

Fiche n° 1 - Éléments de logique. Démonstrations

v2025-09-07

Exercice 1. Pour chacune des propositions suivantes, écrire sa négation et indiquer (en le justifiant) si la proposition est vraie ou fausse :

- (a) $\exists n \in \mathbb{Z}, \forall p \in \mathbb{Z}, p \geq n$ (b) $\forall p \in \mathbb{Z}, \exists n \in \mathbb{Z}, p \geq n$ (c) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \frac{1}{\delta} < \varepsilon$

Exercice 2. Tables de vérité. On considère des propositions P, Q, R de valeurs de vérité quelconques.

- (a) Montrer que $[P \implies Q]$ est équivalente à $[\neg P \text{ ou } Q]$. Montrer que sa négation est équivalente à $[P \text{ et } \neg Q]$.

P	Q	$P \implies Q$	$\neg P$	Q	$\neg P \text{ ou } Q$	P	$\neg Q$	$P \text{ et } \neg Q$
V	V							
V	F							
F	V							
F	F							

- (b) (*) Montrer que $[P \implies Q]$ est équivalente à $[\neg Q \implies \neg P]$.

P	Q	$P \implies Q$	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \implies \neg P$
V	V				
V	F				
F	V				
F	F				

- (c) Démontrer que les propositions $[P \text{ et } (Q \text{ ou } R)]$ et $[(P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)]$ sont équivalentes.

P	Q	R	$Q \text{ ou } R$	$P \text{ et } (Q \text{ ou } R)$	$P \text{ et } Q$	$P \text{ et } R$	$(P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)$
V	V	V					
V	V	F					
V	F	V					
V	F	F					
F	V	V					
F	V	F					
F	F	V					
F	F	F					

Exercice 3. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$(\forall \varepsilon > 0, a \leq \varepsilon) \implies a \leq 0.$$

Exercice 4. Démontrer les propositions suivantes :

- (a) $\forall n \in \mathbb{N}, 3^n \geq 3n$.

- (b) (*) $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n (2k+1) = (n+1)^2$.

Exercice 5.

- (a) Soient a_1, a_2, a_3, a_4 4 nombres réels tels que : $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq 1$.
Montrer qu'il existe un entier $n \in \{1, 2, 3\}$ tel que $a_{n+1} - a_n \leq \frac{1}{3}$.

(*) : Exercices à traiter dans un second temps, une fois tous les exercices sans étoiles ayant déjà été traités.