L1 IEEEA, 2024-2025 Université de Rouen-Normandie
Mardi 12 novembre 2024

Fiche n° 9 - Partitions, relations d'équivalence, relations d'ordre

v2024-11-12-b

Une **famille** $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments x_i d'un ensemble E, indexée par un ensemble I, l'index, est une application définie sur I à valeurs dans E. Si $I = \mathbb{N}$, alors pour $(x_n)_{i\in\mathbb{N}}$ on dit plutôt que c'est une suite d'éléments de E.

Soit E un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E. On pose

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \left\{x \,\middle|\, \exists i \in I, x \in A_i\right\}, \qquad \bigcap_{i\in I} A_i = \left\{x \,\middle|\, \forall i \in I, x \in A_i\right\}.$$

Une **partition** $(A_i)_{i\in I}$ de E est une famille de parties non vides de E, deux à deux disjoints et dont l'union est E :
• $\forall i \in I, \quad A_i \neq \emptyset$ • $\forall i, j \in I, \quad (A_i \neq A_j) \implies A_i \cap A_j = \emptyset$ • $\bigcup_{i\in I} A_i = E.$

Rappel : Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire définie de E vers E.

- $\mathcal{R}$ est dite **réflexive** si et seulement si : $\forall x \in E, \quad x\,\mathcal{R}\,x$
- $\mathcal{R}$ est dite **symétrique** si et seulement si : $\forall x, y \in E, \quad (x\,\mathcal{R}\,y \Longleftrightarrow y\,\mathcal{R}\,x)$
- $\mathcal{R}$ est dite **anti-symétrique** si et seulement si : $\forall x, y \in E, \quad (x\,\mathcal{R}\,y \text{ et } y\,\mathcal{R}\,x) \Longrightarrow (x = y)$
- $\mathcal{R}$ est dite **transitive** si et seulement si : $\forall x, y, z \in E, \quad (x\,\mathcal{R}\,y \text{ et } y\,\mathcal{R}\,z) \Longrightarrow (x\,\mathcal{R}\,z)$

Une **relation d'équivalence** est une relation qui est à la fois réflexive, symétrique et transitive.
Pour $a \in E$, la **classe** de a est l'ensemble : $\mathrm{cl}(a) = \dot{a} = \{x \in E \,|\, x\,\mathcal{R}\,a\}$.
L'**ensemble quotient** de E par $\mathcal{R}$ est l'ensemble des classes d'équivalence : $E/\mathcal{R} = \{\mathrm{cl}(a) \,|\, a \in E\}$.
La famille de parties de E $(\mathrm{cl}(a))_{a\in E}$ forment une **partition** de E :

Une **relation d'ordre** $\preccurlyeq$ sur un ensemble E est une relation qui est à la fois réflexive, anti-symétrique et transitive. On dit alors que $(E, \preccurlyeq)$ est un ensemble ordonné.

$(E, \preccurlyeq)$ est un ensemble **totalement ordonné** si deux éléments de E sont toujours comparables : pour tout x et y distincts de E, soit $x \preccurlyeq y$ est vrai, soit $y \preccurlyeq x$ est vrai. On dit que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre total.
Sinon, $(E, \preccurlyeq)$ est un ensemble **partiellement ordonné** et on dit que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre partiel.

Exemples : 1) $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$ $(\mathbb{R}, \leq)$ sont des ensembles totalement ordonnés.
2) L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble E muni de l'inclusion est un ensemble ordonné. Il est partiellement ordonné dès qu'il possède au moins deux éléments distincts a et b car $\{a\} \subsetneq \{b\}$ et $\{b\} \subsetneq \{a\}$.

Exercice 1. Montrer que $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i\in I}(A_i \cap B)$ et $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup B = \bigcap_{i\in I}(A_i \cup B)$.

Exercice 2. Décrire les classes d'équivalences dans l'ensemble des entiers de 0 à 20 ($E = [\![0, 20]\!]$) de la relation d'équivalence : Pour $x, y \in E$, $x\,\mathcal{R}\,y$ si et seulement si $(x - y)$ est divisible par 3.

Exercice 3. On définit sur $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la relation suivante :

$$\forall (n, p), (n', p') \in E, \quad ((n, p)\,\mathcal{R}\,(n', p')) \iff (n + p' = n' + p).$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Décrire les classes d'équivalence et l'ensemble quotient $E/\mathcal{R}$.

Exercice 4. (Ordre lexicographique) On note $E = \mathbb{N}^2$, et on définit sur E la relation :
$(n, p) \preccurlyeq (n', p') \iff \Big((n < n') \text{ ou } (n = n' \text{ et } p \leq p')\Big)$.

(a) Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre. Est il un ordre total?

(b) Représenter par un diagramme de Hasse l'ensemble $F = \{(0, 0), (1, 0), (2, 0), (0, 1), (1, 1), (2, 1)\}$ muni de l'ordre lexicographique.

Exercice 5. Pour $n, p \in \mathbb{N}^*$ on définit la relation de divisibilité n divise p (noté $n \,|\, p$) s'il existe un entier $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $p = n\,q$. Montrer que la divisibilité est une relation d'ordre. Est elle une relation d'ordre total? Donner le diagramme de Hasse de la relation de divisibilité pour les entiers de 1 à 9.