CORRECTION

L1 IEEEA, **2024-2025**
Université de Rouen

NOM	**Prénom**
Groupe de TD :	**Numéro :**

Note sur 20:

Contrôle continu - Seconde chance (v3)

UE Logique et structures algébriques
Vendredi 10 janvier 2025 - Documents, mobiles et calculatrices interdites

Exercice 1. Écrire la négation de chacune de ces propositions suivantes et indiquer en le justifiant si la proposition considérée est vraie ou fausse (cocher la bonne case).

(a) Proposition P : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $(n^2 \leq 9)$ ou $(n > 3)$ Vraie : ☐ Fausse : ☒

Proposition $\neg P$: $\exists n \in \mathbb{Z}$, $(n^2 > 9)$ et $(n \leq 3)$

$\neg P$ est vraie : pour $n = -4$
On a $(n^2 = 16 > 9)$ vraie et $n = -4 \leq 3$ vraie.
donc P est fausse.

(b) Proposition Q : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R}$ $(x > y)$ et $(x^2 + y^2 < 1)$ Vraie : ☐ Fausse : ☒

Proposition $\neg P$: $\exists x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $(x \leq y)$ ou $(x^2+y^2 \geq 1)$

$\neg P$ est vraie. On pose $x = 2$.
alors, pour $y \in \mathbb{R}$, $x^2+y^2 \geq x^2 = 4 \geq 1$ donc
$(x^2+y^2 \geq 1)$ est vraie donc $\neg P$ est vraie.

Exercice 2. On considère des propositions P et Q de valeurs de vérité quelconques.

P	Q	P ou Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

P	$\neg P$	Q	$\neg P$ ou Q
V	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	V	F	V

P	Q	$(P$ ou $Q)$ et $(\neg P$ ou $Q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	F

(a) Compléter les tables de vérité ci-dessus.
(b) Que peut-on en déduire concernant la proposition $((P$ ou $Q)$ et $(\neg P$ ou $Q))$?

Sa table de vérité est la même que celle de Q
donc $((P \text{ ou } Q) \text{ et } (\neg P \text{ ou } Q)) \iff Q$

Exercice 3. On considère les fonctions réelles : $f(x) = x^2 + 2$ et $g(x) = 2\,x + 1$.
Déterminer explicitement : $(f \circ g)(x)$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x+1) = (2x+1)^2 + 2$

$(= 4x^2 + 4x + 3)$

Exercice 4. On considère les nombres complexes $z = 4 + 3\,\mathrm{i}$ et $z' = 1 - 2\,\mathrm{i}$.
Déterminer explicitement :

$z + z' = (4+3i) + (1-2i) = 5 + i$

$\overline{z'} = 1 + 2i$

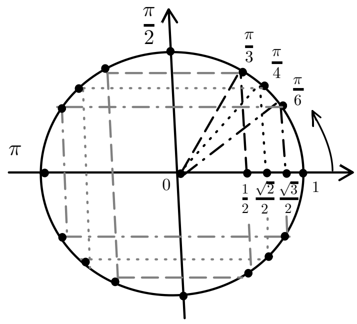
$\dfrac{z}{z'} = \dfrac{4+3i}{1-2i} = \dfrac{(4+3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \dfrac{4+8i+3i-6}{1+4}$

$= \dfrac{-2+11i}{5} = \dfrac{-2}{5} + \dfrac{11}{5}$

Exercice 5. Soit $z = \sqrt{3} - 3\,\mathrm{i}$.

a) Calculer : $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-3)^2} = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$\dfrac{z}{|z|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} - i\,\dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2} - i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



b) Donner la forme exponentielle complexe de z.

$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ donc $\theta = -\dfrac{\pi}{3}$

donc $z = 2\sqrt{3}\, e^{-i\frac{\pi}{3}}$

Exercice 6. On considère la suite de nombre complexes définie par récurrence :

$$u_0 = 1 + 2\mathrm{i} \quad \text{et pour} \quad n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = (1+\mathrm{i})\,u_n + 2.$$

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n = (1+\mathrm{i})^n + 2\mathrm{i}$. (P_n)

Initialisation : $n = 0$ $u_0 = (1+i)^0 + 2i = 1 + 2i$ (P_0 vraie)

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que P_n est vraie :
$u_n = (1+i)^n + 2i$

$u_{n+1} = (1+i)\,u_n + 2 = (1+i)\left((1+i)^n + 2i\right) + 2$
$= (1+i)^{n+1} + (1+i)(2i) + 2 = (1+i)^{n+1} + (2i-2) + 2$
$= (1+i)^{n+1} + 2i$ Donc (P_{n+1}) est vraie.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (1+i)^n + 2i$

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \to]0,2]$, $\quad x \mapsto \frac{2}{x^2+1}$.

a) Montrer que la fonction f est surjective. Soit $y \in]0,2]$, et $x \in \mathbb{R}$.

$y = f(x) \iff y = \frac{2}{x^2+1} \iff x^2+1 = \frac{2}{y} \iff x^2 = \frac{2}{y} - 1$

comme $0 < y \leq 2$, on a $1 \leq \frac{2}{y}$ donc $\frac{2}{y} - 1 \geq 0$.

On pose $x = \sqrt{\frac{2}{y}-1}$. Alors $x \in \mathbb{R}$ et $x^2 = \frac{2}{y} - 1$

et donc $f(x) = y$. Donc f est surjective.

b) Soit $B =]0,1]$. Déterminer, en le justifiant, l'ensemble $f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, f(x) \in B\}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B \iff \frac{2}{x^2+1} \in]0,1]$

$\iff \frac{2}{x^2+1} \leq 1 \iff 2 \leq x^2+1$

$\iff x^2 \geq 1 \iff (x \geq 1)$ ou $(x \leq -1)$

$f^{-1}(B) =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

Exercice 8. On va montrer la relation définie sur $\mathbb{R}^2$ ci-dessous est une relation d'ordre :

$$(x,y) \prec (x',y') \iff (x \leq x' \text{ et } x+y \leq x'+y').$$

(a) Montrer que $\prec$ est réflexive : Soient $(x,y), (x',y'), (x'',y'') \in \mathbb{R}^2$:

On a $x \leq x$ et $x+y \leq x+y$ donc $(x,y) \prec (x,y)$

(b) Montrer que $\prec$ est anti-symétrique : On suppose que :

$(x,y) \prec (x',y')$ donc $x \leq x'$ et $x+y \leq x'+y'$

$(x',y') \prec (x,y)$ donc $x' \leq x$ et $x'+y' \leq x+y$

$x \leq x'$ et $x' \leq x$ donc $x = x'$. donc $x+y \leq x+y'$ et $x+y' \leq x+y$

donc $y \leq y'$ et $y' \leq y$ donc $y = y'$.

(c) Montrer que $\prec$ est transitive :

On suppose que $(x,y) \prec (x',y')$ et $(x',y') \prec (x'',y'')$

Donc $x \leq x'$ et $x' \leq x''$ donc $x \leq x''$

$x+y \leq x'+y'$ et $x'+y' \leq x''+y''$ donc $x+y \leq x''+y''$

Donc $(x,y) \prec (x'',y'')$

(d) Est ce que $\prec$ est une relation d'ordre total ? Justifier votre réponse.

on n'a pas $(1,3) \prec (2,1)$ car $1+3 \leq 2+1$ est Faux

$(2,1) \prec (1,3)$ car $2 \leq 1$ est Faux

L'ordre n'est pas total.

Exercice 9. Pour $x, y \in I =]0, \infty[$ on note : $\quad f(x,y) = x * y = \dfrac{x\,y}{x+y}$.

(a) Montrer que l'application $f : I \times I \mapsto I$ est bien définie. Est-ce que $*$ définit une loi de composition interne sur I?

Pour $x, y \in]0, +\infty[$, $x > 0$, $y > 0$ donc $x + y > 0$, $xy > 0$ donc $x * y$ est bien défini et $x * y \in]0, +\infty[$. $*$ est bien une L.C.I.

(b) Est ce que la loi $*$ est commutative?

$$x * y = \frac{xy}{x+y} = \frac{yx}{y+x} = y * y$$

donc $*$ est commutative.

(c) Calculer explicitement en simplifiant pour $x, y, z \in I$:

$$A = (x * y) * z = \left(\frac{xy}{x+y}\right) * z = \frac{\left(\frac{xy}{x+y}\right) \times z}{\left(\frac{xy}{x+y}\right) + z} = \frac{\left(\frac{xy}{x+y}\right) \times z \times (x+y)}{\left(\left(\frac{xy}{x+y}\right) + z\right) \times (x+y)}$$

$$= \frac{xyz}{xy + zx + zy}$$

$$B = x * (y * z) = x * \left(\frac{yz}{y+z}\right) = \frac{x \times \left(\frac{yz}{y+z}\right)}{x + \left(\frac{yz}{y+z}\right)} = \frac{x \times \left(\frac{yz}{y+z}\right) \times (y+z)}{\left(x + \left(\frac{yz}{y+z}\right)\right) \times (y+z)}$$

$$= \frac{xyz}{xy + xz + yz}$$

Est-ce que la loi $*$ est associative? oui car $A = B$

(d) Est-ce que la loi $*$ admet une élément neutre? Justifier votre réponse.

On suppose par l'absurde que $e \in]0, +\infty[$ est élément neutre. alors $e * e = e$ donc $\dfrac{e \times e}{e + e} = e$

donc $\dfrac{e^2}{2e} = e$ donc $\dfrac{1}{2} = 1$. Impossible. $*$ n'a pas d'élément neutre.

(e) Soit $x \in]0, +\infty[$. On pose $x_1 = x$ et on définit par récurrence $x_{n+1} = x_n * x$. Montrer par récurrence que pour $n \geq 1$ on a $x_n = \frac{x}{n}$. (P_n)

Initialisation. $x_1 = x$ donc $x = \dfrac{x}{1}$ donc (P_1) vrais.

Hérédité. Soit $n \geq 1$. On suppose que $x_n = \dfrac{x}{n}$

Alors $x_{n+1} = x_n * x = \dfrac{x_n \times x}{x_n + x} = \dfrac{\left(\frac{x}{n}\right) \times x}{\left(\frac{x}{n}\right) + x}$

$$x_{n+1} = \frac{\left(\frac{x}{n}\right) \times x \times n}{\left(\left(\frac{x}{n}\right) + x\right) \times n} = \frac{x^2}{x + nx} = \frac{x}{n+1}$$ donc (P_{n+1}) vraie.

Conclusion : $\forall\, n \geq 1$, $x_n = \dfrac{x}{n}$