L1 IEEEA, 2025-2026 Université de Rouen-Normandie

Lundi 20 octobre 2025

Fiche n° 7 - Familles - Relations binaires v2025-10-20

Une **famille** $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments x_i d'un ensemble E, indexée par un ensemble I, l'index, est une application définie sur I à valeurs dans E. Si $I = \mathbb{N}$, alors pour $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on dit plutôt que c'est une suite d'éléments de E.

Soit E un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E. On pose

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \left\{x \,\middle|\, \exists i \in I, x \in A_i\right\}, \qquad \bigcap_{i\in I} A_i = \left\{x \,\middle|\, \forall i \in I, x \in A_i\right\}.$$

Exercice 1. Montrer que $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i\in I}(A_i \cap B)$ et (*) $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup B = \bigcap_{i\in I}(A_i \cup B)$.

Exercice 2. Soit $I = \{1, 2, 3, 4\}$ et $(x_i)_{i\in I}$ la famille définie par $u_i = i^2$. Calculer $\sum_{i\in I} u_i$ et $\prod_{i\in I} u_i$.

Une **relation binaire** $\mathcal{R}$ d'un ensemble E vers un ensemble F est une partie G du produit cartésien $E \times F$.
On dit que x est en relation avec y si et seulement si $(x, y) \in G$. On note alors : $x \,\mathcal{R}\, y$.
L'ensemble G (noté ausi et seulement si $G_{\mathcal{R}}$) est le **graphe** de la relation $\mathcal{R}$.

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire définie de E vers E (on alors dit que $\mathcal{R}$ une relation binaire interne sur E).

- $\mathcal{R}$ est dite **réflexive** si et seulement si : $\forall x \in E, \quad x \,\mathcal{R}\, x$
- $\mathcal{R}$ est dite **symétrique** si et seulement si : $\forall x, y \in E, \quad (x \,\mathcal{R}\, y \iff y \,\mathcal{R}\, x)$
- $\mathcal{R}$ est dite **anti-symétrique** si et seulement si : $\forall x, y \in E, \quad (x \,\mathcal{R}\, y \text{ et } y \,\mathcal{R}\, x) \Longrightarrow (x = y)$
- $\mathcal{R}$ est dite **transitive** si et seulement si : $\forall x, y, z \in E, \quad (x \,\mathcal{R}\, y \text{ et } y \,\mathcal{R}\, z) \Longrightarrow (x \,\mathcal{R}\, z)$

Une **relation d'équivalence** est une relation qui est à la fois réflexive, symétrique et transitive.

Une **relation d'ordre** $\preccurlyeq$ sur un ensemble E est une relation qui est à la fois réflexive, anti-symétrique et transitive.
On dit alors que $(E, \preccurlyeq)$ est un ensemble ordonné.

Exercice 3. On considère $E = \{1, 2, 3, 4\}$. Pour les relations binaires définies sur X ci-dessous, déterminer si chacune de ces relations est réflexive ? symétrique ? antisymétrique ? transitive ? Tracer un diagramme cartésien (Si $x \,\mathcal{R}\, y$, on place un V dans le tableau $E \times E$ à l'intersection de la ligne x et de la colonne y) et un diagramme sagittal.

(a) $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$

(b) $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$

(c) $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\}$

(d) $\mathcal{R} = \{(1, 2), (2, 4), (1, 3), (1, 4)\}$

Exercice 4. (*) Soit E l'ensemble des droites du plan. Le parallélisme est-elle une relation réflexive? symétrique? antisymétrique? transitive? Mêmes questions pour l'orthogonalité.

Exercice 5. On définit sur $\mathbb{Z}$ la relation suivante :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \quad (x \,\mathcal{R}\, y) \iff (x - y \quad \text{est multiple de } 3).$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. On rappelle le principe de la division euclidienne par 3 : pour tout entier n il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que $n = 3\,q + r$ avec $0 \leq r < 3$.

Exercice 6. Montrer que $\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7. Montrer que l'inclusion $(\subset)$ est une relation d'ordre sur l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble E.

Exercice 8. (*) (Ordre lexicographique) On note $E = \mathbb{N}^2$, et on définit sur E la relation :
$(n, p) \preccurlyeq (n', p') \iff \Big((n < n') \text{ ou } (n = n' \text{ et } p \leq p')\Big)$. Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre.