L1 IEEEA, 2024-2025
Léo Glangetas
Université de Rouen

NOM	**Prénom**
Numéro d'étudiant :	

Note sur 20:

Contrôle continu n° 1 (v3)
Lundi 11 novembre 2024
(Documents et calculatrices interdites)

Exercice 1. Donner les négations des propositions suivantes. Sont-elles vraies ou fausses ? Justifier vos réponses.

(a) Proposition P : $\forall x \in]0, +\infty[, \ \left(\frac{1}{x} \leq 1\right)$ ou $(x^2 \leq 4)$

Proposition $\neg P$:

(b) Proposition Q : $\exists p \in \mathbb{N}, \ (p^2 < 2\,p)$ et $(p > 1)$

Proposition $\neg Q$:

(c) Proposition R : $\forall x \in \mathbb{R}, \ \exists y \in \mathbb{R}^*, \ x + \frac{1}{y} \geq 1$

Proposition $\neg R$:

Exercice 2. On considère des propositions P, Q et R de valeurs de vérité quelconques. On note A la proposition :

$$\big((P \implies Q) \text{ et } (Q \implies R)\big) \implies \big(P \implies R\big)$$

P	Q	$P \implies Q$
V	V	V
V	V	V
V	F	F
V	F	F
F	V	V
F	V	V
F	F	V
F	F	V

Q	R	$Q \implies R$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

$(P \implies Q)$ et $(Q \implies R)$

P	R	$P \implies R$
V	V	
V	F	
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	
F	V	
F	F	

A

(a) Compléter les quatre tables de vérité restantes ci-dessus.

(b) Que peut-on en déduire?

Exercice 3. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer (par l'absurde) que si pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x\, a^2 \leq 1$, alors $a = 0$.

Exercice 4. . (a) Soit $x \geq 1$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $x^n \geq 1$.

(b) Soit $x \geq 1$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $x^n - 1 \leq n\,(x-1)\,x^{n-1}$.

Exercice 5. On considère les nombres complexes $z = 3 - 2\mathrm{i}$ et $z' = 1 + 2\mathrm{i}$. Déterminer explicitement :

(a) $\bar{z}$, $|z|$, $z + z'$

(b) $z\,z' =$

(c) $\dfrac{z}{z'} =$

Exercice 6. On considère les nombres complexes $u = 3 - \sqrt{3}\mathrm{i}$ et $v = 2e^{\frac{3\mathrm{i}\pi}{4}}$.

(a) Déterminer explicitement : $|u|$ et $\dfrac{u}{|u|}$

(b) Déterminer θ tel que $\dfrac{u}{|u|} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$.

(c) Donner la forme exponentielle complexe de u.

(d) Donner la forme algébrique de v.

(e) Donner la forme exponentielle complexe de uv. Déterminer un entier $n \geq 1$ tel que $(uv)^n \in \mathbb{R}$.

Exercice 7. On note $E = \{-1-\mathrm{i},\ -\mathrm{i},\ 1-\mathrm{i},\ -1,\ 0,\ 1,\ -1+\mathrm{i},\ 1,\ 1+\mathrm{i}\}$. Expliciter les ensembles suivants :

(a) L'ensemble $A = E \cap \mathbb{R} = E \cap \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) = 0\} =$

(b) L'ensemble $B = E \cap \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) = 0\} =$

(c) $A \cap B =$

(d) $A \cup B =$

(e) $\complement_E(A \cup B) =$

(f) $A \setminus B =$

Exercice 8. Soit un ensemble E et trois parties A, B, C de E. Démontrer que : $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$. (Note : l'inclusion inverse est vraie, mais elle n'est pas demandée).

Exercice 9. On considère les applications : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par : $f(x) = 2\,x + 3$ et $g(u, v) = u^2 + v$.

(a) L'application f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ? Justifiez vos réponses.

(b) L'application g est-elle injective ? Surjective ? Bijective ? Justifiez vos réponses.

(c) Calculer explicitement lorsque cela est possible les fonctions suivantes : $f \circ g$, $g \circ f$, f^{-1}, g^{-1} :