Université de Rouen Normandie
Portail IEEEA, $1^{\text{ère}}$ année
2025-2026
Espaces vectoriels et applications

TD n°1. Les systèmes linéaires

---

1. Annie et Arthur sont frère et soeur. Annie a autant de frères que de soeurs mais Arthur a deux fois plus de soeurs que de frères. Combien y a-t-il d'enfants dans cette famille ?

2. On considère la réaction chimique : $a\mathrm{NO}_2 + b\mathrm{H}_2\mathrm{O} \longrightarrow c\mathrm{HNO}_2 + d\mathrm{HNO}_3$, où a, b, c et d sont des entiers strictement positifs inconnus. La réaction doit être équilibrée, c'est-à-dire que le nombre d'atomes de chaque élément doit être le même avant et après la réaction. Par exemple le nombre d'atomes d'oxygène doit rester le même : $2a + b = 2c + 3d$. Bien qu'il ait plusieurs valeurs possibles pour a, b, c et d qui équilibrent la réaction, calculer les entiers positifs les plus petits possibles équilibrant la réaction.

3. Soit f une fonction polynomiale de degré 3 sur $\mathbb{R}$, que l'on écrit sous la forme suivante : pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Déterminer les paramètres réels a_3, a_2, a_1 et a_0 (s'il en existe) pour que f satisfasse : $f(1) = 4$, $f(-1) = 0$, $f(-2) = -5$, $f(2) = 15$.

4. Résoudre les systèmes suivants à l'aide de l'algorithme de Gauss. On précisera dans chaque cas les variables libres et les variables liées.

$$\begin{cases} x - 2y + z &= 7 \\ 2x - y + 4z &= 17 \\ 3x - 2y + 2z &= 14 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y - 3z &= 1 \\ 2x - y + 4z &= 4 \\ 3x + 8y - 13z &= 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y - 2z &= -1 \\ 3x - y + 2z &= 7 \\ 5x + 3y - 4z &= 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3z - 4s + 2t &= 4 \\ 3x - 7y + 2z - 5s + 4t &= 9 \\ 5x - 10y - 5z - 4s + 7t &= 22 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y - 3z + 4t &= 2 \\ 2x + 5y - 2z + t &= 1 \\ 5x + 12y - 7z + 6t &= 7 \end{cases}$$

5. Déterminer les valeurs de k de sorte que les systèmes suivants d'inconnues $x\,, y$ et z admettent, (i) une unique solution, (ii) aucune solution, (iii) une infinité de solutions.

$$\begin{cases} x - 2y &= 1 \\ x - y + kz &= -2 \\ ky + 4z &= 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} kx + y + z &= 1 \\ x + ky + z &= 1 \\ x + y + kz &= 1 \end{cases}$$

6. Quelles conditions doivent vérifier $a\,, b$ et c pour que le système suivant d'inconnues $x\,, y$ et z admette une solution.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z &= a \\ 2x + 6y - 11z &= b \\ x - 2y + 7z &= c \end{cases}$$

7. Trouvez un polynôme de degré inférieur ou égal à deux dont le graphe passe par les points $(1, p), (2, q), (3, r)$ où p, q et r sont des nombres arbitraires. Existe-t-il toujours un tel polynôme pour n'importe quelles valeurs de p, q, r ?

8. Déterminer si les énoncés suivants sont vrais ou faux en justifiant votre réponse.

i. Un système linéaire compatible admet une unique solution.
ii. Une matrice échelonnée réduite admet une position de pivot par colonne.
iii. Un système linéaire homogène admet une unique solution.
iv. Un système linéaire homogène avec (strictement) plus d'inconnues que d'équations possède une infinité de solutions.
v. Un système linéaire homogène avec (strictement) moins d'inconnues que d'équations admet uniquement la solution triviale.

vi. Un système linéaire avec (strictement) moins d'inconnues que d'équations possède ou bien une infinité de solutions ou bien aucune.

vii. Un système linéaire avec (strictement) plus d'inconnues que d'équations possède ou bien une infinité de solutions ou bien aucune.

viii. Il existe un système de trois équations linéaires à trois inconnues qui possède exactement trois solutions.

ix. Soit M une matrice échelonnée réduite. Si l'on supprime une ligne de M, alors la matrice qui en découle est encore sous forme échelonnée réduite.

9. Soient t et u deux paramètres réels. Posons

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & t & u+t^2 \\ 2 & u & u+t^2 \\ 2 & t^3 & 2t^2 \end{pmatrix}$$

et notons $\mathcal{S}$ le système linéaire ayant pour matrice augmentée $\tilde{A}$.

i. Discuter suivant les valeurs de t et u la compatibilité du système $\mathcal{S}$. Représenter graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ l'ensemble des valeurs t et u pour lesquelles le système est compatible.

ii. Déterminer l'ensemble des solutions de ce système, lorsqu'il est compatible.