L1 IEEEA, 2024-2025 Université de Rouen-Normandie

Lundi 21 octobre 2024

Fiche n° 7 - Révision des TD 1 à 6

v2024-10-22

Exercice 1. Donner les négations des propositions suivantes. Sont-elles vraies ou fausses ? Justifier vos réponses.

(a) Proposition P : pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(n \leq 0)$ ou $(n^2 \geq 1)$

(b) Proposition Q : Il existe $x \in \mathbb{R}$, $(x > 5)$ et $(x^2 < 2)$

Exercice 2. On considère des propositions P et Q de valeurs de vérité quelconques.

P	Q	P ou Q	P et Q	$\neg(P$ et $Q)$	A
V	V				
V	F				
F	V				
F	F				

P	Q	P	$\neg Q$	P et $\neg Q$	$\neg P$	Q	$\neg P$ et Q	B
V	V							
V	F							
F	V							
F	F							

(a) Ecrire la table de vérité de la proposition A : $(P$ ou $Q)$ et $\neg\,(P$ et $Q)$

(b) Ecrire la table de vérité de la proposition B: $(P$ et $\neg\,Q)$ ou $(\neg\,P$ et $Q)$

(c) Comparer les propositions A et B. Que peut-on en déduire?

Exercice 3. Écrire la négation de chacune de ces propositions suivantes et indiquer en le justifiant si la proposition considérée est vraie ou fausse.

(a) Proposition P : $\exists n \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N},\ p + n \geq 2$

(b) Proposition Q : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x^2 + y^2 < 1$

Exercice 4. Démontrer par récurrence sur n que pour tout $n \geq 2$ l'implication

$$[x > 0] \Rightarrow [(1 + x)^n > 1 + nx]$$

est vraie.

Exercice 5. On considère les nombres complexes $z = -1 + 4\mathrm{i}$ et $z' = 2 + 5\mathrm{i}$. Déterminer explicitement :

(a) $\bar{z}$, $|z|$, $z + z'$ (b) $z\,z'$, (c) $\frac{z}{z'}$

Exercice 6. On considère les nombres complexes $z = 3 - 3\mathrm{i}$.

(a) Déterminer explicitement : $|z|$ et $\dfrac{z}{|z|}$

(b) Déterminer θ tel que $\dfrac{z}{|z|} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$.

(c) Donner la forme exponentielle complexe de z. Calculer explicitement et simplifier z^8.

Exercice 7. Soit un ensemble E et deux parties A et B de E. Démontrer que

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Exercice 8. Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ? Justifiez vos réponses.

(a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto 2^n$. (b) $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ x \mapsto \dfrac{3}{x}$.

Exercice 9. calculer explicitement lorsque cela est possible les fonctions suivantes $f \circ g$, $g \circ f$, f^{-1}, g^{-1} dans les cas suivants :

(a) $f(x) = 2x - 1$ et $g(y) = 3y + 2$

(b) $f(x) = x^2$ et $g(y) = y + 1$

(c) $f(x, y) = x\,y$ et $g(u, v) = (2\,u, u + v)$

Exercice 10. Soit $b \geq 0$. Montrer que si pour tout $\delta > 0$ on a $b^2 + \sqrt{b} \leq \delta$, alors $b = 0$.