L1 IEEEA, **2024-2025** Université de Rouen-Normandie
Lundi 25 novembre 2024

Fiche n° 11 - Lois de compositions internes et groupes

v2024-11-25

Soit E un ensemble non vide. Une **loi de composition interne** sur E (ℓ.c.i.) est une application $f : E \times E \mapsto E$.
Pour $x, y \in E$, l'opération $f(x,y)$ est notée sous forme d'opérateur binaire : $f(x,y) = x * y$ (par exemple).
Soit $(E, *)$ un ensemble muni d'une ℓ.c.i.

- ($*$ est commutative) $\Longleftrightarrow \big(\forall x, y \in E,\ x * y = y * x\big)$
- ($*$ est associative) $\Longleftrightarrow \big(\forall x, y, z \in E,\ (x * y) * z = x * (y * z)\big)$
- ($*$ possède un élément neutre) $\Longleftrightarrow \big(\exists e \in E,\ \forall x \in E,\ x * e = e * x = x\big)$
- Si e élément neutre et $x \in E$, alors : (x a un élément symétrique) $\Longleftrightarrow (\exists x' \in E,\ x * x' = x' * x = e)$

Un ensemble $(g, *)$ muni d'une ℓ.c.i. est un **groupe** si et seulement si la loi $*$ est associative, possède un élément neutre et tout élément $x \in G$ possède un symétrique (noté $-x$ ou x^{-1}).
Si de plus la loi $*$ est commutative, $(G, *)$ est dit groupe **commutatif** ou groupe **abélien**.

Soit $(G, *)$ un groupe et $H \subset G$ telle que :

- $\forall x, y \in H,\ x * y \in H$.
- $\forall x \in H,\ x^{-1} \in H$.

Alors $(H, *)$ muni de la restriction de $*$ à $H \times H$ est un groupe. Il est appelé aussi un **sous-groupe** de G.

Soient $(G, *)$ et $(H, \otimes)$ deux groupes. Une application $f : G \mapsto H$ est appelée un **morphisme** si et seulement si :

$$\forall x, y \in G,\ f(x * y) = f(x) \otimes f(y).$$

Si en plus f est bijective, alors f est un **isomorphisme**.

Exercice 1. Déterminer si les opérations suivantes sont des lois de composition interne pour les ensembles suivants:
(a) $\mathbb{Z}$ muni de $x \star y = x + y + x\,y$
(b) $\mathbb{Z}$ muni de $x \star y = \frac{xy}{1+x^2+y^2}$
(c)]-1,1[muni de $x \oplus y = \frac{x+y}{1+x\,y}$
(d) $E = \{V, F\}$ muni de “et”, puis de “ou”
(e) $\mathcal{P}(E)$ muni de $\cap$, puis de $\cup$
(f) E^E muni de la composition $\circ$

Exercice 2. Etudier les propriétés des lois de composition interne des exemples dans l'exercice précédent (lorsqu'il s'agit bien d'une l.c.i.) : commutativité, associativité, existence d'un élément neutre et d'un élément symétrique.
En déduire s'il s'agit de groupe ou pas.

Exercice 3. Montrer que $G = \{-1, 1\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$ et que l'application $\varphi(x) = \text{signe}(x)$ est un morphisme de groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$ dans $(G, \times)$.

Exercice 4. Les ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*$ munis des lois $+$ ou $\times$ sont-ils des groupes ?
Traduire en termes d'homomorphisme de groupes les propriétés traditionnelles suivantes :
(a) $\ln(x \times y) = \ln x + \ln y$; (b) $e^{x+y} = e^x \times e^y$; (c) $(x \times y)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} \times y^{\frac{1}{2}}$.

Exercice 5. Soit $E = \{a, b\}$ un ensemble à deux éléments. On cherche à déterminer toutes les structures de groupes sur cet ensemble.
(a) Si a est l'élément neutre, quel doit être le symétrique de b ? En déduire la table de Pythagore dans ce cas.
(b) Combien y a-t-il de structures de groupes différentes sur E ?

Exercice 6. Soient $(G, \star)$ et $(H, \triangle)$ deux groupes. On définit sur $G \times H$ la loi $\top$ par $(x, y) \top (x', y') = (x \star x', y \triangle y')$.
Montrer que $(G \times H, \top)$ est un groupe.

Exercice 7. Montre que $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ est un groupe pour la loi $\circ$ où les fonctions$f_i : \mathbb{R}^* \mapsto \mathbb{R}^*$ sont données par

$$f_1(x) = x \qquad f_2(x) = \frac{1}{x} \qquad f_3(x) = -x \qquad f_4(x) = -\frac{1}{x}.$$

Etablir la table de Pythagore.

Exercice 8. Soit G un groupe. Montrer que l'application $x \to x^{-1}$ est un morphisme si et seulement si G est commutatif.