**L1 IEEEA, 2024-2025** Université de Rouen-Normandie
Lundi 21 octobre 2024

# Fiche n° 7 - Révision des TD 1 à 6 - CORRECTION

v2024-10-30

**Exercice 1.** Donner les négations des propositions suivantes. Sont-elles vraies ou fausses ? Justifier vos réponses.

(a) Proposition $P$ : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $(n \leq 0)$ ou $(n^2 \geq 1)$ V

Proposition $\neg P$ : $\exists n \in \mathbb{Z}$, $(n>0)$ et $(n^2<1)$ F

Soit $n \in \mathbb{Z}$. 1er cas $n \leq 0$ alors P est vraie.
2ème cas $n>0$. Comme $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$ donc $n^2 \geq 1$
et P est vraie.
Donc P est vraie dans les 2 cas (et $\neg P$ est fausse)

(b) Proposition $Q$ : $\exists x \in \mathbb{R}$, $(x > 5)$ et $(x^2 < 2)$ F

Proposition $\neg Q$ : $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x \leq 5)$ ou $(x^2 \geq 2)$ V

Soit $x \in \mathbb{R}$. 1er cas : $x \leq 5$. Alors $\neg Q$ est Vraie.
2ème cas : $x>5$. Alors $x^2>25$ et $25 \geq 2$ donc $x^2 \geq 2$.
Alors $\neg Q$ est vraie.
Conclusion : $\neg Q$ est vraie dans les deux cas. (et Q est Fausse)

**Exercice 2.** On considère des propositions $P$ et $Q$ de valeurs de vérité quelconques.

| $P$ | $Q$ | $P$ ou $Q$ | $P$ et $Q$ | $\neg(P$ et $Q)$ | $A$ |
|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | F | F |
| V | F | V | F | V | V |
| F | V | V | F | V | V |
| F | F | F | F | V | F |

| $P$ | $Q$ | $P$ | $\neg Q$ | $P$ et $\neg Q$ | $\neg P$ | $Q$ | $\neg P$ et $Q$ | $B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | F | F | F | V | F | F |
| V | F | V | V | V | F | F | F | V |
| F | V | F | F | F | V | V | V | V |
| F | F | F | V | F | V | F | F | F |

(a) Ecrire la table de vérité de la proposition $A$ : $(P$ ou $Q)$ et $\neg\,(P$ et $Q)$

(b) Ecrire la table de vérité de la proposition $B$ : $(P$ et $\neg Q)$ ou $(\neg\,P$ et $Q)$

(c) Comparer les propositions $A$ et $B$. Que peut-on en déduire?

Les propositions A et B ont mêmes valeurs de vérité :
Elles sont donc équivalentes $(A \Longleftrightarrow B)$

**Exercice 3.** Écrire la négation de chacune de ces propositions suivantes et indiquer en le justifiant si la proposition considérée est vraie ou fausse.

(a) Proposition $P$ : $\exists n \in \mathbb{N}$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $p + n \geq 2$ V

Proposition $\neg P$ : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists p \in \mathbb{N}$, $p+n<2$ F

On pose $n=2$. Soit $p \in \mathbb{N}$. Donc $p \geq 0$ et $p+2 \geq 2$
Donc $p+n \geq 2$ et P est vraie
(et Q est fausse)

(b) Proposition $Q$ : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x^2+y^2<1$ F

Proposition $\neg Q$ : $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x^2+y^2 \geq 1$ V

On pose $x=1$. alors pour $y \in \mathbb{R}$, $y^2 \geq 0$ et $1+y^2 \geq 1+0$ donc $x^2+y^2 \geq 1$. Donc $\neg Q$ est vraie et $Q$ est fausse

**Exercice 4.** Démontrer par récurrence sur $n$ que pour tout $n \geq 2$ l'implication

$$[x>0] \Rightarrow [(1+x)^n > 1+nx] \qquad (*)$$

est vraie.

- Initialisation. pour $n=2$, on a pour $x>0$ $(1+x)^2 = 1+2x+x^2$. comme $x^2>0$, on a $1+2x+x^2 > 1+2x$ donc $(1+x)^2 > 1+2x$ et $(*)$ est vraie pour $n=2$
- Hérédité. On suppose que $(*)$ est vraie pour $n \geq 2$. Soit $x>0$. $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x)$. comme $(1+x)^n > 1+nx$ et $(1+x)>0$, on a $(1+x)^n(1+x) > (1+nx)(1+x)$ donc $(1+x)^{n+1} > 1+(n+1)x+nx^2$. comme $nx^2>0$, on a $1+(n+1)x+nx^2 > 1+(n+1)x$ et donc $(1+x)^{n+1} > 1+(n+1)x$. Donc $(*)$ est vraie pour $(n+1)$.
- conclusion : $(*)$ est vraie pour tout $n \geq 2$.

**Exercice 5.** On considère les nombres complexes $z=-1+4i$ et $z'=2+5i$. Déterminer explicitement :

(a) $\bar{z}$, $|z|$, $z+z'$ $\quad \bar{z} = -1-4i \quad |z| = \sqrt{(-1)^2+(4)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$

$z+z' = (-1+4i)+(2+5i) = (-1+2)+i(4+5) = 1+9i$

(b) $z\,z' = (-1+4i)(2+5i) = -2-5i+8i-20 = -22+3i$

(c) $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{-1+4i}{2+5i} = \dfrac{(-1+4i)(2-5i)}{(2+5i)(2-5i)} = \dfrac{-2+5i+8i+20}{(2)^2+(5)^2}$

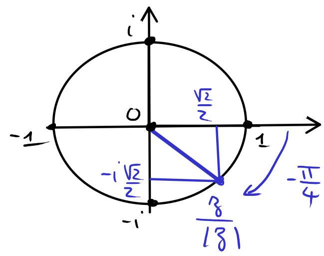
$= \dfrac{1}{4+25}(18+13i) = \dfrac{18}{29} + i\dfrac{13}{2}$

**Exercice 6.** On considère les nombres complexes $z = 3 - 3\mathrm{i}$.

(a) Déterminer explicitement : $|z|$ et $\dfrac{z}{|z|}$

$|z| = \sqrt{(3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

$|z| = \sqrt{2 \times 9} = 3\sqrt{2}$ donc $\dfrac{z}{|z|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} - i\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$




(b) Déterminer $\theta$ tel que $\dfrac{z}{|z|} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$.

Il faut que $\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ donc $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$

(c) Donner la forme exponentielle complexe de $z$.

$z = 3\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$

(d) Calculer explicitement et simplifier $z^8$.

$z^8 = (3\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}})^8 = 3^8 (\sqrt{2})^8 (e^{-i\frac{\pi}{4}})^8 = 3^8 (\sqrt{2}^2)^4\, e^{-i\frac{\pi}{4}\times 8} = 3^8 \times 2^4\, e^{-2\pi}$

$= 2^4\, 3^8$

**Exercice 7.** Soit un ensemble $E$ et deux parties $A$ et $B$ de $E$. Démontrer que

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

- Soit $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Donc $x \in (A \setminus B)$ ou $x \in (B \setminus A)$

1er cas : $x \in (A \setminus B)$ donc $x \in A$ et $x \notin B$.

$x \in A$ donc $x \in A \cup B$.

$x \notin B$ donc $x \notin A \cap B$. (Sinon on aurait $x \in A \cap B$ donc $x \in A$ et $x \in B$, ce qui est impossible).

Donc $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

2em cas : $x \in (B \setminus A)$. La demonstration est identique au 1er cas en échangeant le rôle de A et B. donc $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subset (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

- Soit $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. donc $x \in (A \cup B)$ et $x \notin (A \cap B)$.

1er cas : $x \in A$. Comme $x \notin (A \cap B)$, alors $x \notin B$. (Sinon on aurait alors $x \in A \cap B$, ce qui est impossible).

$x \in B$. Comme $x \in A$, on aurait alors

$x \in A$ et $x \notin B$ donc $x \in A \setminus B$

2em cas : $x \in B$. On démontrerait de même que $x \in B \setminus A$ avec la même démonstration que dans le 1er cas. donc $(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

- conclusion : $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

**Exercice 8.** Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ? Justifiez vos réponses.

(a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto 2^n$.

- $f$ est injective : Soit $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ : on suppose que $f(n_1) = f(n_2)$ Alors $2^{n_1} = 2^{n_2}$ puis $\ln(2^{n_1}) = \ln(2^{n_2})$ donc $n_1 \ln(2) = n_2 \ln(2)$ donc $n_1 = n_2$ (car $\ln 2 \neq 0$)
- $f$ n'est pas surjective. $\forall n \in \mathbb{Z}$, $f(z) = 2^n > 0$ donc $-1$ n'a pas d'antécédants.
- $f$ n'est pas surjective.

(b) $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ x \mapsto \dfrac{3}{x}$.

$g$ est bijective (donc injective est surjective).

Soit $y \in \mathbb{R}^*$. Pour $x \in \mathbb{R}^*$ on a :

$f(x) = y \iff \dfrac{3}{x} = y \iff 3 = xy \iff x = \dfrac{3}{y}$.

Pour $y \in \mathbb{R}^*$, il existe bien un unique $x \in \mathbb{R}^*$ (qui est $\frac{3}{y}$) tel que $f(x) = y$

**Exercice 9.** Calculer explicitement lorsque cela est possible les fonctions suivantes $f\circ g$, $g\circ f$, $f^{-1}$, $g^{-1}$ dans les cas suivants :

(a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$ et $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(y)=3y+2$

- pour $y\in\mathbb{R}$, $(f\circ g)(y) = f(g(y)) = f(3y+2) = 2(3y+2)-1 = 6y+3$
- Pour $x\in\mathbb{R}$, $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x-1) = 3(2x-1)+2 = 6x-1$
- Soit $y\in\mathbb{R}$. $f(x)=y \iff 2x-1=y \iff 2x=y+1 \iff x=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}$
  donc $f$ est bijective et $f^{-1}(y)=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}$
- Soit $x\in\mathbb{R}$, $g(y)=x \iff 3y+2=x \iff 3y=x-2 \iff y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$
  donc $g$ est bijective et $g^{-1}(x)=\frac{1}{3}x-\frac{3}{2}$

(b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$ et $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(y)=y+1$

- Soit $y\in\mathbb{R}$. $(f\circ g)(y) = f(g(y)) = f(y+1) = (y+1)^2 = y^2+2y+1$
- Soit $x\in\mathbb{R}$. $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = (x^2)+1 = x^2+1$
- $f$ n'est pas injective car $f(-2)=f(2)=4$
  donc $f^{-1}$ n'est pas définie.
- Soit $t\in\mathbb{R}$. $g(y)=t \iff y+1=t \iff y=t-1$
  Donc $g$ est bijective et $g^{-1}(t)=t-1$.

(c) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x\,y$ et $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $g(u,v)=(2\,u,u+v)$

- Soient $u,v\in\mathbb{R}$. $(f\circ g)(u,v) = f(g(u,v)) = f(2u,u+v)$
  $= (2u)(u+v) = 2u^2+2uv$
- Comme on a : $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2$
  l'ensemble d'arrivée de $f$ ($\mathbb{R}$) n'est pas inclus dans l'ensemble de départ de $g$ ($\mathbb{R}^2$), $g\circ f$ n'est pas défini.
- $f$ n'est pas injective car $f(2,2)=f(-2,-2)=4$. donc $f^{-1}$ n'est pas définie.
- Soit $(x,y)\in\mathbb{R}$. $g(u,v)=(x,y) \iff \begin{cases}2u=x\\ u+v=y\end{cases} \iff \begin{cases}u=\frac{x}{2}\\ v=y-u\end{cases} \iff \begin{cases}u=\frac{x}{2}\\ v=y-\frac{x}{2}\end{cases}$

donc $g$ est bijective et $g^{-1}(x,y)=\left(\frac{x}{2}, y-\frac{x}{2}\right)$

**Exercice 10.** Soit $b\geq 0$. Montrer que si pour tout $\delta>0$ on a $b^2+\sqrt{b}\leq\delta$, alors $b=0$.

On suppose par l'absurde que $b>0$. On pose $\delta=\frac{1}{2}b^2$. Donc $b^2>\frac{1}{2}b^2$.
Donc $b^2>\delta$. Comme $\sqrt{b}>0$, $b^2+\sqrt{b}>\delta$.
Ce qui contredit $b^2+\sqrt{b}\leq\delta$.
Donc $b=0$.