L1 IEEEA, 2024-2025 Université de Rouen-Normandie

Lundi 4 novembre 2024

Fiche n° 8 - Relations binaires - Relations d'équivalence

v2024-11-04

Une **relation binaire** $\mathcal{R}$ d'un ensemble E vers un ensemble F est une partie G du produit cartésien $E \times F$.
On dit que x est en relation avec y si et seulement si $(x, y) \in G$. On note alors : $x\,\mathcal{R}\,y$.
L'ensemble G (noté ausi et seulement si $G_{\mathcal{R}}$) est le **graphe** de la relation $\mathcal{R}$.

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire définie de E vers E (on alors dit que $\mathcal{R}$ une relation binaire interne sur E).

- $\mathcal{R}$ est dite **réflexive** si et seulement si : $\forall x \in E, \quad x\,\mathcal{R}\,x$
- $\mathcal{R}$ est dite **symétrique** si et seulement si : $\forall x, y \in E, \quad (x\,\mathcal{R}\,y \Longleftrightarrow y\,\mathcal{R}\,x)$
- $\mathcal{R}$ est dite **anti-symétrique** si et seulement si : $\forall x, y \in E, \quad (x\,\mathcal{R}\,y \text{ et } y\,\mathcal{R}\,x) \Longrightarrow (x = y)$
- $\mathcal{R}$ est dite **transitive** si et seulement si : $\forall x, y, z \in E, \quad (x\,\mathcal{R}\,y \text{ et } y\,\mathcal{R}\,z) \Longrightarrow (x\,\mathcal{R}\,z)$

Une **relation d'équivalence** est une relation qui est à la fois réflexive, symétrique et transitive.
Pour $a \in E$, on appelle **classe** de a et on note $\mathrm{cl}(a)$ (ou bien $\dot{a}$) l'ensemble : $\mathrm{cl}(a) = \dot{a} = \{x \in E \,|\, x\,\mathcal{R}\,a\}$.

Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E, alors pour tout $x, y \in E$ on a les propriétés suivantes pour tout $a, b \in E$:

- $a \in \mathrm{cl}(a)$ et $b \in \mathrm{cl}(a) \Longleftrightarrow b\,\mathcal{R}\,a \Longleftrightarrow a\,\mathcal{R}\,b \Longleftrightarrow a \in \mathrm{cl}(b)$

On note alors $E/\mathcal{R} = \{\mathrm{cl}(a) \,|\, a \in E\}$ l'ensemble des classes d'équivalence (appelé l'**ensemble quotient** de E par $\mathcal{R}$).
La famille des classes $(\mathrm{cl}(a))_{a \in E}$ forment une **partition** de E : En effet :

- Les classes sont non vides : pour tout $a \in E$ on a $\mathrm{cl}(a) \neq \emptyset$ car $a \in \mathrm{cl}(a)$.
- Les classes sont disjointes 2 à 2 : pour tout $a, b \in E$, soit $\mathrm{cl}(a) \cap \mathrm{cl}(b) = \emptyset$, soit $\mathrm{cl}(a) = \mathrm{cl}(b)$.
- La réunion de toutes les classes de E est E tout entier : $\displaystyle\bigcup_{a \in E} \mathrm{cl}(a) = E$.

Exercice 1. On considère $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Pour les relations binaires définies sur X ci-dessous, déterminer si chacune de ces relations est réflexive ? symétrique ? antisymétrique ? transitive ? Tracer un diagramme cartésien (Si $x\,\mathcal{R}\,y$, on place un V dans le tableau $E \times E$ à l'intersection de la ligne x et de la colonne y) et un diagramme sagittal.

(a) $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$

(b) $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$

(c) $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\}$

(d) $\mathcal{R} = \{(1, 2), (2, 4), (1, 3), (1, 4)\}$

Exercice 2. Soit E l'ensemble des droites du plan. Le parallélisme est-elle une relation réflexive? symétrique? antisymétrique? transitive? Mêmes questions pour l'orthogonalité.

Exercice 3. On définit sur $\mathbb{Z}$ la relation suivante :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \quad (x\,\mathcal{R}\,y) \iff (x - y \quad \text{est multiple de } 3).$$

On rappelle le principe de la division euclidienne par 3 : pour tout entier n il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que $n = 3\,q + r$ avec $0 \leq r < 3$.

(a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

(b) Déterminer l'ensemble quotient des classes d'équivalence $\mathbb{Z}/\mathcal{R}$ (noté $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$) et décrire la partition de $\mathbb{Z}$ par les classes d'équivalence.

Exercice 4. On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation suivante :

$$\forall ((x, y), (a, b)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \quad (x, y)\,\mathcal{R}\,(a, b) \quad \text{si et seulement si} \quad x^2 + y^2 = a^2 + b^2.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Décrire la partition de $\mathbb{R}^2$ par les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$.