

## Chapitre 2. Suites numériques

Amir Aboubacar

3 février 2026

# Plan

- 1 Définition et premiers exemples
- 2 Limites de suites
- 3 Comparaison de suites

## Définition

Une **suite numérique** est une **famille infinie de nombres réels**, indexée par les entiers naturels.

On note

$$u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Les éléments de cette famille sont appelées les **termes** de la suite.

## Deux façons de définir une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Les termes d'une suite sont donnés :

- sous forme explicite :

$$u_n = g(n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N};$$

Exemple :  $u_n = 2n + 1$

- par récurrence :  $u_0$  donné et

$$u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Exemple :  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = 1 + 2u_n + u_n^2$

## Sens de variation d'une suite

On dit qu'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est :

- **constante** si

$$u_n = u_{n+1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N};$$

- **croissante** si

$$u_n \leq u_{n+1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N};$$

- **décroissante** si

$$u_n \geq u_{n+1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N};$$

- **strictement croissante (ou décroissante)** si les inégalités sont strictes;
- **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

## Signe d'une suite

On dit qu'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est :

- **nulle** si

$$u_n = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N};$$

- **positive** si

$$u_n \geq 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N};$$

- **négative** si

$$u_n \leq 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N};$$

- **strictement positive (ou négative)** si les inégalités sont strictes.

## En pratique :

Pour étudier les variations d'une suite on utilise les propriétés suivantes :

- ➊ Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante si et seulement si

$$u_{n+1} - u_n \geq 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

- ➋ Une suite **strictement positive**  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante si et seulement si

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

En adaptant les inégalités, ces propriétés peuvent se généraliser aux cas d'une suite décroissante, strictement croissante, strictement décroissante.

## Définition (Propriété vraie à partir d'un certain rang)

On dit qu'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie une propriété  $\mathcal{P}(n)$  à partir d'un certain rang s'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , si  $n \geq n_0$ , alors  $\mathcal{P}(n)$  est vraie.

## Exemples

### ① La suite

$$u_n = \sqrt{n - 4}$$

est définie à partir de  $n_0 = 4$ , on la note  $(u_n)_{n \geq 4}$ .

### ② Montrer que la suite définie par

$$v_n = (n - 5)^2$$

est croissante à partir d'un certain rang.

## Définition (Suite majorée, minorée, bornée)

On dit qu'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est :

- **majorée** s'il existe une constante  $M \in \mathbb{R}$  telle que

$$u_n \leq M \text{ pour tout } n \in \mathbb{N};$$

- **minorée** s'il existe une constante  $M \in \mathbb{R}$  telle que

$$u_n \geq M \text{ pour tout } n \in \mathbb{N};$$

- **bornée** s'il existe une constante  $M \in \mathbb{R}_+$  telle que

$$|u_n| \leq M \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Attention : observez que “il existe  $M$ ” **est avant** “pour tout  $n$ ” !

## Lemme

Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée si et seulement si elle est à la fois majorée et minorée.

## Bornes supérieur et inférieur

Soit  $(u_n)_n$  une suite majorée et  $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ .

- La borne supérieure (ou le supremum) de  $A$  est le plus petit de ses majorants. On note

$$\sup A \text{ ou } \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n.$$

- Une telle borne existe toujours lorsque la suite est bornée et est unique.
- Elle n'appartient pas nécessairement à  $A$ .
- De même, si la suite est minorée, la borne inférieure (ou l'infimum) de  $A$  est le plus grand de ses minorants. On note

$$\inf A \text{ ou } \inf_{n \in \mathbb{N}} u_n.$$

Mathématiquement :

$$M = \sup A$$

ssi  $\{\forall x \in A, x \leq M\}$  et  $\{\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in A : M - \varepsilon \leq x_0\}$

$$m = \inf A$$

ssi  $\{\forall x \in A, x \geq m\}$  et  $\{\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in A : m + \varepsilon \geq x_0\}$

## Représentation graphique

### Définition (suite arithmétique)

On dit que  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est une **suite arithmétique de raison  $r \in \mathbb{R}$**  (définie à partir du rang  $n_0$ ) si

$$u_{n+1} = u_n + r \text{ pour tout } n \geq n_0.$$

### Définition (suite géométrique)

On dit que  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est une **suite géométrique de raison  $q \in \mathbb{R}^*$**  (définie à partir du rang  $n_0$ ) si

$$u_{n+1} = qu_n \text{ pour tout } n \geq n_0.$$

## Proposition

Soit  $(u_n)_{n \geq n_0}$  une suite définie à partir du rang  $n_0$ . Alors :

- ①  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est une suite arithmétique de raison  $r$  si et seulement si elle vérifie

$$u_n = u_{n_0} + r(n - n_0) \text{ pour tout } n \geq n_0.$$

- ② Dans ce cas, on a aussi

$$\sum_{k=n_0}^n u_k = (n - n_0 + 1) \frac{u_{n_0} + u_n}{2}.$$

## Démonstration.



## Proposition

Soit  $(u_n)_{n \geq n_0}$  une suite définie à partir du rang  $n_0$ . Alors :

- ①  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est une suite géométrique de raison  $q$  si et seulement si elle vérifie

$$u_n = q^{n-n_0} u_{n_0} \text{ pour tout } n \geq n_0.$$

- ② Dans ce cas, on a aussi

$$\sum_{k=n_0}^n u_k = \begin{cases} u_{n_0} \frac{1-q^{n-n_0+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ u_{n_0}(n - n_0 + 1) & \text{si } q = 1 \end{cases}.$$

## Définition (suite convergente - limite de suite)

On dit qu'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **convergente**, de **limite** (finie)  $\ell \in \mathbb{R}$  si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \implies |u_n - \ell| < \varepsilon).$$

On note

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell, \text{ ou bien } u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell.$$

Cela signifie :

- « A partir d'un certain rang les termes de  $u_n$  se trouvent dans un intervalle centré en  $\ell$  aussi petit que l'on veut ».
- « quitte à prendre  $n$  assez grand, on peut garantir que  $u_n$  est arbitrairement proche de  $\ell$  ».

## Exemples fondamentaux

- Une suite constante est convergente, de limite sa valeur constante.

- On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

- Si  $|q| < 1$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

- La suite  $u_n = (-1)^n$  n'est pas convergente. On dit qu'elle diverge.

## Démonstration.



## Proposition

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite et  $\ell \in \mathbb{R}$ .

Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

①

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell;$$

②

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - \ell) = 0;$$

③

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \ell| = 0.$$

## Proposition

Une suite convergente est bornée.

La réciproque est fausse, mais on a le résultat suivant :

## Théorème (de la limite monotone)

- Une suite croissante et majorée est convergente.
- De même, une suite décroissante et minorée est convergente.

## Théorème (opérations sur les limites)

On suppose que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell'.$$

Alors :

- ① on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = \ell + \ell' \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n) = \ell \times \ell'.$$

- ② Si  $\ell' \neq 0$ , alors  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est non nulle à partir d'un certain rang. De plus

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{v_n} = \frac{1}{\ell'} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{\ell}{\ell'}.$$

## Démonstration.



## Théorème (limites et fonction continue)

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à valeurs dans un intervalle  $I$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \text{ avec } \ell \in I$$

et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue sur  $I$ . Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell).$$

## Exemple

$$u_n = \frac{1 - \exp(1 - (1/2)^n)}{\sqrt{1 - \sin(1/n^2)}}.$$

## Théorème

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite définie par récurrence, avec

$$u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On suppose que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$$

et que  $f$  est continue en  $\ell$ . Alors

$$f(\ell) = \ell$$

(on dit que  $\ell$  est un **point fixe** de  $f$ ).

## Définition (limite infinie)

On dit qu'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $+\infty$  si

$$\forall M \in \mathbb{R}_+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \implies u_n > M).$$

On le note

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \text{ ou bien } u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty.$$

Cela signifie :

- « A partir d'un certain rang les termes de  $u_n$  sont supérieurs à toute valeur  $M$  aussi grande que l'on veut. ».
- « quitte à prendre  $n$  assez grand, on peut garantir que  $u_n$  est arbitrairement grande. ».

## Définition (limite infinie)

On dit qu'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $-\infty$  si

$$\forall M \in \mathbb{R}_+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \implies u_n < -M).$$

On le note

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \text{ ou bien } u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty.$$

Cela signifie :

- « A partir d'un certain rang les termes de  $u_n$  sont supérieurs à toute valeur  $-M$  aussi petit que l'on veut. ».
- « quitte à prendre  $n$  assez grand, on peut garantir que  $u_n$  est arbitrairement petit. ».

## Exemples

- On a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} (-n) = -\infty.$$

- Plus généralement, une suite arithmétique de raison  $r$  tend vers  $+\infty$  si  $r > 0$  et vers  $-\infty$  si  $r < 0$ .
- Si  $q > 1$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty.$$

## Théorème (limite infinie et somme)

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites.

- Si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty,$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = +\infty.$$

- Si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty,$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = -\infty.$$

• Si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty,$$

alors on ne peut rien dire sur

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n).$$

On parle de **forme indéterminée**.

## Limite et somme (récap)

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

## Limite et multiplication par une constante

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda u_n$	$\lambda \ell$	$\begin{cases} +\infty & \text{si } \lambda > 0 \\ 0 & \text{si } \lambda = 0 \\ -\infty & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} -\infty & \text{si } \lambda > 0 \\ 0 & \text{si } \lambda = 0 \\ +\infty & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$

## Limite et produit

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}_+^*$	$\ell \in \mathbb{R}_+^*$	$\ell \in \mathbb{R}_-^*$	$\ell \in \mathbb{R}_-^*$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n$	$\ell \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

## Théorème (limite et inverse)

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\ell \in \mathbb{R}^*$	$\pm\infty$	0	$0_+$	$0_-$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n}$	$\frac{1}{\ell}$	0	F.I.	$+\infty$	$-\infty$

où on note

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0_+$  ( $u_n$  tend vers 0 par valeurs positives) si  
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$  et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement positive à partir d'un certain rang.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0_-$  ( $u_n$  tend vers 0 par valeurs négatives) si  
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$  et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement négative à partir d'un certain rang.

## Limite et quotient

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	0	$\pm\infty$	$\ell \in \mathbb{R}^*$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\ell' \in \mathbb{R}^*$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	F.I.	F.I.	F.I.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\ell \in \mathbb{R}_+^*$	$\ell \in \mathbb{R}_-^*$	$\ell \in \mathbb{R}_+^*$	$\ell \in \mathbb{R}_-^*$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$0_+$	$0_+$	$0_-$	$0_-$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

## Théorème

Si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

et

$$\lim_{x \rightarrow \ell} f(x) = \ell' \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\},$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \ell'.$$

## Exemples

$$u_n = \frac{n^2 - n}{n^2 + 1} ; \quad v_n = \frac{2 - \exp(-n)}{1 + \sqrt{1/\ln(n)}}.$$

## Passage d'inégalités à la limite

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites, avec

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell'.$$

- ① Si  $u_n \leq v_n$  à partir d'un certain rang, alors  $\ell \leq \ell'$ .
- ② Si  $\ell < \ell'$ , alors  $u_n < v_n$  à partir d'un certain rang.

## Remarques

- C'est valable même avec des limites infinies.
- Attention, même si  $u_n < v_n$ , on n'a pas mieux que  $\ell \leq \ell'$   
(Exemple :  $1 - \frac{1}{n} < 1$ , mais égalité des limites).

## Théorème des gendarmes

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  trois suites. On suppose que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell \in \mathbb{R}$$

et que

$$u_n \leq v_n \leq w_n$$

à partir d'un certain rang. Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell.$$

## Exemple

$$u_n = \frac{\sin(n^2)}{n}.$$

## Théorème

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites, avec  $u_n \leq v_n$  à partir d'un certain rang.

① Si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty,$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty.$$

② Si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty,$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty.$$

## Théorème des suites adjacentes

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites. On suppose que

- ①  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante ;
- ②  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante ;
- ③  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$ .

Sous ces trois conditions, on dit que les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont **adjacentes**.

Et dans ce cas les deux suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont convergentes et de même limite.

## Comparaison avec une suite géométrique

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à coefficients strictement positifs, telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell.$$

① Si  $\ell < 1$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

② Si  $\ell > 1$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

## Croissances comparées

Pour tout entier  $k \in \mathbb{N}^*$  et pour tous nombres réels  $q > 1$  et  $r \in ]-1, 1[$ , on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^k}{q^n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^k r^n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q^n}{n!} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$