Chapitre 1. Nombres réels - Outils de calcul

Amir Aboubacar

20 janvier 2026

Plan

- Un nombre réel désigne un nombre dont la représentation décimale contient un nombre fini ou infini de chiffres après la virgule.

- On dit qu'il est rationnel s'il peut s'écrire comme quotient de deux nombres entiers relatifs ou irrationnel sinon.

Notation

On note :

- $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

- $\mathbb{R}^2$ l'ensemble des couples (a, b) avec a et b des nombres réels

Sous-ensembles de nombres

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, l'ensemble des entiers naturels ;
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$, l'ensemble des entiers relatifs ;
- $\mathbb{D} = \left\{ \frac{p}{10^k} \;:\; p \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} \right\}$, l'ensemble des nombres décimaux ;
- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \;:\; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \right\}$, l'ensemble des nombres rationnels ;

Ces sous-ensembles vérifient la suite d'inclusions

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Plan

L'addition

$\mathbb{R}$ est muni d'une addition, notée $+$, définie par :

$$+ : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (a, b) & \mapsto & a + b \end{array}.$$

À deux réels a et b, on associe un réel $a + b$, leur somme.

La multiplication

$\mathbb{R}$ est muni d'une multiplication, notée $\times$, définie par :

$$\times : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (a, b) & \mapsto & a \times b \end{array}.$$

À deux réels a et b, on associe un réel $a \times b$ (ou $a \cdot b$, ou ab), leur produit.

- Ces définitions nécessitent d’être complétées par des axiomatiques.

- Une axiomatique peut être vue comme une définition implicite : on donne des axiomes, qui énoncent des propriétés que l’addition et la multiplication doivent vérifier.

- Ces axiomes doivent suffire pour démontrer tout ce que l’on sait sur l’addition et la multiplication, y compris les choses les plus évidentes intuitivement.

Propriétés axiomatiques de l'addition

1. L'addition $+$ est :
    - associative : $(a+b)+c = a+(b+c)$;
    - commutative : $a+b = b+a$;

    pour tous réels a, b, c.

2. L'addition admet 0 comme élément neutre : pour tout réel a,

$$a+0 = 0+a = a$$

3. Tout réel a admet un unique opposé, noté $-a$, défini par

$$a+(-a) = (-a)+a = 0.$$

Propriétés axiomatiques de la multiplication

1. La multiplication est :
   - associative : $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$;
   - commutative : $a \times b = b \times a$;
   - distributive sur l'addition : $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$;

   pour tous réels a, b, c.

2. La multiplication admet 1 comme élément neutre :
   $a \times 1 = 1 \times a = a$ pour tout réel a.

3. Tout réel a non nul ($a \neq 0$) admet un unique inverse, noté a^{-1} ou $\frac{1}{a}$, défini par $a \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \times a = 1$.

En résumé

$(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif.

Définitions supplémentaires

On définit aussi :

- la soustraction de deux réels a et b :

$$a - b = a + (-b);$$

- la division de deux réels a et $b \neq 0$:

$$a \div b = a \times \frac{1}{b};$$

- le carré d'un réel a :

$$a^2 = a \times a.$$

Propriétés

1. Pour tous réels a et b,
$$-(a+b) = (-a) + (-b).$$
2. Pour tout réel a,
$$-(-a) = a.$$
3. Pour tous réels a et b,
$$a - b = -(b-a).$$

Démonstration.

1. Il suffit d'établir que le membre de droite vérifie la définition de l'opposé de $a+b$ et utiliser l'unicité de celui-ci.
2. Evident par définition de l'opposé
3. Découle de 1 et 2.

$\square$

Propriétés

4. Pour tout réel a,

$$0 \times a = a \times 0 = 0.$$

5. Pour tous réels a et b,

$$a \times b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (a = 0 \text{ ou } b = 0).$$

Démonstration du point 4.

$\square$

Démonstration du point 5.

$\square$

Propriétés

6. Pour tous réels a et b,

$$-(a \times b) = (-a) \times b = a \times (-b).$$

7. Pour tous réels a et b non nuls,

$$\frac{1}{a \times b} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{b}.$$

Démonstration.

1. Il suffit d'établir que les deux membres de droite de l'égalité vérifient la définition de l'opposé de $a \times b$.

2. Il suffit d'établir que le membre de droite vérifie la définition à l'inverse de $a \times b$ et utiliser l'unicité de celui-ci.

$\square$

« Double distributivité »

Si a, b, c, d sont quatre réels,

$$(a+b)\times(c+d) = a\times c + a\times d + b\times c + b\times d.$$

Identités remarquables

Si a et b sont deux réels,

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Plan

1. L'ensemble des nombres réels
   - Opérations
   - Relation d'ordre
2. Sommes et produits
   - Notation et premières propriétés
   - Premiers exemples importants
   - Formule du binôme de Newton
3. Valeur absolue et intervalles
   - Valeur absolue
   - Géométrie de la droite réelle
   - Intervalles

Inférieur ou égal

$\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre, notée $\leq$ (inférieur ou égal), qui est

- réflexive : pour tout réel a, $a \leq a$;
- antisymétrique : si $a \leq b$ et $b \leq a$, alors $a = b$;
- transitive : si $a \leq b$ et $b \leq c$, alors $a \leq c$;
- totale : pour tous réels a et b, $a \leq b$ ou $b \leq a$.

Propriétés axiomatiques de la relation d'ordre

Pour tous réels a, b, c,

- si $a \leq b$, alors
$$a + c \leq b + c;$$
- si $a \leq b$ et $0 \leq c$, alors
$$a \times c \leq b \times c.$$

(on dit que $\leq$ est compatible avec $+$ et $\times$)

Notations

Si a et b sont deux réels, on dit que

- a est supérieur ou égal à b, noté $a \geq b$, si $b \leq a$;
- a est strictement inférieur à b, noté $a < b$, si $a \leq b$ et $a \neq b$;
- a est strictement supérieur à b, noté $a > b$, si $b < a$;
- a est positif si $a \geq 0$;
- a est strictement positif si $a > 0$;
- a est négatif si $a \leq 0$;
- a est strictement négatif si $a < 0$;

Notations

- l'ensemble des réels positifs (ou nuls) :

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \geq 0\} = [0;+\infty[;$$

- l'ensemble des réels négatifs (ou nuls) :

$$\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \leq 0\} =]-\infty;0];$$

- l'ensemble des réels non nuls :

$$\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

- l'ensemble des réels strictement positifs :

$$\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x > 0\} =]0;+\infty[;$$

- l'ensemble des réels strictement négatifs :

$$\mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x < 0\} =]-\infty;0[.$$

Règles des signes (1)

1.
   - si $a \geq 0$ et $b \geq 0$, alors $a + b \geq 0$;
   - si $a > 0$ et $b \geq 0$, alors $a + b > 0$;
   - si $a \leq 0$ et $b \geq 0$, on ne peut rien dire sur leur somme $a + b$ en général.
2.
   - $a > 0$ ssi $-a < 0$.

Démonstration.

1. Les 2 premiers points sont des conséquences de la compatibilité de $\leq$ avec l'addition.

   Pour le troisième, prendre

   $$(a, b) = (-1, 2) \text{ puis } (a, b) = (-3, 2).$$

2. Supposons que $a > 0$ et montrons que $-a < 0$.
   Par l'absurde si $-a \geq 0$ alors $a + (-a) \geq a$ i.e $0 \geq a$.

   Même chose pour montrer l'autre implication.

$\square$

Règles des signes (2)

1.
   - si $a > 0$ et $b > 0$, alors $a \times b > 0$;
   - si $a < 0$ et $b < 0$, alors $a \times b > 0$;
   - en particulier, pour tout réel a, $a^2 \geq 0$;
   - si $a > 0$ et $b < 0$, alors $a \times b < 0$.
2.
   - si $a > 0$, alors $\dfrac{1}{a} > 0$;
   - si $a < 0$, alors $\dfrac{1}{a} < 0$.

Démonstration.

1. La compatibilité de $\leq$ implique que $a \times b \geq a \times 0 = 0$.
   De plus, par l'absurde si on suppose que $a \times b = 0$ alors on aurait $a = 0$ ou $b = 0$.

   Même raisonnement pour les 3 points suivants.

2. Par l'absurde si $\dfrac{1}{a} \leq 0$ alors $a \times \dfrac{1}{a} \leq a \times 0$ i.e $1 \leq 0$.

   Même raisonnement pour le point suivant.

$\square$

Quelques propriétés utiles pour obtenir des inégalités

Si a, b, c, d sont des réels, on a

- $a \leq b \iff b - a \geq 0$;
- si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a + c \leq b + d$; [a]
- si $a \leq b$ et $c \leq 0$, alors $ac \geq bc$;
- $a \leq b \iff -b \leq -a$;
- si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$, alors $ac \leq bd$;

a. et l'inégalité finale est stricte dès que l'une des deux de départ est stricte

Démonstration.

- Le premier point découle de la compatibilité de $\leq$ par rapport à $+$;
- Le deuxième utilise la compatibilité par rapport à $+$ et la transitivité de $\leq$;
- Le troisième point découle de la compatibilité de $\leq$ par rapport à $\times$;
- Les deux implication du quatrième point découle du troisième point avec $c = -1$;
- Le dernier point utilise la compatibilité par rapport à $\times$ et la transitivité de $\leq$.

$\square$

Autres propriétés utiles pour obtenir des inégalités

- si $a \geq 0$ et $b \geq 0$, alors $a \leq b$ si et seulement si $a^2 \leq b^2$;
- si $a > 0$ et $b > 0$, alors $a \leq b$ si et seulement si $\dfrac{1}{a} \geq \dfrac{1}{b}$.

Plan

Sommes et produits multiples

Soit $m \leq n$ deux entiers relatifs et $(a_k)_{m \leq k \leq n}$ une famille de réels indexée par

$$[\![m; n]\!] = \{m, m+1, \ldots, n-1, n\},$$

l'ensemble des entiers compris entre m et n. On note alors :

- $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k$ la somme de tous les réels a_k ;
- $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} a_k$ le produit de tous les réels a_k.

Cas particuliers

- si $n = m$:
$$\sum_{k=1}^{1} k = \prod_{k=1}^{1} k = 1;$$
- si $a_k = a$ pour tout k, avec a un réel fixé, la somme vaut a multiplié par le nombre de termes ;
- Exemples :
$$\sum_{k=1}^{8} 1 = 8; \sum_{k=1}^{5} x = 5x.$$

Convention

Lorsque $m > n$:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = 0 \quad \text{et} \quad \prod_{k=m}^{n} a_k = 1.$$

Variable « muette »

On peut changer la lettre utilisée comme indice, ça ne change rien (on dit que c'est une variable muette) :

$$\sum_{k=1}^{5} k^2 = 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = \sum_{j=1}^{5} j^2 \,.$$

Quelques propriétés générales (pour les sommes)

1. Soit $l \leq m < n$ trois entiers relatifs. Alors

$$\sum_{k=l}^{n} a_k = \sum_{k=l}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k.$$

2. Soit $m \leq n$ deux entiers relatifs et l un entier relatif. Alors

$$\sum_{j=m}^{n} a_{j+l} = \sum_{k=m+l}^{n+l} a_k.$$

3. Soit n un entier naturel. Alors

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{j=0}^{n} a_{n-j}.$$

Exemple (Découpage) :

- On peut couper une somme en plusieurs morceaux :

$$\sum_{k=1}^{10} k^2 = \sum_{k=1}^{6} k^2 + \sum_{k=7}^{10} k^2$$

- On peut même séparer les termes pairs des termes impairs :

$$\sum_{k=1}^{6} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 =$$

$$\left(1^2 + 3^2 + 5^2\right) + \left(2^2 + 4^2 + 6^2\right) = \sum_{k=0}^{2} (2k+1)^2 + \sum_{k=1}^{3} (2k)^2 .$$

Exemple (changement d'indice) :

En posant

$$j = k + 3,$$

on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+3} = \sum_{j=3}^{n+3} \frac{1}{j}.$$

Associativité et distributivité

Soit $m \leq n$ deux entiers relatifs a un nombre réel. Alors :

- Associativité :

$$\sum_{k=m}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k$$

et

$$\prod_{k=m}^{n}(a_k \times b_k) = \prod_{k=m}^{n} a_k \times \prod_{k=m}^{n} b_k \,.$$

- Distributivité :

$$a \times \sum_{k=m}^{n} b_k = \sum_{k=m}^{n}(a \times b_k)\,.$$

Produit nul et inverse d'un produit

Soit $m \leq n$ deux entiers relatifs. Alors :

- Produit nul :

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = 0$$

si et seulement si l'un (au moins) des a_k est nul.

- Inverse d'un produit :

$$\frac{1}{\prod_{k=m}^{n} a_k} = \prod_{k=m}^{n} \frac{1}{a_k}.$$

Règles des signes

- Pour la somme. Soit $m \leq n$ deux entiers relatifs et $(a_k)_{m\leq k\leq n}$ une famille de réels positifs. Alors
$$\sum_{k=m}^{n} a_k \geq 0.$$
Dans ce cas, $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k = 0$ ssi tous les a_k sont nuls.
- Pour le produit. Soit $m \leq n$ deux entiers relatifs et $(a_k)_{m\leq k\leq n}$ une famille de réels non nuls. Alors
$$\prod_{k=m}^{n} a_k \text{ est } \begin{cases} \text{positif si le nombre de } a_k \text{ négatifs est pair ;} \\ \text{négatif si le nombre de } a_k \text{ négatifs est impair.} \end{cases}$$

Plan

Premiers exemples importants

1. $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$
2. $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$
3. $$\sum_{k=0}^{n-1} a^k = \begin{cases} n & \text{si } a = 1 \\ \frac{1-a^n}{1-a} & \text{si } a \neq 1 \end{cases}$$

Proposition (Sommes télescopiques)

Soit $m \leq n$ deux entiers relatifs. Alors :

$$\sum_{k=m}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = a_n - a_m \,.$$

Plan

Factorielle

Pour tout entier $n \geq 1$, on définit la factorielle de n, notée $n!$, par

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n\,.$$

Par convention, on pose $0! = 1$.

Formule de récurrence

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(n+1)! = n! \times (n+1).$$

Puissances

Si a est un nombre réel et n est un entier relatif, on définit la puissance n-ème de a, notée a^n, de la façon suivante :

- si $n \geq 1$,
$$a^n = \prod_{k=1}^{n} a;$$
- si $n = 0$, par convention, $a^0 = 1$;
- si $n \leq -1$ et $a \neq 0$,
$$a^n = \frac{1}{a^{-n}}$$
(pour $a = 0$, les puissances négatives ne sont pas définies).

Propriétés des puissances

1. Pour a un nombre réel non nul et n et m deux entiers relatifs,
$$a^{n+m} = a^n \times a^m \text{ et } \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}.$$
En particulier :
$$a^{n+1} = a^n \times a \text{ et } a^{n-1} = \frac{a^n}{a}$$
2. Pour a un nombre réel non nul, et n et m deux entiers relatifs,
$$(a^n)^m = a^{n\times m};$$
3. Pour a et b deux réels non nuls, et n un entier relatif,
$$(a \times b)^n = a^n \times b^n.$$

Coefficients binomiaux

- Pour $0 \leq k \leq n$ deux entiers, on désigne par $\binom{n}{k}$ le nombre de sous-ensembles à k éléments d'un ensemble à n éléments.
- On appelle les entiers $\binom{n}{k}$ les coefficients binomiaux.
- Formule explicite :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

- En particulier, pour n entier positif,

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

Exemple

Pour $n = 4$, classons tous les sous-ensembles de $\{1, 2, 3, 4\}$ en fonction de leur cardinal (nombre d'éléments) k :

k	Sous-ensembles à k éléments	coefficient binomial
0	$\emptyset$	$\binom{4}{0} = 1$
1	$\{1\}$ $\{2\}$ $\{3\}$ $\{4\}$	$\binom{4}{1} = 4$
2	$\{1,2\}$ $\{1,3\}$ $\{1,4\}$ $\{2,3\}$ $\{2,4\}$ $\{3,4\}$	$\binom{4}{2} = 6$
3	$\{1,2,3\}$ $\{1,2,4\}$ $\{1,3,4\}$ $\{2,3,4\}$	$\binom{4}{3} = 4$
4	$\{1,2,3,4\}$	$\binom{4}{4} = 1$

Propriétés

1. Symétrie :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \text{ pour } 0 \leq k \leq n.$$

2. Formule du sélectionneur :,

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}, \text{ pour } 1 \leq k \leq n.$$

Formule de Pascal

Pour $1 \leq k \leq n-1$,

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

n										
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$					
n-1	1	$n-1$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\binom{n-1}{k-1}$	$\binom{n-1}{k}$	$\dots$	
n	1	n	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\binom{n}{k}$	$\dots$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	0	1	2	3	4	$\dots$	$k-1$	k	$\dots$	n

k

Théorème (formule du binôme de Newton)

Soit a et b deux réels et n un entier naturel. Alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} .$$

Démonstration (par récurrence)

$\mathcal{P}_n$: pour tous réels a et b,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} .$$

Démonstration (le calcul principal de l'hérédité).

$\square$

Exemples

1. $n = 3$:
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$
2. $n = 4$:
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$
3. Nombre total de sous-ensembles d'un ensemble à n éléments :
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$
4. Pour $n \geq 1$,
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

Plan

Valeur absolue

Si a est un réel, on définit sa valeur absolue par

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0\,; \\ -a & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Propriétés élémentaires

On vérifie facilement que, si a et b sont deux réels,

- $|a| = |-a| \geq 0$;
- $|a| = 0$ si et seulement si $a = 0$;
- $|a \times b| = |a| \times |b|$;
- $|a|^2 = a^2$;
- si $a \neq 0$, $\left|\frac{1}{a}\right| = \frac{1}{|a|}$.

Inégalité triangulaire

Pour tous réels a et b,

$$|a+b| \leq |a| + |b| \, .$$

Démonstration.

$\square$

Inégalité triangulaire inverse

Pour tous réels a et b,

$$\big||a| - |b|\big| \leq |a - b| \, .$$

Démonstration.

$\square$

Généralisations

Soit $m \leq n$ deux entiers relatifs et $(a_k)_{m \leq k \leq n}$ une famille de réels. Alors :

1. Valeur absolue d'un produit :

$$\left| \prod_{k=m}^{n} a_k \right| = \prod_{k=m}^{n} |a_k| \, .$$

2. Inégalité triangulaire :

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=m}^{n} |a_k| \, .$$

Plan

La droite réelle

La droite réelle est une droite, munie d'un repère $(O, \vec{u})$. Ses points s'identifient naturellement aux nombres réels : on associe au point M le réel a défini par la relation

$$\overrightarrow{OM} = a\,\vec{u}.$$

On dit que a est l'abscisse de M.

Valeur absolue et distance

On définit la distance entre deux points de la droite réelle M et N d'abscisses respectives a et b par

$$d(M, N) = |a - b|\,.$$

Quelques propriétés

1. Si M est d'abscisse a, alors $|a|$ est la distance de M à l'origine O.
2. Si M et N sont d'abscisses respectives a et b, le milieu du segment $[M; N]$ est d'abscisse $\frac{a+b}{2}$.
3. Si M est d'abscisse a, alors le symétrique de M par rapport à O est le point d'abscisse $-a$.

Plan

Intervalles

La relation d'ordre permet de définir des sous-ensembles particuliers de $\mathbb{R}$, les intervalles.

Intervalles bornés	Intervalles non bornés
$a < b$ deux réels	a un réel
$[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \ : \ a \leq x \leq b\}$	$]-\infty; a] = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \leq a\}$
$[a; b[= \{x \in \mathbb{R} \ : \ a \leq x < b\}$	$]-\infty; a[= \{x \in \mathbb{R} \ : \ x < a\}$
$]a; b] = \{x \in \mathbb{R} \ : \ a < x \leq b\}$	$[a; +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \geq a\}$
$]a; b[= \{x \in \mathbb{R} \ : \ a < x < b\}$	$]a; +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \ : \ x > a\}$
	$\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

Intervalles ouverts et fermés

- Les intervalles ouverts sont ceux des types suivants :

$$]a; b[,\ ]-\infty; a[,\ ]a; +\infty[\text{ et }]-\infty; +\infty[.$$

- Les intervalles fermés sont ceux des types suivants :

$$[a; b],\ ]-\infty; a],\ [a; +\infty[\text{ et }]-\infty; +\infty[.$$

- Les intervalles fermés (et) bornés, c'est à dire ceux de la forme $[a; b]$, sont aussi appelés des segments.

Intervalles définis par centre et rayon

Soit c un réel et r un réel strictement positif.

- Intervalle fermé (segment) de centre c et de rayon r :

$$[c-r; c+r] = \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, |x-c| \leq r\right\}.$$

- Intervalle ouvert de centre c et de rayon r :

$$]c-r; c+r[= \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, |x-c| < r\right\}.$$

Ces intervalles désignent l'ensemble des points de la droite réelle dont la distance à c est inférieure ou égale (resp. strictement inférieure) à r.