L1 IEEEA, 2024-2025 Université de Rouen-Normandie

Lundi 2 décembre 2024

Fiche n° 12 - Révision pour le CC2

v2024-12-12

Exercice 1. On pose $f_0 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f_0(x) = -x$ et on définit par récurrence la suite de fonctions pour $n \in \mathbb{N}$ et pour $x \in \mathbb{R}^+$ (si $f_n(x) \neq 2$) par la relation :

$$f_{n+1}(x) = \frac{1}{2 - f_n(x)}.$$

(a) Montrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_n(x) \leq 1$.

(b) Montrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_n(x) = \dfrac{(n-1)\,x + n}{n\,x + (n+1)}$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x^2}$, et soient les parties $A = [1, 3]$ et $B = [-2, 2]$.

(a) Déterminer $f(A)$ (en le justifiant).

(b) Déterminer $f^{-1}(B)$ (en le justifiant).

Exercice 3. Soient E et F deux ensembles, $f : E \to F$ une application et $C, D \subset F$.

(a) Démontrer : $f^{-1}(C \cup D) \subset f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

(b) Démontrer : $f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) \subset f^{-1}(C \cup D)$.

Exercice 4. On considère la relation binaire définie sur $\mathbb{Z}$ par :

$$x\,\mathcal{R}\,y \iff x^2 - y^2 = 2x - 2y.$$

(a) Montrer que $\mathcal{R}$ est réflexive.

(b) Montrer que $\mathcal{R}$ est symétrique.

(c) Montrer que $\mathcal{R}$ est transitive.

(d) Que peut on en conclure sur $\mathcal{R}$?

(e) Déterminer les classes d'équivalence cl(0) et cl(1).

(f) Pour $a \in \mathbb{Z}$, déterminer la classe d'équivalence cl(a) et en décrire précisément l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/\mathcal{R}$.

Exercice 5. On considère la relation définie sur ${\mathbb{R}^+}^2 (= \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$ par :

$$(x, y)\,\mathcal{R}\,(x', y') \iff \Big[(x^2 + y^2 \leq {x'}^2 + {y'}^2) \text{ et } (x \leq x')\Big].$$

(a) Montrer que $\mathcal{R}$ est réflexive.

(b) Montrer que $\mathcal{R}$ est anti-symétrique.

(c) Montrer que $\mathcal{R}$ est transitive. Que peut on en conclure ?

Exercice 6.

(a) Dans $(\mathbb{R}, \leq)$, déterminer la borne inférieure et le plus petit élément, lorsqu'ils existent, des sous-ensembles : $A = \{x \in \mathbb{R},\ x^2 < 2\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 2\}$.

(b) Dans $(\mathbb{N}^*, \leq)$, déterminer la borne supérieure et le plus grand élément, lorsqu'ils existent, du sous-ensemble : $C = \left\{n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{10}{n^2} > 1\right\}$ et $D = \left\{n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{10}{n^2} \leq 1\right\}$.

Exercice 7. On considère dans $\mathbb{R}$ le loi de composition interne : $x * y = \ln(e^x + e^y)$.

(a) Est ce que la loi $*$ est commutative ?

(b) Calculer explicitement en simplifiant pour $x, y, z \in \mathbb{R}$:
$A = (x * y) * z$ et $B = x * (y * z)$

(c) Est ce que la loi $*$ est associative ?

(d) Est ce que la loi $*$ admet une élément neutre ?

(e) Est ce que $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe ?

Exercice 8. On pose $\rho = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}$ et $\mathbb{U}_5 = \{\rho^n,\ n \in \mathbb{Z}\}$.

(a) Pour $n \in \mathbb{Z}$, on rappelle qu'il existe un unique couple (p, r), $p \in \mathbb{Z}$ et $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ tel que $n = 5\,p + r$.
Simplifier ρ^n et montrer que $\mathbb{U}_5 = \{1, \rho, \rho^2, \rho^3, \rho^4\}$.

(b) Donner la table de multiplication des éléments de $(\mathbb{U}_5, \times)$.