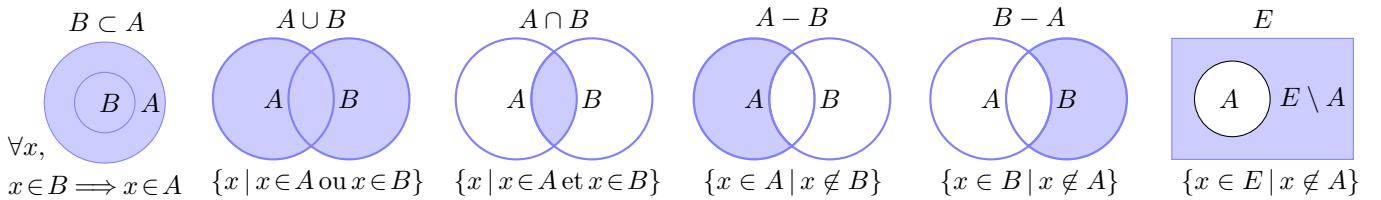


Fiche n° 4 - Ensembles et propriétés - v1



Propriétés sur les ensembles (A, B, C et E sont des ensembles quelconques) :

- \cap et \cup associatives : $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ et $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- \cap et \cup commutatives : $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$
- \emptyset élément neutre pour \cap : $\forall A \subset E, A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$
 E élément neutre pour \cap : $\forall A \subset E, A \cap E = E \cap A = A$
- \emptyset élément absorbant pour \cap : $\forall A \subset E, A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset$
 E élément absorbant pour \cup : $\forall A \subset E, A \cup E = E \cup A = E$
- \cap distributive par rapport à \cup : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- \cup distributive par rapport à \cap : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- Inclusion (propriétés d'une relation d'ordre) :
 - (a) $A \subset A$ (b) $(A \subset B \text{ et } B \subset C) \implies (A \subset C)$ (c) $(A \subset B \text{ et } B \subset A) \implies (A = B)$
- Inclusion et intersection-réunion :
 - (a) $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$ (b) $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$
 - (c) $(A \cup B = A) \iff (B \subset A)$ (d) $(A \cap B = A) \iff (A \subset B)$
- Complémentaire. Pour $A, B \subset E$, on a :
 - (a) $\complement_E \complement_E A = A$ (b) $(A \subset B) \iff (\complement_E B \subset \complement_E A)$
 - (c) $\complement_E (A \cap B) = (\complement_E A) \cup (\complement_E B)$ (d) $\complement_E (A \cup B) = (\complement_E A) \cap (\complement_E B)$

Exercice 1. On note $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ l'ensemble des chiffres. Expliciter les ensembles suivants :

- (a) L'ensemble A des chiffres pairs.
- (b) L'ensemble B des chiffres divisibles par 3.
- (c) L'ensemble C chiffres supérieurs ou égaux à 5.
- (d) Les ensembles : $A \cap B, A \cup B, \complement_E A, \complement_E B, A \setminus B, B \setminus A$.
- (e) Les ensembles : $F = (A \cup B) \cap C$ et $G = (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Vérifier l'égalité.
- (f) Les ensembles : $H = \complement_E (A \cap B)$ et $K = \complement_E A \cup \complement_E B$. Vérifier l'égalité.
- (h) L'ensemble $A \times B$.

Exercice 2. Expliciter les ensembles suivants : $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 > 5\}$, $B = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \leq 2\}$.

Exercice 3. Soient les parties de \mathbb{R} suivantes : $A = [1, 4]$ et $B = [3, 6]$. Déterminer :

- (a) $A \cap B$ (b) $A \cup B$ (c) $A \setminus B$ (d) $B \setminus A$ (e) $\mathbb{R} \setminus A$ (f) $\mathbb{R} \setminus B$ (g) $\mathbb{R} \setminus (A \cap B)$ (h) $\mathbb{R} \setminus (A \cup B)$

Exercice 4. Soit E un ensemble et A, B, C trois parties de E .

- (a) Montrer les égalités suivantes : $\complement_E (A \cap B) = (\complement_E A) \cup (\complement_E B)$ et $\complement_E (A \cup B) = (\complement_E A) \cap (\complement_E B)$.
- (b) En déduire : $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ et $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Exercice 5. (*) Soient E un ensemble et A, B et C des parties de E . Établir les équivalences suivantes :

- (a) $A \cap \complement_E B \neq \emptyset \iff A \not\subset B$
- (b) $A \setminus B = A \iff B \setminus A = B$
- (c) $A \cap B = A \cap C \iff A \cap \complement_E B = A \cap \complement_E C$