L1 IEEEA, 2024-2025
Université de Rouen

NOM	**Prénom**
Groupe de TD :	**Numéro :**

Note sur 20:

Contrôle continu - Seconde chance (v3)

UE Logique et structures algébriques
Vendredi 10 janvier 2025 - Documents, mobiles et calculatrices interdites

Exercice 1. Écrire la négation de chacune de ces propositions suivantes et indiquer en le justifiant si la proposition considérée est vraie ou fausse (cocher la bonne case).

(a) Proposition P : $\forall n \in \mathbb{Z}, \ (n^2 \leq 9)$ ou $(n > 3)$ Vraie : ☐   Fausse : ☐

Proposition $\neg P$:

(b) Proposition Q : $\forall x \in \mathbb{R}, \ \exists y \in \mathbb{R} \quad (x > y)$ et $(x^2 + y^2 < 1)$ Vraie : ☐   Fausse : ☐

Proposition $\neg P$:

Exercice 2. On considère des propositions P et Q de valeurs de vérité quelconques.

P	Q	P ou Q
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

P	$\neg P$	Q	$\neg P$ ou Q
V		V	
V		F	
F		V	
F		F	

P	Q	(P ou Q) et ($\neg P$ ou Q)
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

(a) Compléter les tables de vérité ci-dessus.
(b) Que peut-on en déduire concernant la proposition ((P ou Q) et ($\neg P$ ou Q)) ?

Exercice 3. On considère les fonctions réelles : $f(x) = x^2 + 2$ et $g(x) = 2\,x + 1$.
Déterminer explicitement : $(f \circ g)(x)$

Exercice 4. On considère les nombres complexes $z = 4 + 3\,\mathrm{i}$ et $z' = 1 - 2\,\mathrm{i}$.
Déterminer explicitement :

$z + z' =$

$\overline{z'} =$

$\dfrac{z}{z'} =$

Exercice 5. Soit $z = \sqrt{3} - 3\,\mathrm{i}$.

a) Calculer : $|z| =$

$\dfrac{z}{|z|} =$

b) Donner la forme exponentielle complexe de z.

Exercice 6. On considère la suite de nombre complexes définie par récurrence :

$$u_0 = 1 + 2\mathrm{i} \quad \text{et pour} \quad n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = (1 + \mathrm{i})\, u_n + 2.$$

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\quad u_n = (1 + \mathrm{i})^n + 2\mathrm{i}.$

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \to]0, 2], \quad x \mapsto \frac{2}{x^2+1}$.

a) Montrer que la fonction f est surjective.

b) Soit $B =]0, 1]$. Déterminer, en le justifiant, l'ensemble $f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, f(x) \in B\}$.

Exercice 8. On va montrer la relation définie sur $\mathbb{R}^2$ ci-dessous est une relation d'ordre :

$$(x, y) \prec (x', y') \iff (x \leq x' \text{ et } x + y \leq x' + y').$$

(a) Montrer que $\prec$ est réflexive :

(b) Montrer que $\prec$ est anti-symétrique :

(c) Montrer que $\prec$ est transitive :

(d) Est ce que $\prec$ est une relation d'ordre total ? Justifier votre réponse.

Exercice 9. Pour $x, y \in I =]0, \infty[$ on note : $\quad f(x,y) = x * y = \dfrac{x\,y}{x+y}$.

(a) Montrer que l'application $f : I \times I \mapsto I$ est bien définie. Est-ce que $*$ définit une loi de composition interne sur I?

(b) Est ce que la loi $*$ est commutative?

(c) Calculer explicitement en simplifiant pour $x, y, z \in I$:

$A = (x * y) * z =$

$B = x * (y * z) =$

Est-ce que la loi $*$ est associative?

(d) Est-ce que la loi $*$ admet une élément neutre? Justifier votre réponse.

(e) Soit $x \in]0, +\infty[$. On pose $x_1 = x$ et on définit par récurrence $x_{n+1} = x_n * x$. Montrer par récurrence que pour $n \geq 1$ on a $x_n = \frac{x}{n}$.