UNF Odense Matematikklub: Lineær algebra

Hjalte Vejbæk
hdv@unf.dk

Rasmus Hansen
rhh@unf.dk

Victor Heeks
syhe@unf.dk

1 Systemer af lineære ligninger

Du er sikkert stødt på 2 lineære ligninger i to ubekendte. Et eksempel er

$$\begin{aligned} 2x - y &= -3 \\ 4x - 2y &= -9 \end{aligned}$$

Vi ved hvordan man løser disse ligninger, hvis altså de har en løsning. Vi kan først isolere x i den første ligning:

$$\begin{aligned} 2x - y &= -3 \\ \Rightarrow 2x &= -3 - y \\ \Rightarrow x &= \frac{-3}{2} - \frac{y}{2}. \end{aligned}$$

Vi kan sætte dette udtryk for x ind i ligning 2 og isolere y.

$$\begin{aligned} 4\left(\frac{-3}{2} - \frac{y}{2}\right) - 2y &= -9 \\ \Rightarrow -6 - 2y - 2y &= -9 \\ \Rightarrow -4y &= -3 \\ \Rightarrow y &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Vi har fundet y. Vi kan nu indsætte y i den første ligning igen for at finde x.

$$\begin{aligned} 2x - \frac{3}{4} &= -3 \\ \Rightarrow 2x &= -\frac{9}{4} \\ \Rightarrow x &= -\frac{9}{8}. \end{aligned}$$

Denne proces er dog lidt nørklet. Desuden kan man overveje følgende:

> *Hvad nu hvis man havde 3 lineære ligninger i 3 ubekendte? Eller n ligninger i n ubekendte for $n \geq 3$?*

Godt nok kan man lave en lignende proces, men det bliver kun mere nørklet jo flere ligninger man tilføjer. Det er i denne slags situation at man som matematiker bør overveje

> *Findes der en nemmere og mere generel måde at løse denne slags ligninger på?*

Og, da matematikere er dovne, ønsker vi særligt en metode som kræver mindre tankevirksomhed. Heldigvis er svaret på vores spørgsmål et klart "ja!", og vi vil nu beskæftige os med en måde at gøre det på, kaldet *Gauß-(Jordan)-elimination.*

2 Matricer og Gauß-Jordan-elimination

Vi betragter igen vores ligningssystem

$$\begin{aligned} 2x - y &= -3 \\ 4x - 2y &= -9 \end{aligned}$$

I stedet for at skrive det op som ovenfor, kan vi skrive det op som en liste af tal på *matrixform:*

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} x & y & \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{ligning 1} \\ \text{ligning 2} \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 4 & -2 & -9 \end{pmatrix} \end{array}$$

Hver *række* i matricen repræsenterer en af ligningerne. Den første *søjle* af matricen repræsenterer koefficienterne foran x i ligninerne, mens den anden repræsenterer koefficienterne foran y. Den sidste søje repræsenterer konstantleddet i de to ligninger. Vi kunne også have skrevet matricen som

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -2 & 4 & -9 \end{pmatrix},$$

hvor vi altså har byttet om på x og y's plads: Ligningssystemet er stadig det samme; vi har bare byttet om på pladserne for variablerne. Så længe én bestemt kolonne altid svarer til *præcis ét* variabel, så er det en gyldig måde at skrive systemet op på. Dog er den sidste række *altid* den, som svarer til konstantleddene. Derfor skriver vi også nogle gange matricen som

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & -3 \\ -2 & 4 & -9 \end{array}\right)$$

Helt generelt definerer vi nu matricer

Definition 2.1. En *reel* $m \times n$ matrix, eller en matrix med m rækker og n søjler, er en liste af tal

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

hvor hvert a_{ij} ligger i $\mathbb{R}$. Mængden af alle $m \times n$-matricer skriver vi som $M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Hvis $n = m$ skriver vi dog $M_n(\mathbb{R}) := M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Vi har nu en generel måde at skrive n lineære ligninger i n variable op i en $n \times (n+1)$-matrix: Hvis vi har et system af ligninger

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n &= b_m \end{aligned}$$

får vi på naturlig vis en matrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} & b_n \end{array}\right).$$

Men hvad kan vi bruge det til?

Vi laver nu nogle generelle observationer om lineære ligningssystemer. Til det bruger vi igen vores modeleksempel

$$\begin{aligned} 2x - y &= -3 \\ 4x - 2y &= -9 \end{aligned}$$

Vi kan lægge -3 til på begge sider af ligning nr. 2, og få en ækvivalent ligning.

$$\begin{aligned} 4x - 2y - 3 &= -9 - 3 \\ \Leftrightarrow 4x - 2y + (-3) &= -12. \end{aligned}$$

Men vi kan bruge ligning 1 til at skrive -3 om

$$\begin{aligned} 4x - 2y + 2x - y &= -12 \\ \Leftrightarrow 6x - 3y &= -12. \end{aligned}$$

Vores oprindelige ligningssystem bliver altså nu til det ækvivalente ligningssystem

$$\begin{aligned} 2x - y &= -3 \\ 6x - 3y &= -12 \end{aligned}$$

Det giver os en generel regel:

> *i et lineært ligningssystem kan man lægge én ligning til en anden ligning og få et ækvivalent ligningssystem.*

Vi kan omsætte vores observation til matricen som svarer til ligningssystemet.

Reskalering

Bytte om

3 At regne med matricer

Plus, skalering og gange. Identitetsmatricen og invertible matricer