L1 IEEEA, **2025-2026** Université de Rouen-Normandie

Lundi 24 novembre 2025

Fiche n° 11 - groupes (suite), anneaux des polynômes - v2025-11-26

Exercice 1. (Racines n-ièmes de l'unité)
(a) Calculer toutes les racines carrées de l'unité (solutions de $z^2 = 1$ dans $\mathbb{C}$).
(b) Calculer toutes les racines cubiques de l'unité (solutions de $z^3 = 1$ dans $\mathbb{C}$).
(c) Calculer toutes les racines 4-ièmes de l'unité (solutions de $z^4 = 1$ dans $\mathbb{C}$).

Exercice 2. (Groupe cyclique) On pose $\omega = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}$ et $\mathbb{U}_5 = \{\omega^n,\ n \in \mathbb{Z}\}$.
(a) Pour $n \in \mathbb{Z}$, on rappelle qu'il existe un unique couple (p, r), $p \in \mathbb{Z}$ et $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ tel que $n = 5\,p + r$.
Simplifier ω^n et montrer que $\mathbb{U}_5 = \{1, \rho, \rho^2, \rho^3, \rho^4\}$.
(b) Montrer que $(U_5, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*; \times)$.
(c) Donner la table de multiplication des éléments de $(\mathbb{U}_5, \times)$.

Exercice 3. $(*)$ Soient $(G, \star)$ et $(H, \triangle)$ deux groupes. On définit sur $G \times H$ la loi $\top$ par $(x, y) \top (x', y') = (x \star x', y \triangle y')$.
Montrer que $(G \times H, \top)$ est un groupe.

Exercice 4. $(*)$ Montre que $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ est un groupe pour la loi $\circ$ où les fonctions$f_i : \mathbb{R}^* \mapsto \mathbb{R}^*$ sont :

$$f_1(x) = x, \qquad f_2(x) = \frac{1}{x}, \qquad f_3(x) = -x, \qquad f_4(x) = -\frac{1}{x}.$$

Etablir la table d'opération (ou de Pythagore) pour la loi $\circ$.

Exercice 5. $(**)$ Soit $E = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, et $\star$ la loi de composition interne définie par :

$$(x, y) \star (x', y') = (xx' - yy', xy' + yx').$$

$(E, \star)$ est-il un groupe ? Commutatif ?

Exercice 6. (Vérification de morphismes) Pour chacun des cas suivants, dire si c'est un morphisme de groupes :
(a) $f : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$ définie par $f(n) = 2n$.
(b) $g : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$ définie par $g(n) = n + 1$.

Exercice 7. ($(**)$ Propriétés des morphismes) Soit $\varphi : (G, *) \to (H, \top)$ un morphisme de groupes.
(a) Montrer que $\varphi(e_G) = e_H$ (éléments neutres) et que pour tout $x \in G$, $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$.
(b) Montrer que $\ker(\varphi) = \{x \in G \mid \varphi(x) = e_H\}$ est un sous-groupe de G.
(c) Montrer que $\mathrm{Im}(\varphi) = \{\varphi(x) \mid x \in G\}$ est un sous-groupe de H.

Anneau des polynômes $(\mathbb{R}[X], +, \times)$: Un **polynôme à coefficients réels** est une expression de la forme :

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

où les $a_i \in \mathbb{R}$ sont appelés les **coefficients** du polynôme. On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes. On peut montrer que $(\mathbb{R}[X], +, \times)$ est muni de deux opération $+$ et $\times$ qui en font un anneau commutatif unitaire.
- Le **degré** de P, noté $\deg(P)$, est le plus grand entier n tel que $a_n \neq 0$.
- Le **coefficient dominant** est a_n (le coefficient du terme de plus haut degré).
- Le **terme constant** est a_0.

Exercice 8. Pour chacun des polynômes suivants, donner le degré, le coefficient dominant et le terme constant :
(a) $P(X) = 2X^3 - 4X + 3$ (b) $Q(X) = X^4 - 2$ (c) $R(X) = 5$ (d) $S(X) = -4X^3 + 2X^2 - 3X$

Exercice 9. (Construire des polynômes)
(a) Écrire un polynôme de degré 3 dont le coefficient dominant est 2 et le terme constant est -1.
(b) Écrire un polynôme de degré 2 dont tous les coefficients sont égaux à 1.
(c) Écrire un polynôme de degré 4 dont le terme constant est nul.

Exercice 10. (Opérations sur les polynômes) : Soit $P(X) = X^2 - 2X + 1$ et $Q(X) = 3X + 2$. Calculer :
(a) $P(X) + Q(X)$ (b) $P(X) - Q(X)$ (c) $3 \cdot P(X)$ (b) $P(X) \times Q(X)$

Exercice 11. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a : $1 - X^{n+1} = (1 - X)(1 + X + X^2 + \cdots + X^n)$.