

Chapitre 2. Suites numériques

Amir Aboubacar

3 février 2026

Plan

- 1 Définition et premiers exemples
- 2 Limites de suites
- 3 Comparaison de suites

Définition

Une **suite numérique** est une **famille infinie de nombres réels**, indexée par les entiers naturels.

On note

$$u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Les éléments de cette famille sont appelées les **termes** de la suite.

Deux façons de définir une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Les termes d'une suite sont donnés :

- sous forme explicite :

$$u_n = g(n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N};$$

Exemple : $u_n = 2n + 1$

- par récurrence : u_0 donné et

$$u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Exemple : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 1 + 2u_n + u_n^2$

Sens de variation d'une suite

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est :

- **constante** si

$$u_n = u_{n+1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N};$$

- **croissante** si

$$u_n \leq u_{n+1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N};$$

- **décroissante** si

$$u_n \geq u_{n+1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N};$$

- **strictement croissante (ou décroissante)** si les inégalités sont strictes;
- **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

Signe d'une suite

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est :

- **nulle** si

$$u_n = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N};$$

- **positive** si

$$u_n \geq 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N};$$

- **négative** si

$$u_n \leq 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N};$$

- **strictement positive (ou négative)** si les inégalités sont strictes.

En pratique :

Pour étudier les variations d'une suite on utilise les propriétés suivantes :

- ① Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante si et seulement si

$$u_{n+1} - u_n \geq 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

- ② Une suite **strictement positive** $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante si et seulement si

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

En adaptant les inégalités, ces propriétés peuvent se généraliser aux cas d'une suite décroissante, strictement croissante, strictement décroissante.

Définition (Propriété vraie à partir d'un certain rang)

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie une propriété $\mathcal{P}(n)$ **à partir d'un certain rang** s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq n_0$, alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Exemples

- ❶ La suite

$$u_n = \sqrt{n - 4}$$

est définie à partir de $n_0 = 4$, on la note $(u_n)_{n \geq 4}$.

- ❷ Montrer que la suite définie par

$$v_n = (n - 5)^2$$

est croissante à partir d'un certain rang.

Définition (Suite majorée, minorée, bornée)

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est :

- **majorée** s'il existe une constante $M \in \mathbb{R}$ telle que

$$u_n \leq M \text{ pour tout } n \in \mathbb{N};$$

- **minorée** s'il existe une constante $M \in \mathbb{R}$ telle que

$$u_n \geq M \text{ pour tout } n \in \mathbb{N};$$

- **bornée** s'il existe une constante $M \in \mathbb{R}_+$ telle que

$$|u_n| \leq M \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Attention : observez que “il existe M ” **est avant** “pour tout n ” !

Lemme

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si elle est à la fois majorée et minorée.

Bornes supérieur et inférieur

Soit $(u_n)_n$ une suite majorée et $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$.

- La borne supérieure (ou le supremum) de A est le plus petit de ses majorants. On note

$$\sup A \text{ ou } \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n.$$

- Une telle borne existe toujours lorsque la suite est bornée et est unique.
- Elle n'appartient pas nécessairement à A .
- De même, si la suite est minorée, la borne inférieure (ou l'infimum) de A est le plus grand de ses minorants. On note

$$\inf A \text{ ou } \inf_{n \in \mathbb{N}} u_n.$$

Mathématiquement :

$$M = \sup A$$

$$\text{ssi } \{\forall x \in A, x \leq M\} \text{ et } \{\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in A : M - \varepsilon \leq x_0\}$$

$$m = \inf A$$

$$\text{ssi } \{\forall x \in A, x \geq m\} \text{ et } \{\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in A : m + \varepsilon \geq x_0\}$$

Représentation graphique

Définition (suite arithmétique)

On dit que $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une **suite arithmétique de raison** $r \in \mathbb{R}$ (définie à partir du rang n_0) si

$$u_{n+1} = u_n + r \text{ pour tout } n \geq n_0.$$

Définition (suite géométrique)

On dit que $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une **suite géométrique de raison** $q \in \mathbb{R}^*$ (définie à partir du rang n_0) si

$$u_{n+1} = qu_n \text{ pour tout } n \geq n_0.$$

Proposition

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite définie à partir du rang n_0 . Alors :

- ❶ $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite arithmétique de raison r si et seulement si elle vérifie

$$u_n = u_{n_0} + r(n - n_0) \text{ pour tout } n \geq n_0.$$

- ❷ Dans ce cas, on a aussi

$$\sum_{k=n_0}^n u_k = (n - n_0 + 1) \frac{u_{n_0} + u_n}{2}.$$

Démonstration.



Proposition

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite définie à partir du rang n_0 . Alors :

- ❶ $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite géométrique de raison q si et seulement si elle vérifie

$$u_n = q^{n-n_0} u_{n_0} \text{ pour tout } n \geq n_0.$$

- ❷ Dans ce cas, on a aussi

$$\sum_{k=n_0}^n u_k = \begin{cases} u_{n_0} \frac{1-q^{n-n_0+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ u_{n_0} (n - n_0 + 1) & \text{si } q = 1 \end{cases}.$$

Définition (suite convergente - limite de suite)

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **convergente**, de **limite** (finie) $\ell \in \mathbb{R}$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \implies |u_n - \ell| < \varepsilon).$$

On note

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell, \text{ ou bien } u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell.$$

Cela signifie :

- « A partir d'un certain rang les termes de u_n se trouvent dans un intervalle centré en ℓ aussi petit que l'on veut ».
- « quitte à prendre n assez grand, on peut garantir que u_n est arbitrairement proche de ℓ ».

Exemples fondamentaux

- Une suite constante est convergente, de limite sa valeur constante.

- On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

- Si $|q| < 1$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

- La suite $u_n = (-1)^n$ n'est pas convergente. On dit qu'elle diverge.

Démonstration.



Proposition

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite et $\ell \in \mathbb{R}$.

Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell;$$

2

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - \ell) = 0;$$

3

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \ell| = 0.$$

Proposition

Une suite convergente est bornée.

La réciproque est fausse, mais on a le résultat suivant :

Théorème (de la limite monotone)

- Une suite croissante et majorée est convergente.
- De même, une suite décroissante et minorée est convergente.

Théorème (opérations sur les limites)

On suppose que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell'.$$

Alors :

① on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = \ell + \ell' \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n) = \ell \times \ell'.$$

② Si $\ell' \neq 0$, alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang. De plus

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{v_n} = \frac{1}{\ell'} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{\ell}{\ell'}.$$

Démonstration.



Théorème (limites et fonction continue)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans un intervalle I telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \text{ avec } \ell \in I$$

et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur I . Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell).$$

Exemple

$$u_n = \frac{1 - \exp(1 - (1/2)^n)}{\sqrt{1 - \sin(1/n^2)}}.$$

Théorème

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par récurrence, avec

$$u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On suppose que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$$

et que f est continue en ℓ . Alors

$$f(\ell) = \ell$$

(on dit que ℓ est un **point fixe** de f).

Définition (limite infinie)

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **tend vers $+\infty$** si

$$\forall M \in \mathbb{R}_+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \implies u_n > M).$$

On le note

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \text{ ou bien } u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty.$$

Cela signifie :

- « A partir d'un certain rang les termes de u_n sont supérieurs à toute valeur M aussi grand que l'on veut. ».
- « quitte à prendre n assez grand, on peut garantir que u_n est arbitrairement grand. ».

Définition (limite infinie)

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **tend vers $-\infty$** si

$$\forall M \in \mathbb{R}_+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \implies u_n < -M).$$

On le note

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \text{ ou bien } u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty.$$

Cela signifie :

- « A partir d'un certain rang les termes de u_n sont supérieurs à toute valeur $-M$ aussi petit que l'on veut. ».
- « quitte à prendre n assez grand, on peut garantir que u_n est arbitrairement petit. ».

Exemples

- On a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} (-n) = -\infty.$$

- Plus généralement, une suite arithmétique de raison r tend vers $+\infty$ si $r > 0$ et vers $-\infty$ si $r < 0$.
- Si $q > 1$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty.$$

Théorème (limite infinie et somme)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites.

- Si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty,$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = +\infty.$$

- Si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty,$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = -\infty.$$

- Si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty,$$

alors on ne peut rien dire sur

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n).$$

On parle de **forme indéterminée**.

Limite et somme (récap)

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Limite et multiplication par une constante

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda u_n$	$\lambda \ell$	$\begin{cases} +\infty & \text{si } \lambda > 0 \\ 0 & \text{si } \lambda = 0 \\ -\infty & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} -\infty & \text{si } \lambda > 0 \\ 0 & \text{si } \lambda = 0 \\ +\infty & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$

Limite et produit

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}_+^*$	$l \in \mathbb{R}_+^*$	$l \in \mathbb{R}_-^*$	$l \in \mathbb{R}_-^*$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n$	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Théorème (limite et inverse)

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\ell \in \mathbb{R}^*$	$\pm\infty$	0	0_+	0_-
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n}$	$\frac{1}{\ell}$	0	F.I.	$+\infty$	$-\infty$

où on note

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0_+$ (u_n tend vers 0 par valeurs positives) si
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement positive à partir
 d'un certain rang.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0_-$ (u_n tend vers 0 par valeurs négatives) si
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement négative à partir
 d'un certain rang.

Limite et quotient

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	0	$\pm\infty$	$l \in \mathbb{R}^*$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$l' \in \mathbb{R}^*$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{l}{l'}$	0	F.I.	F.I.	F.I.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$l \in \mathbb{R}_+^*$	$l \in \mathbb{R}_-^*$	$l \in \mathbb{R}_+^*$	$l \in \mathbb{R}_-^*$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	0_+	0_+	0_-	0_-
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Théorème

Si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

et

$$\lim_{x \rightarrow \ell} f(x) = \ell' \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\},$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \ell'.$$

Exemples

$$u_n = \frac{n^2 - n}{n^2 + 1} ; v_n = \frac{2 - \exp(-n)}{1 + \sqrt{1/\ln(n)}}.$$

Passage d'inégalités à la limite

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites, avec

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell'.$$

- ❶ Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, alors $\ell \leq \ell'$.
- ❷ Si $\ell < \ell'$, alors $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang.

Remarques

- C'est valable même avec des limites infinies.
- Attention, même si $u_n < v_n$, on n'a pas mieux que $\ell \leq \ell'$
(Exemple : $1 - \frac{1}{n} < 1$, mais égalité des limites).

Théorème des gendarmes

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites. On suppose que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell \in \mathbb{R}$$

et que

$$u_n \leq v_n \leq w_n$$

à partir d'un certain rang. Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell.$$

Exemple

$$u_n = \frac{\sin(n^2)}{n}.$$

Théorème

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites, avec $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

1 Si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty,$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty.$$

2 Si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty,$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty.$$

Théorème des suites adjacentes

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites. On suppose que

- ❶ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante ;
- ❷ $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante ;
- ❸ $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$.

Sous ces trois conditions, on dit que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont **adjacentes**.

Et dans ce cas les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes et de même limite.

Comparaison avec une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à coefficients strictement positifs, telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell.$$

❶ Si $\ell < 1$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

❷ Si $\ell > 1$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

Croissances comparées

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tous nombres réels $q > 1$ et $r \in]-1, 1[$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^k}{q^n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^k r^n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q^n}{n!} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$