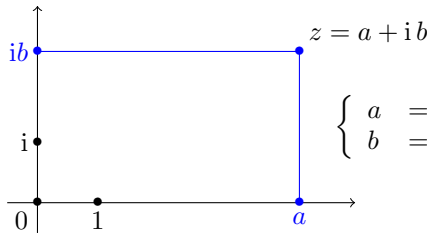
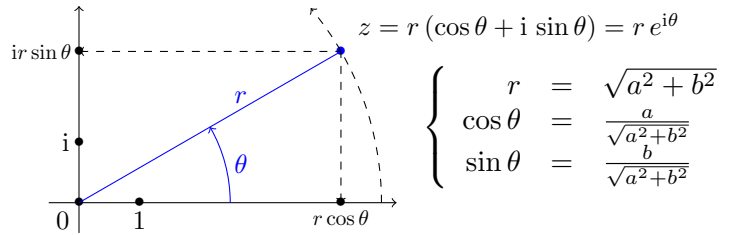


Fiche n° 3 - Exponentielle complexe - v2



Forme algébrique

$$\begin{cases} a = r \cos \theta \\ b = r \sin \theta \end{cases}$$



Forme polaire et forme exponentielle

$$\begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

- Exponentielle complexe :
$$\begin{cases} e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \\ e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta \end{cases} \iff \begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \\ \sin \theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \end{cases}$$
- Opérations :
$$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}, \quad (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}, \quad \frac{1}{e^{i\theta'}} = e^{-i\theta'}, \quad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')},$$

$$(r e^{i\theta}) \times (r' e^{i\theta'}) = (r r') e^{i(\theta+\theta')}, \quad (r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}, \quad \frac{1}{r' e^{i\theta'}} = \frac{1}{r'} e^{-i\theta'}, \quad \frac{r e^{i\theta}}{r' e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')}$$
- Racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité : On pose $z = e^{i\frac{2\pi}{n}}$. Les solutions de l'équation $X^n = 1$ sont exactement l'ensemble :

$$\mathbb{U}_n = \{1, z, z^2, \dots, z^{n-1}\} = \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \mid k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \right\}.$$

Exercice 1. (a) Donner la forme polaire et exponentielle des nombres complexes : $z_1 = 2 - 2i$ et $z_2 = -3 + i\sqrt{3}$. En déduire $z_1 z_2$, z_1/z_2 , z_1^3 .
 (b) Donner la forme algébrique des nombres complexes : $z_1 = 2(\cos(5\pi/6) + i \sin(5\pi/6))$ et $z_2 = 3e^{-i\pi/4}$. En déduire $\text{Re}(z_1 + z_2)$ et $\text{Im}(z_1 + z_2)$.

Exercice 2 (a) On pose $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Calculer j^k et $(\bar{j})^k$ pour $k = 0, 1, 2, 3$. En déduire la valeur de j^k et $(\bar{j})^k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Donner la table de multiplication des éléments de $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$. Placer ces éléments dans le plan complexe.
 (b*) Calculer i^k et $(\bar{i})^k$ pour $k = 0, 1, 2, 3, 4$. En déduire la valeur de i^k et $(\bar{i})^k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Donner la table de multiplication des éléments de $\mathbb{U}_4 = \{1, i, -1, -i\}$. Placer ces éléments dans le plan complexe.
 (c*) On pose $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$. Calculer z^k pour $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. En déduire la valeur de z^k pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Donner la table de multiplication des éléments de $\mathbb{U}_6 = \{z^k \mid 0 \leq k \leq 5\}$. Placer les éléments de \mathbb{U}_6 dans le plan complexe.

Table 1: Tables de multiplication de \mathbb{U}_3 , \mathbb{U}_4 et \mathbb{U}_6

| \times | 1 | j | j^2 |
|----------|---|-----|-------|
| 1 | | | |
| j | | | |
| j^2 | | | |

| \times | 1 | i | -1 | -i |
|----------|---|---|----|----|
| 1 | | | | |
| i | | | | |
| -1 | | | | |
| -i | | | | |

| \times | 1 | z | z^2 | z^3 | z^4 | z^5 |
|----------|---|-----|-------|-------|-------|-------|
| 1 | | | | | | |
| z | | | | | | |
| z^2 | | | | | | |
| z^3 | | | | | | |
| z^4 | | | | | | |
| z^5 | | | | | | |

Exercice 3 (*) (a) Pour $\theta \in \mathbb{R}$, développer $(\frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}))^3$ et en déduire $\cos^3 \theta$ en fonction d'une somme de fonctions $\cos(k\theta)$ et/ou $\sin(k\theta)$, $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Pour $\theta \in \mathbb{R}$, développer $(\cos \theta + i \sin \theta)^3$ et en déduire une expression de $\sin(3\theta)$ en fonction de $\cos \theta$ et/ou $\sin \theta$.

Exercice 4 (*) (a) Pour $\theta \in \mathbb{R}$, montrer que : $e^{i\theta} + 1 = 2e^{\frac{i}{2}\theta} \cos(\theta/2)$ et $e^{i\theta} - 1 = 2ie^{\frac{i}{2}\theta} \sin(\theta/2)$.

(b) Pour z nombre complexe, $z \neq 1$ et n entier naturel, montrer que : $\sum_{k=0}^n z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$.

(c) Pour $\theta \neq 2\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, en déduire une valeur explicite simple des sommes : $\sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$ et $\sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$.