L1 IEEEA, 2024-2025 Université de Rouen-Normandie

Lundi 9 septembre 2024

Fiche n° 1 - Éléments de logique. Démonstrations v2

Exercice 1. On considère les propositions suivantes :

(a) $\exists n \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N},\ p < n$

(b) $\forall p \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ p < n$

(c) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \sqrt{\delta} < \varepsilon$

(d) $\exists \delta > 0,\ \forall \varepsilon > 0,\ \sqrt{\delta} < \varepsilon$

(e)(∗∗) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left(n \geq N \implies \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \varepsilon\right)$

Pour chacune de ces propositions, écrire sa négation et indiquer (en le justifiant) si la proposition est vraie ou fausse (pour (e), on pourra utiliser la propriété : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique entier $p = E(x)$ tel que $p \leq x < p+1$).

Exercice 2. Tables de vérité. On considère des propositions P, Q, R de valeurs de vérité quelconques.

(a) Montrer que $[P \implies Q]$ est équivalente à $[\neg P$ ou $Q]$. Montrer que sa négation est équivalente à $[P$ et $\neg Q]$.

P	Q	$P \implies Q$	$\neg P$	Q	$\neg P$ ou Q	P	$\neg Q$	P et $\neg Q$
V	V							
V	F							
F	V							
F	F							

(b) Démonter que les propositions $[P$ ou $(Q$ et $R)]$ et $[(P$ ou $Q)$ et $(P$ ou $R)]$ sont équivalentes.

P	Q	R	Q et R	P ou $(Q$ et $R)$	P ou Q	P ou R	$(P$ ou $Q)$ et $(P$ ou $R)$
V	V	V					
V	V	F					
V	F	V					
V	F	F					
F	V	V					
F	V	F					
F	F	V					
F	F	F					

Exercice 3.

(a) Soient m et n deux entiers. Montrer que si $m \times n$ est impair, alors m et n sont impairs.

(b) (∗) Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que : $(\forall \varepsilon > 0, \quad a^2 \leq \varepsilon) \implies a = 0$.

Exercice 4. Démontrer les propositions suivantes :

(a) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2^n \geq 2n$.

(b) Pour tout entier $n \geq 4$, on a $2^n < n!$. Rappel : $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n = \prod_{k=1}^{n} k$ (factoriel n).

(c) (∗) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} (2k+1) = (n+1)^2$.

Exercice 5.

(a) Démontrer que $\frac{1}{7}$ n'est pas un entier naturel.

(b) (∗) Démontrer qu'il n'existe pas de nombres relatifs a et b tels que : $15\,a + 10\,b = 2$.

(∗) : Exercices à traiter dans un second temps, une fois tous les exercices sans étoiles ayant déjà été traités.