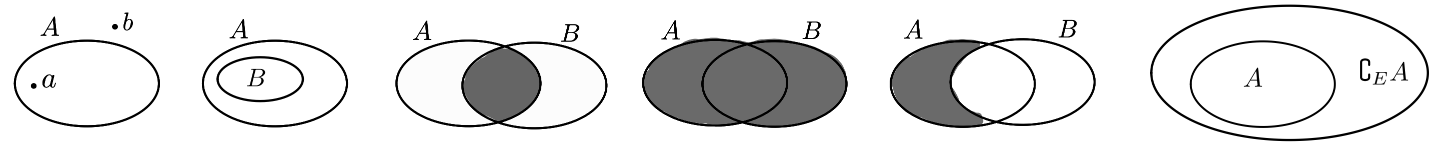
L1 IEEEA, 2024-2025 Université de Rouen-Normandie

Lundi 30 septembre 2024

Fiche n° 4 - Ensembles et propriétés - v1



appartenance	inclusion	intersection	réunion	différence	complémentaire de A dans E
$a \in A$ $b \notin A$	$B \subset A$ $\forall x\,(x \in B \implies x \in A)$	$A \cap B$ $\{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$	$A \cup B$ $\{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$	$A \setminus B$ $\{x \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$	$\complement_E A = E \setminus A = \overline{A}$ $\{x \mid x \in E \text{ et } x \notin A\}$

Propriétés sur les ensembles (A, B, C et E sont des ensembles quelconques) :

- $\cap$ et $\cup$ associatives : $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ et $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- $\cap$ et $\cup$ commutatives : $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$
- $\emptyset$ élément neutre pour $\cap$: $\forall A \subset E, \quad A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$
  E élément neutre pour $\cap$: $\forall A \subset E, \quad A \cap E = E \cap A = A$
- $\emptyset$ élément absorbant pour $\cap$: $\forall A \subset E, \quad A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset$
  E élément absorbant pour $\cup$: $\forall A \subset E, \quad A \cup E = E \cup A = E$
- $\cap$ distributive par rapport à $\cup$: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $\cup$ distributive par rapport à $\cap$: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- Inclusion (propriétés d'une relation d'ordre) :
  (a) $A \subset A$ (b) $(A \subset B \text{ et } B \subset C) \implies (A \subset C)$ (c) $(A \subset B \text{ et } B \subset A) \implies (A = B)$
- Inclusion et intersection-réunion :
  (a) $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$ (b) $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$
  (c) $(A \cup B = A) \iff (B \subset A)$ (d) $(A \cap B = A) \iff (A \subset B)$
- Complémentaire. Pour $A, B \subset E$, on a :
  (a) $\complement_E \complement_E A = A$ (b) $(A \subset B) \iff (\complement_E B \subset \complement_E A)$
  (c) $\complement_E(A \cap B) = \big(\complement_E A\big) \cup \big(\complement_E B\big)$ (d) $\complement_E(A \cup B) = \big(\complement_E A\big) \cap \big(\complement_E B\big)$

Exercice 1. On note $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ l'ensemble des chiffres. Expliciter les ensembles suivants :

(a) L'ensemble A des chiffres pairs.

(b) L'ensemble B des chiffres divisibles par 3.

(c) L'ensemble C chiffres supérieurs ou égaux à 5.

(d) Les ensembles : $A \cap B$, $A \cup B$, $\complement_E A$, $\complement_E B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

(e) Les ensembles : $F = (A \cup B) \cap C$ et $G = (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Vérifier l'égalité.

(f) Les ensembles : $H = \complement_E(A \cap B)$ et $K = \complement_E A \cup \complement_E B$. Vérifier l'égalité.

Exercice 2. Expliciter les ensembles suivants : $A = \big\{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 > 4\big\}$, $B = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}\,(z) \geq 2\}$.

Exercice 3. Soient les parties de $\mathbb{R}$ suivantes : $A = [1, 5]$ et $B = [2, 7]$. Déterminer :
(a) $A \cap B$ (b) $A \cup B$ (c) $A \setminus B$ (d) $B \setminus A$ (e) $\mathbb{R} \setminus A$ (f) $\mathbb{R} \setminus B$ (g) $\mathbb{R} \setminus (A \cap B)$ (h) $\mathbb{R} \setminus (A \cup B)$
Que remarque-t-on ?

Exercice 4. Soit E un ensemble et A, B, C trois parties de E.

(a) Montrer les égalités suivantes :

$$\complement_E(A \cap B) = (\complement_E A) \cup (\complement_E B) \qquad \text{et} \qquad \complement_E(A \cup B) = (\complement_E A) \cap (\complement_E B).$$

(b) En déduire :

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \qquad \text{et} \qquad A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Exercice 5. (*) Soient E un ensemble et A, B et C des parties de E. Établir les équivalences suivantes :
(a) $A \cap \complement_E B \neq \emptyset \iff A \not\subset B$ (b) $A \setminus B = A \iff B \setminus A = B$ (c) $A \cap B = A \cap C \iff A \cap \complement_E B = A \cap \complement_E C$