**L1 IEEEA - Séance de révision - Mercredi 11/12/2024**

**Fiche de TD 12**

Exercice 1. $f_0 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ $\quad f_0(x) = -x$, $x \in \mathbb{R}^+$

Par récurrence $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ $\quad n \in \mathbb{N}$

$x \in \mathbb{R}^+$ $\quad f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{2 - f_n(x)}$ $\quad (f_n(x) \neq 2)$

a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f_n(x) \leq 1$. $\quad (*)$

Réponse :

Initialisation :

$n = 0$. Soit $x \in \mathbb{R}^+$ $\quad f_0(x) = -x \leq 0 \leq 1$ (car $x \geq 0$).

Hérédité : On suppose que $(*)$ est vrai pour $n \in \mathbb{N}$.

$\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\quad f_n(x) \leq 1$.

Donc $f_n(x) \neq 2$ donc $f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{2 - f_n(x)}$ est bien défini.

Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

$f_n(x) \leq 1$ donc $-f_n(x) \geq -1$

puis $2 - f_n(x) \geq 2 - 1 = 1 > 0$

donc $\dfrac{1}{2 - f_n(x)} \leq 1$

et enfin $f_{n+1}(x) \leq 1$

Conclusion $(*)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Rappels

$a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$

Si $a \leq b$ alors $-b \leq -a$
$\quad a < b \qquad -b < -a$

Si $a \leq b$, alors $a + c \leq b + c$

Si $a \leq b$ et $c \geq 0$ alors $ac \leq bc$

Si $a < b$ et $c > 0$ alors $ac < bc$

Si $0 < a \leq b$ alors $0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$

$$\begin{array}{c} a \leq b \leq c \\ a' \leq b' \leq c' \\ \hline a + a' \leq b + b' \leq c + c' \end{array} \qquad \begin{array}{c} 0 < a \leq b \leq c \\ 0 < a' \leq b' \leq c' \\ \hline 0 < aa' \leq bb' \leq cc' \end{array}$$

etc...

b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in \mathbb{R}^+, \ f_n(x) = \dfrac{(n-1)x+n}{nx+(n+1)}$ (**)

Réponse

Initialisation

$n=0$, pour $x \in \mathbb{R}^+$, $f_0(x) = \dfrac{(0-1)x+0}{0x+(0+1)} = -x$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que (**) est vrai pour $n$ :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f_n(x) = \frac{(n-1)x+n}{nx+(n+1)}$$

$$f_{n+1}(x) = \frac{1}{2-f_n(x)} = \frac{1 \times (nx+(n+1))}{\left(2-\left(\frac{(n-1)x+n}{nx+(n+1)}\right)\right) \times (nx+(n+1))}$$

$$= \frac{nx+(n+1)}{2(nx+n+1)-((n-1)x+n)} = \frac{nx+(n+1)}{(n+1)x+(n+2)}$$

$\begin{pmatrix} 2n-(n-1) = 2n-n+1 = n+1 \\ 2n+2-n = n+2 \end{pmatrix}$

Donc (**) est vrai pour $n+1$.

Conclusion : (**) est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$

$A = [1, 3]$, $B = [-2, 2]$

(a) Déterminer $f(A)$.

Soit $x \in A$.

$$1 \leq x \leq 3$$

$$0 < 1^2 \leq x^2 \leq 3^2$$

$$0 < \frac{1}{3^2} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{1^2}$$

donc $f(x) \in [\frac{1}{9}, 1]$. $f(A) \subset [\frac{1}{9}, 1]$

Soit $y \in [\frac{1}{9}, 1]$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$ : $f(x) = y \iff \frac{1}{x^2} = y$

$\iff x^2 = \frac{1}{y}$

$\iff x = \sqrt{1/y}$

ou $x = -\sqrt{1/y}$

On pose $x = \sqrt{\frac{1}{y}}$

comme $0 < \frac{1}{9} \leq y \leq 1$, $1 \leq \frac{1}{y} \leq 9$

$1 \leq \sqrt{\frac{1}{y}} \leq \sqrt{9}$ $\quad 1 \leq x \leq 3$

donc $y \in f(A)$ (car $y = f(x)$ et $x \in A$)

donc $[\frac{1}{9}, 1] \subset f(A)$ donc $f(A) = [\frac{1}{9}, 1]$

<u>Rédaction plus courte.</u>

- Soit $x \in A$. donc $1 \leq x \leq 3$
  donc $\frac{1}{9} \leq \frac{1}{x^2} \leq 1$ donc $f(x) \in [\frac{1}{9}, 1]$
  donc $f(A) \subset [\frac{1}{9}, 1]$
- Soit $y \in [\frac{1}{9}, 1]$. On pose $x = \frac{1}{\sqrt{y}}$
  on a $\frac{1}{9} \leq y \leq 1$ donc $1 \leq \frac{1}{\sqrt{y}} \leq 3$
  puis $x \in A$ et $f(x) = y$
  donc $y \in f(A)$. donc $[\frac{1}{9}, 1] \subset A$
- conclusion: $f(A) = [\frac{1}{9}, 1]$

(b) Déterminer $f^{-1}(B)$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$

$$x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B$$
$$\iff -2 \leq \frac{1}{x^2} \leq 2$$
$$\iff 0 < \frac{1}{x^2} \leq 2$$
$$\iff 0 < \frac{1}{2} \leq x^2$$
$$\iff \frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \text{ ou } x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\iff x \in \left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$$

$$f^{-1}(B) = \left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$$

<u>Exercice 3</u> $f : E \to F$, $C, D \subset F$

(a) Montrer $f^{-1}(C \cup D) \subset f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

<u>Réponse</u>

Soit $x \in E$

$$x \in f^{-1}(C \cup D) \iff f(x) \in C \cup D$$
$$\iff f(x) \in C \text{ ou } f(x) \in D$$
$$\iff x \in f^{-1}(C) \text{ ou } x \in f^{-1}(D)$$
$$\iff x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$$

Donc $f^{-1}(C \cup D) \subset f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

(b) Montrer que $f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) \subset f^{-1}(C \cup D)$

$$x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) \Longrightarrow x \in f^{-1}(C) \text{ ou } x \in f^{-1}(D)$$
$$\Longrightarrow f(x) \in C \text{ ou } f(x) \in D$$
$$\Longrightarrow f(x) \in C \cup D$$
$$\Longrightarrow x \in f^{-1}(C \cup D)$$

Donc $f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) \subset f^{-1}(C \cup D)$

Exercice 4 Sur $\mathbb{Z}$

$x, y \in \mathbb{R}$ : $x \mathcal{R} y \Longleftrightarrow x^2 - y^2 = 2x - 2y$

(a) $\mathcal{R}$ réflexive : Soit $x \in \mathbb{Z}$

$$x \mathcal{R} x \Longleftrightarrow x^2 - x^2 = 2x - 2x$$
$$\Longleftrightarrow 0 = 0$$ donc $x \mathcal{R} x$ vraie.

(b) $\mathcal{R}$ symétrique : Soit $x, y \in \mathbb{Z}$

$$x \mathcal{R} y \Longrightarrow x^2 - y^2 = 2x - 2y$$
$$\Longrightarrow y^2 - x^2 = 2y - 2x$$
$$\Longrightarrow y \mathcal{R} x$$

(c) $\mathcal{R}$ transitive : Soient $x, y, z \in \mathbb{Z}$

On suppose que $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$

$$x^2 - y^2 = 2x - 2y$$
$$y^2 - z^2 = 2y - 2z$$

$$(x^2 - y^2) + (y^2 - z^2) = (2x - 2y) + (2y - 2z)$$
$$x^2 - z^2 = 2x - 2z$$ donc $x \mathcal{R} z$ vraie

(d) Conclusion : $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

(e) $cl(0) = \{x \in \mathbb{Z} , xR0\}$

Soit $x \in \mathbb{Z}$ $\quad xR0 \iff x^2 - 0^2 = 2x - 2\cdot 0$

$\iff x^2 - 2x = 0$

$\iff x(x-2) = 0$

$\iff x = 0$ ou $x = 2$

$cl(0) = \{0, 2\}$

$cl(1)$ : $\quad xR1 \iff x^2 - 1^2 = 2x - 2\times 1$

$\iff x^2 - 2x + 1 = 0$

$\iff x = 1$

$cl(1) = \{1\}$

(f) $\quad a \in \mathbb{Z} \quad cl(a)$ ?

Soit $x \in \mathbb{Z}$, $\quad xRa \iff x^2 - a^2 = 2x - 2a$

$\iff (x-a)(x+a) = 2(x-a)$

$\left( \iff (x-a)(x+a) - 2(x-a) = 0 \right.$

$\left. \iff (x-a)((x+a)-2) = 0 \right)$

$\iff (x-a)(x+a-2) = 0$

$\iff x = a$ ou $x = 2-a$

$cl(a) = \{a, 2-a\}$

$cl(0) = \{0, 2\}$ $\quad cl(1) = \{1, 1\} = \{1\}$

$\shortparallel$ $cl(2) = \{2, 0\}$ $\quad cl(3) = \{3, -1\} = cl(-1)$

Ensemble quotient :

$$\mathbb{Z}/_R = \{ \{a, 2-a\} , a \in \mathbb{Z} \}$$

$$= \{ \{a, 2-a\} , a \in \mathbb{N}^* \}$$

Exercice 5 : Sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ $(= \mathbb{R}^{+2})$

$$(x,y) \mathcal{R} (x',y') \iff \begin{cases} x^2+y^2 \leq x'^2+y'^2 \\ \text{et } x \leq x' \end{cases}$$

- $\mathcal{R}$ est réflexive. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^{+2}$

$$(x,y) \mathcal{R} (x,y) \iff \begin{cases} x^2+y^2 \leq x^2+y^2 \\ \text{et } x \leq x \end{cases}$$

donc $(x,y)\mathcal{R}(x,y)$ est toujours vrai.

- $\mathcal{R}$ est antisymétrique : Soient $(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^{+2}$

On suppose que : $(x,y)\mathcal{R}(x',y')$ et $(x',y')\mathcal{R}(x,y)$

$$\begin{cases} x^2+y^2 \leq x'^2+y'^2 \\ x \leq x' \end{cases} \qquad \begin{cases} x'^2+y'^2 \leq x^2+y^2 \\ x' \leq x \end{cases}$$

$x \leq x'$ et $x' \leq x$ donc $x = x'$

$x^2+y^2 \leq x'^2+y'^2 = x^2+y'^2$ donc $y^2 \leq y'^2$

$x'^2+y'^2 \leq x^2+y^2 = x'^2+y^2$ donc $y'^2 \leq y^2$

donc $y'^2 = y^2$ donc $y = y'$ ou $y = -y'$

Si $y = -y'$ alors, comme $y \geq 0$ et $y' \leq 0$ on a $-y' \leq 0$ donc $y \leq 0$ donc $y = 0$ donc $y' = y$ $(=0)$

Donc dans tous les cas $y = y'$.

- $\mathcal{R}$ est transitive Soient $(x,y), (x',y'), (x'',y'') \in \mathbb{R}^{+2}$

On suppose que : $(x,y)\mathcal{R}(x',y')$ et $(x',y')\mathcal{R}(x'',y'')$

Donc $x^2+y^2 \leq x'^2+y'^2$ et $x'^2+y'^2 \leq x''^2+y''^2$

donc $x^2+y^2 \leq x''^2+y''^2$

et $x \leq x'$ et $x' \leq x''$ donc $x \leq x''$

Donc $(x,y)\mathcal{R}(x'',y'')$.

$\mathcal{R}$ est réflexive, antisymétrique et transitive donc $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

(NB : dans $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$, $\mathcal{R}$ n'est pas antisymétrique et donc n'est pas une relation d'ordre)

## Exercice 6

(a) Dans $(\mathbb{R}, \leq)$, déterminer la borne inférieure et le plus petit élément, s'ils existent de

$A = \{x \in \mathbb{R},\ x^2 < 2\}$ $\qquad$ $B = \{x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 2\}$

Réponse. Pour $x \in \mathbb{R}$

$x \in A \iff x^2 < 2$

$\iff (x \leq 0 \text{ ou } x \geqslant 0) \text{ et } (x^2 < 2)$

$\iff (x \leq 0 \text{ et } x^2 < 2) \text{ ou } (x \geqslant 0 \text{ et } x^2 < 2)$

$\iff x \in [-\sqrt{2}, 0] \text{ ou } x \in [0, \sqrt{2}]$

$\iff x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

Donc $A = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

Donc $\inf A = \min A = -\sqrt{2}$

De même pour $x \in \mathbb{R}$

$x \in B \iff x \notin A$

$\iff x \in \mathbb{R} \setminus [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

$\iff x \in ]-\infty, -\sqrt{2}[ \cup ]\sqrt{2}, +\infty[$

Donc $B = ]-\infty, -\sqrt{2}[ \cup ]\sqrt{2}, +\infty[$

Si par l'absurde $m$ est une borne inférieure de $B$, alors

$\forall x \in ]-\infty, -\sqrt{2}[, \quad m \leq x$

donc $m$ serait une borne inférieure de $]-\infty, -\sqrt{2}[$. Impossible.

$B$ n'a pas de borne inférieure, et donc n'a pas de min.

(b) Dans $(\mathbb{N}^*, \leq)$ déterminer la borne supérieure et le plus grand élément, s'ils existent, de

$C = \{n \in \mathbb{N}^*, \frac{10}{n^2} > 1\}$ et $D = \{n \in \mathbb{N}^*, \frac{10}{n^2} \leq 1\}$

<u>Réponse</u> Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$n \in C \iff \frac{10}{n^2} > 1$

$\iff n^2 < 10$

$\iff n < \sqrt{10}$

Comme $9 < 10 < 16$, on a $3 < \sqrt{10} < 4$

donc $n \in C \iff n \leq 3$

Donc $C = \{1, 2, 3\}$ et $\sup C = \max C = 3$

$n \in D \iff \frac{10}{n^2} \leq 1$

$\iff 10 \leq n^2$

$\iff \sqrt{10} \leq n$

Comme $3 < \sqrt{10} < 4$, on a

$n \in D \iff 4 \leq n$

Donc $D = \{n \in \mathbb{N}^*, 4 \leq n\} = [\![4, +\infty[\![$.

D n'a pas de borne inférieure et donc pas de plus grand élément.

Exercice 7 $\quad \mathbb{R} \quad x*y = \ln(e^x+e^y)$

$x, y, z \in \mathbb{R}$

$*$ est commutative

$$x*y = \ln(e^x+e^y) = \ln(e^y+e^x) = y*x$$

$*$ est associative

$$A = (x*y)*z = (\ln(e^x+e^y))*z$$
$$= \ln\left(e^{(\ln(e^x+e^y))} + e^z\right)$$
$$= \ln((e^x+e^y)+e^z)$$

on utilise $\forall x>0,\ e^{\ln x} = x$

$$B = x*(y*z) = x*(\ln(e^y+e^z))$$
$$= \ln\left(e^x + e^{(\ln(e^y+e^z))}\right)$$
$$= \ln(e^x+(e^y+e^z))$$

donc $A = B$

Élément neutre : Si par l'absurde $a \in \mathbb{R}$ élément neutre pour $*$, alors $a*a = a$

Donc $\ln(e^a+e^a) = a$. Comme $e^a+e^a = 2e^{a}$

on a $\ln(2\times e^a) = a$ donc

$\ln 2 + \ln(e^a) = a$ donc $\ln 2 + a = a$ donc

$\ln 2 = 0$ Impossible.

Donc $*$ n'a pas d'élément neutre.

Autre solution. Si par l'absurde $*$ a un élément neutre $a \in \mathbb{R}$, alors $a*0 = 0$

$\ln(e^a+e^0) = 0$ donc $e^a+e^0 = 1$

$e^a+1 = 1$ donc $e^a = 0$ Impossible car $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$.

## Exercice 8 — $\rho = e^{i\frac{2\pi}{5}}$ $\quad \mathbb{U}_5 = \{ \rho^n,\ n \in \mathbb{Z} \}$

(a) Pour $n \in \mathbb{Z}$, il existe $p \in \mathbb{Z}$, $r \in \{0,1,2,3,4\}$ (uniques) tels que $n = 5p + r$

Simplifier $\rho^n$ et montrer que

$$\mathbb{U}_5 = \{1, \rho, \rho^2, \rho^3, \rho^4\}$$

**Réponse.** $\rho^n = \left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^n = e^{i\frac{2\pi}{5}(5p+r)}$

$$\rho^n = e^{i2\pi p + i\frac{2\pi}{5} r} = \left(e^{i2\pi}\right)^p \times e^{i\frac{2\pi}{5} r}$$

$$\rho^n = (1)^p \times \left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^r = \rho^r \quad \text{avec } r \in \{0,1,2,3,4\}$$

Donc $\mathbb{U}_5 = \{1, \rho, \rho^2, \rho^3, \rho^4\}$.

(b) Donner la table de multiplication de $(\mathbb{U}_5, \times)$

**Réponse**

| $\times$ | $1$ | $\rho$ | $\rho^2$ | $\rho^3$ | $\rho^4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $1$ | $1$ | $\rho$ | $\rho^2$ | $\rho^3$ | $\rho^4$ |
| $\rho$ | $\rho$ | $\rho^2$ | $\rho^3$ | $\rho^4$ | $1$ |
| $\rho^2$ | $\rho^2$ | $\rho^3$ | $\rho^4$ | $1$ | $\rho$ |
| $\rho^3$ | $\rho^3$ | $\rho^4$ | $1$ | $\rho$ | $\rho^2$ |
| $\rho^4$ | $\rho^4$ | $1$ | $\rho$ | $\rho^2$ | $\rho^3$ |

$$\rho\rho^4 = \rho^2\rho^3 = \rho^3\rho^2 = \rho^4\rho = \rho^5 = 1$$

$$\rho^2\rho^4 = \rho^3\rho^3 = \rho^4\rho^2 = \rho^5\rho = \rho$$

$$\rho^3\rho^4 = \rho^4\rho^3 = \rho^5\rho^2 = \rho^2$$

$$\rho^4\rho^4 = \rho^8 = \rho^5\rho^3 = \rho^3$$