Université de Rouen Normandie
Portail IEEEA, $1^{\text{ère}}$ année
2025-2026
Espaces vectoriels et applications

TD n°2. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^m$

---

1. Calculer $A(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$, où

a.
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\ v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3$$

b.
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\ v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix},\ \alpha_1 = -1, \alpha_2 = 1.$$

2. Les vecteurs suivants sont-ils linéairement indépendants ? Engendrent-ils $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^2$.

a. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

b. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$

c. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$

3. Écrire les systèmes homogènes ci-dessous sous la forme $Ax = b$. Déterminer dans chaque cas si les colonnes de la matrice A sont linéairement indépendantes. Y a-t-il une unique solution ?

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1 + 8x_3 & = & 0 \\ -2x_1 + x_3 & = & 0 \\ 4x_1 + 7x_3 & = & 0 \end{array}\right.,\quad \left\{\begin{array}{rcl} -7x_1 + 37x_2 + 119x_3 & = & 0 \\ 5x_1 + 19x_2 + 57x_3 & = & 0 \end{array}\right.,\quad \left\{\begin{array}{rcl} x_1 - 3x_2 + 7x_3 & = & 0 \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 & = & 0 \\ x_1 + 2x_2 + 9x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

4. Soient u, v et w trois vecteurs de $\mathbb{R}^m$ linéairement indépendants. Montrer qu'il en est de même des vecteurs $u+v$, $u-v$ et $u - 2v + w$.

5. Décrire la forme échelonnée réduite dans les cas suivants.

a. A est une matrice 3×3 avec des colonnes linéairement indépendantes.

b. A est une matrice 4×2, $A = (u_1\ u_2)$ et u_2 n'est pas multiple de u_1.

c. A est une matrice 4×3, $A = (u_1\ u_2\ u_3)$. Les vecteurs u_1 et u_2 sont linéairement indépendants, et u_3 n'est pas une combinaison linéaire de u_1 et u_2.

6. On se place dans $\mathbb{R}_4[X]$ (de dimension 5). Montrer que la famille $\{X^4, X^3(1-X), X^2(1-X)^2, X(1-X)^3, (1-X)^4\}$ est une base de $\mathbb{R}_4[X]$.

7. Déterminer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses en justifiant votre réponse.

a. Si $\mathcal{F} = \{v_1, v_2\}$ est une famille linéairement indépendante de $\mathbb{R}^3$, alors $\mathcal{F} \cup \{v_3\}$, avec $v_3 \in \mathbb{R}^3$ non nul, est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

b. Si $\mathcal{F} = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$, alors $\mathcal{F} \setminus \{v_3\}$ est linéairement indépendante.

c. Si v_1 n'est pas colinéaire à v_2, alors la famille $\mathcal{F} = \{v_1, v_2\}$ est linéairement indépendante.

8. Soit $\mathcal{B} = \{u_1\,, u_2\,, u_3\}$ la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ avec $u_1 = (0,1,1)\,, u_2 = (1,0,1)$ et $u_3 = (1,1,0)$.

a. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b. Déterminer les composantes, $(v)_{\mathcal{B}}$, de $v = (1,2,3)$ dans la base $\mathcal{B}$.

9. On se place dans l'espace vectoriel réel des fonctions réelles d'une variable réelle, $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

a. Montrer que les fonctions $x \mapsto \cos(x)$, $x \mapsto \cos(2x)$ et $x \mapsto \cos(3x)$ forment une famille libre.

b. Montrer que les fonctions $x \mapsto \cos(x)$, $x \mapsto \cos(x+1)$ et $x \mapsto \cos(x+2)$ forment une famille liée.
Indication : il faudra se rappeler de la formule de $\cos(a+b)$.