Университет ИТМО

Кафедра пивоварения

Элитное подразделение
Университета ИТМО

Конспект лекций по функциональному анализу

Додонова Николая Юрьевича

Санкт-Петербург 2к19

Оглавление

1 Понятия о функциональных пространствах. Некоторые понятия общей топологии 2

1.1 Общая топология 2

1.1.1 Определение топологического пространства 2

1.1.2 Предельный переход 3

1.1.3 Непрерывность отображения 3

1.1.4 Относительная топология 3

1.1.5 База топологии 3

1.1.6 Первая и вторая аксиомы топологии 4

2 Метрические пространства 5

3 Нормированные пространства 6

3.1 Нормированное пространство 6

3.2 Баноховое пространства 6

3.3 Теорема Риса 6

4 Евклидовые пространства 7

Глава 1

Понятия о функциональных пространствах. Некоторые понятия общей топологии

1.1 Общая топология

1.1.1 Определение топологического пространства

Пусть X — некоторое множество. Рассмотрим набор $\mathcal{T}$ его подмножеств, для которого:

1 $\varnothing, X \in \mathcal{T}$

2 Объединение любого семейства множеств, принадлежащих совокупности $\mathcal{T}$, также принадлежит совокупности $\mathcal{T}$

3 Пересечение любого конечного семейства множеств, принадлежащих совокупности $\mathcal{T}$, также принадлежит совокупности $\mathcal{T}$

В таком случае:

1 $\mathcal{T}$ есть топологическая структура или просто топология в множестве X;

2 множество X с выделенной топологической структурой $\mathcal{T}$ (т.е. пара $(X, \mathcal{T})$) называется топологическим пространством;

3 элементы множества X называются точками этого топологического пространства;

4 элементы множества $\mathcal{T}$ называются открытыми множествами пространства $(X, \mathcal{T})$.

Примеры топологий:
$\mathcal{T} = \{\varnothing, X\}$ - тривиальная топология.
$\mathcal{T} = 2^X$ - дискретная топология.
$F = \overline{G} = X \backslash G \in \mathcal{T}$ - замкнутое множество.
Для класса замкнутых множеств выполняются все три аксиомы топологии:

1 $\varnothing, X \in \mathcal{T}$

2 $\bigcup\limits_{j=1}^{p} G_i \in \mathcal{T}$

3 $\bigcap\limits_{\alpha \in A} G_\alpha \in \mathcal{T}$

Окрестность в топологическом пространстве
$\forall x \in X, O(x) = \{U \mid \exists G \in \mathcal{T} : x \in G \subset O(x)\}$
Предельная точка множества
Пусть $A \subset X, b \in X$ и в любой $O(b)$ содержится хотя бы одна точка из A. Тогда b - предельная точка множества A. Совокупность всех предельных точек A называется **замыканием** множества A и обозначается как $Cl\ A$.
Легко понять, что замыкание множества является пересечением всех замкнутых множеств, содержащих это множество, то есть
$Cl\ A = \bigcap\limits_{A \subset F} F$
Внутреняя точка множества A - точка, которая содержится в множестве A вместе с некоторой окрестностью.
Внутренностью множества, лежащего в топологическом пространстве, называется наибольшее по включению открытое множество, содержащееся в нем. Внутренность множества A обозначается символом $Int\ A$
Всякое подмножество топологического пространства обладает внутренностью. Ею является объединение всех открытых множеств, содержащихся в этом множестве. То есть
$Int\ A = \bigcup\limits_{G \subset A} G$, где $G \in \mathcal{T}$
Пример:
Возьмем $\mathbb{R}$ с канонической (стандартной) топологией $\mathcal{T}$. Пусть $A = [a, b] \cap \mathbb{Q}$. Тогда $Cl\ A = [a, b]$, а $Int\ A = \varnothing$
$Cl\ A \backslash Int\ A = Fr\ A$ - **граница** множества A.

1.1.2 Предельный переход

$\{x_n\} \in X, x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n <=> \forall O(x)\ \exists N : \forall n > \mathbb{N} => x_n \in O(x)$
Если x - предел последовательности точек из A, то эта точка - предельная точка множества A.
В общем случае операцию замыкания нельзя определить секвенциально, то есть на языке последовательностей.

1.1.3 Непрерывность отображения

$f \colon (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T})$
Говорят, что f непрерывна в $x_0 \in X$, если $\forall O(f(x_0))\ \exists O(x_0) : \forall x \in O(x_0) => f(x) \in O(f(x_0))$
Если f непрерывна в каждой точке A, то f непрерывна на A.
Легко проверить, что отображение непрерывно на X, когда прообраз открытого множества в X' открыт в X.

1.1.4 Относительная топология

$(X, \mathcal{T}),\ E \subset X,\ \mathcal{T}_E = \{G \cap E,\ G \in \mathcal{T}\}$
$\mathcal{T}_E$ - **относительная топология** в E.

1.1.5 База топологии

Часто топологическую структуру задают посредством описания некоторой ее части, достаточной для восстановления всей структуры. **Базой** топологии называется некоторый набор открытых множеств, такой, что всякое непустое открытое множество представимо в виде объединения множеств из этого набора. К примеру, всевозможные интервалы составляют базу топологии вещественной прямой.

Теорема 1: Пусть X - абстрактноое множество. σ - совокупность его подмножеств. σ является базой некоторой топологии тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

1 Для любой точки $x \in X$ найдется $B \in \sigma$ такое, что $x \in B$

2 $B_1, B_2 \in \sigma => \forall b \in B_1 \cap B_2 \ \exists B \in \sigma : \ b \in B \subset B_1 \cap B_2$

Эта топология строится из всевозможных объединений множеств из σ, то есть
$\mathcal{T} = \{G = \bigcup\limits_{\alpha,\beta \in A} B_\alpha, B_\beta \in \sigma\}$
Доказательство
Необходимость:
1) Всё множество-носитель X, будучи открытым множеством в $\mathcal{T}$, представимо в виде объединения некоторых множеств из базы.
Докажем выполнение условия 2): заметим, что любое множество из базы само открыто, а поэтому пересечение двух таких множеств снова открыто и должно быть представимо в виде объединения некоторых множеств из базы. Среди этих последних и найдётся то, которое содержит точку x.
Достаточность:
1) аксиома очевидно выполняется.
2) аксиома очевидно выполняется.
Докажем выполнение аксиомы 3): Пересечение двух открытых множеств открыто. Пусть $G_1 = \bigcup\limits_{\alpha} B_\alpha, \ G_2 = \bigcup\limits_{\beta} B_\beta$. Тогда $G_1 \cap G_2 = \bigcup\limits_{\alpha,\beta}(B_\alpha \cap B_\beta)$. Но из условия 2) следует, что каждое $B_\alpha \cap B_\beta$ содержится в $\mathcal{T}$, а тогда и $\bigcup\limits_{\alpha,\beta}(B_\alpha \cap B_\beta)$ содержится в $\mathcal{T}$. ч.т.д.

1.1.6 Первая и вторая аксиомы топологии

Если у любой точки топологического пространства есть счетная база ее отрестностей, то это пространство удовлетворяет **1-ой аксиоме счетности**.
Если у топологического пространства есть база топологии, состоящая из счетного чила множеств, то оно удовлетворяет **2-ой аксиоме счетности**.

Глава 2

Метрические пространства

Глава 3

Нормированные пространства

3.1 Нормированное пространство

3.2 Баноховое пространства

3.3 Теорема Риса

Глава 4

Евклидовые пространства