CORRECTION

L1 IEEEA, 2024-2025
Léo Glangetas
Université de Rouen

NOM	**Prénom**
Numéro d'étudiant :	

Note sur 20:

Contrôle continu n° 1 **(v3)**
Lundi 11 novembre 2024
(Documents et calculatrices interdites)

Exercice 1. Donner les négations des propositions suivantes. Sont-elles vraies ou fausses ? Justifier vos réponses.

(a) Proposition P : $\forall x \in]0,+\infty[,\ \left(\dfrac{1}{x} \leq 1\right)$ ou $(x^2 \leq 4)$ V

Proposition $\neg P$: $\exists x \in]0,+\infty[,\ \left(\frac{1}{x} > 1\right)$ et $(x^2 > 4)$ F

Montrons que P est vraie. Soit $x \in]0,+\infty[$.
1er cas. On suppose que $(\frac{1}{x} \leq 1)$ est vraie. Alors $(\frac{1}{x} \leq 1)$ ou $(x^2 \leq 4)$ est vraie.
2eme cas. On suppose que $(\frac{1}{x} \leq 1)$ est fausse. Donc $\frac{1}{x} > 1$.
Comme $x > 0$, on a $x \times (\frac{1}{x}) > x \times 1$ donc $0 < x < 1$ donc $x^2 < 1 \leq 4$ donc P est vraie.

(b) Proposition Q : $\exists p \in \mathbb{N},\ (p^2 < 2\,p)$ et $(p > 1)$ F

Proposition $\neg Q$: $\forall p \in \mathbb{N},\ (p^2 \geq 2p)$ ou $(p \leq 1)$ V

Montrons que $\neg Q$ est vraie. Soit $p \in \mathbb{N}$.
- Pour $p = 0$ ou 1, $(p \leq 1)$ est vraie donc $(p^2 \geq 2p)$ ou $(p \leq 1)$ est vraie.
- Pour $p \geq 2$, comme $p \geq 0$, on a $p \times (p) \geq p \times (2)$ donc $(p^2 \geq 2p)$ est vraie donc $(p^2 \geq 2p)$ ou $(p \leq 1)$ est vraie.

(c) Proposition R : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}^*,\ x + \dfrac{1}{y} \geq 1$ V

Proposition $\neg R$: $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}^*,\ x + \frac{1}{y} < 1$ F

Montrons que R est vraie. Soit $x \in \mathbb{R}$.
1er cas : Si $x \geq 0$, alors $x + 1 \geq 1$ et $y = 1$ convient.
2eme cas : Si $x < 0$, alors $-x > 0$ donc $1 - x > 1$ donc $1 - x \neq 0$.
On pose $y = \frac{1}{1-x}$. Alors $x + \frac{1}{y} = x + (1-x) = 1$ donc $x + \frac{1}{y} \geq 1$.

Exercice 2. On considère des propositions P, Q et R de valeurs de vérité quelconques. On note A la proposition :

$$((P \implies Q) \text{ et } (Q \implies R)) \implies (P \implies R)$$

P	Q	$P \implies Q$
V	V	V
V	V	V
V	F	F
V	F	F
F	V	V
F	V	V
F	F	V
F	F	V

Q	R	$Q \implies R$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

$(P \implies Q)$ et $(Q \implies R)$
V
F
F
F
V
F
V
V

P	R	$P \implies R$
V	V	V
V	F	F
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V
F	V	V
F	F	V

A
V
V
V
V
V
V
V
V

(a) Compléter les quatre tables de vérité restantes ci-dessus.

(b) Que peut-on en déduire? La proposition A est toujours vraie : Si $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow R)$, alors $(P \Rightarrow R)$ (c'est une tautologie)

Exercice 3. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer (par l'absurde) que si pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\; x\,a^2 \leq 1$, alors $a = 0$.

On suppose par l'absurde que $a \neq 0$. alors $a^2 > 0$.
On pose $x = \frac{2}{a^2}$. Alors $x\,a^2 = (\frac{2}{a^2})a^2 = 2$
or $x a^2 \leq 1$, donc $2 \leq 1$, Impossible
Donc $a = 0$.

Exercice 4. . (a) Soit $x \geq 1$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\quad x^n \geq 1$.

- Initialisation. pour $n = 1$, $x^1 = x \geq 1$.
  donc c'est vrai pour $n = 1$.
- Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $x^n \geq 1$.
  comme $x \geq 1$, on a $x^n \times x \geq 1 \times 1$ donc $x^{n+1} \geq 1$.
- conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x^n \geq 1$.

(b) Soit $x \geq 1$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\quad x^n - 1 \leq n\,(x-1)\,x^{n-1}$.

- Initialisation. pour $n = 1$, $x^1 - 1 = x - 1$ et $1\,(x-1)\,x^{1-1} = (x-1)$
  donc on a bien : $x^1 - 1 \leq 1\,(x-1)\,x^{1-1}$ $\quad (x^0 = 1)$
- Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $x^n - 1 \leq n(x-1)\,x^{n-1}$

  On a : $x^{n+1} - 1 = x^{n+1} - x^n + x^n - 1$
  $= x^n(x-1) + (x^n - 1)$

  Comme $x^n - 1 \leq n(x-1)\,x^{n-1}$ on a donc
  $x^{n+1} - 1 \leq x^n(x-1) + n(x-1)\,x^{n-1}$. $\quad (*)$
  comme $0 \leq 1 \leq x$, on a $0 \leq (1) \times x^{n-1} \leq (x) \times x^{n-1}$ donc $0 \leq x^{n-1} \leq x^n$
  donc $n(x-1)x^{n-1} \leq n(x-1)\,x^n$. En reportant dans $(*)$,
  $x^{n+1} - 1 \leq (x-1)\,x^n + n(x-1)\,x^n = (n+1)(x-1)\,x^n$
- conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x^n - 1 \leq n\,(x-1)\,x^{n-1}$.

Exercice 5. On considère les nombres complexes $z = 3 - 2\mathrm{i}$ et $z' = 1 + 2\mathrm{i}$. Déterminer explicitement :

(a) $\bar{z}$, $|z|$, $z + z'$ $\qquad \bar{z} = 3 + 2i \qquad |z| = \sqrt{(3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

$z + z' = (3 - 2i) + (1 + 2i) = 4$

(b) $z\,z' = (3 - 2i)(1 + 2i) = 3 + 6i - 2i + 4$
$= 7 + 4i$

(c) $\frac{z}{z'} = \frac{3 - 2i}{1 + 2i} = \frac{(3-2i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{3 - 6i - 2i + 4}{(1)^2 + (2)^2}$

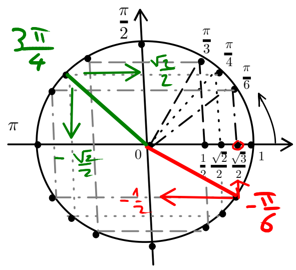
$= \frac{1}{5}\,(-1 - 8i) = \left(-\frac{1}{5}\right) + i\left(-\frac{8}{5}\right)$

Exercice 6. On considère les nombres complexes $u = 3 - \sqrt{3}\mathrm{i}$ et $v = 2e^{\frac{3i\pi}{4}}$.

(a) Déterminer explicitement : $|u|$ et $\dfrac{u}{|u|}$

$|u| = \sqrt{(3)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$\dfrac{u}{|u|} = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} - \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}i = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - i\,\dfrac{1}{2}$



(b) Déterminer θ tel que $\dfrac{u}{|u|} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$.

$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$ donc $\theta = -\dfrac{\pi}{6}$

(c) Donner la forme exponentielle complexe de u.

$u = 2\sqrt{3}\, e^{-i\frac{\pi}{6}}$

(d) Donner la forme algébrique de v.

$v = 2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\,2\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + i\,2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$

(e) Donner la forme exponentielle complexe de uv. Déterminer un entier $n \geq 1$ tel que $(uv)^n \in \mathbb{R}$.

$uv = (2\sqrt{3}\, e^{-i\frac{\pi}{4}})(2e^{i\frac{3\pi}{4}}) = (2\sqrt{3} \times 2)\, e^{-i\frac{\pi}{4} + i\frac{3\pi}{4}} = 4\sqrt{3}\, e^{i\frac{7\pi}{12}}$

$(uv)^n = (4\sqrt{3})^n \left(e^{i\frac{7\pi}{12}}\right)^n = 4^n(\sqrt{3})^n\, e^{i\frac{7\pi}{12} \times n}$.

Pour $n = 24$, $(uv)^{24} = (4\sqrt{3})^{24}\, e^{i\frac{7\pi}{12}\times 24} = (4\sqrt{3})^{24}\, e^{i2\pi\times 7} = (4\sqrt{3})^{24} \in \mathbb{R}$

(car $e^{i2\pi} = 1$ et $e^{i2\pi\times 7} = (e^{i2\pi})^7 = 1^7 = 1$). Donc $n = 24$ convient.

Exercice 7. On note $E = \{-1-\mathrm{i},\ -\mathrm{i},\ 1-\mathrm{i},\ -1,\ 0,\ 1,\ -1+\mathrm{i},\ 1+\mathrm{i}\}$. Expliciter les ensembles suivants :

(a) L'ensemble $A = E \cap \mathbb{R} = E \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) = 0\} =$ $\{-1, 0, 1\}$

(b) L'ensemble $B = E \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) = 0\} =$ $\{i, 0\}$

(c) $A \cap B =$ $\{0\}$

(d) $A \cup B =$ $\{-1, 0, 1, -i\}$

(e) $\complement_E(A \cup B) =$ $\{-1-i,\ 1-i,\ -1+i,\ 1+i\}$

(f) $A \setminus B =$ $\{-1, 1\}$

Exercice 8. Soit un ensemble E et trois parties A, B, C de E. Démontrer que : $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
(Note : l'inclusion inverse est vraie, mais elle n'est pas demandée).

Soit $x \in A \cap (B \cup C)$. Donc $x \in A$ et $x \in B \cup C$.
donc $x \in B$ ou $x \in C$.
1er cas : $x \in B$. Comme $x \in A$, $x \in (A \cap B)$ donc $x \in (A\cap B) \cup (A \cap C)$
2ème cas : $x \in C$. Comme $x \in A$, $x \in (A \cap C)$ donc $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Donc dans les deux cas, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Exercice 9. On considère les applications : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par : $f(x) = 2\,x+3$ et $g(u,v) = u^2+v$.

(a) L'application f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ? Justifiez vos réponses.

Soit $y \in \mathbb{R}$. $f(x) = y \iff 2x+3 = y$
$\iff 2x = y-3$
$\iff x = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}$.

Donc il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$.
Donc f est bijective, donc injective et surjective.

(b) L'application g est-elle injective ? Surjective ? Bijective ? Justifiez vos réponses.

g n'est pas injective car $g(1,0) = g(-1,0) = 1$
et $(1,0) \neq (-1,0)$,
donc g n'est pas bijective.
Soit $y \in \mathbb{R}$. On pose $u=0$ et $v=y$. donc $g(0,y) = y$.
Il existe bien $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ tel que $g(u,v) = y$
donc g est surjective.

(c) Calculer explicitement lorsque cela est possible les fonctions suivantes : $f \circ g$, $g \circ f$, f^{-1}, g^{-1} :

• $(f \circ g)$: Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.
$(f\circ g)(u,v) = f(g(u,v)) = f(u^2+v) = 2(u^2+v)+3 = 2u^2+2v+3$

• $(g\circ f)$ n'est pas défini car $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
et l'ensemble d'arrivée de f (qui est $\mathbb{R}$) n'est pas
inclus dans l'ensemble de départ de g (qui est $\mathbb{R}^2$).

• f^{-1} D'après a) $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}$

• g n'est pas bijective donc g^{-1} n'est pas définie.