2025-09-10

Chapitre 2
Nombres complexes.

1 Définition.

Cadre historique : $x^2+1=0$

Cette équation n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$:

$$x^2+1=0 \iff x^2=-1$$

or $x^2 \geq 0$

On introduit donc un nouveau nombre imaginaire :

"$i=\sqrt{-1}$" (définition non rigoureuse !)

On introduit les nombres complexes

$$\boxed{z=a+ib \quad , a,b\in\mathbb{R}, \quad i^2=-1}$$

Définition rigoureuse du corps des nombres complexes.

$(\mathbb{R}^2,+,\times)$ muni des opérations :

$$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$$
$$(x,y)\times(x',y')=(xx'-yy',\ xy'+x'y)$$

Pour $x,y\in\mathbb{R}$:

$(x,0)=x(1,0)$ noté 1 $\quad (1,0)=$ "1"

$(0,y)=y(0,1)$ noté i $\quad (0,1)=$ "i"

$(x,y)=(x,0)+(0,y)$ noté $x+iy$ ou $x+yi$

On note $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$ muni des deux lois (opérations) précédentes $+,-$

$(\mathbb{C},+,\times)$ corps commutatif.

$(\mathbb{R},+,\times)$ est un sous corps de $(\mathbb{C},+,\times)$

en identifiant $\mathbb{R}$ et $\{(x,0)\mid x\in\mathbb{R}\}$

$\mathbb{C}$ corps des nombres complexes

$$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\} \qquad \boxed{i^2 = -1}$$

$\mathbb{R} = \{a \mid a \in \mathbb{R}\}$ corps des nombres réels

$i\mathbb{R} = \{ib \mid b \in \mathbb{R}\}$ imaginaires purs

$z = x + iy \qquad z' = x' + iy' \qquad x, y, x', y' \in \mathbb{R}$

$z + z' = (x + x') + i(yy')$

$zz' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$

2) Calculs pratiques

Exemples :

$z = 2 + 3i \qquad z' = 4 + 5i$

$$\begin{aligned} z + z' &= (2 + 3i) + (4 + 5i) \\ &= 2 + 3i + 4 + 5i \\ &= (2 + 4) + (3i + 5i) \\ &= 6 + 8i \end{aligned}$$

$((3i + 5i) = (3 + 5) \times i = 8i)$

En pratique : $(2 + 3i) + (4 + 5i) = 6 + 8i$

$2 - 3i + 4 + 2i = 6 - i$

$8 + 6i + 3 - 2i = 11 + 4i$

$(2 + 4i) - (4 + 2i) = -2 + 2i$

$(6 + 3i) - (2 + 5i) = 4 - 2i$ ....

Distributivité $a(b+c) = ab + ac$

$2(2+3i) = 2\times 2 + 2\times 3i = 4 + 6i$

$4i(2+3i) = 4i\times 2 + 4i\times 3i$

$= 8i + 12i^2$ or $i^2 = -1$!!!!

$= 8i - 12 = -12 + 8i$

$(2+4i)\times(2+3i) = 4 + 6i + 8i + 12i^2$

$= 4 + 6i + 8i - 12$

$= -8 + 14i$

$(x+iy)\times(x'+iy') = xx' + ixy' + iyx' + \underbrace{\boxed{i^2}}_{=-1}yy'$

$= (xx' - yy') + i(xy' + yx')$

On retrouve bien la formule de $z\times z'$ dans la définition de $(\mathbb{C}, +, \times)$.

3) conjugué et module

Définitions (suite)

$z = x + iy \in \mathbb{C}, \quad x, y \in \mathbb{R}$

Partie réelle de z $\quad Re(z) = x$

Partie imaginaire de z $\quad Im(z) = y$

(Donc on a : $z = Re(z) + i\, Im(z)$)

Conjugué de z $\quad \bar{z} = x - iy$

Module de z : $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2+y^2}$

Remarque : Si $x \in \mathbb{R}$, alors "module" de x = valeur absolue de x

$|(x+i0)| = \sqrt{(x)^2+(0)^2} = \sqrt{x^2} = |x|$ (Exemples : $|3| = 3$, $|-3| = 3$)

Rappel de la valeur absolue : $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Calcul important sur le conjugué.

$z = x + iy \qquad x, y \in \mathbb{R}$

$$z\bar{z} = (x+iy)(x-iy)$$
$$= x^2 - ixy + iyx - i^2y^2 \qquad \boxed{i^2 = -1}$$
$$= x^2 + y^2 \geq 0$$

Donc la définition $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ est cohérente car $z\bar{z} \in \mathbb{R}^+$ (nombre réel positif).

Remarque sur le conjugué : On veut simplifier $\frac{1}{3+\sqrt{2}}$

On multiplie en haut et en bas par le conjugué

$$\frac{1}{3+\sqrt{2}} = \frac{1 \times (3-\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})} = \frac{3-\sqrt{2}}{(3)^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{3}{7} - \frac{1}{7}\sqrt{2}$$

$(3)^2 - (\sqrt{2})^2 = 9 - 2 = 7$

c'est le conjugué de $3+\sqrt{2}$

Remarque : $\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$

Autre calcul de $z\bar{z}$

$$(z+z')(z-z') = (z)^2 - (z')^2$$

$$z\bar{z} = (x + (iy))(x - (iy)) = (x)^2 - (iy)^2$$
$$= x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2$$

Calcul de $\frac{1}{z}$

$z = x + iy \qquad x, y \in \mathbb{R}$
$(x, y) \neq (0, 0)$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{|z|^2}\bar{z} = \frac{1}{x^2+y^2}(x - iy)$$

Autre calcul

$$\frac{1}{x+iy} = \frac{1 \times (x-iy)}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$$

ATTENTION. N'écrivez jamais :

$\cancel{(x+iy)(x-iy) = x^2 - y^2}$: c'est Faux !!

$(x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2$: c'est Juste (car $i^2 = -1$)

Exemples

$$\frac{1}{2+3i} = \frac{(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{2-3i}{4+9} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$$

quotient :

$$\frac{4+5i}{2+3i} = \frac{(4+5i)(2-3i)}{(2+3i)\ (2-3i)}$$

$$= \frac{8-12i+10i-15i^2}{4+9}$$

$$= \frac{1}{13}(8+15) + \frac{1}{13}(-12+10)i$$

$$= \frac{23}{13} - i\frac{2}{13}$$

Remarque

Théorème fondamental de l'algèbre.

Polynome dans $\mathbb{C}$:

$$P = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$$

$a_k \in \mathbb{C}$. $a_n \neq 0$

P a exactement n racines dans $\mathbb{C}$

$$P = a_n(X - z_1)(X - z_2) \cdot \ldots \cdot (X - z_n)$$

Exemples

$P = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$

$P = X^2 + 1 = X^2 - i^2$

$= (X-i)(X+i)$

$P = X^2 + 4 = X^2 - (2i)^2$

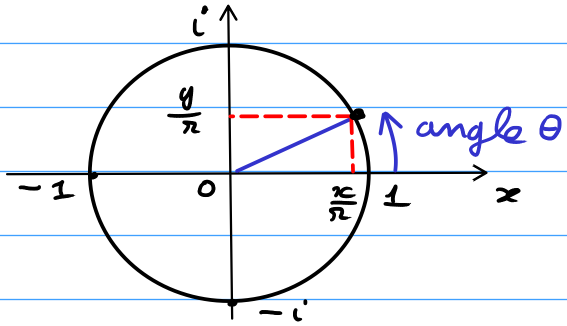
$= (X-2i)(X+2i)$

4) Trigonométrie et nombres complexes.

Définition : Soit $z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$

$z = x + iy \qquad x, y \in \mathbb{R}.$

module de z : $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$



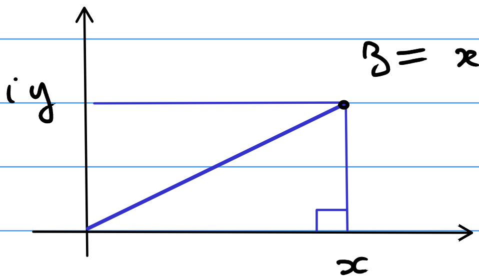
$$\frac{z}{|z|} = \frac{x}{r} + i\,\frac{y}{r}$$

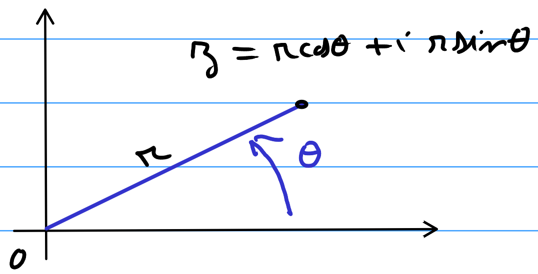
$$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1$$

Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{r} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{r} \\ r = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

θ est appelé l'argument de z $\quad \boxed{\theta = \arg(z)}$





Forme algébrique de z : $z = x + iy$

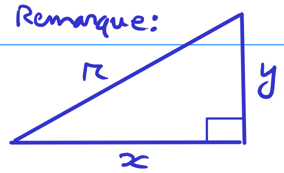
Forme polaire ou **trigonométrique**

$z = r\cos\theta + i\,r\sin\theta$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = r^2 \\ \cos\theta = \dfrac{x}{r} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{r} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

calcul :
$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= (r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 \\ &= r^2(\underbrace{\cos^2\theta + \sin\theta^2}_{=1}) \\ &= r^2 \end{aligned}$$

Remarque :



th Pythagore

$x^2 + y^2 = r^2$

Exemples 1) Soit z défini par $|z| = 2$ et $\arg z = \frac{\pi}{4}$

La forme polaire est donc :

$$\boxed{z = 2\cos\frac{\pi}{4} + i\,2\sin\frac{\pi}{4}}$$

On va calculer la forme algebrique :

On a $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Donc : $z = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + i\,2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Donc on a :

$$\boxed{z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}}$$

2) Soit z' donné par les parties réelles et imaginaires : $\mathrm{Re}(z') = \sqrt{3}$ et $\mathrm{Im}(z') = 1$

Donc la forme algébrique de z' est :

$$\boxed{z' = \sqrt{3} + i}$$

On va calculer la forme polaire de z'.

- On calcule le module de z'

$|z'| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

Donc $\frac{z'}{|z'|} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}$ (1)

La forme polaire de z s'écrit sous la forme :

$z' = r\cos\theta + i\,r\sin\theta$ avec $r = |z|$.

Donc $\frac{z'}{|z'|} = \cos\theta + i\sin\theta$ (2)

En comparant (1) et (2) on a donc :

$\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{2} \end{cases}$ donc $\theta = \frac{\pi}{6}$ ($\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ convient aussi)

La forme polaire de z' est donc

$$\boxed{z' = 2\cos\frac{\pi}{6} + i\,2\sin\frac{\pi}{6}}$$

5) Propriétés algébriques

Pour $u, v \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{Z}$ on a :
($v \neq 0$ si v est au dénominateur)

- **Conjugué :**

$\overline{(u+v)} = \overline{u} + \overline{v}$ $\qquad$ $\overline{(uv)} = \overline{u}\,\overline{v}$

$\overline{(u-v)} = \overline{u} - \overline{v}$ $\qquad$ $\overline{\left(\frac{u}{v}\right)} = \frac{\overline{u}}{\overline{v}}$

Pour $n \in \mathbb{Z}$, $\overline{(u^n)} = (\overline{u})^n$

- **Module**

$|u+v| \leq |u| + |v|$ $\qquad$ (en général, $|u+v| \neq |u| + |v|$)

$||u| - |v|| \leq |u - v|$

$|uv| = |u|\,|v|$ $\qquad$ $\left|\frac{u}{v}\right| = \frac{|u|}{|v|}$

$|u^n| = |u|^n$

- **Argument**

$\arg(uv) = \arg u + \arg v \ (+2k\pi,\ k \in \mathbb{Z})$

$\arg\left(\frac{u}{v}\right) = \arg u - \arg v \ (+2k\pi,\ k \in \mathbb{Z})$

$\arg(u^n) = n \arg(u) \ (+2k\pi,\ k \in \mathbb{Z})$