

Fiche n° 9 - Partitions, relations d'équivalence, relations d'ordre

v2024-11-12-b

Une **famille** $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments x_i d'un ensemble E , indexée par un ensemble I , l'index, est une application définie sur I à valeurs dans E . Si $I = \mathbb{N}$, alors pour $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on dit plutôt que c'est une suite d'éléments de E .

Soit E un ensemble et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E . On pose

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I, x \in A_i\}, \quad \bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I, x \in A_i\}.$$

Une **partition** $(A_i)_{i \in I}$ de E est une famille de parties non vides de E , deux à deux disjointes et dont l'union est E :

$$\bullet \forall i \in I, A_i \neq \emptyset \quad \bullet \forall i, j \in I, (A_i \neq A_j) \implies A_i \cap A_j = \emptyset \quad \bullet \bigcup_{i \in I} A_i = E.$$

Rappel : Soit \mathcal{R} une relation binaire définie de E vers E .

- \mathcal{R} est dite **réflexive** si et seulement si : $\forall x \in E, x \mathcal{R} x$
- \mathcal{R} est dite **symétrique** si et seulement si : $\forall x, y \in E, (x \mathcal{R} y \iff y \mathcal{R} x)$
- \mathcal{R} est dite **anti-symétrique** si et seulement si : $\forall x, y \in E, (x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} x) \implies (x = y)$
- \mathcal{R} est dite **transitive** si et seulement si : $\forall x, y, z \in E, (x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} z) \implies (x \mathcal{R} z)$

Une **relation d'équivalence** est une relation qui est à la fois réflexive, symétrique et transitive.

Pour $a \in E$, la **classe** de a est l'ensemble : $\text{cl}(a) = \dot{a} = \{x \in E \mid x \mathcal{R} a\}$.

L'**ensemble quotient** de E par \mathcal{R} est l'ensemble des classes d'équivalence : $E/\mathcal{R} = \{\text{cl}(a) \mid a \in E\}$.

La famille de parties de E $(\text{cl}(a))_{a \in E}$ forment une **partition** de E :

Une **relation d'ordre** \preceq sur un ensemble E est une relation qui est à la fois réflexive, anti-symétrique et transitive. On dit alors que (E, \preceq) est un ensemble ordonné.

(E, \preceq) est un ensemble **totalelement ordonné** si deux éléments de E sont toujours comparables : pour tout x et y distincts de E , soit $x \preceq y$ est vrai, soit $y \preceq x$ est vrai. On dit que \preceq est une relation d'ordre total.

Sinon, (E, \preceq) est un ensemble **partiellement ordonné** et on dit que \preceq est une relation d'ordre partiel.

Exemples : 1) (\mathbb{N}, \leq) , (\mathbb{Z}, \leq) , (\mathbb{Q}, \leq) , (\mathbb{R}, \leq) sont des ensembles totalelement ordonnés.

2) L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble E muni de l'inclusion est un ensemble ordonné. Il est partiellement ordonné dès qu'il possède au moins deux éléments distincts a et b car $\{a\} \subsetneq \{b\}$ et $\{b\} \subsetneq \{a\}$.

Exercice 1. Montrer que $(\bigcup_{i \in I} A_i) \cap B = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B)$ et $(\bigcap_{i \in I} A_i) \cup B = \bigcap_{i \in I} (A_i \cup B)$.

Exercice 2. Décrire les classes d'équivalences dans l'ensemble des entiers de 0 à 20 ($E = [0, 20]$) de la relation d'équivalence : Pour $x, y \in E$, $x \mathcal{R} y$ si et seulement si $(x - y)$ est divisible par 3.

Exercice 3. On définit sur $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la relation suivante :

$$\forall (n, p), (n', p') \in E, ((n, p) \mathcal{R} (n', p')) \iff (n + p' = n' + p).$$

Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence. Décrire les classes d'équivalence et l'ensemble quotient E/\mathcal{R} .

Exercice 4. (Ordre lexicographique) On note $E = \mathbb{N}^2$, et on définit sur E la relation :

$$(n, p) \preceq (n', p') \iff ((n < n') \text{ ou } (n = n' \text{ et } p \leq p')).$$

(a) Montrer que \preceq est une relation d'ordre. Est il un ordre total?

(b) Représenter par un diagramme de Hasse l'ensemble $F = \{(0, 0), (1, 0), (2, 0), (0, 1), (1, 1), (2, 1)\}$ muni de l'ordre lexicographique.

Exercice 5. Pour $n, p \in \mathbb{N}^*$ on définit la relation de divisibilité n divise p (noté $n \mid p$) s'il existe un entier $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $p = nq$. Montrer que la divisibilité est une relation d'ordre. Est elle une relation d'ordre total? Donner le diagramme de Hasse de la relation de divisibilité pour les entiers de 1 à 9.