1 \tag{1.1.14}$$
für alle $x, y \in X$. Also ist *jede Metrik äquivalent zu einer beschränkten Metrik.*

1.2 Topologische Räume

Der Begriff des topologischen Raums wird durch Abstraktion der Eigenschaften offener Mengen und stetiger Abbildungen in metrischen Räumen konstruiert.

Definition 1.2.1. Topologischer Raum

Ein **topologischer Raum** ist ein Paar $(X, \mathcal{T})$, bestehend aus einer Menge X und einer Familie $\mathcal{T}$ von Teilmengen von X, sodass folgende Axiome erfüllt sind:
(O1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
(O2) $O_1, O_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$
(O3) Für eine Familie $(O_i)_{i\in I}$ mit $O_i \in \mathcal{T}$ für alle $i \in I$ folgt $\cup_{i\in I} O_i \in \mathcal{T}$.
$\mathcal{T}$ heißt **Topologie** auf X und alle $O \in \mathcal{T}$ heißen **offene Mengen**.

Bemerkung. Äquivalent dazu ist: Eine Topologie $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ist abgeschlossen unter endlichen Schnitten und beliebigen Vereinigungen.

Beispiele. 1. Metrische Räume (X, d) sind auch topologische Räume mit offenen Mengen gegeben durch d.
2. Auf einer beliebigen Menge X kann die **diskrete Topologie** $\mathcal{T} := \mathcal{P}(X)$ definiert werden, in der alle Teilmengen von X offen sind.
3. Auch kann auf beliebigem X die **indiskrete Topologie** oder **Klumpentopologie** durch $\mathcal{T} := \{\emptyset, X\}$ definiert werden.
4. Auf beliebigem X existiert die **koendliche Topologie**: $O \subseteq X$ ist offen genau dann, wenn $X\backslash O$ endlich ist

oder $O = \emptyset$ gilt.

Definition 1.2.2. Topologische Grundbegriffe

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

1. $A \subseteq X$ heißt **abgeschlossen**, falls $X \backslash A \in \mathcal{T}$.
2. Sei $x \in U \subseteq X$. Dann heißt U **Umgebung von** x, falls ein $O \in \mathcal{T}$ existiert, sodass $x \in O \subseteq U$ gilt.
3. Die Menge aller Umgebungen von X wird mit $\mathfrak{U}(x)$ bezeichnet und heißt **Umgebungssystem von** x.
4. Ein Punkt $x \in X$ heißt **Berührpunkt** von $B \subseteq X$, falls für alle $U \subseteq \mathfrak{U}(x)$ gilt: $U \cap B \neq \emptyset$.
5. Die **abgeschlossene Hülle** von $B \subseteq X$ ist definiert als
$$\overline{B} := \bigcap_{B \subseteq X, C \text{ abg.}} C. \tag{1.2.1}$$
6. Ein Punkt $x \in X$ heißt **innerer Punkt** von $B \subseteq X$, falls es ein $U \in \mathfrak{U}(x)$ gibt, sodass $x \in U \subseteq B$ gilt.
7. Für $B \subseteq X$ ist
$$\mathring{B} := \bigcup_{O \subseteq B, O \text{ offen}} \tag{1.2.2}$$
der **offene Kern** von B.
8. Der **Rand von** $A \subseteq X$ ist definiert als
$$\partial A := \{x \in X | \forall U \in \mathfrak{U}(x) : U \cap A \neq \emptyset \neq U \cap (X \backslash A)\}. \tag{1.2.3}$$

Satz 1.2.3. Eigenschaften bestimmter Mengen

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein top. Raum. Dann gilt:

1. Die abgeschlossenen Mengen von X erfüllen (A1)-(A3).
2. Die Umgebungen erfüllen (U1)-(U4).

Bemerkung. Eine Topologie kann äquivalent durch die Auflistung abgeschlossener Mengen definiert werden, wenn diese (A1)-(A3) erfüllen.

Definition 1.2.4. Stetigkeit in top. Räumen

Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{T}')$ top. Räume und $f : X \to Y$.

(i) f heißt **stetig in** $x \in X$, wenn für alle $U \in \mathfrak{U}(f(x))$ auch $f^{-1}(U) \in \mathfrak{U}(x)$ gilt.

(ii) f heißt **stetig**, falls für alle $O \in \mathcal{T}'$ gilt, dass $f^{-1} \in \mathcal{T}$.

Satz 1.2.5. Eigenschaften von Abschluss und Innerem

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein top. Raum mit $A \in \mathcal{T}$. Dann gilt

1. (a) $\overline{A}$ ist abgeschlossen und $A \subseteq \overline{A}$.
   (b) $A = \overline{A}$ gilt genau dann, wenn A abgeschlossen ist.
   (c) $\overline{A}$ besteht aus der Menge der Berührpunkte von A.
2. (a) $\mathring{B}$ ist offen und $\mathring{B} \subseteq B$.
   (b) $B = \mathring{B}$ genau dann, wenn B offen ist.
   (c) $\mathring{B}$ besteht aus der Menge der inneren Punkte von B.

Beweis. (a) und (b) sind jeweils trivial. Wir beweisen 1(a). Angenommen, $x \in \overline{A}$ aber ist kein Berührpunkt von A. Dann existiert ein $U \in \mathfrak{U}(x)$, sodass $U \cap A = \emptyset$ gilt. Daraus folgt, dass $A \subseteq X \backslash U$ gilt, woraus $A \subseteq X \backslash O$ abgeschlossen folgt. Weiterhin existiert ein $O \in \mathcal{T}$ mit $x \in O \subseteq U$, also $X \backslash U \subseteq X \backslash O$. Dann ist aber $\overline{A} \subseteq X \backslash O$, also $x \notin \overline{A}$.
Jetzt nehmen an, dass x Berührpunkt ist, aber $x \notin \overline{A}$. Also folgt aus $x \in X \backslash \overline{A}$ offen, dass $V := X \backslash \overline{A} \in \mathfrak{U}(x)$, aber $V \cap A = \emptyset$, also ist x kein Berührpunkt im Widerspruch zur Annahme. □

Bemerkung. Folgendes gilt allgemein:

- Ist $A \subseteq B$, so auch $\mathring{A} \subseteq \mathring{B}$ und $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $\mathring{\overline{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$

Definition 1.2.6. Dichtheit

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein top. Raum. $A \subseteq X$ heißt **dicht**, falls $\overline{A} = X$. $A \subseteq X$ heißt hingegen **nirgends dicht**, falls $\mathring{\overline{A}} = \emptyset$.

Beispiele. 1. $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ ist dicht.
2. $(a, b) \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$, (a, b) nirgends dicht in $\mathbb{R}$.

2 Algebraische Topologie

2.1 ...