**L1 IEEEA**, **2025-2026**
Université de Rouen

# Préparation au Contrôle continu n° 2 (v1)

UE Logique et structures algébriques
Mercredi 10 décembre 2025 - Documents et calculatrices interdites

---

**Exercice 1.** Soit un ensemble $E$ et $A$, $B$ et $C$ des parties de $E$. Démontrer que

$$A \setminus (B \cup C) \subset (A \setminus B) \cap \setminus (A \cap C).$$

**Exercice 2.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto (x-1)^2 - 1$, et soient les parties $A = [1, 3]$ et $B = [-1, 0]$.
(a) Déterminer $f(A)$ (en le justifiant).

(b) Déterminer $f^{-1}(B)$ (en le justifiant).

**Exercice 3.** (a) Dans $(\mathbb{R}, \leq)$, déterminer la borne inférieure et supérieure, le plus petit et le plus grand élément, lorsqu'ils existent, du sous-ensemble : $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 < 2 \ et \ x \geq 1\}$.

(b) Dans $(\mathbb{N}, \leq)$, déterminer la borne inférieure et supérieure, le plus petit et le plus grand élément, lorsqu'ils existent, du sous-ensemble : $B = \left\{n \in \mathbb{N} \,\middle|\, \dfrac{11}{n+1} \geq 2\right\}$.

**Exercice 4.** On note $E$ l'ensemble des mots sur $\{a, b\}$ et $E^*$ l'ensemble des mots non vides ($E = E^* \cup \{\varepsilon\}$ où $\varepsilon$ est la chaîne vide). On considère la relation binaire définie sur $E^*$ par : pour $X, Y \in E^*$, $X \,\mathcal{R}\, Y \Leftrightarrow X$ et $Y$ ont la même première lettre.
Autre formulation : Si $X, Y \in E^*$, alors il existe $x, y \in \{a, b\}$ et $X_1, Y_1 \in E$ tels que $X = xX_1$ et $Y = yY_1$. On a alors : $X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow x = y$. Par exemple on a **a**aa $\mathcal{R}$ **a**ba. Mais pas **a**aa $\mathcal{R}$ **b**aa.

(a) Montrer que $\mathcal{R}$ est réflexive :

(b) Montrer que $\mathcal{R}$ est symétrique :

(c) Montrer que $\mathcal{R}$ est transitive :

(d) Que peut on en conclure sur $\mathcal{R}$? Déterminer les classes d'équivalence et décrire l'espace quotient $E^*/\mathcal{R}$.

**Exercice 5.** On pose $P$ le polynôme $P(X) = 3X + 2$ et on définit la suite de polynômes $(P_n(X))_n$ par $P_0(X) = X$ et pour $n \in \mathbb{N}$ par la relation de récurrence :

$$P_{n+1}(X) = (P \circ P_n)(X) = 3P_n(X) + 2.$$

Montrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $\quad P_n(X) = 3^n\, X + 3^n - 1.$

**Exercice 6.** On considère la relation définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$(a, b) \prec (a', b') \Leftrightarrow (a \leq a' \text{ et } b \leq b').$$

On va montrer que c'est une relation d'ordre.
(a) Montrer que $\prec$ est réflexive :

(b) Montrer que $\prec$ est anti-symétrique :

(c) Montrer que $\prec$ est transitive.

(d) Est ce que l'ordre est total ou partiel (justifier votre réponse)?

**Exercice 7.** On considère dans $\mathbb{R}$ le loi de composition interne : $x * y = \ln(e^x + e^y)$.

(a) Est ce que la loi $*$ est commutative?

(b) Calculer explicitement en simplifiant pour $x, y, z \in \mathbb{R}$ :

$A = (x * y) * z =$

$B = x * (y * z) =$

(c) Est ce que la loi $*$ est associative?

(d) Est ce que la loi $*$ admet une élément neutre?

(e) Pour $a \in \mathbb{R}$ on considère la suite définie par récurrence : $u_1 = a$ et pour $n \geq 1$, $u_{n+1} = u_n * a$. Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a $u_n = a + \ln(n+1)$.