Fiche n° 10 - Relations d'ordre et éléments remarquables v2024-11-19 - corrections en bleu

Une **relation d'ordre** $\preccurlyeq$ sur un ensemble E est une relation binaire réflexive, antisymétrique et transitive: $\forall x, y, z \in E$:

- $x \preccurlyeq x$ (réflexivité)
- $(x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq x) \implies x = y$ (antisymétrie)
- $(x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq z) \implies x \preccurlyeq z$ (transitivité)

Notation dans le cas d'un symbole "orienté" (comme $\preccurlyeq$, $\leq$, $\subset$, ...) : On dira que "$y \succcurlyeq x$" si et seulement si $x \preccurlyeq y$.

L'ordre $\preccurlyeq$ est **total** (on dit aussi $(E, \preccurlyeq)$ totalement ordonné) si tout élément est comparable : pour tout $x, y \in E$, on a $x \preccurlyeq y$ est vrai ou $y \preccurlyeq x$ est vrai - Sinon l'ordre $\preccurlyeq$ est dit **partiel** (on dit aussi $(E, \preccurlyeq)$ partiellement ordonné).
Soit A une partie non vide de E et M et m des éléments de E.

- M est un **majorant** de A si : $\forall x \in A,\ x \preccurlyeq M$
  m est un **minorant** de A si : $\forall x \in A,\ x \succcurlyeq m$
- M est le **plus grand élément** de A si M est un majorant de A et $M \in A$.
  S'il existe, il est unique. Notation : $M = \max A$

  m est le **plus petit élément** de A si m est un minorant de A et $m \in A$.
  S'il existe, il est unique. Notation : $m = \min A$
- M est la **borne supérieure** de A si M est le plus petit des majorants de A. Notation : $M = \sup A$
  m est la **borne inférieure** de A si m est le plus grand des minorants de A. Notation : $m = \inf A$
  - Si $M = \sup A$ existe et $M \in A$, alors $M = \max A$. - Si $M = \max A$ existe, alors $M \in A$ et $M = \sup A$.
  - Si $m = \inf A$ existe et $m \in A$, alors $m = \min A$. - Si $m = \min A$ existe, alors $m \in A$ et $m = \inf A$.
- a est un **élément maximal** s'il n'existe aucun autre élément $b \in E$ tel que $b \succcurlyeq a$: $(\forall b \in E,\ b \succcurlyeq a) \Rightarrow (b = a)$
  a est un **élément minimal** s'il n'existe aucun autre élément $b \in E$ tel que $b \preccurlyeq a$: $(\forall b \in E,\ b \preccurlyeq a) \Rightarrow (b = a)$

  Dans un ensemble E totalement ordonné, si un élément maximal (minimal) existe, alors il est unique et :
  (a élément maximal) $\iff (a = \max E)$ et (a élément minimal) $\iff (a = \min E)$

Cas des intervalles de $\mathbb{R}$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels qua $a < b$.

- $I = [a, b]$: $\inf I = \min I = a$ et $\sup I = \max I = b$
- $I =]a, b]$: $\inf I = a$ et $\sup I = \max I = b$
- $I = [a, \infty[$: $\inf I = \min I = a$
- $I =]a, \infty[$: $\inf I = a$
- $I = [a, b[$: $\inf I = \min I = a$ et $\sup I = b$
- $I =]a, b[$: $\inf I = a$ et $\sup I = b$
- $I =]-\infty, b]$: $\sup I = \max I = b$
- $I =]-\infty, b[$: $\sup I = b$

Propriété fondamentale de $\mathbb{N}$: Soit A une partie non vide de $\mathbb{N}$: Alors $\min A$ existe toujours.

Propriété fondamentale de $\mathbb{R}$: Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$:
- S'il existe un majorant M de A, alors $\sup A$ existe toujours et $\sup A \leq M$.
- S'il existe un minorant m de A, alors $\inf A$ existe toujours et $m \leq \inf A$.

Exercice 1. Déterminer les bornes inférieures et supérieures, les plus grands et plus petits éléments quand ils existent, des intervalles suivants :

(a) Dans $(\mathbb{R}, \leq)$: $A = [2, 5[$, $B = [2, \infty[$, $C =]2, \infty[$, $D = \left\{1 - \frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$

(b) Dans $(\mathbb{N}, \leq)$: $A = [\![2, 5[\![$, $B = [\![2, \infty[\![$, $C =]\!]2, \infty[\![$

Exercice 2. Soit $E = \{a, b, c, d\}$ et $\mathcal{P}(E)$ muni de la relation d'ordre $\subseteq$. Pour $\mathcal{A} = \big\{\{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, c, d\}\big\}$, faire un diagramme de Hasse pour l'ensemble ordonné $(\mathcal{A}, \subseteq)$ et déterminer, s'ils existent :
$\min \mathcal{A}$, $\inf \mathcal{A}$, $\max \mathcal{A}$, $\sup \mathcal{A}$ et les éléments maximaux et minimaux de $\mathcal{A}$.

Exercice 3. Soit $E = \mathbb{N}^*$ muni de la relation d'ordre "divise" : $n \,|\, m$ (n divise m s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $m = n\,p$) et $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Faire un diagramme de Hasse pour l'ensemble ordonné $(A, |)$ et déterminer, s'ils existent : $\min A$, $\inf A$, $\max A$, $\sup A$ et les éléments maximaux et minimaux de A.

Exercice 4. On note $E = [\![0, 6]\!]^2$ muni de l'ordre lexicographique :

$$(x, y) \preccurlyeq (x', y') \iff \Big((x < x') \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y')\Big)$$

Représenter graphiquement l'ensemble des majorants et des minorants de $A = \{(3, 2), (1, 4)\}$.