L1 IEEEA, 2025-2026 Université de Rouen-Normandie
Lundi 17 novembre 2025

Fiche n° 10 - Lois de compositions internes et groupes v2025-11-19

Lois de composition interne, groupes.
Soit E un ensemble non vide. Une **loi de composition interne** sur E (ℓ.c.i.) est une application $f : E \times E \mapsto E$.
Pour $x, y \in E$, l'opération $f(x, y)$ est notée sous forme d'opérateur binaire : $f(x, y) = x * y$ (par exemple).
Soit $(E, *)$ un ensemble muni d'une ℓ.c.i.

- $(*$ est commutative$) \iff \big(\forall x, y \in E,\ x * y = y * x\big)$
- $(*$ est associative$) \iff \big(\forall x, y, z \in E,\ (x * y) * z = x * (y * z)\big)$
- $(*$ possède un élément neutre$) \iff \big(\exists e \in E,\ \forall x \in E,\ x * e = e * x = x\big)$
- Si e élément neutre et $x \in E$, alors : (x a un élément symétrique) $\iff (\exists x' \in E,\ x * x' = x' * x = e)$

Un ensemble $(g, *)$ muni d'une ℓ.c.i. est un **groupe** si et seulement si la loi $*$ est associative, possède un élément neutre et tout élément $x \in G$ possède un symétrique (noté $-x$ ou x^{-1}).
Si de plus la loi $*$ est commutative, $(G, *)$ est dit groupe **commutatif** ou groupe **abélien**.

Exercice 1. (Reconnaissance-d'une ℓ.c.i.) Pour chacune des opérations suivantes, déterminer s'il s'agit d'une ℓ.c.i. sur l'ensemble donné. Justifier votre réponse.
(a) Sur $\mathbb{N}$: $a * b = a - b$ (b) Sur $\mathbb{Z}$: $a * b = a - b$ (c) Sur $\mathbb{R}^+$: $a * b = \sqrt{a \cdot b}$ (d) Sur $\{0, 1\}$: $a * b = \max(a, b)$

Exercice 2. Montrer que les opérations suivantes sont des ℓ.c.i. pour les ensembles suivants et étudier les propriétés : commutativité, associativité, existence d'un élément neutre et d'un élément symétrique.
En déduire s'il s'agit de groupe ou pas.
(a) $\mathbb{Z}$ muni de $x \star y = x + y + x\,y$ (b) $\mathcal{P}(E)$ muni de $\cap$ (puis de $\cup$)
(c) $E = \{V, F\}$ muni de "et", puis de "ou" (d*)]-1,1[muni de $x \oplus y = \frac{x+y}{1+x\,y}$

Exercice 3. (Table de composition) On définit sur E = {a, b, c, d} la loi $\star$ donnée par la table suivante :

$\star$	a	b	c	d
a	b	c	d	a
b	c	d	a	b
c	d	a	b	c
d	a	b	c	d

(a) Calculer : $a \star b$, $(a \star b) \star c$, $b \star (c \star d)$
(b) La loi $\star$ est-elle commutative ?
(c) Quel est l'élément neutre de cette loi ?
(d) Déterminer le symétrique de chaque élément.

Sous groupes. Soit $(G, *)$ un groupe et $H \subset G$ telle que :

- $\forall x, y \in H,\ x * y \in H.$
- $\forall x \in H,\ x^{-1} \in H.$

Alors $(H, *)$ muni de la restriction de $*$ à $H \times H$ est un groupe. Il est appelé aussi un **sous-groupe** de G.

Morphismes de groupes. Soient $(G, *)$ et $(H, \otimes)$ deux groupes. Une application $f : G \mapsto H$ est appelée un **morphisme** si et seulement si :
$$\forall x, y \in G,\ f(x * y) = f(x) \otimes f(y).$$
Si en plus f est bijective, alors f est un **isomorphisme**.

Exercice 4. On suppose connu le fait que $(\mathbb{C}, +)$ et $(\mathbb{C}^*, \times)$ sont des groupes commutatifs.
(a) Démontrer que $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$ et $(\mathbb{R}, +)$ sont des sous-groupes de $(\mathbb{C}, +)$.
(b) Démontrer que $(\mathbb{Q}^*, \times)$, $(\mathbb{R}^*, \times)$, $(]0, \infty[, \times)$ et $(\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}, \times)$ sont des sous-groupes de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Exercice 5. Montrer que $G = \{-1, 1\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$ et que l'application $\varphi(x) = \text{signe}(x)$ est un morphisme de groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$ dans $(G, \times)$.

Exercice 6. Traduire en termes de morphisme de groupes les propriétés traditionnelles suivantes :
(a) $\ln(x \times y) = \ln x + \ln y$; (b) $e^{x+y} = e^x \times e^y$; (c) $(x \times y)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} \times y^{\frac{1}{2}}$; (d) $|x \times y| = |x| \times |y|$.