

Fiche n° 5 - Ensembles (suite) - Applications

v2024-10-09

L'**ensemble des parties** d'un ensemble E est noté $\mathcal{P}(E)$. Il contient en particulier l'ensemble vide \emptyset et E lui-même.
Exemple : Si $E = \{1, 2\}$, alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

Exercice 1. Pour $E = \{1, 2, 3\}$ puis $F = \{1, 2, 3, 4\}$, déterminer $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{P}(F)$. Quel est leur nombre d'éléments?

Le **produit cartésien** de deux ensembles A et B , noté $E \times F$, est l'ensemble des couples (a, b) avec $a \in A$ et $b \in B$.

Exercice 2. Pour $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et $F = \{a, b, c\}$, déterminer $E \times F$ et $F \times E$. Quel est leur nombre d'éléments?

Une **application** $f : E \rightarrow F$, c'est la donnée pour chaque élément $x \in E$ d'un unique élément y de F noté $y = f(x)$.

- E est l'ensemble de départ, F est l'ensemble d'arrivée.
- x est l'**antécédent** de y par f et y est l'**image** de x par f .
- Le **graphe** de $f : E \rightarrow F$ est : $G_f = \{(x, f(x)) \in E \times F \mid x \in E\}$.

Une application f est **injective** si pour tout $x, x' \in E$ avec $f(x) = f(x')$ alors $x = x'$. C'est à dire :

$$\forall x, x' \in E, \quad (f(x) = f(x')) \implies (x = x')$$

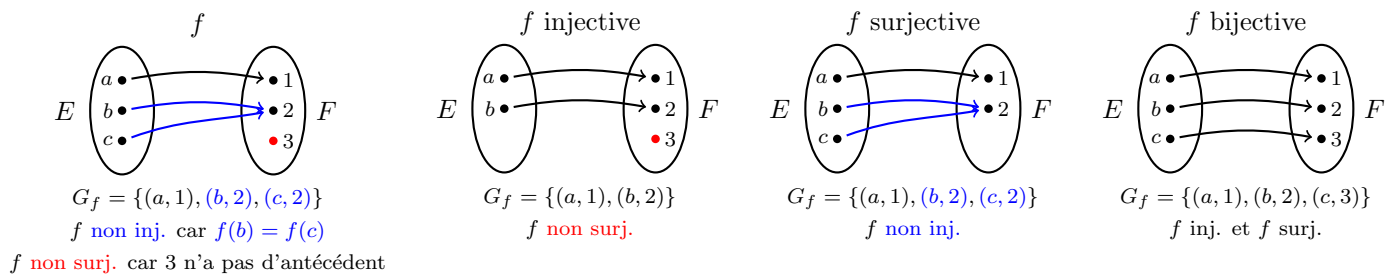
Une application f est **surjective** si pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. C'est à dire :

$$\forall y \in F, \quad \exists x \in E \quad (y = f(x))$$

Une application f est **bijjective** si pour tout $y \in F$, il existe un **unique** $x \in E$ tel que $y = f(x)$. C'est à dire :

$$\forall y \in F, \quad \exists! x \in E \quad (y = f(x))$$

Proposition : $(f \text{ bijective}) \iff (f \text{ injective et } f \text{ surjective})$



Exercice 3. Soit $f : E = \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow E = \{0, 1, 2, 3\}$ définie par $f(n) = (n^2 - n)/2$. Déterminer le graphe de f .
Quelle est l'image par f de 1 et 2? Quels sont les antécédents par f de 1 et 2, s'ils existent?
La fonction f est-elle injective? Surjective? Bijjective?

Exercice 4

Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

$$f_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto n^2 \quad f_2 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto x^2 \quad f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 \quad f_4 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z^2$$

Exercice 5. On considère les applications suivantes $E \rightarrow F$ définies par leur graphe. Déterminer si ces fonctions sont injectives ? surjectives ? bijectives ?

- (a) $E = \{1, 2, 3\}, F = \{5, 6\}, G_f = \{(1, 5), (2, 6), (3, 6)\}$ (b) $E = \{1, 2\}, F = \{5, 6, 7\}, G_f = \{(1, 7), (2, 5)\}$
(c) $E = \{1, 2, 3\}, F = \{5, 6, 7\}, G_f = \{(1, 7), (2, 6), (3, 5)\}$ (d) $E = \{1, 2, 3\}, F = \{5, 6, 7\}, G_f = \{(1, 7), (2, 6), (3, 7)\}$

Exercice 6. Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

Pour $x \in \mathbb{R}$, la partie entière (inférieure) de x est l'unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n + 1$. On note $n = \lfloor x \rfloor$ ($= E(x)$).

$$f_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto n + 1 \quad f_2 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, n \mapsto n + 1 \quad f_3 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, n \mapsto n^2 + n \quad f_4 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto \lfloor n/2 \rfloor$$

Exercice 7. Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ? Tracer leur graphe.

$$g_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^x \quad g_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x| \quad g_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3 \quad g_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3 - x$$