L1 IEEEA, 2025-2026 Université de Rouen-Normandie
Lundi 6 octobre 2025

Fiche n° 5 - Ensembles (suite) - Applications v1

L'**ensemble des parties** d'un ensemble E est noté $\mathcal{P}(E)$. Il contient en particulier l'ensemble vide $\emptyset$ est E lui-même.
Exemple : Si $E = \{1, 2\}$, alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

Exercice 1. Pour $E = \{1, 2, 3\}$ puis $F = \{1, 2, 3, 4\}$, déterminer $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{P}(F)$. Quel est leur nombre d'éléments?

Le **produit cartésien** de deux ensembles A et B, noté $E \times F$, est l'ensemble des couples (a, b) avec $a \in A$ et $b \in B$.

Exercice 2. Pour $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{a, b\}$, déterminer $E \times F$ et $F \times E$. Quel est leur nombre d'éléments?

Une ***application*** $f : E \to F$, c'est la donnée pour chaque élément $x \in E$ d'un unique élément y de F noté $y = f(x)$.

- E est l'ensemble de départ, F est l'ensemble d'arrivée.
- x est l'***antécédent*** de y par f et y est l'***image*** de x par f.
- Le ***graphe*** de $f : E \to F$ est : $\quad G_f = \Big\{\big(x, f(x)\big) \in E \times F \mid x \in E\Big\}$.

Une application f est ***injective*** si pour tout $x, x' \in E$ avec $f(x) = f(x')$ alors $x = x'$. C'est à dire :

$$\forall x, x' \in E, \quad (f(x) = f(x')) \implies (x = x')$$

Une application f est ***surjective*** si pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. C'est à dire :

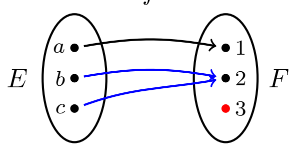
$$\forall y \in F, \quad \exists x \in E \quad \big(y = f(x)\big)$$

Une application f est ***bijective*** si pour tout $y \in F$, il existe un unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$. C'est à dire :

$$\forall y \in F, \quad \exists! x \in E \quad \big(y = f(x)\big)$$

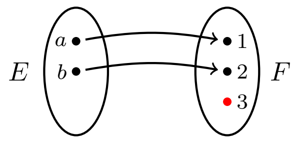
Proposition : $\quad$ (f bijective) $\iff$ (f injective et f surjective)

f



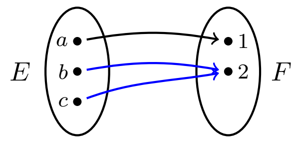
$G_f = \{(a, 1), (b, 2), (c, 2)\}$
f non inj. car $f(b) = f(c)$
f non surj. car 3 n'a pas d'antécédent

f injective



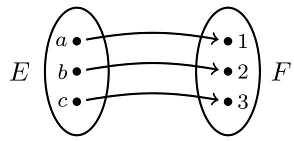
$G_f = \{(a, 1), (b, 2)\}$
f non surj.

f surjective



$G_f = \{(a, 1), (b, 2), (c, 2)\}$
f non inj.

f bijective



$G_f = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3)\}$
f inj. et f surj.

Exercice 3. Soit $f : E = \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to F = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ définie par $f(n) = n^2 + 1$.
Déterminer le graphe de f.
Quelle sont les images par f de 1 et 2? Quels sont les antécédents par f de 1 et 2, s'ils existent?
La fonction f est elle injective? Surjective? Bijective?

Exercice 4.
Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?
$f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n^2 \qquad f_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ x \mapsto x^2 \qquad f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 \qquad f_4 : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z^2$

Exercice 5. On considère les applications suivantes $E \to F$ définies par leur graphe G_f. Déterminer si ces fonctions sont injectives ? surjectives ? bijectives ?
(a) $E = \{1, 2, 3\}$, $F = \{5, 6\}$, $G_f = \{(1, 5), (2, 5), (3, 6)\}$ (b) $E = \{1, 2\}$, $F = \{5, 6, 7\}$, $G_f = \{(1, 6), (2, 5)\}$
(c) $E = \{1, 2, 3\}$, $F = \{5, 6, 7\}$, $G_f = \{(1, 6), (2, 7), (3, 6)\}$ (d) $E = \{1, 2, 3\}$, $F = \{5, 6, 7\}$, $G_f = \{(1, 7), (2, 6), (3, 7)\}$

Exercice 6. Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?
Pour $x \in \mathbb{R}$, la partie entière (inférieure) de x est l'unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n + 1$. On note $n = \lfloor x \rfloor$ $(= \mathrm{E}(x))$.
$f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n + 1 \qquad f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto n + 1 \qquad (*)\ f_3 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto n^2 - n \qquad (*)\ f_4 : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto \lfloor n/2 \rfloor$

Exercice 7. Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ? Tracer leur graphe.
$g_1 :]0, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln x \qquad g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x| \qquad (*)\ g_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3 \qquad (*)\ g_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3 - x^2$