

**Fiche n° 6 - Composition de fonctions
Images directes et réciproques v2023-10-24**

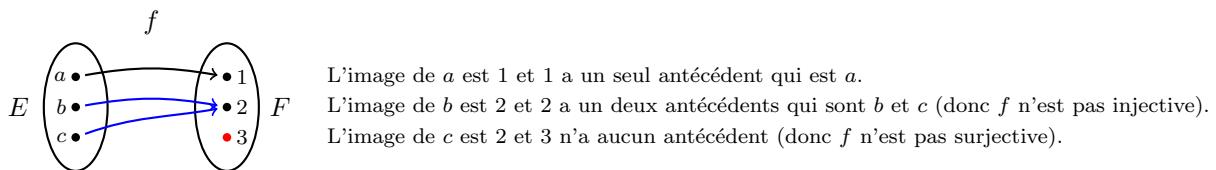
- Soient E, F, G des ensembles, et $f : E \mapsto F$ et $g : F \mapsto G$ des applications.

La composée de f par g est l'application notée $g \circ f : E \mapsto G$ définie par : $\forall x \in E, (g \circ f)(x) = g(f(x))$

- Si $f : E \mapsto F$ est une bijection, la *réciproque* de f est la bijection $f^{-1} : F \mapsto E$ définie par : $\forall (x, y) \in E \times F, (f^{-1}(y) = x) \iff (y = f(x))$

- Pour $x \in E$, l'élément $f(x) \in F$ est l'*image* de x (l'image de x existe toujours et elle est toujours unique).

Pour $y \in F$, tout élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$ est un *antécédent* de y (il peut avoir 0 ou 1 ou plusieurs antécédents de y).



- Soient E, F deux ensembles, et $f : E \mapsto F$ une application.

Soit $A \subset E$. L'*image directe* de A par f est l'ensemble $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$

Soit $B \subset F$. L'*image réciproque* de B par f est l'ensemble $f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$



Exercice 1. calculer explicitement lorsque cela est possible les fonctions suivantes $f \circ g$, $g \circ f$, f^{-1} , g^{-1} dans les cas suivants :

(a) $f(x) = 2x - 1$ et $g(y) = 3y + 2$

(b) $f(x) = x^2$ et $g(y) = y + 1$

(c) $f(x, y) = (x + y, x - y)$ et $g(u, v) = u + v$

Exercice 2. Soit $f(x) = \frac{2x}{x+1}$. On définit la suite de fonction $(f_n)_{n \geq 1}$ par récurrence : $f_1 = f$ et $f_{n+1} = f \circ f_n$. Montrer que pour $n \geq 1$ on a $f_n(x) = \frac{2^n x}{(2^n - 1)x + 1}$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, et soient les parties $A = [1, 2]$ et $B = [1, 4]$.

Déterminer : (a) $f(A)$ (b) $f^{-1}(B)$ (d) $f^{-1}[f(A)]$ (c) $f[f^{-1}(B)]$

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$, $z \mapsto z^{-1}$ et les parties de \mathbb{C} : $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ et $D^* = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$. Déterminer $f(\mathbb{U})$, $f^{-1}(\mathbb{U})$, $f(D^*)$, $f^{-1}(D^*)$.

Exercice 5. Soient E et F deux ensembles, f une application de E dans F et A, B des parties de E et C et D deux parties de F . Démontrer les propositions suivantes :

(a) $A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$

(b) $C \subset D \implies f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$

(c) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

(d) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Donner un exemple d'inclusion stricte.

(e) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

(f) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

(g) $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$