L1 IEEEA, 2024-2025
Université de Rouen

NOM	**Prénom**
Groupe de TD :	**Numéro :**

Note sur 20:

Contrôle continu n° 2 (v4)
UE Logique et structures algébriques
Lundi 16 décembre 2024 - 13h30-15h30 - Documents et calculatrices interdites

---

Exercice 1. On pose $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f_0(x) = x$ et on définit par récurrence la suite de fonctions pour $n \in \mathbb{N}$ et pour $x \in \mathbb{R}$ par la relation : $f_{n+1}(x) = 2\, f_n(x) + 1$.

(a) Montrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = 2^n\, x + (2^n - 1)$.

(b) En remarquant que pour $n \in \mathbb{N}$ on a $f_{n+1} = f_1 \circ f_n$, donner directement sans faire de calculs la valeur explicite de $(f_1 \circ f_1 \circ f_1 \circ f_1)(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$:

$(f_1 \circ f_1 \circ f_1 \circ f_1)(x) =$

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$.
(a) Déterminer $f^{-1}([-2, 3])$ (en le justifiant).

(b) Déterminer $f([-1, 2])$ (en le justifiant).

Exercice 3. On considère l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 5 \quad \text{ou} \quad x > 4\}$.
(a) Expliciter l'ensemble A en termes d'intervalles de $\mathbb{R}$.

(b) Dans $(\mathbb{R}, \leq)$, déterminer la borne inférieure et le plus petit élément, lorsqu'ils existent, du sous-ensemble A.

Exercice 4. On définit sur $\mathbb{Z}$ la relation binaire en posant : $x \,\mathcal{R}\, y \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x - y = 3k$

(a) Montrer que $\mathcal{R}$ est réflexive :

(b) Montrer que $\mathcal{R}$ est symétrique :

(c) Montrer que $\mathcal{R}$ est transitive :

(d) On note $\overline{x}$ la classe d'équivalence de x. Montrer que $\overline{0} = \overline{3}$, $\overline{1} = \overline{4}$, $\overline{2} = \overline{5}$:

(e) Montrer par l'absurde que $\overline{0} \neq \overline{1}$:

(f) On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{Z}$ il existe un unique couple (p, r) tel que $x = 3p + r$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $r \in \{0, 1, 2\}$. Décrire précisément l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/\mathcal{R}$ (noté aussi $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$) :

Exercice 5. Soient E et F deux ensembles, $f : E \to F$ une application et $C, D \subset F$.
Démontrer : $\quad f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

Exercice 6. On considère la relation définie sur $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ par :

$$x \prec y \iff \exists p \in \mathbb{N}^*,\ y = x^p.$$

On va montrer que $\prec$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que $\prec$ est réflexive :

(b) Montrer que $\prec$ est anti-symétrique :

(c) Montrer que $\prec$ est transitive :

(d) Est ce que $\prec$ est une relation d'ordre total ? Justifier votre réponse.

Exercice 7. On considère dans $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ la loi de composition interne :

$$(x, y) * (x', y') = (x + x', y + y' + x\,x').$$

On va montrer que $(\mathbb{R}^2, *)$ est un groupe commutatif.

(a) Montrer que la loi $*$ est commutative.

(b) Calculer explicitement en simplifiant pour $(x, y), (x', y'), (x'', y'') \in \mathbb{R}^2$:

$A = \big((x, y) * (x', y')\big) * (x'', y'') =$

$B = (x, y) * \big((x', y') * (x'', y'')\big) =$

En déduire que la loi $*$ est associative (c'est-à dire $A = B$).

(c) Déterminer l'élément neutre (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ pour la loi $*$: $\forall (x, y) \in E, \quad (x, y) * (e_1, e_2) = (x, y)$.

(d) Elément symétrique : Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe un unique élément $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x, y) * (a, b) = (e_1, e_2)$ ((e_1, e_2) trouvé à la question (c)) et exprimer (x, y) en fonction de a et b.

(e) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On pose $(x, y)^1 = (x, y)$ et on définit pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad (x, y)^{n+1} = (x, y) * (x, y)^n$.
Montrer par récurrence : $\quad \forall n \geq 1, \quad (x, y)^n = \big(n\,x, n\,y + \frac{n(n-1)}{2} x^2\big)$.