CORRECTION

L1 IEEEA, 2024-2025
Université de Rouen

NOM	**Prénom**
Groupe de TD :	**Numéro :**

Note sur 20:

Contrôle continu n° 2 (v4)
UE Logique et structures algébriques
Lundi 16 décembre 2024 - 13h30-15h30 - Documents et calculatrices interdites

---

Exercice 1. On pose $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f_0(x) = x$ et on définit par récurrence la suite de fonctions pour $n \in \mathbb{N}$ et pour $x \in \mathbb{R}$ par la relation : $f_{n+1}(x) = 2\,f_n(x) + 1$.

(a) Montrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = 2^n\,x + (2^n - 1)$. $(*)$

• Initialisation. $n=0$ $f_0(x) = 2^0 x - (2^0-1) = x$ $(*$ est vrai$)$

• Hérédité - On suppose que $(*)$ est vrai pour $n \in \mathbb{N}^*$:
Pour $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = 2^n x + (2^n - 1)$

$f_{n+1}(x) = 2\,f_n(x) + 1 = 2(2^n x + 2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} x + 2^{n+1} + 1$

donc $(*)$ est vrai pour $n+1$

• Conclusion - $(*)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

(b) En remarquant que pour $n \in \mathbb{N}$ on a $f_{n+1} = f_1 \circ f_n$, donner directement sans faire de calculs la valeur explicite de $(f_1 \circ f_1 \circ f_1 \circ f_1)(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$:

$(f_1 \circ f_1 \circ f_1 \circ f_1)(x) = (f_1 \circ f_1 \circ f_2)(x) = (f_1 \circ f_3)(x) = f_4(x) = 2^4 x + 2^4 - 1$
$(= 16x + 15)$

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.

(a) Déterminer $f^{-1}([-2,3])$ (en le justifiant). Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}([-2,3]) &\iff f(x) \in [-2,3] \\ &\iff -2 \leq \sqrt{1+x^2} \leq 3 \\ &\iff \sqrt{1+x^2} \leq 3 \\ &\iff x^2 \leq 3^2 - 1 = 8 \\ &\iff x \in [-\sqrt{8}, \sqrt{8}] \end{aligned}$$

$\boxed{f^{-1}([-2,3]) = [-\sqrt{8}, \sqrt{8}]}$

(b) Déterminer $f([-1,2])$ (en le justifiant).

• Soit $y \in f([-1,2])$. Il existe $x \in [-1,2]$ tel que $f(x) = y$.
$-1 \leq x \leq 2$ donc $0 \leq x^2 \leq 4$ puis $1 \leq 1+x^2 \leq 5$ donc $1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{5}$
Donc $y = f(x) = \sqrt{1+x^2} \in [1, \sqrt{5}]$

• Soit $y \in [1, \sqrt{5}]$. Donc $1 \leq y \leq \sqrt{5}$, $1 \leq y^2 \leq 5$ donc $0 \leq y^2 - 1 \leq 4$.
On pose $x = \sqrt{y^2-1}$. Alors $x^2 = y^2 - 1$, $y^2 = x^2 + 1$
puis $y = \sqrt{x^2+1}$ car $y \geq 0$. donc $y = f(x)$.
comme $0 \leq y^2 - 1 \leq 4$ donc $0 \leq \sqrt{y^2-1} \leq 2$ donc $x \in [0,2]$
Donc $x \in [-1,2]$ et $y = f(x)$ donc $y \in f([-1,2])$

$\boxed{f([-1,2]) = [1, \sqrt{5}]}$

Exercice 3. On considère l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 5 \quad \text{ou} \quad x > 4\}$.

(a) Expliciter l'ensemble A en termes d'intervalles de $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$x \in A \iff (x^2 < 5 \quad \text{ou} \quad x > 4)$$
$$\iff ((-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}) \quad \text{ou} \quad (4 < x))$$
$$\iff (x \in]-\sqrt{5}, \sqrt{5}[\text{ ou } x \in]4, +\infty[)$$

$\boxed{A =]-\sqrt{5}, \sqrt{5}[\cup]4, +\infty[}$

(b) Dans $(\mathbb{R}, \leq)$, déterminer la borne inférieure et le plus petit élément, lorsqu'ils existent, du sous-ensemble A.

$-\sqrt{5}$ est la borne inférieure de $]-\sqrt{5}, \sqrt{5}[$

pour $x \in]4, +\infty[$, on a $-\sqrt{5} < 0 < 4 < x$ donc $-\sqrt{5}$ minorant de A.

$-\sqrt{5} = \inf A$. Sinon, par l'absurde, il existerait $m \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in A$, $-\sqrt{5} < m \leq x$. Donc m serait un minorant de $]-\sqrt{5}, \sqrt{5}[$ impossible car $\inf(]-\sqrt{5}, \sqrt{5}[) = -\sqrt{5}$. Donc $\boxed{\inf A = -\sqrt{5}}$

or $-\sqrt{5} \notin A$ donc min A n'est pas défini.

Exercice 4. On définit sur $\mathbb{Z}$ la relation binaire en posant : $\quad x \mathcal{R} y \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x - y = 3k$

(a) Montrer que $\mathcal{R}$ est réflexive : Soit $x \in \mathbb{Z}$

$x - x = 3 \times 0$ et $0 \in \mathbb{Z}$ donc $x \mathcal{R} x$ donc $\mathcal{R}$ est réflexive

(b) Montrer que $\mathcal{R}$ est symétrique : Soient $x, y \in \mathbb{Z}$. On suppose que $x \mathcal{R} y$

Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - y = 3k$

Donc $y - x = 3(-k)$ et $(-k) \in \mathbb{Z}$ donc $y \mathcal{R} x$ et $\mathcal{R}$ est symétrique

(c) Montrer que $\mathcal{R}$ est transitive : Soient $x, y, z \in \mathbb{Z}$. On suppose $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$

Donc il existe k et l dans $\mathbb{Z}$ tels que :

$x - y = 3k$ et $y - z = 3l$ donc

$x - z = (x - y) + (y - z) = 3k + 3l = 3(k + l)$. $(k + l) \in \mathbb{Z}$ donc $\mathcal{R}$ est transitive.

(d) On note $\overline{x}$ la classe d'équivalence de x. Montrer que $\overline{0} = \overline{3}$, $\overline{1} = \overline{4}$, $\overline{2} = \overline{5}$:

$$\left.\begin{aligned} 3 - 0 &= 3 \times 1 \\ 4 - 1 &= 3 \times 1 \\ 5 - 2 &= 3 \times 1 \end{aligned}\right| \text{ et } 1 \in \mathbb{Z} \text{ donc } \left|\begin{aligned} &3 \mathcal{R} 0 \\ &4 \mathcal{R} 1 \\ &5 \mathcal{R} 2 \end{aligned}\right. \text{ donc } \left|\begin{aligned} \overline{3} &= \overline{0} \\ \overline{4} &= \overline{1} \\ \overline{5} &= \overline{2} \end{aligned}\right.$$

(e) Montrer par l'absurde que $\overline{0} \neq \overline{1}$:

Si par l'absurde $\overline{0} = \overline{1}$, alors $1 \mathcal{R} 0$ et il existerait $k \in \mathbb{Z}$ tel que $1 - 0 = 3k$. Donc on aurait $k \geq 1$ (sinon $k \leq 0$ donc $3k \leq 0$ donc $3 \leq 0$ Impossible). Donc $k \geq 1$, $3k \geq 3$ puis $1 \geq 3$. Impossible. Donc $\overline{0} \neq \overline{1}$.

(f) On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{Z}$ il existe un unique couple (p, r) tel que $x = 3p + r$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $r \in \{0, 1, 2\}$. Décrire précisément l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/\mathcal{R}$ (noté aussi $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$) :

On a $\mathbb{Z}/\mathcal{R} = \{\overline{x},\ x \in \mathbb{Z}\}$. Donc $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\} \subset \mathbb{Z}/\mathcal{R}$

Soit $\overline{x} \in \mathbb{Z}/\mathcal{R}$. Il existe $p, r \in \mathbb{Z}$ tel que $r \in \{0, 1, 2\}$ et $x = 3p + r$. Donc $x - r = 3p$ et $p \in \mathbb{Z}$ donc $\overline{x} = \overline{r}$ avec $\overline{r} \in \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ donc $\mathbb{Z}/\mathcal{R} \subset \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$

donc $\boxed{\mathbb{Z}/\mathcal{R} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}}$

Exercice 5. Soient E et F deux ensembles, $f : E \to F$ une application et $C, D \subset F$.
Démontrer : $\quad f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

Soit $x \in E$

$$
\begin{aligned}
x \in f^{-1}(C \cap D) &\iff f(x) \in C \cap D \\
&\iff (f(x) \in C \text{ et } f(x) \in D) \\
&\iff (x \in f^{-1}(C) \text{ et } x \in f^{-1}(D)) \\
&\iff x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)
\end{aligned}
$$

Donc $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

Exercice 6. On considère la relation définie sur $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ par :

$$x \prec y \iff \exists p \in \mathbb{N}^*,\ y = x^p.$$

On va montrer que $\prec$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que $\prec$ est réflexive :

Soit $x \in \mathbb{N}^*$. On a $x = x^1$ et $1 \in \mathbb{N}^*$ donc $x \prec x$ donc $\prec$ est réflexive.

(b) Montrer que $\prec$ est anti-symétrique : Soient $x, y \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $x \prec y$ et $y \prec x$. Il existe donc $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $y = x^p$ et $x = y^q$. Donc $x = (x^p)^q = x^{pq}$ comme $x \neq 0$, $\frac{x^{pq}}{x} = 1$, $x^{(pq-1)} = 1$ donc $pq = 1$ donc $p = q = 1$ donc $x = y$

(c) Montrer que $\prec$ est transitive :

Soient $x, y, z \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $x \prec y$ et $y \prec z$. Il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $y = x^p$ et $z = y^q$ donc $z = (x^p)^q = x^{pq}$. comme $pq \in \mathbb{N}^*$, $x \prec z$ donc $\prec$ est transitive

(d) Est ce que $\prec$ est une relation d'ordre total ? Justifier votre réponse.

Ce n'est pas une relation d'ordre total car on n'a ni $2 \prec 3$, ni $3 \prec 2$. En effet, si par l'absurde $2 \prec 3$ alors il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $3 = 2^p$. $p = 1$ ne convient pas et si $p \geqslant 2$, alors $2^p \geqslant 2^2$ donc $3 \geqslant 4$. Impossible. Si par l'absurde $3 \prec 2$, alors il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $2 = 3^q$ $q \geqslant 1$ donc $3^q \geqslant 3^1$ donc $2 \geqslant 3$. Impossible.

Exercice 7. On considère dans $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ la loi de composition interne :

$$(x, y) * (x', y') = (x + x', y + y' + x\, x').$$

On va montrer que $(\mathbb{R}^2, *)$ est un groupe commutatif.

(a) Montrer que la loi $*$ est commutative. Soient (x,y), $(x',y') \in \mathbb{R}^2$

$(x',y') * (x,y) = (x'+x, y+y'+x x') = (x'+x, y'+y+x'x)$
$= (x,y) * (x',y')$

(b) Calculer explicitement en simplifiant pour $(x, y), (x', y'), (x'', y'') \in \mathbb{R}^2$:

$A = ((x, y) * (x', y')) * (x'', y'') = (x+x', y+y'+xx') * (x'',y'')$
$= ((x+x')+(x''), (y+y'+xx')+(y'')+(x+x')(x''))$
$= (x+x'+x'', y+y'+y''+xx'+xx''+x'x'')$

$B = (x, y) * ((x', y') * (x'', y'')) = (x,y) * (x'+x'', y'+y''+x'x'')$
$= ((x)+(x'+x''), (y)+(y'+y''+x'x'')+(x)(x'+x''))$
$= (x+x'+x'', y+y'+y''+xx'+xx''+x'x'')$

En déduire que la loi $*$ est associative (c'est-à dire $A = B$).

On a bien $A=B$ donc $*$ est associative.

(c) Déterminer l'élément neutre (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ pour la loi $*$: $\forall (x, y) \in E, \quad (x, y) * (e_1, e_2) = (x, y)$.

Si $(x,y) * (e_1,e_2) = (x,y)$, alors $(x+e_1, y+e_2+xe_1) = (x,y)$
donc $x+e_1 = x$ donc $e_1 = 0$. $y+e_2+xe_1 = y$
donc $e_2 = 0$. On a bien : $(x,y) * (0,0) = (x+0, y+0+x\times 0) = (x,y)$.

(d) Elément symétrique : Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe un unique élément $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x, y) * (a, b) = (e_1, e_2)$ ((e_1, e_2) trouvé à la question (c)) et exprimer (x, y) en fonction de a et b.

$(x,y) * (a,b) = (0,0) \iff \begin{cases} x+a=0 \\ y+b+xa=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-a \\ y=-b+a^2 \end{cases}$

donc $(x,y) = (-a, -b+a^2)$ est élément symétrique de (a,b)

(e) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On pose $(x, y)^1 = (x, y)$ et on définit pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad (x, y)^{n+1} = (x, y) * (x, y)^n$. $(*)$
Montrer par récurrence : $\quad \forall n \geq 1, \quad (x, y)^n = \left(n\, x, n\, y + \frac{n(n-1)}{2} x^2\right)$.

- Initialisation : $n=1$, $(x,y)^1 = (1x, 1y + \frac{1(1-1)}{2}x^2) = (x,y)$.
- Hérédité : Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on suppose $(x,y)^n = (nx, ny + \frac{n(n-1)}{2}x^2)$

Alors $(x,y)^{n+1} = (x,y) * (x,y)^n = (x,y) * (nx, ny + \frac{n(n-1)}{2}x^2)$
$= ((x)+(nx), (y)+(ny+\frac{n(n-1)}{2}x^2 + (x)(nx))$
$= ((n+1)x, (n+1)y + \frac{(n+1)(n)}{2}x^2)$. Donc $*$ est vrai pour $n+1$.

- Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(x,y)^n = (nx, ny + \frac{n(n-1)}{2}x^2)$.