UNF Odense Matematikklub: Induktion

Opgaver

Opgave 1

Lad $P(n)$ være udtrykket

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

om naturlige tal n. Vi vil prøve at vise at $P(n)$ er sandt for alle $n \in \mathbb{N}$ ved induktion.

1. Hvad er udsagnet $P(1)$? Vis at udsagnet er sandt. Dette udgør basisskridtet i beviset.
2. Hvad er induktionshypotesen for induktionsbeviset?
3. Udfør induktionsskridtet for beviset.
4. Konkluder at $P(n)$ gælder for alle $n \in \mathbb{N}$ og forklar hvorfor.

Opgave 2

Lad $P(n)$ være udtrykket

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3},$$

hvor $n \in \mathbb{N}_0$. Vi vil vise at $P(n)$ er sandt for all $n \in \mathbb{N}_0$ ved induktion.

1. Hvad er udsagnet $P(1)$? Vis at udsagnet er sandt. Dette udgør basisskridtet i beviset.
2. Hvad er induktionshypotesen for induktionsbeviset?
3. Udfør induktionsskridtet for beviset.
4. Konkluder at $P(n)$ gælder for alle $n \in \mathbb{N}_0$ og forklar hvorfor.

Opgave 3

Find fejlen i følgende "bevis."

Sætning 0.1. *Lad $n \in \mathbb{N}$. Alle pingviner i en samling af n pingviner har altid samme højde.*

"Bevis". Vi viser sætningen ved induktion.

Induktionsbasis ($n = 1$): Trivielt.

Induktionshypotese: Lad $n \geq 1$ være et heltal, og antag at alle pingviner i enhver samling af n pingviner har samme højde.

Induktionsskridt: Antag at vi har en samling af $n+1$ pingviner. Kald pingvinerne $h_1, h_2, \ldots, h_{n+1}$. Samlingen

$$\{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$$

indeholder n pingviner, og derfor må alle pingviner i samlingen have samme højde. Ligeledes med samlingen

$$\{h_2, h_3, \ldots, h_{n+1}\}.$$

Der er et overlap mellem de to samlinger af pingviner, og altså må alle pingvinerne i vores samling af $n+1$ pingviner have samme højde.

$\square$

Opgave 4

For alle $n \in \mathbb{N}$ definerer vi $n!$ (udtales n fakultet) som tallet

$$1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n.$$

Bemærk at $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, etc. Brug induktion til at bevise at

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$$

For alle $n \in \mathbb{N}$.

Opgave 5

I følgende opgave er $n > 1$ et naturligt tal: Emil Stabil kan hverken fryses eller brændes, idet han samtidigt består af henholdsvis is og ild. Videnskabsmænd har beregnet at hvis bare du kan levere $2 - \frac{1}{n}$ J varmeenergi, så kan han dog alligevel måske brændes. Du ved at du maksimalt kan levere

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \text{ J}$$

varmeenergi til Emil Stabil med dit induktionskomfur.

Kan komfuret levere nok varmeenergi til Emil Stabil til at brænde ham? Bevis din konklusion ved induktion. (Hint: Han er Emil Stabil, og du kan derfor nok ikke brænde ham.)

Opgave 6

Find fejlen i følgende "bevis."

Sætning 0.2. *Lad $n \in \mathbb{N}$. Hvis $x, y \in \mathbb{N}$ og $\max(x, y) = n$, så er $x = y$.*

"Bevis". Vi beviser sætningen ved induktion.

Induktionsbasis ($n = 1$): Hvis $\max(x, y) = 1$ og $x, y \in \mathbb{N}$, så er $x = y = 1$, da 1 er det mindste naturlige tal og både x og y er mindre end eller lig 1.

Induktionshypotese: Lad $n \geq 1$, og antag at hvis $x, y \in \mathbb{N}$ er sådan at $\max(x, y) = n$, så er $x = y$.

Induktionsskridt: Lad $x, y \in \mathbb{N}$ sådan at $\max(x, y) = n + 1$. Så er $\max(x - 1, y - 1) = n$, sådan at $x - 1 = y - 1$. Altså er $x = y$, og induktionsskridtet er fuldført.

□

(Hint: Hvad sker der når $x = 1$?)

Opgave 7

1. Find på en formel for

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)},$$

ved at beregne udtrykket for små n og spotte et mønster

2. Bevis at din formel holder for alle $n \in \mathbb{N}$ ved induktion.

Opgave 8

Lav opgave 7, men find i stedet en formel for

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}.$$

Opgave 9

Vis at

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - \ldots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$$

for alle $n \in \mathbb{N}$.

Opgave 10

Lad $n > 1$ være et heltal. Brug induktion til at vise at hvis Emil Stabil kræver n^n J varmeenergitilførsel for at blive brændt, så kan du fortsat ikke brænde ham hvis du maksimalt kan levere $n!$ J.

Opgave 11

Lad $n > 6$ være et heltal. Videnskabsmændende har endelig fundet ud af at du helt sikkert kan fryse Emil Stabil hvis du kan frarøve ham 3^n J varmeenergi. Du ved at du kan snyde ham for $n!$ varmeenergi. Vis at du kan fryse Emil Stabil.