L1 IEEEA, 2024-2025 Université de Rouen-Normandie

Lundi 16 septembre 2024

Fiche n° 2 - Nombres comlexes $_{\text{v1}}$

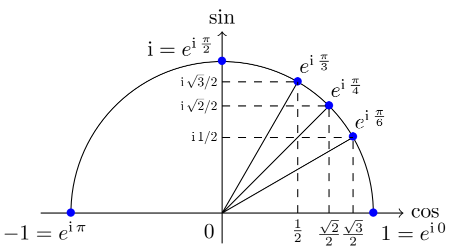
Rappel : Le corps des nombres complexes est : $\mathbb{C} = \{z = a + \mathrm{i}b \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}$ (avec $\mathrm{i}^2 = -1$).

Soient $z = a + \mathrm{i}b$, $z' = a' + \mathrm{i}b'$, u et v des nombres complexes (non nuls si ils sont en quotient) et $n \in \mathbb{Z}$:

- Addition : $(a + \mathrm{i}b) + (a' + \mathrm{i}b') = (a + a') + \mathrm{i}(b + b')$
- Multiplication : $(a + \mathrm{i}b) \times (a' + \mathrm{i}b') = aa' + \mathrm{i}ab' + \mathrm{i}ba' + \mathrm{i}^2\, bb' = (aa' - bb') + \mathrm{i}(ab' + ba')$
- Parties réelles et imaginaires : $\mathrm{Re}\, z = a$, $\mathrm{Im}\, z = b$ (donc $z = \mathrm{Re}\, z + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\, z$)
- Conjugué : $\bar{z} = a - \mathrm{i}b$. Alors $\overline{(\bar{z})} = z$, $\overline{u+v} = \bar{u} + \bar{v}$, $\overline{u-v} = \bar{u} - \bar{v}$, $\overline{u\,v} = \bar{u}\,\bar{v}$, $\overline{\left(\frac{u}{v}\right)} = \frac{\bar{u}}{\bar{v}}$, $\overline{(u^n)} = (\bar{u})^n$
  $z\,\bar{z} = (a + \mathrm{i}b)\,(a - \mathrm{i}b) = (a)^2 - (\mathrm{i}b)^2 = a^2 - \mathrm{i}^2\, b^2 = a^2 + b^2$
- Module : $|z| = \sqrt{z\,\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}\ (= |\bar{z}|)$. $\big||u| - |v|\big| \leq |u + v| \leq |u| + |v|$, $|u\,v| = |u|\,|v|$, $\left|\frac{u}{v}\right| = \frac{|u|}{|v|}$, $|u^n| = |u|^n$
- inverse : $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ ou bien $\frac{1}{a + \mathrm{i}b} = \frac{a - \mathrm{i}b}{(a + \mathrm{i}b) \times (a - \mathrm{i}b)} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \mathrm{i}\frac{b}{a^2 + b^2}$
- **Forme algébrique** : $z = a + \mathrm{i}b$ avec $a,\ b \in \mathbb{R}$
- **Forme polaire ou (forme trigonométrique)** : $z = \rho\,(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ avec $\rho \geq 0$, $\theta \in \mathbb{R}$
  $\rho = |z|$ est le module et θ est un **argument** de z (pour $k \in \mathbb{Z}$, alors $\theta + 2k\pi$ est aussi un argument de z)
- Relations entre forme algébrique et forme polaire : Pour $z = a + \mathrm{i}\,b = \rho(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ $(z \neq 0)$, on identifie :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & \rho\cos\theta \\ b & = & \rho\sin\theta \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a^2 + b^2 & = & \rho^2 \\ \cos\theta & = & \frac{a}{\rho} \\ \sin\theta & = & \frac{b}{\rho} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \rho & = & \sqrt{a^2 + b^2} \\ \cos\theta & = & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\theta & = & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{array}\right.$$

- Exponentielle complexe: Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$.
  Donc on a aussi : $\frac{1}{e^{\mathrm{i}\theta}} = e^{-\mathrm{i}\theta} = \cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta$, $\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{\mathrm{i}\,\theta} + e^{-\mathrm{i}\,\theta})$, $\sin\theta = \frac{1}{2\mathrm{i}}(e^{\mathrm{i}\,\theta} - e^{-\mathrm{i}\,\theta})$
  Multiplication, puissance, quotient : $e^{\mathrm{i}\theta} \times e^{\mathrm{i}\theta'} = e^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}$, $\left(e^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = e^{\mathrm{i}\,n\,\theta}$, $\frac{e^{\mathrm{i}\theta}}{e^{\mathrm{i}\theta'}} = e^{\mathrm{i}(\theta-\theta')}$
- **Forme exponentielle** : $z = \rho\, e^{i\theta}$
- Multiplication , puissance, quotient : $(\rho\, e^{\mathrm{i}\theta}) \times (\rho'\, e^{\mathrm{i}\theta'}) = (\rho\rho')\, e^{i(\theta+\theta')}$, $(\rho\, e^{\mathrm{i}\theta})^n = \rho^n\, e^{\mathrm{i}\,n\,\theta}$, $\frac{\rho\, e^{\mathrm{i}\theta}}{\rho'\, e^{\mathrm{i}\theta'}} = \frac{\rho}{\rho'}\, e^{i(\theta-\theta')}$
- Valeurs remarquables de $e^{\mathrm{i}\theta}$:



$e^{\mathrm{i}0} = \cos(0) + \mathrm{i}\sin(0) = 1$
$e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = \cos(\pi/6) + \mathrm{i}\sin(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\frac{1}{2}$
$e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \cos(\pi/4) + \mathrm{i}\sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$
$e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \cos(\pi/3) + \mathrm{i}\sin(\pi/3) = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$
$e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \cos(\pi/2) + \mathrm{i}\sin(\pi/2) = \mathrm{i}$
$e^{\mathrm{i}\pi} = \cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi) = -1$

Exercice 1. On pose $z = 2 + 2\mathrm{i}$, $z' = 3 - \mathrm{i}$.
(a) Calculer $\mathrm{Re}\, z$, $\mathrm{Im}\, z$, $\bar{z}$, $\bar{z'}$, $z\,\bar{z}$, $|z|$, $|z'|$.
(b) Calculer les nombres complexes suivants : $z + z'$, $z\,z'$, z^2, z/z', $1/z'$.
(c) Placer les points z, z', $\bar{z'}$, $1/z'$, $z + z'$, $z\,z'$ dans le plan complexe.

Exercice 2. On pose $z = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z' = 2\,e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.
(a) Placer ces points dans le plan complexe et calculer : $|z|$, $|z'|$, $\arg z$, $\arg z'$, $\mathrm{Re}\,(z')$, $\mathrm{Im}\,(z')$.
(b) Calculer les nombres complexes suivants : $z + z'$, $z\,z'$, z^2, z/z', $1/z'$. Placer ces points dans le plan complexe.

Exercice 3. (*) Soient z et z' deux nombres complexes. Démontrer que :
(a) $\mathrm{Re}\,(\bar{z}) = \mathrm{Re}\,(z)$, $\mathrm{Im}\,(\bar{z}) = -\mathrm{Im}\,(z)$, $\mathrm{Re}\,(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $\mathrm{Im}\,(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \bar{z})$, $\mathrm{Re}\,(z + z') = \mathrm{Re}\,(z) + \mathrm{Re}\,(z')$
(b) $\overline{(z\,z')} = \bar{z}\ \overline{z'}$, $|z\,z'| = |z|\,|z'|$, $|z + z'|^2 = |z|^2 + 2\mathrm{Re}\,(z\,\overline{z'}) + |z'|^2$ (c) $|\mathrm{Re}\,(z)| \leq |z|$, $|z + z'| \leq |z| + |z'|$