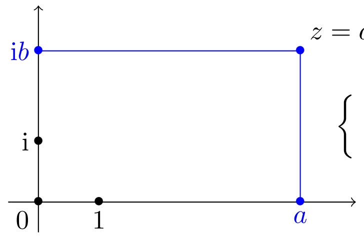
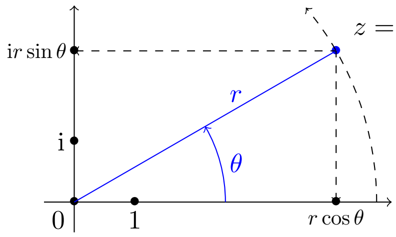
Fiche n° 3 - Exponentielle complexe



$$\begin{cases} a = r\cos\theta \\ b = r\sin\theta \end{cases}$$

Forme algébrique



$$\begin{cases} r = \sqrt{a^2+b^2} \\ \cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

Forme polaire et forme exponentielle

- Exponentielle complexe : $\begin{cases} e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta \\ e^{-\mathrm{i}\theta} = \cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta \end{cases} \iff \begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2}(e^{\mathrm{i}\,\theta} + e^{-\mathrm{i}\,\theta}) \\ \sin\theta = \frac{1}{2\mathrm{i}}(e^{\mathrm{i}\,\theta} - e^{-\mathrm{i}\,\theta}) \end{cases}$

- Opérations : $e^{\mathrm{i}\theta} \times e^{\mathrm{i}\theta'} = e^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}$, $\left(e^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = e^{\mathrm{i}\,n\,\theta}$, $\dfrac{1}{e^{\mathrm{i}\theta'}} = e^{-\mathrm{i}\theta'}$, $\dfrac{e^{\mathrm{i}\theta}}{e^{\mathrm{i}\theta'}} = e^{\mathrm{i}(\theta-\theta')}$,
  $(r\,e^{\mathrm{i}\theta}) \times (r'\,e^{\mathrm{i}\theta'}) = (r\,r')\,e^{i(\theta+\theta')}$, $(r\,e^{\mathrm{i}\theta})^n = r^n\,e^{\mathrm{i}\,n\,\theta}$, $\dfrac{1}{r'\,e^{\mathrm{i}\theta'}} = \dfrac{1}{r'}\,e^{-i\theta'}$, $\dfrac{r\,e^{\mathrm{i}\theta}}{r'\,e^{\mathrm{i}\theta'}} = \dfrac{r}{r'}\,e^{i(\theta-\theta')}$

- Racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité : On pose $z = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$. Les solutions de l'équation $X^n = 1$ sont exactement l'ensemble :
  $\mathbb{U}_n = \left\{1, z, z^2, \ldots, z^{n-1}\right\} = \left\{e^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \,\middle|\, k = 0, 1, 2, \ldots, n-1\right\}$.

Exercice 1. (a) Donner la forme polaire et exponentielle des nombres complexes : $z_1 = -1 + \mathrm{i}$ et $z_2 = \sqrt{3} + \mathrm{i}3$.
En déduire $z_1\,z_2$, z_1/z_2, z_1^3.
(b) Donner la forme algébrique des nombres complexes : $z_1 = 2\,(\cos(3\pi/4) + \mathrm{i}\sin(3\pi/4))$ et $z_2 = 3e^{-\mathrm{i}\pi/6}$.
En déduire $\mathrm{Re}\,(z_1 + z_2)$ et $\mathrm{Im}\,(z_1 + z_2)$.

Exercice 2. (a) Pour $\theta \in \mathbb{R}$, développer $\left(\frac{1}{2}(e^{\mathrm{i}\theta} + e^{-\mathrm{i}\theta})\right)^3$ et en déduire $\cos^3\theta$ en fonction d'une somme de fonctions $\cos(k\,\theta)$ et/ou $\sin(k\,\theta)$, $k \in \mathbb{Z}$.
(b) Pour $\theta \in \mathbb{R}$, développer $(\cos\theta + \mathrm{i}\,\sin\theta)^3$ et en déduire une expression de $\sin(3\,\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et/ou $\sin\theta$.

Exercice 3. (a) On pose $j = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$. Calculer j^k et $(\bar{j})^k$ pour $k = 0, 1, 2, 3$. En déduire la valeur de j^k et $(\bar{j})^k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Donner la table de multiplication des éléments de $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$. Placer ces éléments dans le plan complexe.
(b) Calculer i^k et $(\bar{\mathrm{i}})^k$ pour $k = 0, 1, 2, 3, 4$. En déduire la valeur de i^k et $(\bar{\mathrm{i}})^k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Donner la table de multiplication des éléments de $\mathbb{U}_4 = \{1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}\}$. Placer ces éléments dans le plan complexe.
(c) On pose $z = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$. Calculer z^k pour $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. En déduire la valeur de z^k pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Donner la table de multiplication des éléments de $\mathbb{U}_6 = \{z^k \,|\, 0 \le k \le 5\}$. Placer les éléments de $\mathbb{U}_6$ dans le plan complexe.

Table 1: Tables de multiplication de $\mathbb{U}_3$, $\mathbb{U}_4$ et $\mathbb{U}_6$

$\times$	1	j	j^2
1			
j			
j^2			

$\times$	1	i	-1	$-\mathrm{i}$
1				
i				
-1				
$-\mathrm{i}$				

$\times$	1	z	z^2	z^3	z^4	z^5
1						
z						
z^2						
z^3						
z^4						
z^5						

Exercice 4. (a) Pour $\theta \in \mathbb{R}$, montrer que : $e^{\mathrm{i}\,\theta} + 1 = 2\,e^{\frac{1}{2}\mathrm{i}\,\theta}\cos(\theta/2)$ et $e^{\mathrm{i}\,\theta} - 1 = 2\,\mathrm{i}\,e^{\frac{1}{2}\mathrm{i}\,\theta}\sin(\theta/2)$.
(b) Pour z nombre complexe, $z \neq 1$ et n entier natuel, montrer que : $\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$.
(c) Pour $\theta \neq 2\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, en déduire une valeur explicite simple des sommes : $\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)$ et $\sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta)$.