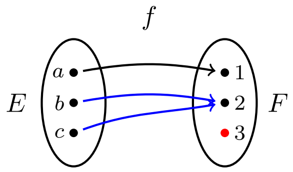
L1 IEEEA, **2025-2026** Université de Rouen-Normandie
Lundi 13 octobre 2025

Fiche n° 6 - Composition de fonctions Images directes et réciproques v2025-10-13

- Soient E, F, G des ensembles, et $f : E \mapsto F$ et $g : F \mapsto G$ des applications.
  La *composée* de f par g est l'application notée $g \circ f : E \mapsto G$ définie par : $\forall x \in E,\ (g \circ f)(x) = g(f(x))$

- Si $f : E \mapsto F$ est une bijection, la *réciproque* de f est la bijection $f^{-1} : F \mapsto E$ définie par :
  $\forall (x, y) \in E \times F,\ (f^{-1}(y) = x) \Longleftrightarrow (y = f(x))$

- Pour $x \in E$, l'élément $f(x) \in F$ est l'*image* de x (l'image de x existe toujours et elle est toujours unique).
  Pour $y \in F$, tout élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$ est un *antécédent* de y (il peut avoir 0 ou 1 ou plusieurs antécédent de y).



L'image de a est 1; 1 a un seul antécédent qui est a.
L'image de b est 2; 2 a un deux antécédents qui sont b et c (donc f n'est pas injective).
L'image de c est 2; 3 n'a aucun antécédent (donc f n'est pas surjective).

- Soient E, F deux ensembles, et $f : E \mapsto F$ une application.
  Soit $A \subset E$. L'*image directe* de A par f est l'ensemble $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$
  Soit $B \subset F$. L'*image réciproque* de B par f est l'ensemble $f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$

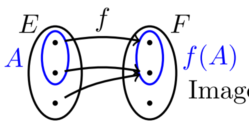


Image directe de A par f

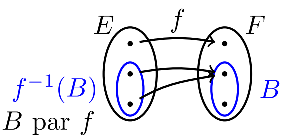


Image réciproque de B par f

Exercice 1. calculer explicitement lorsque cela est possible les fonctions suivantes $f \circ g$ et $g \circ f$ dans les cas suivants :
(a) $f(x) = 3x - 2$ et $g(y) = 2y + 1$
(b) $f(x) = x + 1$ et $g(y) = y^2 + 2$
(c*) $f(x, y) = (x + y, x\,y)$ et $g(u, v) = u^2 + v$

Exercice 2. calculer explicitement, lorsque cela est possible, f^{-1} la fonction réciproque de f dans les cas suivants :
(a) $f(x) = 3x - 2$
(b) $f(x) = x^2$
(c*) $f(x, y) = (2x + y, x - y)$

Exercice 3. Soit $f(x) = \frac{x}{x+1}$. On définit la suite de fonction $(f_n)_{n \geq 1}$ par récurrence : $f_1 = f$ et $f_{n+1} = f \circ f_n$. Montrer que pour $n \geq 1$ on a $f_n(x) = \frac{x}{n\,x+1}$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$, et soient les parties $A = [1, 2]$ et $B = [-1, 4]$.
Déterminer : (a) $f(A)$ (b) $f^{-1}(B)$ (d) $f^{-1}\big[f(A)\big]$ (c) $f\big[f^{-1}(B)\big]$

Exercice 5. Soient E et F deux ensembles, f une application de E dans F et A, B des parties de E et C et D deux parties de F. Démontrer les propositions suivantes :
(a) $A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$
(b) $C \subset D \implies f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$
(c) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
(d) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Donner un exemple d'inclusion stricte.
(e) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$
(f) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$
(g) $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$

Exercice 6. (*) Soit $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, \quad z \mapsto z^{-1}$ et les parties de $\mathbb{C}$: $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$ et $D^* = \{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 < |z| < 1\}$.
Déterminer $f(\mathbb{U})$, $f^{-1}(\mathbb{U})$, $f(D^*)$, $f^{-1}(D^*)$.