Logique Combinatoire et Séquentielle

Fonctions élémentaires de l'algèbre binaire

Pierre Héroux

Pierre.Heroux@univ-rouen.fr
Université de Rouen

L1 Informatique – EEEA

Plan

Plan

Fonctions binaires et algèbre de Boole

- Un système binaire est un système qui ne peut exister que dans deux états
- Selon les domaines d'application les états portent différentes appellations :

Numérique : 0 et 1 (bit : binary digit)

Logique : vrai et faux

Electronique :
- ON et OFF
- Ouvert et Fermé (circuit)
- Haut et Bas (tension)

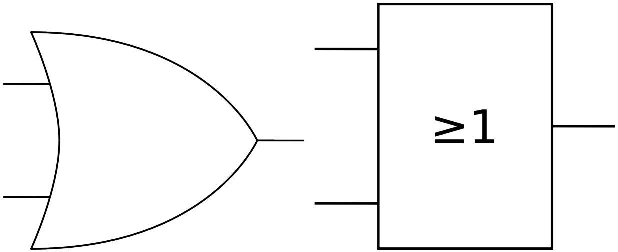
Plan

La porte OU

- La porte OU (addition logique, OR) possède au moins deux entrées
- La sortie vaut 0 si toutes les entrées valent 0
- La sortie vaut 1 sinon
- Le OU est noté +

a	b	$y = a + b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Symboles de la porte OU



Propriétes de la porte OU

- La fonction OU est associative.

$$a + b + c = a + (b + c) = (a + b) + c$$

- La fonction OU est commutative.

$$a + b = b + a$$

- La fonction OU est idempotente.

$$a + a = a$$

- L'élément neutre de la fonction OU est 0.

$$a + 0 = a$$

- L'élément absorbant de la fonction OU est 1.

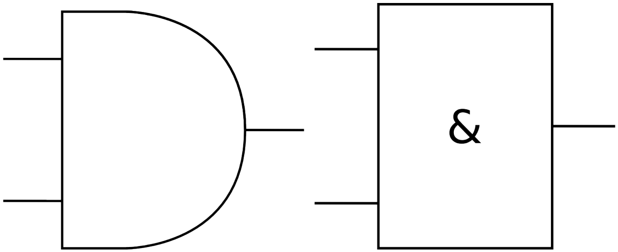
$$a + 1 = 1$$

La porte ET

- La porte ET (produit logique, AND) possède au moins deux entrées
- La sortie vaut 1 si toutes ses entrées valent 1
- Sinon, la sortie vaut 0
- La porte ET est notée .

a	b	$y = a.b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Symboles de la porte ET



Propriétes de la porte ET

- La fonction ET est associative.

$$a.b.c = a.(b.c) = (a.b).c$$

- La fonction ET est commutative.

$$a.b = b.a$$

- La fonction ET est idempotente.

$$a.a = a$$

- L'élément neutre de la fonction ET est 1.

$$a.1 = a$$

- L'élément absorbant de la fonction ET est 0.

$$a.0 = 0$$

Propriétés

Priorité : L'opérateur ET est prioritaire sur l'opérateur OU.

$$\begin{aligned} a.b + c &= (a.b) + c \\ &\neq a.(b + c) \end{aligned}$$

Distributivité : Les fonctions ET et OU sont distributives l'une par rapport à l'autre.

$$a.(b + c) = ab + ac$$

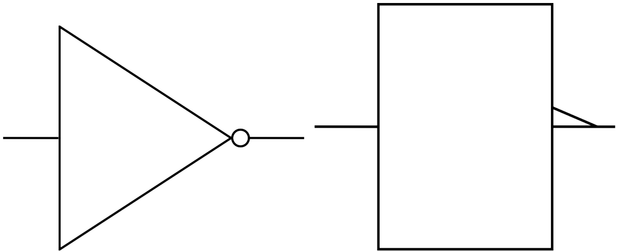
$$a + bc = (a + b).(a + c)$$

La porte NON

- La fonction NON (inversion logique, NOT) ne possède qu'une seule entrée.
- Sa sortie vaut 0 quand son entrée vaut 1
- Sa sortie vaut 1 quand son entrée vaut 0
- L'opérateur NON est noté $\overline{a}$.

a	$\overline{a}$
0	1
1	0

Symbole de la porte NON



Propriétés de la fonction NON

$$\overline{\overline{a}} = a$$

$$a + \overline{a} = 1$$

$$a.\overline{a} = 0$$

$$a + \overline{a}b = a + b$$

Théorèmes de De Morgan

- $\overline{a.b} = \overline{a} + \overline{b}$
- $\overline{a.b.c.\ldots} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c} + \ldots$
- $\overline{a + b} = \overline{a}.\overline{b}$
- $\overline{a + b + c + \ldots} = \overline{a}.\overline{b}.\overline{c}.\ldots$

Théorèmes de De Morgan

- $\overline{a.b} = \overline{a} + \overline{b}$
- $\overline{a.b.c.\ldots} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c} + \ldots$
- $\overline{a + b} = \overline{a}.\overline{b}$
- $\overline{a + b + c + \ldots} = \overline{a}.\overline{b}.\overline{c}.\ldots$

Applications des théorèmes de De Morgan

$$\begin{aligned} ab &= \overline{\overline{ab}} \\ &= \overline{\overline{a} + \overline{b}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ab &= \overline{\overline{a}}.\overline{\overline{b}} \\ &= \overline{\overline{a} + \overline{b}} \end{aligned}$$

Applications des théorèmes de De Morgan

$$
\begin{aligned}
a+b &= \overline{\overline{a+b}} \\
&= \overline{\overline{a}.\overline{b}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a+b &= \overline{\overline{a}} + \overline{\overline{b}} \\
&= \overline{\overline{a}.\overline{b}}
\end{aligned}
$$

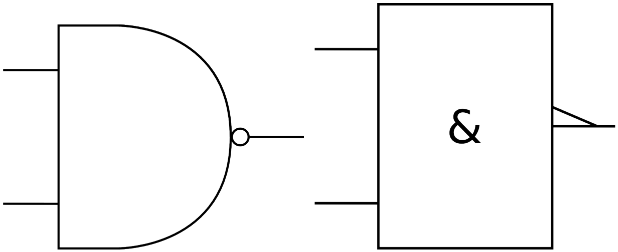
Plan

La porte NON ET

La porte NON ET (NAND) est équivalent à une porte ET dont la sortie est inversée

a	b	$y = \overline{a.b}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Symboles de la porte NON ET



Propriétés de la portes NON ET

$$
\begin{aligned}
ab &= \overline{\overline{ab}} \\
&= \overline{\overline{ab}.\overline{ab}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a+b &= \overline{\overline{a}}+\overline{\overline{b}} \\
&= \overline{\overline{a}.\overline{b}} \\
&= \overline{\overline{a.a}.\overline{b.b}}
\end{aligned}
$$

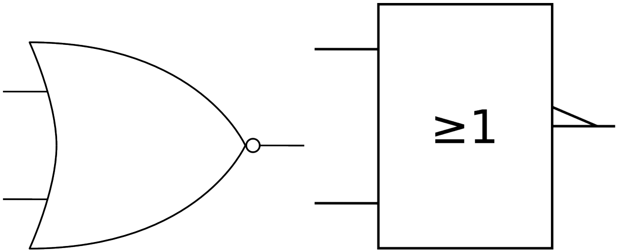
$$
\overline{a} = \overline{a.a}
$$

La porte NON OU

La porte NON OU (NOR) est équivalente à une porte OU dont la sortie est inversée.

a	b	$y = \overline{a+b}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Symboles de la porte NON OU



Propriétés de la porte NON OU

$$
\begin{aligned}
ab &= \overline{\overline{ab}} \\
&= \overline{\overline{a} + \overline{b}} \\
&= \overline{\overline{a + a} + \overline{b + b}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a + b &= \overline{\overline{a + b}} \\
&= \overline{\overline{a + b} + \overline{a + b}}
\end{aligned}
$$

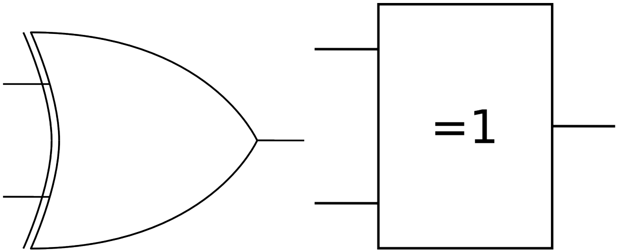
$$
\overline{a} = \overline{a + a}
$$

La porte OU EXCLUSIF

- La porte OU EXCLUSIF (XOR) possède deux entrées
- Sa sortie vaut 1 si une et une seule de ses entrées vaut 1
- Sinon, sa sortie vaut 0
- L'opérateur OU EXCLUSIF est noté $\oplus$.

a	b	$y = a \oplus b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Symboles de la portes OU EXCLUSIF



Écritures équivalentes

$$a \oplus b = (a+b).\overline{ab}$$

$$a \oplus b = a\overline{b} + \overline{a}b$$

$$a \oplus b = \overline{ab + \overline{a}\overline{b}}$$

$$a \oplus b = (a+b).(\overline{a} + \overline{b})$$

Résumé des fonctions logiques élémentaires et de leurs propriétés

OU	$(a+b)+c = a+(b+c) = a+b+c$ $a+b = b+a$ $a+a = a$ $a+0 = a$ $a+1 = 1$	associativité commutativité idempotence élément neutre élément absorbant
ET	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$ $a \cdot b = b \cdot a$ $a \cdot a = a$ $a \cdot 1 = a$ $a \cdot 0 = 0$	associativité commutativité idempotence élément neutre élément absorbant
Distributivité	$a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ $a + (b \cdot c) = (a+b) \cdot (a+c)$	
NON	$\bar{\bar{a}} = a$ $a + \bar{a} = 1$ $a \cdot \bar{a} = 0$	
Théorèmes de De Morgan	$\overline{a+b+c+\ldots} = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \ldots$ $\overline{a \cdot b \cdot c \ldots} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \ldots$	
OU EXCLUSIF	$a \oplus b = (a+b) \cdot \overline{a \cdot b}$ $a \oplus b = a\bar{b} + \bar{a}b$ $a \oplus b = \overline{ab + \bar{a}\bar{b}}$ $a \oplus b = (a+b) \cdot (\bar{a} + \bar{b})$	

Plan

Écritures des fonctions logiques

- Les fonctions logiques peuvent être décrites par :
  - une table de vérité
  - une écriture algébrique
  - un logigramme
- Ces écritures sont équivalentes
- À partir de l'une on peut retrouver les autres

Table de vérité

Ecriture explicite de la valeur de la fonction pour toutes les combinaisons possibles de ses variables.

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Somme canonique de produits

a	b	c	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

$$\Leftrightarrow \quad f = \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}bc + a\bar{b}c + ab\bar{c}$$

Produit canonique de sommes

a	b	c	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

$$\Leftrightarrow \quad f = (a + b + \bar{c})(a + \bar{b} + c)(\bar{a} + b + c)(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})$$

Simplification algébrique

On applique les formules données par les propriétés des portes logiques de telle sorte à réduire au maximum l'expression algébrique de la fonction.

Exemple :

$$
\begin{aligned}
F &= \bar{x}yz + x\bar{y}z + xy\bar{z} + xyz \\
&= (\bar{x}yz + xyz) + (x\bar{y}z + xyz) + (xy\bar{z} + xyz) \\
&= yz(\bar{x} + x) + xz(\bar{y} + y) + xy(\bar{z} + z) \\
&= xy + xz + yz
\end{aligned}
$$

Tableau de Karnaugh

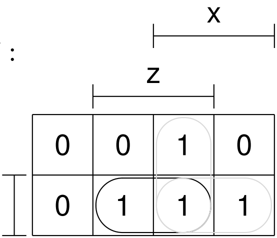
- Cette technique est applicable avec un nombre restreint d'entrées (maximum 4)
- On place les valeurs de la fonction dans un tableau à 2 dimensions construit de telle sorte que deux cases adjascentes ou opposées du tableau ne diffèrent que par la valeur d'une seule variable (code de Gray)
- On effectue le moins de regroupements rectangulaires de taille 2^n (1,2,4...) contenant uniquement des 1 de telle sorte que tous les 1 soient englobés au moins 1 fois.
- Pour chaque regroupement on regarde les valeurs d'entrées conservées constantes et on construit le produit correspondant.
- Enfin, l'expression algébrique de la fonction est la somme des produits construits dans l'étape précédente.

Tableau de Karnaugh : Exemple

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$\Leftrightarrow$

f :



$$f = yz + xy + xz$$

Tableau de Karnaugh : Exemple

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$\Leftrightarrow$

f :

			x	x
		z	z	
	0	0	1	0
y	0	1	1	1

$$f = yz + xy + xz$$

Tableau de Karnaugh : Exemple

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$\Leftrightarrow$

f :

		z	z, x	x
	0	0	1	0
y	0	1	1	1

$$f = yz + xy + xz$$