Espaces vectoriels et applications

Université de Rouen Normandie
Portail IEEEA $1^{\text{ère}}$ année, 2025 – 2026

20 janvier 2026

Chapite 1 : Systèmes linéaires

Nombreux contextes d'applications de l'algèbre linéaire : sciences de l'ingénieur, météorologie, économie, chimie,...

Exemples :

i. On considère la réaction chimique

$$aNO_2 + bH_2O \longrightarrow cHNO_2 + dHNO_3$$

où a, b, c et d sont des entiers strictement positifs inconnus. La réaction doit être équilibrée.

Chapite 1 : Systèmes linéaires

Nombreux contextes d'applications de l'algèbre linéaire : sciences de l'ingénieur, météorologie, économie, chimie,...

Exemples :

i. On considère la réaction chimique

$$aNO_2 + bH_2O \longrightarrow cHNO_2 + dHNO_3$$

où a, b, c et d sont des entiers strictement positifs inconnus. La réaction doit être équilibrée. Comment calcule-t-on les entiers positifs les plus petits possibles équilibrant la réaction ?

Chapite 1 : Systèmes linéaires

Nombreux contextes d'applications de l'algèbre linéaire : sciences de l'ingénieur, météorologie, économie, chimie,...

Exemples :

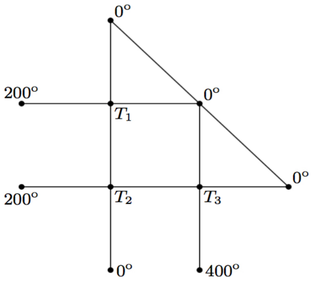
i. On considère la réaction chimique

$$aNO_2 + bH_2O \longrightarrow cHNO_2 + dHNO_3$$

où a, b, c et d sont des entiers strictement positifs inconnus. La réaction doit être équilibrée. Comment calcule-t-on les entiers positifs les plus petits possibles équilibrant la réaction ?

ii. Annie et Arthur sont frère et soeur. Annie a autant de frères que de soeurs mais Arthur a deux fois plus de soeurs que de frères. Combien y-a-t-il d'enfants dans cette famille ?

iii. Dans la grille de fils métalliques ci-dessous, la température aux points du bord est maintenue constante.



Quand l'équilibre thermique est atteint, la température d'une maille intérieure est égale à la moyenne des températures des mailles adjacentes. Comment calcule-t-on les températures des trois mailles intéreures ?

Notions générales

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel supérieur à 1.

Définition 1.1

Une **équation linéaire** *à n inconnues $x_1, x_2, \cdots, x_n$ est une équation de la forme*

Notions générales

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel supérieur à 1.

Définition 1.1

Une **équation linéaire** *à n inconnues $x_1, x_2, \cdots, x_n$ est une équation de la forme*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

où $a_1, a_2, \cdots, a_n$ et b sont des nombres réels donnés.

Notions générales

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel supérieur à 1.

Définition 1.1

Une **équation linéaire** *à n inconnues $x_1, x_2, \cdots, x_n$ est une équation de la forme*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

où $a_1, a_2, \cdots, a_n$ et b sont des nombres réels donnés.

Définition 1.2

Notions générales

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel supérieur à 1.

Définition 1.1

Une **équation linéaire** *à n inconnues $x_1, x_2, \cdots, x_n$ est une équation de la forme*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

où $a_1, a_2, \cdots, a_n$ et b sont des nombres réels donnés.

Définition 1.2

Un système de m équations linéaires à n inconnues, ou **système linéaire**, *est une liste de m équations linéaires à n inconnues, les inconnues étant les mêmes pour toutes les équations.*

Notions générales

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel supérieur à 1.

Définition 1.1

Une **équation linéaire** *à n inconnues $x_1, x_2, \cdots, x_n$ est une équation de la forme*

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b,$$

où $a_1, a_2, \cdots, a_n$ et b sont des nombres réels donnés.

Définition 1.2

Un système de m équations linéaires à n inconnues, ou **système linéaire**, *est une liste de m équations linéaires à n inconnues, les inconnues étant les mêmes pour toutes les équations.*

Exemple. Système de 2 équations à 3 inconnues.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + \frac{3}{2}x_3 & = 8, \\ x_1 \qquad\qquad - 4x_3 & = -7. \end{cases}$$

Forme générale d'un système linéaire de m équations à n inconnues $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

Forme générale d'un système linéaire de m équations à n inconnues $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

Forme générale d'un système linéaire de m équations à n inconnues $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \end{array}\right.$$

Forme générale d'un système linéaire de m équations à n inconnues $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & & & & & & & & & \\
a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & a_{i3}x_3 & + & \cdots & + & a_{in}x_n & = & b_i \\
 & & & & & & & & & & \\
\end{array}\right.$$

Forme générale d'un système linéaire de m équations à n inconnues $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & & & & & & & & & \\
a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & a_{i3}x_3 & + & \cdots & + & a_{in}x_n & = & b_i \\
\vdots & & & & & & & & & & \\
\end{array}\right.$$

Forme générale d'un système linéaire de m équations à n inconnues $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

$$\left\{\begin{array}{lllllllllll}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & & & & & & & & & \\
a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & a_{i3}x_3 & + & \cdots & + & a_{in}x_n & = & b_i \\
\vdots & & & & & & & & & & \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}\right.$$

Forme générale d'un système linéaire de m équations à n inconnues $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & & & & & & & & & \\
a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & a_{i3}x_3 & + & \cdots & + & a_{in}x_n & = & b_i \\
\vdots & & & & & & & & & & \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}\right.$$

Les nombres réels $a_{ij}, i = 1, \cdots, m, j = 1, \cdots, n$ sont les **coefficients** du système. Ce sont des données. Les nombres réels $b_i, i = 1, \cdots, m$ constituent le **second membre** du système et sont également des données.

Définition 1.3

Définition 1.3

Une **solution** *du système linéaire est une liste de n nombres réels* $(s_1, s_2, \cdots, s_n)$ *(un n–uplet) tels que si l'on substitue* s_1 *pour* x_1, s_2 *pour* x_2, *etc ... dans le système linéaire, on obtient une égalité. L'ensemble des solutions du système linéaire est l'ensemble de tous ces n–uplets.*

Définition 1.3

Une **solution** *du système linéaire est une liste de n nombres réels $(s_1, s_2, \cdots, s_n)$ (un n–uplet) tels que si l'on substitue s_1 pour x_1, s_2 pour x_2, etc ... dans le système linéaire, on obtient une égalité. L'ensemble des solutions du système linéaire est l'ensemble de tous ces n–uplets.*

Pour un système linéaire général de m équations et n inconnues :

Définition 1.3

Une **solution** *du système linéaire est une liste de n nombres réels* $(s_1, s_2, \cdots, s_n)$ *(un n–uplet) tels que si l'on substitue* s_1 *pour* x_1, s_2 *pour* x_2, *etc ... dans le système linéaire, on obtient une égalité. L'ensemble des solutions du système linéaire est l'ensemble de tous ces n–uplets.*

Pour un système linéaire général de m équations et n inconnues :

a) Soit il n'y a aucune solution. Dans ce cas on dit que le système est **incompatible**.

Définition 1.3

Une **solution** *du système linéaire est une liste de n nombres réels* $(s_1, s_2, \cdots, s_n)$ *(un n–uplet) tels que si l'on substitue* s_1 *pour* x_1*,* s_2 *pour* x_2*, etc ... dans le système linéaire, on obtient une égalité. L'ensemble des solutions du système linéaire est l'ensemble de tous ces n–uplets.*

Pour un système linéaire général de m équations et n inconnues :

a) Soit il n'y a aucune solution. Dans ce cas on dit que le système est **incompatible**.

b) Soit il y a une solution unique. Dans ce cas on dit que le système est **compatible**.

Définition 1.3

Une **solution** *du système linéaire est une liste de n nombres réels* $(s_1, s_2, \cdots, s_n)$ *(un n–uplet) tels que si l'on substitue* s_1 *pour* x_1, s_2 *pour* x_2, *etc ... dans le système linéaire, on obtient une égalité. L'ensemble des solutions du système linéaire est l'ensemble de tous ces n–uplets.*

Pour un système linéaire général de m équations et n inconnues :

a) Soit il n'y a aucune solution. Dans ce cas on dit que le système est **incompatible**.

b) Soit il y a une solution unique. Dans ce cas on dit que le système est **compatible**.

c) Soit il y a une infinités de solutions. Dans ce cas aussi on dit que le système est **compatible**.

Définition 1.4

Définition 1.4

1. *Un système est dit* **homogène** *si son second membre est nul, c'est–à–dire si* $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$.

Définition 1.4

1. *Un système est dit* **homogène** *si son second membre est nul, c'est–à–dire si* $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$.
2. *Deux systèmes sont dits* **équivalents** *s'ils ont le même ensemble de solutions.*

Définition 1.4

1. *Un système est dit* **homogène** *si son second membre est nul, c'est–à–dire si* $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$.
2. *Deux systèmes sont dits* **équivalents** *s'ils ont le même ensemble de solutions.*

Remarque. Un système homogène est toujours compatible. En effet, un tel système admet toujours la solution *triviale* $s_1 = s_2 = \cdots = s_n = 0$.

Exemples.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 & = 0, \\ x_1 + x_3 & = 0, \\ x_2 + x_3 & = 0. \end{cases}$$

Définition 1.4

1. *Un système est dit* **homogène** *si son second membre est nul, c'est–à–dire si* $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$.
2. *Deux systèmes sont dits* **équivalents** *s'ils ont le même ensemble de solutions.*

Remarque. Un système homogène est toujours compatible. En effet, un tel système admet toujours la solution *triviale* $s_1 = s_2 = \cdots = s_n = 0$.

Exemples.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 & = 0, \\ x_1 + x_3 & = 0, \\ x_2 + x_3 & = 0. \end{cases}$$

$(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$ est Solution.

Définition 1.4

1. *Un système est dit* **homogène** *si son second membre est nul, c'est–à–dire si* $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$.
2. *Deux systèmes sont dits* **équivalents** *s'ils ont le même ensemble de solutions.*

Remarque. Un système homogène est toujours compatible. En effet, un tel système admet toujours la solution *triviale* $s_1 = s_2 = \cdots = s_n = 0$.

Exemples.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 & = 0, \\ x_1 + x_3 & = 0, \\ x_2 + x_3 & = 0. \end{cases}$$

$(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$ est Solution.

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + x_6 & = 0, \\ x_1 + x_3 & = 0. \end{cases}$$

Définition 1.4

1. *Un système est dit* **homogène** *si son second membre est nul, c'est–à–dire si* $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$.
2. *Deux systèmes sont dits* **équivalents** *s'ils ont le même ensemble de solutions.*

Remarque. Un système homogène est toujours compatible. En effet, un tel système admet toujours la solution *triviale* $s_1 = s_2 = \cdots = s_n = 0$.

Exemples.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 & = 0, \\ x_1 + x_3 & = 0, \\ x_2 + x_3 & = 0. \end{cases}$$

$(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$ est Solution.

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + x_6 & = 0, \\ x_1 + x_3 & = 0. \end{cases}$$

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$ est Solution.

Notation matricielle

Notation matricielle

$$A =$$

Notation matricielle

$$A = \left(\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \\ a \\ a \end{matrix}} \right.$$

Notation matricielle

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix}$$

Notation matricielle

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix}$$

Notation matricielle

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ & & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix}$$

Notation matricielle

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Notation matricielle

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Elle permet d'écrire de façon plus compacte un système linéaire. Il s'agit de ranger les coefficients dans des tableaux rectangulaires.

Notation matricielle

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Elle permet d'écrire de façon plus compacte un système linéaire. Il s'agit de ranger les coefficients dans des tableaux rectangulaires.
Le tableau A s'appelle la **matrice** du système linéaire. Elle a m lignes et n colonnes, c'est une matrice $m \times n$.

On introduit

$$\widetilde{A} =$$

On introduit

$$\widetilde{A} = \left(\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{matrix} \right.$$

On introduit

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{array} \right.$$

On introduit

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{array} \right.$$

On introduit

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{array} \right.$$

On introduit

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{array} \right.$$

On introduit

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} & b_i \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{array} \right.$$

On introduit

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} & b_i \\ \vdots & & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} & \end{array} \right.$$

On introduit

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} & b_i \\ \vdots & & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

On introduit

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} & b_i \\ \vdots & & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

La matrice $\widetilde{A}$ s'appelle **matrice augmentée** du système. C'est une matrice $m \times (n+1)$. Elle contient toute l'information nécessaire à déterminer le système, les coefficients et le second membre.

On introduit

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} & b_i \\ \vdots & & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

La matrice $\widetilde{A}$ s'appelle **matrice augmentée** du système. C'est une matrice $m \times (n+1)$. Elle contient toute l'information nécessaire à déterminer le système, les coefficients et le second membre.

Exemple.

$$\left\{ \begin{array}{ll} 2x_1 - x_4 + 3x_5 & = -2 \\ -x_1 + x_3 & = 1 \\ x_2 + 7x_3 - 2x_5 & = 0 \end{array} \right. \leftrightarrow \widetilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Systèmes échelonnés

Définitions 1.5

Systèmes échelonnés

Définitions 1.5

Systèmes échelonnés

Définitions 1.5

1) *Une matrice est dite* **échelonnée si, et seulement si** *elle a les deux propriétés suivantes :*

Systèmes échelonnés

Définitions 1.5

1) *Une matrice est dite* **échelonnée si, et seulement si** *elle a les deux propriétés suivantes :*
   a) *Si une ligne est entièrement nulle, toutes les lignes situées en dessous sont également entièrement nulles.*

Systèmes échelonnés

Définitions 1.5

1) *Une matrice est dite* **échelonnée si, et seulement si** *elle a les deux propriétés suivantes :*
   a) *Si une ligne est entièrement nulle, toutes les lignes situées en dessous sont également entièrement nulles.*
   b) *Dans chaque ligne non entièrement nulle (à partir de la deuxième), le premier coefficient non nul en comptant à partir de la gauche est situé à droite du premier coefficient non nul de la ligne précédente.*

Systèmes échelonnés

Définitions 1.5

1) *Une matrice est dite* **échelonnée** **si, et seulement si** *elle a les deux propriétés suivantes :*
   a) *Si une ligne est entièrement nulle, toutes les lignes situées en dessous sont également entièrement nulles.*
   b) *Dans chaque ligne non entièrement nulle (à partir de la deuxième), le premier coefficient non nul en comptant à partir de la gauche est situé à droite du premier coefficient non nul de la ligne précédente.*
2) *Une matrice est dite* **échelonnée réduite** **si, et seulement si** *en plus des deux propriétés a) et b) elle satisfait les deux propriétés suivantes :*

Systèmes échelonnés

Définitions 1.5

1) *Une matrice est dite* **échelonnée si, et seulement si** *elle a les deux propriétés suivantes :*
   a) *Si une ligne est entièrement nulle, toutes les lignes situées en dessous sont également entièrement nulles.*
   b) *Dans chaque ligne non entièrement nulle (à partir de la deuxième), le premier coefficient non nul en comptant à partir de la gauche est situé à droite du premier coefficient non nul de la ligne précédente.*
2) *Une matrice est dite* **échelonnée réduite si, et seulement si** *en plus des deux propriétés a) et b) elle satisfait les deux propriétés suivantes :*
   i) *Le premier coefficient non nul d'une ligne en comptant à partir de la gauche vaut* 1.

Systèmes échelonnés

Définitions 1.5

1) *Une matrice est dite* **échelonnée si, et seulement si** *elle a les deux propriétés suivantes :*
   a) *Si une ligne est entièrement nulle, toutes les lignes situées en dessous sont également entièrement nulles.*
   b) *Dans chaque ligne non entièrement nulle (à partir de la deuxième), le premier coefficient non nul en comptant à partir de la gauche est situé à droite du premier coefficient non nul de la ligne précédente.*
2) *Une matrice est dite* **échelonnée réduite si, et seulement si** *en plus des deux propriétés a) et b) elle satisfait les deux propriétés suivantes :*
   i) *Le premier coefficient non nul d'une ligne en comptant à partir de la gauche vaut* 1*.*
   ii) *Et c'est le* **seul** *élément non nul de sa colonne.*

Systèmes échelonnés

Définitions 1.5

1) *Une matrice est dite* **échelonnée si, et seulement si** *elle a les deux propriétés suivantes :*
   a) *Si une ligne est entièrement nulle, toutes les lignes situées en dessous sont également entièrement nulles.*
   b) *Dans chaque ligne non entièrement nulle (à partir de la deuxième), le premier coefficient non nul en comptant à partir de la gauche est situé à droite du premier coefficient non nul de la ligne précédente.*
2) *Une matrice est dite* **échelonnée réduite si, et seulement si** *en plus des deux propriétés a) et b) elle satisfait les deux propriétés suivantes :*
   i) *Le premier coefficient non nul d'une ligne en comptant à partir de la gauche vaut* 1.
   ii) *Et c'est le* **seul** *élément non nul de sa colonne.*
3) *Un système linéaire dont la matrice augmentée est échelonnée est appelé* **système échelonné**.

Définition 1.6

Définition 1.6

Soit B une matrice échelonnée. Les **positions de pivot** *de B sont les emplacements (au sens couple (numéro de ligne, numéro de colonne)) des premiers coefficients non nuls des lignes non entièrrement nulles.*

Définition 1.6

Soit B une matrice échelonnée. Les **positions de pivot** *de B sont les emplacements (au sens couple (numéro de ligne, numéro de colonne)) des premiers coefficients non nuls des lignes non entièrrement nulles.*

Définition 1.7

Définition 1.6

Soit B une matrice échelonnée. Les **positions de pivot** *de B sont les emplacements (au sens couple (numéro de ligne, numéro de colonne)) des premiers coefficients non nuls des lignes non entièrrement nulles.*

Définition 1.7

Les inconnues correspondant à une colonne contenant le pivot sont appelées **variables essentielles (ou liées)**. *Les autres sont appelées* **variables libres**.

Théorème 1.8

Dans le cas d'un système échelonné $m \times n$ on a l'alternative :

Théorème 1.8

Dans le cas d'un système échelonné $m \times n$ on a l'alternative :

a) *Si la matrice augmentée du système contient une ligne de la forme*

$$(0\ 0\ \cdots\ 0\ b) \text{ avec } b \neq 0, \tag{1.1}$$

alors le système est incompatible ; il n'y a donc aucune solution.

Théorème 1.8

Dans le cas d'un système échelonné $m \times n$ on a l'alternative :

a) *Si la matrice augmentée du système contient une ligne de la forme*

$$(0\ 0\ \cdots\ 0\ b) \text{ avec } b \neq 0, \tag{1.1}$$

alors le système est incompatible ; il n'y a donc aucune solution.

b) *S'il n'y a pas de ligne de la forme* (1.1), **ni** *de variables libres, alors le système possède une solution unique.*

Théorème 1.8

Dans le cas d'un système échelonné $m \times n$ on a l'alternative :

a) *Si la matrice augmentée du système contient une ligne de la forme*

$$(0\ 0\ \cdots\ 0\ b) \text{ avec } b \neq 0, \tag{1.1}$$

alors le système est incompatible ; il n'y a donc aucune solution.

b) *S'il n'y a pas de ligne de la forme* (1.1), **ni** *de variables libres, alors le système possède une solution unique.*

c) *S'il n'y a pas de ligne de la forme* (1.1), **mais** *qu'il existe des variables libres, alors il y a une infinité de solutions.*

Théorème 1.8

Dans le cas d'un système échelonné $m \times n$ on a l'alternative :

a) *Si la matrice augmentée du système contient une ligne de la forme*

$$(0\ 0\ \cdots\ 0\ b) \text{ avec } b \neq 0, \tag{1.1}$$

alors le système est incompatible ; il n'y a donc aucune solution.

b) *S'il n'y a pas de ligne de la forme* (1.1), **ni** *de variables libres, alors le système possède une solution unique.*

c) *S'il n'y a pas de ligne de la forme* (1.1), **mais** *qu'il existe des variables libres, alors il y a une infinité de solutions.*

Dans le cas des systèmes échelonnés compatibles, on obtient une description paramétrique de l'ensemble des solutions en exprimant les variables essentielles en fonctions du second membre et des variables libres.

Pivot de Gauss

Pivot de Gauss

À partir de maintenant, la stratégie pour résoudre un système linéaire sera de se ramener à un système échelonné qui lui soit équivalent.

Pivot de Gauss

À partir de maintenant, la stratégie pour résoudre un système linéaire sera de se ramener à un système échelonné qui lui soit équivalent.

Définition 1.9

On appelle **opérations élémentaires** *sur les lignes d'une matrice les trois opérations suivantes :*

Pivot de Gauss

À partir de maintenant, la stratégie pour résoudre un système linéaire sera de se ramener à un système échelonné qui lui soit équivalent.

Définition 1.9

On appelle **opérations élémentaires** *sur les lignes d'une matrice les trois opérations suivantes :*

i) *Échanger deux lignes (échange).*

Pivot de Gauss

À partir de maintenant, la stratégie pour résoudre un système linéaire sera de se ramener à un système échelonné qui lui soit équivalent.

Définition 1.9

On appelle **opérations élémentaires** *sur les lignes d'une matrice les trois opérations suivantes :*

i) *Échanger deux lignes (échange).*

ii) *Multiplier une ligne par une constante non nulle.*

Pivot de Gauss

À partir de maintenant, la stratégie pour résoudre un système linéaire sera de se ramener à un système échelonné qui lui soit équivalent.

Définition 1.9

On appelle **opérations élémentaires** *sur les lignes d'une matrice les trois opérations suivantes :*

i) *Échanger deux lignes (échange).*
ii) *Multiplier une ligne par une constante non nulle.*
iii) *Remplacer une ligne par elle–même plus un multiple d'une autre ligne (substitution).*

Pivot de Gauss

À partir de maintenant, la stratégie pour résoudre un système linéaire sera de se ramener à un système échelonné qui lui soit équivalent.

Définition 1.9

On appelle **opérations élémentaires** *sur les lignes d'une matrice les trois opérations suivantes :*

i) *Échanger deux lignes (échange).*
ii) *Multiplier une ligne par une constante non nulle.*
iii) *Remplacer une ligne par elle–même plus un multiple d'une autre ligne (substitution).*

Remarque. Dans la pratique, on utilise aussi l'opération suivante, qu'on peut appeler *substitution généralisée* :

iii') *Remplacer une ligne L_i par $\alpha L_i + \beta L_j$ (avec $\alpha \neq 0$ et $i \neq j$), ce qui revient à faire deux opérations élémentaires une après l'autre, d'abord multiplier la ligne L_i par la constante non nulle α, pour lui rajouter ensuite βL_j.*

Remarque importante. Lorsqu'on fait une opération élémentaire sur la matrice augmentée d'un système linéaire, cela revient à faire des opérations sur les équations du système. Plus précisément, les opérations introduites dans la définition précédente correspondent (dans le même ordre) aux opérations suivantes :

Remarque importante. Lorsqu'on fait une opération élémentaire sur la matrice augmentée d'un système linéaire, cela revient à faire des opérations sur les équations du système. Plus précisément, les opérations introduites dans la définition précédente correspondent (dans le même ordre) aux opérations suivantes :

i) Permuter entre elles deux équations du système.

Remarque importante. Lorsqu'on fait une opération élémentaire sur la matrice augmentée d'un système linéaire, cela revient à faire des opérations sur les équations du système. Plus précisément, les opérations introduites dans la définition précédente correspondent (dans le même ordre) aux opérations suivantes :

i) Permuter entre elles deux équations du système.

ii) Multiplier une équation par une constante non nulle.

Remarque importante. Lorsqu'on fait une opération élémentaire sur la matrice augmentée d'un système linéaire, cela revient à faire des opérations sur les équations du système. Plus précisément, les opérations introduites dans la définition précédente correspondent (dans le même ordre) aux opérations suivantes :

i) Permuter entre elles deux équations du système.

ii) Multiplier une équation par une constante non nulle.

iii) Rajouter à une équation un multiple d'une autre équation.

Remarque importante. Lorsqu'on fait une opération élémentaire sur la matrice augmentée d'un système linéaire, cela revient à faire des opérations sur les équations du système. Plus précisément, les opérations introduites dans la définition précédente correspondent (dans le même ordre) aux opérations suivantes :

i) Permuter entre elles deux équations du système.
ii) Multiplier une équation par une constante non nulle.
iii) Rajouter à une équation un multiple d'une autre équation.

Proposition 1.10

Une opération élémentaire sur la matrice augmentée d'un système linéaire transforme la matrice dans une matrice dont le système associé est équivalent au système initial. Par conséquent, cela reste valable après avoir effectué successivement un nombre fini d'opérations élémentaires.

Remarque.

Remarque importante. Lorsqu'on fait une opération élémentaire sur la matrice augmentée d'un système linéaire, cela revient à faire des opérations sur les équations du système. Plus précisément, les opérations introduites dans la définition précédente correspondent (dans le même ordre) aux opérations suivantes :

i) Permuter entre elles deux équations du système.
ii) Multiplier une équation par une constante non nulle.
iii) Rajouter à une équation un multiple d'une autre équation.

Proposition 1.10

Une opération élémentaire sur la matrice augmentée d'un système linéaire transforme la matrice dans une matrice dont le système associé est équivalent au système initial. Par conséquent, cela reste valable après avoir effectué successivement un nombre fini d'opérations élémentaires.

Remarque. Attention ! On ne fait JAMAIS d'opération élémentaire sur les colonnes, mais seulement sur les lignes.

Le principe de l'algorithme de Gauss consiste à utiliser des opérations élémentaires sur les lignes, afin de placer des zéros là où il faut, de façon à créer une forme échelonnée.

Le principe de l'algorithme de Gauss consiste à utiliser des opérations élémentaires sur les lignes, afin de placer des zéros là où il faut, de façon à créer une forme échelonnée.

Soit A une matrice $m \times p$ quelconque. Dans le cas qui nous intéresse le plus, c.-à-d. celui où A est la matrice augmentée d'un système $m \times n$ (m équations à n inconnues), on a $p = n + 1$.

Le principe de l'algorithme de Gauss consiste à utiliser des opérations élémentaires sur les lignes, afin de placer des zéros là où il faut, de façon à créer une forme échelonnée.

Soit A une matrice $m \times p$ quelconque. Dans le cas qui nous intéresse le plus, c.-à-d. celui où A est la matrice augmentée d'un système $m \times n$ (m équations à n inconnues), on a $p = n + 1$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix}$$

Les pivots

Les pivots

Étape 1 : **Choix du pivot de Gauss.** On commence par inspecter la première colonne.

Les pivots

Étape 1 : **Choix du pivot de Gauss.** On commence par inspecter la première colonne. Soit elle ne contient que des zéros,

Les pivots

Étape 1 : **Choix du pivot de Gauss.** On commence par inspecter la première colonne. Soit elle ne contient que des zéros, alors on passe directement à l'étape 3.

Les pivots

Étape 1 : **Choix du pivot de Gauss.** On commence par inspecter la première colonne. Soit elle ne contient que des zéros, alors on passe directement à l'étape 3. Dans ce cas à l'issue de cette étape la matrice de la forme

Les pivots

Étape 1 : **Choix du pivot de Gauss.** On commence par inspecter la première colonne. Soit elle ne contient que des zéros, alors on passe directement à l'étape 3. Dans ce cas à l'issue de cette étape la matrice de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix}$$

reste inchangée.

Les pivots

Étape 1 : **Choix du pivot de Gauss.** On commence par inspecter la première colonne. Soit elle ne contient que des zéros, alors on passe directement à l'étape 3. Dans ce cas à l'issue de cette étape la matrice de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix}$$

reste inchangée.

Soit la première colonne contient au moins un terme non nul.

Les pivots

Étape 1 : **Choix du pivot de Gauss.** On commence par inspecter la première colonne. Soit elle ne contient que des zéros, alors on passe directement à l'étape 3. Dans ce cas à l'issue de cette étape la matrice de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix}$$

reste inchangée.

Soit la première colonne contient au moins un terme non nul. On choisit un tel terme que l'on appelle **pivot**.

Les pivots

Étape 1 : **Choix du pivot de Gauss.** On commence par inspecter la première colonne. Soit elle ne contient que des zéros, alors on passe directement à l'étape 3. Dans ce cas à l'issue de cette étape la matrice de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix}$$

reste inchangée.

Soit la première colonne contient au moins un terme non nul. On choisit un tel terme que l'on appelle **pivot**. Si c'est le terme a_{11} on passe directement à l'étape 2,

Les pivots

Étape 1 : **Choix du pivot de Gauss.** On commence par inspecter la première colonne. Soit elle ne contient que des zéros, alors on passe directement à l'étape 3. Dans ce cas à l'issue de cette étape la matrice de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix}$$

reste inchangée.

Soit la première colonne contient au moins un terme non nul. On choisit un tel terme que l'on appelle **pivot**. Si c'est le terme a_{11} on passe directement à l'étape 2, si c'est le terme a_{i1} avec $i \neq 1$ on échange les lignes 1 et i et on passe à l'étape 2.

Étape 2

Étape 2

Dans ce cas, à l'issue de l'étape 1 la matrice A devient

Étape 2

Dans ce cas, à l'issue de l'étape 1 la matrice A devient

$$A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a'_{1p} \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2j} & \cdots & a'_{2p} \\ \vdots & & & & & \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{ij} & \cdots & a'_{ip} \\ \vdots & & & & & \\ a'_{m1} & a'_{m2} & \cdots & a'_{mj} & \cdots & a'_{mp} \end{pmatrix}$$

avec $a'_{11} \neq 0$.

Elimination

Elimination

Etape 2. **Élimination.** On NE touche PLUS à la ligne 1 et on se sert du pivot pour éliminer tous les termes a'_{i1} pour $i \geq 2$.

Elimination

Etape 2. **Élimination.** On NE touche PLUS à la ligne 1 et on se sert du pivot pour éliminer tous les termes a'_{i1} pour $i \geq 2$. Pour cela on remplace la ligne i de la façon suivante.

Elimination

Etape 2. **Élimination.** On NE touche PLUS à la ligne 1 et on se sert du pivot pour éliminer tous les termes a'_{i1} pour $i \geq 2$. Pour cela on remplace la ligne i de la façon suivante.

$$\text{ligne } i - \frac{a'_{i1}}{a'_{11}} \times \text{ligne } 1\,, \qquad \text{pour } i = 2, \cdots, m.$$

Elimination

Etape 2. **Élimination.** On NE touche PLUS à la ligne 1 et on se sert du pivot pour éliminer tous les termes a'_{i1} pour $i \geq 2$. Pour cela on remplace la ligne i de la façon suivante.

$$\text{ligne } i - \frac{a'_{i1}}{a'_{11}} \times \text{ligne } 1\,, \qquad \text{pour } i = 2, \cdots, m.$$

Au terme de l'étape 2 on obtient une matrice de la forme (dans le cas où la première colonne de A n'est pas nulle)

$$A'' = \begin{pmatrix} \boxed{a'_{11}} & a'_{12} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a'_{1p} \\ 0 & a''_{22} & \cdots & a''_{2j} & \cdots & a''_{2p} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & a''_{i2} & \cdots & a''_{ij} & \cdots & a''_{ip} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & a''_{m2} & \cdots & a''_{mj} & \cdots & a''_{mp} \end{pmatrix}$$

Elimination

Etape 2. **Élimination.** On NE touche PLUS à la ligne 1 et on se sert du pivot pour éliminer tous les termes a'_{i1} pour $i \geq 2$. Pour cela on remplace la ligne i de la façon suivante.

$$\text{ligne } i - \frac{a'_{i1}}{a'_{11}} \times \text{ligne } 1\,, \qquad \text{pour } i = 2, \cdots, m.$$

Au terme de l'étape 2 on obtient une matrice de la forme (dans le cas où la première colonne de A n'est pas nulle)

$$A'' = \begin{pmatrix} \boxed{a'_{11}} & a'_{12} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a'_{1p} \\ 0 & a''_{22} & \cdots & a''_{2j} & \cdots & a''_{2p} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & a''_{i2} & \cdots & a''_{ij} & \cdots & a''_{ip} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & a''_{m2} & \cdots & a''_{mj} & \cdots & a''_{mp} \end{pmatrix}$$

où $a'_{11} \neq 0$ et $a''_{ij} = a'_{ij} - \frac{a'_{i1}}{a'_{11}} \times a'_{1j}$.

Boucle

Boucle

Etape 3. **Boucle.** La première colonne de la matrice A'' est bien celle d'une matrice échelonnée.

Boucle

Etape 3. **Boucle.** La première colonne de la matrice A'' est bien celle d'une matrice échelonnée. On va donc conserver cette première colonne ainsi que la première ligne,

Boucle

Etape 3. **Boucle.** La première colonne de la matrice A'' est bien celle d'une matrice échelonnée. On va donc conserver cette première colonne ainsi que la première ligne, et l'on va boucler sur l'étape 1 appliquée à la sous–matrice de taille $m \times (p-1)$ ou $(m-1) \times (p-1)$ suivante :

Boucle

Etape 3. **Boucle.** La première colonne de la matrice A'' est bien celle d'une matrice échelonnée. On va donc conserver cette première colonne ainsi que la première ligne, et l'on va boucler sur l'étape 1 appliquée à la sous–matrice de taille $m \times (p-1)$ ou $(m-1) \times (p-1)$ suivante :

$$\begin{pmatrix} a'_{12} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a'_{1p} \\ \vdots & & & & \\ a'_{i2} & \cdots & a'_{ij} & \cdots & a'_{ip} \\ \vdots & & & & \\ a'_{m2} & \cdots & a'_{mj} & \cdots & a'_{mp} \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} a''_{22} & \cdots & a''_{2j} & \cdots & a''_{2p} \\ \vdots & & & & \\ a''_{i2} & \cdots & a''_{ij} & \cdots & a''_{ip} \\ \vdots & & & & \\ a''_{m2} & \cdots & a''_{mj} & \cdots & a''_{mp} \end{pmatrix}$$

respectivement, la première matrice correspondant au cas où la première colonne de A est nulle. Si la première colonne des matrices ci-dessus n'est pas nulle, on considère pour la suite qu'on a déjà effectué (si nécessaire) l'échange de lignes qui rend a'_{12}, respectivement a''_{22}, non nul.

Ainsi, au terme de la deuxième itération de la boucle, on aura une matrice de l'une des quatre formes suivantes :

Ainsi, au terme de la deuxième itération de la boucle, on aura une matrice de l'une des quatre formes suivantes :

1^{er} **cas** : si les deux premières colonnes de la matrice A sont nulles,

$$A^{(3)} = A = \left(\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{array} \right.$$

Ainsi, au terme de la deuxième itération de la boucle, on aura une matrice de l'une des quatre formes suivantes :

1^{er} **cas** : si les deux premières colonnes de la matrice A sont nulles,

$$A^{(3)} = A = \left(\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{array} \right.$$

Ainsi, au terme de la deuxième itération de la boucle, on aura une matrice de l'une des quatre formes suivantes :

1er **cas** : si les deux premières colonnes de la matrice A sont nulles,

$$A^{(3)} = A = \left(\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3p} \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{array} \right.$$

Ainsi, au terme de la deuxième itération de la boucle, on aura une matrice de l'une des quatre formes suivantes :

1$^{\text{er}}$ **cas** : si les deux premières colonnes de la matrice A sont nulles,

$$A^{(3)} = A = \left(\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{array} \right.$$

Ainsi, au terme de la deuxième itération de la boucle, on aura une matrice de l'une des quatre formes suivantes :

1er **cas** : si les deux premières colonnes de la matrice A sont nulles,

$$A^{(3)} = A = \left(\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{array} \right.$$

Ainsi, au terme de la deuxième itération de la boucle, on aura une matrice de l'une des quatre formes suivantes :

$1^{\textbf{er}}$ **cas** : si les deux premières colonnes de la matrice A sont nulles,

$$A^{(3)} = A = \left(\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & \end{array} \right.$$

Ainsi, au terme de la deuxième itération de la boucle, on aura une matrice de l'une des quatre formes suivantes :

1^{er} **cas** : si les deux premières colonnes de la matrice A sont nulles,

$$A^{(3)} = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a_{m3} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix}$$

2$^{\text{ème}}$ **cas** : si la première colonne de A est nulle, mais pas la deuxième,

$$A^{(3)} = \left(\begin{array}{ccccccc} 0 & \boxed{a'_{12}} & a'_{13} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a'_{1p} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

2$^{\text{ème}}$ **cas** : si la première colonne de A est nulle, mais pas la deuxième,

$$A^{(3)} = \left(\begin{array}{ccccccc} 0 & \boxed{a'_{12}} & a'_{13} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a'_{1p} \\ 0 & 0 & a^{(3)}_{23} & \cdots & a^{(3)}_{2j} & \cdots & a^{(3)}_{2p} \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{array} \right.$$

$2^{\text{ème}}$ **cas** : si la première colonne de A est nulle, mais pas la deuxième,

$$A^{(3)} = \left(\begin{array}{ccccccc} 0 & \boxed{a'_{12}} & a'_{13} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a'_{1p} \\ 0 & 0 & a^{(3)}_{23} & \cdots & a^{(3)}_{2j} & \cdots & a^{(3)}_{2p} \\ 0 & 0 & a^{(3)}_{33} & \cdots & a^{(3)}_{3j} & \cdots & a^{(3)}_{3p} \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{array} \right.$$

2$^{\text{ème}}$ **cas** : si la première colonne de A est nulle, mais pas la deuxième,

$$A^{(3)} = \left(\begin{array}{ccccccc} 0 & \boxed{a'_{12}} & a'_{13} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a'_{1p} \\ 0 & 0 & a^{(3)}_{23} & \cdots & a^{(3)}_{2j} & \cdots & a^{(3)}_{2p} \\ 0 & 0 & a^{(3)}_{33} & \cdots & a^{(3)}_{3j} & \cdots & a^{(3)}_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{array} \right.$$

$2^{\text{ème}}$ **cas** : si la première colonne de A est nulle, mais pas la deuxième,

$$A^{(3)} = \left(\begin{array}{ccccccc} 0 & \boxed{a'_{12}} & a'_{13} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a'_{1p} \\ 0 & 0 & a^{(3)}_{23} & \cdots & a^{(3)}_{2j} & \cdots & a^{(3)}_{2p} \\ 0 & 0 & a^{(3)}_{33} & \cdots & a^{(3)}_{3j} & \cdots & a^{(3)}_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a^{(3)}_{i3} & \cdots & a^{(3)}_{ij} & \cdots & a^{(3)}_{ip} \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{array} \right.$$

2$^{\text{ème}}$ **cas** : si la première colonne de A est nulle, mais pas la deuxième,

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{a'_{12}} & a'_{13} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a'_{1p} \\ 0 & 0 & a^{(3)}_{23} & \cdots & a^{(3)}_{2j} & \cdots & a^{(3)}_{2p} \\ 0 & 0 & a^{(3)}_{33} & \cdots & a^{(3)}_{3j} & \cdots & a^{(3)}_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a^{(3)}_{i3} & \cdots & a^{(3)}_{ij} & \cdots & a^{(3)}_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & \end{pmatrix}$$

$2^{\text{ème}}$ **cas** : si la première colonne de A est nulle, mais pas la deuxième,

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{a'_{12}} & a'_{13} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a'_{1p} \\ 0 & 0 & a^{(3)}_{23} & \cdots & a^{(3)}_{2j} & \cdots & a^{(3)}_{2p} \\ 0 & 0 & a^{(3)}_{33} & \cdots & a^{(3)}_{3j} & \cdots & a^{(3)}_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a^{(3)}_{i3} & \cdots & a^{(3)}_{ij} & \cdots & a^{(3)}_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a^{(3)}_{m3} & \cdots & a^{(3)}_{mj} & \cdots & a^{(3)}_{mp} \end{pmatrix}$$

avec $a'_{12} \neq 0$ et $a^{(3)}_{ij} = a'_{ij} - \frac{a'_{i2}}{a'_{12}} \times a'_{1j}$

2ème **cas** : si la première colonne de A est nulle, mais pas la deuxième,

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{a'_{12}} & a'_{13} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a'_{1p} \\ 0 & 0 & a_{23}^{(3)} & \cdots & a_{2j}^{(3)} & \cdots & a_{2p}^{(3)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3j}^{(3)} & \cdots & a_{3p}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a_{i3}^{(3)} & \cdots & a_{ij}^{(3)} & \cdots & a_{ip}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a_{m3}^{(3)} & \cdots & a_{mj}^{(3)} & \cdots & a_{mp}^{(3)} \end{pmatrix}$$

avec $a'_{12} \neq 0$ et $a_{ij}^{(3)} = a'_{ij} - \frac{a'_{i2}}{a'_{12}} \times a'_{1j}$ pour $i = 2, \cdots, m$ et $j = 2, \cdots, p$.

Autrement dit, on a fait les opérations

$$\text{ligne } i - \frac{a'_{i2}}{a'_{12}} \times \text{ligne } 1\,,$$

pour tout $i \in \{2, \cdots, m\}$.

$3^{\text{ème}}$ **cas** : si la première colonne de A est non nulle et $a''_{i2} = 0$ pour tout $i \in \{2, \cdots, m\}$,

$$A^{(3)} = A'' = \begin{pmatrix} \boxed{a'_{11}} & a'_{12} & a'_{13} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a'_{1p} \\ 0 & 0 & a''_{23} & \cdots & a''_{2j} & \cdots & a''_{2p} \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & a''_{i3} & \cdots & a''_{ij} & \cdots & a''_{ip} \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & a''_{m3} & \cdots & a''_{mj} & \cdots & a''_{mp} \end{pmatrix}$$

avec $a'_{11} \neq 0$.

$4^{\text{ème}}$ **cas** : si la première colonne de A est non nulle et il existe $i \in \{2, \ldots, m\}$ tel que $a''_{i2} \neq 0$,

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} \boxed{a'_{11}} & a'_{12} & a'_{13} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a'_{1p} \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{pmatrix}$$

$4^{\text{ème}}$ **cas** : si la première colonne de A est non nulle et il existe $i \in \{2, \ldots, m\}$ tel que $a''_{i2} \neq 0$,

$$A^{(3)} = \left(\begin{array}{ccccccc} \boxed{a'_{11}} & a'_{12} & a'_{13} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a'_{1p} \\ 0 & \boxed{a''_{22}} & a''_{23} & \cdots & a''_{2j} & \cdots & a''_{2p} \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{array} \right.$$

$4^{\text{ème}}$ **cas** : si la première colonne de A est non nulle et il existe $i \in \{2, \ldots, m\}$ tel que $a''_{i2} \neq 0$,

$$A^{(3)} = \left(\begin{array}{ccccccc} \boxed{a'_{11}} & a'_{12} & a'_{13} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a'_{1p} \\ 0 & \boxed{a''_{22}} & a''_{23} & \cdots & a''_{2j} & \cdots & a''_{2p} \\ 0 & 0 & a^{(3)}_{33} & \cdots & a^{(3)}_{3j} & \cdots & a^{(3)}_{3p} \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{array} \right.$$

4ème **cas** : si la première colonne de A est non nulle et il existe $i \in \{2, \ldots, m\}$ tel que $a''_{i2} \neq 0$,

$$A^{(3)} = \left(\begin{array}{ccccccc} \boxed{a'_{11}} & a'_{12} & a'_{13} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a'_{1p} \\ 0 & \boxed{a''_{22}} & a''_{23} & \cdots & a''_{2j} & \cdots & a''_{2p} \\ 0 & 0 & a^{(3)}_{33} & \cdots & a^{(3)}_{3j} & \cdots & a^{(3)}_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{array} \right.$$

$4^{\text{ème}}$ **cas** : si la première colonne de A est non nulle et il existe $i \in \{2, \ldots, m\}$ tel que $a''_{i2} \neq 0$,

$$A^{(3)} = \left(\begin{array}{ccccccc} \boxed{a'_{11}} & a'_{12} & a'_{13} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a'_{1p} \\ 0 & \boxed{a''_{22}} & a''_{23} & \cdots & a''_{2j} & \cdots & a''_{2p} \\ 0 & 0 & a^{(3)}_{33} & \cdots & a^{(3)}_{3j} & \cdots & a^{(3)}_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a^{(3)}_{i3} & \cdots & a^{(3)}_{ij} & \cdots & a^{(3)}_{ip} \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{array} \right.$$

$4^{\text{ème}}$ **cas** : si la première colonne de A est non nulle et il existe $i \in \{2, \ldots, m\}$ tel que $a''_{i2} \neq 0$,

$$A^{(3)} = \left(\begin{array}{ccccccc} \boxed{a'_{11}} & a'_{12} & a'_{13} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a'_{1p} \\ 0 & \boxed{a''_{22}} & a''_{23} & \cdots & a''_{2j} & \cdots & a''_{2p} \\ 0 & 0 & a^{(3)}_{33} & \cdots & a^{(3)}_{3j} & \cdots & a^{(3)}_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a^{(3)}_{i3} & \cdots & a^{(3)}_{ij} & \cdots & a^{(3)}_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array} \right.$$

4$^{\text{ème}}$ **cas** : si la première colonne de A est non nulle et il existe $i \in \{2, \ldots, m\}$ tel que $a''_{i2} \neq 0$,

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} \boxed{a'_{11}} & a'_{12} & a'_{13} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a'_{1p} \\ 0 & \boxed{a''_{22}} & a''_{23} & \cdots & a''_{2j} & \cdots & a''_{2p} \\ 0 & 0 & a^{(3)}_{33} & \cdots & a^{(3)}_{3j} & \cdots & a^{(3)}_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a^{(3)}_{i3} & \cdots & a^{(3)}_{ij} & \cdots & a^{(3)}_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a^{(3)}_{m3} & \cdots & a^{(3)}_{mj} & \cdots & a^{(3)}_{mp} \end{pmatrix}$$

$4^{\text{ème}}$ **cas** : si la première colonne de A est non nulle et il existe $i \in \{2, \ldots, m\}$ tel que $a''_{i2} \neq 0$,

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} \boxed{a'_{11}} & a'_{12} & a'_{13} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a'_{1p} \\ 0 & \boxed{a''_{22}} & a''_{23} & \cdots & a''_{2j} & \cdots & a''_{2p} \\ 0 & 0 & a^{(3)}_{33} & \cdots & a^{(3)}_{3j} & \cdots & a^{(3)}_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a^{(3)}_{i3} & \cdots & a^{(3)}_{ij} & \cdots & a^{(3)}_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a^{(3)}_{m3} & \cdots & a^{(3)}_{mj} & \cdots & a^{(3)}_{mp} \end{pmatrix}$$

avec $a'_{11} \neq 0$, $a''_{22} \neq 0$ et $a^{(3)}_{ij} = a''_{ij} - \frac{a''_{i2}}{a''_{22}} \times a''_{2j}$

$4^{\text{ème}}$ **cas** : si la première colonne de A est non nulle et il existe $i \in \{2, \dots, m\}$ tel que $a''_{i2} \neq 0$,

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} \boxed{a'_{11}} & a'_{12} & a'_{13} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a'_{1p} \\ 0 & \boxed{a''_{22}} & a''_{23} & \cdots & a''_{2j} & \cdots & a''_{2p} \\ 0 & 0 & a^{(3)}_{33} & \cdots & a^{(3)}_{3j} & \cdots & a^{(3)}_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a^{(3)}_{i3} & \cdots & a^{(3)}_{ij} & \cdots & a^{(3)}_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a^{(3)}_{m3} & \cdots & a^{(3)}_{mj} & \cdots & a^{(3)}_{mp} \end{pmatrix}$$

avec $a'_{11} \neq 0$, $a''_{22} \neq 0$ et $a^{(3)}_{ij} = a''_{ij} - \frac{a''_{i2}}{a''_{22}} \times a''_{2j}$ pour $i = 3, \cdots, m$ et $j = 2, \cdots, p$.

On remarque que dans tous les cas, les deux premières colonnes de la matrice $A^{(3)}$ correspondent aux deux premières colonnes d'une matrice échelonnée.

$4^{\text{ème}}$ **cas** : si la première colonne de A est non nulle et il existe $i \in \{2, \ldots, m\}$ tel que $a''_{i2} \neq 0$,

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} \boxed{a'_{11}} & a'_{12} & a'_{13} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a'_{1p} \\ 0 & \boxed{a''_{22}} & a''_{23} & \cdots & a''_{2j} & \cdots & a''_{2p} \\ 0 & 0 & a^{(3)}_{33} & \cdots & a^{(3)}_{3j} & \cdots & a^{(3)}_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a^{(3)}_{i3} & \cdots & a^{(3)}_{ij} & \cdots & a^{(3)}_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a^{(3)}_{m3} & \cdots & a^{(3)}_{mj} & \cdots & a^{(3)}_{mp} \end{pmatrix}$$

avec $a'_{11} \neq 0$, $a''_{22} \neq 0$ et $a^{(3)}_{ij} = a''_{ij} - \frac{a''_{i2}}{a''_{22}} \times a''_{2j}$ pour $i = 3, \cdots, m$ et $j = 2, \cdots, p$.

On remarque que dans tous les cas, les deux premières colonnes de la matrice $A^{(3)}$ correspondent aux deux premières colonnes d'une matrice échelonnée.

Après un nombre fini d'itérations, on arrive bien à une matrice échelonnée.

Pour résoudre un système linéaire avec la méthode du pivot de Gauss, on écrit d'abord sa matrice augmentée. Ensuite on utilise la méthode pour transformer cette matrice en une matrice échelonnée. On rappelle que le système associé à cette dernière est équivalent au système initial. On peut alors procéder de deux manières :

Pour résoudre un système linéaire avec la méthode du pivot de Gauss, on écrit d'abord sa matrice augmentée. Ensuite on utilise la méthode pour transformer cette matrice en une matrice échelonnée. On rappelle que le système associé à cette dernière est équivalent au système initial. On peut alors procéder de deux manières :

• On résout le système échelonné ainsi obtenu avec la méthode de la substitution, comme décrit dans la preuve du Théorème 1.8.

Pour résoudre un système linéaire avec la méthode du pivot de Gauss, on écrit d'abord sa matrice augmentée. Ensuite on utilise la méthode pour transformer cette matrice en une matrice échelonnée. On rappelle que le système associé à cette dernière est équivalent au système initial. On peut alors procéder de deux manières :

• On résout le système échelonné ainsi obtenu avec la méthode de la substitution, comme décrit dans la preuve du Théorème 1.8.

• Si le système est compatible (voir le Théorème 1.8), on continue avec la notation matricielle, en transformant la matrice échelonnée obtenue en une matrice échelonnée réduite. Pour ce faire, on utilise les multiplications et les substitutions de lignes. Plus précisément, on multiplie les lignes contenant un pivot par l'inverse du pivot. Ceci crée une matrice échelonnée avec des 1 en position de pivot. Ensuite on fait des substitutions de lignes (comme décrit dans l'étape 2 ci-dessus) afin de rendre nuls tous les autres coefficients se trouvant sur la colonne d'un pivot.

Remarques

Remarques

1. La deuxième méthode décrite ci-dessus (celle où on se ramène à une matrice échelonnée réduite) est en fait la rédaction matricielle de la première méthode.

Remarques

1. La deuxième méthode décrite ci-dessus (celle où on se ramène à une matrice échelonnée réduite) est en fait la rédaction matricielle de la première méthode.
2. Pour des raisons pratiques, dans l'étape 1 de la méthode du pivot de Gauss, on peut faire un échange de lignes même si le terme a_{11} est non nul. Cela peut faciliter les calculs, notamment si sur la même colonne, il y a un autre terme a_{i1} valant 1 ou -1.

Remarques

1. La deuxième méthode décrite ci-dessus (celle où on se ramène à une matrice échelonnée réduite) est en fait la rédaction matricielle de la première méthode.
2. Pour des raisons pratiques, dans l'étape 1 de la méthode du pivot de Gauss, on peut faire un échange de lignes même si le terme a_{11} est non nul. Cela peut faciliter les calculs, notamment si sur la même colonne, il y a un autre terme a_{i1} valant 1 ou -1.
3. On peut aussi, à n'importe quel moment, effectuer une multiplication de ligne par une constante non nulle. En général, on fait cela pour rendre les pivots égaux à 1. Cela est utile ensuite dans l'étape d'élimination (car on ne doit plus diviser par le pivot), mais aussi lorsqu'on veut se ramener à une matrice échelonnée réduite.

Remarques

1. La deuxième méthode décrite ci-dessus (celle où on se ramène à une matrice échelonnée réduite) est en fait la rédaction matricielle de la première méthode.
2. Pour des raisons pratiques, dans l'étape 1 de la méthode du pivot de Gauss, on peut faire un échange de lignes même si le terme a_{11} est non nul. Cela peut faciliter les calculs, notamment si sur la même colonne, il y a un autre terme a_{i1} valant 1 ou -1.
3. On peut aussi, à n'importe quel moment, effectuer une multiplication de ligne par une constante non nulle. En général, on fait cela pour rendre les pivots égaux à 1. Cela est utile ensuite dans l'étape d'élimination (car on ne doit plus diviser par le pivot), mais aussi lorsqu'on veut se ramener à une matrice échelonnée réduite.
4. Pour un système linéaire homogène, il n'est pas nécessaire de considérer la matrice augmentée, mais seulement la matrice du système. En effet, il est clair qu'après chaque opération élémentaire, la colonne correspondant au second membre (qui est la dernière colonne dans la matrice augmentée) reste toujours nulle.