L1 IEEEA - LSA, 2025-2026 Université de Rouen-Normandie

Lundi 3 novembre 2025

Fiche n° 8 - Relations d'équivalence v2025-11-04
Classes d'équivalence - ensemble quotient

Une **relation binaire** $\mathcal{R}$ d'un ensemble E vers un ensemble F est une partie G du produit cartésien $E \times F$.
On dit que x est en relation avec y si et seulement si $(x, y) \in G$. On note alors : $x \,\mathcal{R}\, y$.
L'ensemble G (noté ausi et seulement si $G_{\mathcal{R}}$) est le **graphe** de la relation $\mathcal{R}$.

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire définie de E vers E (on alors dit que $\mathcal{R}$ une relation binaire interne sur E).

- $\mathcal{R}$ est dite **réflexive** si et seulement si : $\forall x \in E, \quad x \,\mathcal{R}\, x$
- $\mathcal{R}$ est dite **symétrique** si et seulement si : $\forall x, y \in E, \quad (x \,\mathcal{R}\, y \Longleftrightarrow y \,\mathcal{R}\, x)$
- $\mathcal{R}$ est dite **anti-symétrique** si et seulement si : $\forall x, y \in E, \quad (x \,\mathcal{R}\, y \text{ et } y \,\mathcal{R}\, x) \Longrightarrow (x = y)$
- $\mathcal{R}$ est dite **transitive** si et seulement si : $\forall x, y, z \in E, \quad (x \,\mathcal{R}\, y \text{ et } y \,\mathcal{R}\, z) \Longrightarrow (x \,\mathcal{R}\, z)$

Une **relation d'équivalence** est une relation qui est à la fois réflexive, symétrique et transitive.
Pour $a \in E$, on appelle **classe** de a et on note $\mathrm{cl}(a)$ (ou bien $\dot{a}$) l'ensemble : $\mathrm{cl}(a) = \dot{a} = \{x \in E \,|\, x \,\mathcal{R}\, a\}$.

Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E, alors pour tout $x, y \in E$ on a les propriétés suivantes pour tout $a, b \in E$:

- $a \in \mathrm{cl}(a) \quad$ et $\quad b \in \mathrm{cl}(a) \Longleftrightarrow b \,\mathcal{R}\, a \Longleftrightarrow a \,\mathcal{R}\, b \Longleftrightarrow a \in \mathrm{cl}(b)$

On note alors $E/\mathcal{R} = \{\mathrm{cl}(a) \,|\, a \in E\}$ l'ensemble des classes d'équivalence (appelé l'**ensemble quotient** de E par $\mathcal{R}$).
La famille des classes $(\mathrm{cl}(a))_{a \in E}$ forment une **partition** de E : En effet :

- Les classes sont non vides : pour tout $a \in E$ on a $\mathrm{cl}(a) \neq \emptyset$ car $a \in \mathrm{cl}(a)$.
- Les classes sont disjointes 2 à 2 : pour tout $a, b \in E$, soit $\mathrm{cl}(a) \cap \mathrm{cl}(b) = \emptyset$, soit $\mathrm{cl}(a) = \mathrm{cl}(b)$.
- La réunion de toutes les classes de E est E tout entier : $\displaystyle\bigcup_{a \in E} \mathrm{cl}(a) = E$.

Exercice 1. On considère $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. On considère la relation binaire définie par le graphe :
$\mathcal{R} = \{(0,0), (0,2), (0,4), (1,1), (1,3), (2,0), (2,2), (2,4), (3,1), (3,3), (4,0), (4,2), (4,4)\}$.
Dessiner le diagramme sagittal de $\mathcal{R}$ et vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
Déterminer les classes d'équivalence et l'ensemble quotient $E/\mathcal{R}$.

Exercice 2. On définit sur $\mathbb{Z}$ la relation suivante :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \quad (x \,\mathcal{R}\, y) \iff (x - y \quad \text{est multiple de } 3).$$

On rappelle le principe de la division euclidienne par 3 : pour tout entier n il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que $n = 3\,q + r$ avec $0 \leq r < 3$.

(a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

(b) Déterminer l'ensemble quotient des classes d'équivalence $\mathbb{Z}/\mathcal{R}$ (noté $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$) et décrire la partition de $\mathbb{Z}$ par les classes d'équivalence.

Exercice 3. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. Montrer que les classes d'équivalences sont disjointes 2 à 2 : pour tout $a, b \in E$, soit $\mathrm{cl}(a) \cap \mathrm{cl}(b) = \emptyset$, soit $\mathrm{cl}(a) = \mathrm{cl}(b)$.

Exercice 4. (*) On définit sur $\mathbb{N}^2$ la relation suivante :

$$\forall (n, p), (n', p') \in \mathbb{N}^2, \quad (n, p) \,\mathcal{R}\, (n', p') \iff (n + p' = n' + p).$$

(a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

(b) Déterminer l'ensemble quotient des classes d'équivalence $\mathbb{N}^2/\mathcal{R}$ et décrire (géométriquement) la partition de $\mathbb{N}^2$ par les classes d'équivalence.

Exercice 5. (*) On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation suivante :

$$\forall ((x, y), (a, b)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \,\mathcal{R}\, (a, b) \quad \text{si et seulement si} \quad x^2 + y^2 = a^2 + b^2.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Décrire la partition de $\mathbb{R}^2$ par les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$ et l'ensemble quotient $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$.