ITCR Ernesto Pocasangre Kreling
MT-5002 Grupo 1 2019084090

Guía de Estudio Semana 10

1. Matemáticamente, ¿qué es una transformada?

Una transformada es toda función que mapea un conjunto X en otro conjunto o sobre sí mismo.

Para la transformada de Fourier, es una integral que se utiliza para transformar una función del dominio del tiempo a una función en el dominio de la frecuencia.

2. Considere una función aperiódica $f(t)$, y una función periódica $f_T(t)$ en la cual se repite $f(t)$ cada T segundos y la serie de Fourier de $f_T(t)$ cuando $T \to \infty$, para deducir la integral de Fourier.

Considere una función $f(t)$ aperiódica finita, así como su extensión periódica $f_T(t)$ de periodo T. Esta segunda función, además, puede representarse a través de la serie de Fourier dada por:

$$f_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 kt}$$

donde ω_0 es la frecuencia angular fundamental dada por $\omega_0 = 2\pi/T$. El coeficiente c_k está asociado con la frecuencia $k\omega_0$, lo cual implica que dos componentes espectrales consecutivas están separadas por $\Delta\omega = \omega_0$, que se reduce conforme aumenta el periodo T. Entonces:

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-j\omega_0 kt} dt$$

Como dentro del intervalo de integración se cumple $f(t) = f_T(t)$, y para todo $|t| > \frac{T}{2}$ se cumple $f(t) = 0$, entonces:

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega_0 kt} dt$$

Si ahora se define $F(j\omega)$ como la función envolvente de los coeficientes Tc_k, se puede expresar como:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

A esta última expresión se le conoce como la Transformada de Fourier de la función $f(t)$.

3. Defina la transformada de Fourier y la transformada inversa de Fourier.

La transformada de Fourier es un operador que asigna a la función $f(t)$ otra función $F(j\omega)$, a la cual convergen todos los componentes Tc_k cuando $T \to \infty$. Usualmente, esta transformada se designa de la siguiente forma:

$$F(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$$

Asimismo, la relación entre funciones se denota como:

$$f(t) \circ\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\bullet\, F(j\omega)$$

Donde el círculo relleno denota siempre al dominio de la frecuencia, y el círculo blanco al dominio del tiempo.

Por otra parte, la transformada inversa de Fourier corresponde a la integral:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Lo cual se denota como:

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\}$$

4. ¿Cómo se pueden expresar los coeficientes de la serie de Fourier en términos de la Transformada de Fourier?

A partir de la definición de la transformada de Fourier, es posible ver los puntos c_k como muestras de cada $k\omega_0$ de dicha función:

$$c_k = \frac{1}{T} F(jk\omega_0)$$

A partir de la expresión anterior, es posible sustituir los c_k en la serie de Fourier definida previamente para desarrollar de forma completa la expresión correspondiente a la transformada inversa de Fourier.

5. Compare los espectros de frecuencia de una señal periódica y una señal aperiódica.

Las transformadas directa e inversa de Fourier permiten asociar las representaciones de una señal en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia, donde una señal aperiódica tendrá un espectro continuo en lugar del espectro discreto de señales periódicas. De esta forma, a $F(j\omega)$ se le conoce como espectro de frecuencia de $f(t)$, a $|F(j\omega)|$ se le conoce como espectro de magnitud y a $\arg F(j\omega)$ como espectro de fase.

6. Indique las condiciones de convergencia de la Transformada de Fourier.

Estas condiciones también se denominan condiciones de Dirichlet, y establecen lo siguiente:

- $f(t)$ debe ser absolutamente integrable.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

- $f(t)$ solo puede tener un número finito de máximos y mínimos dentro de cualquier intervalo finito.
- $f(t)$ solo puede tener un número finito de discontinuidades dentro de cualquier intervalo finito, y esas discontinuidades deben ser finitas.

Nuevamente, se debe destacar que las condiciones anteriores son suficientes mas no necesarias, dado que existen ciertas funciones que no las cumplen y tienen una representación válida en el dominio de la frecuencia.

7. ¿A qué se le denomina función de densidad espectral?

a. Dada la energía de una señal:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(jw)|^2 dw$$

b. Al termino $|X(jw)|^2$ se le denomina la densidad espectral por determinar la energía distribuida en cada una de la frecuencias de la señal

8. Defina la propiedad de escala de una función impulso unitario.

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(at)$$

$$\mathcal{F}\{\delta(at)\} = \frac{1}{|a|}$$

9. Encontrar la función de densidad espectral de un pulso cuadrado de amplitud V, ancho τ y centrada en el origen, es decir:

$$f(t) = Vrect\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} V & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0 & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

$$F(jw) = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} Ve^{-jwt}dt$$

Para $jw = 0$

$$F(0) = V\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} 1dt = V\tau$$

Para $jw \neq 0$

$$F(jw) = V\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-jwt}dt = \frac{V}{-jw}\left(e^{-\frac{jw\tau}{2}} - e^{\frac{jw\tau}{2}}\right) = \frac{2V}{w} * \frac{e^{\frac{jw\tau}{2}} - e^{\frac{-jw\tau}{2}}}{2j}$$

$$F(jw) = \frac{2V}{w}sen\left(\frac{w\tau}{2}\right) = \frac{V\tau sen\left(\frac{w\tau}{2}\right)}{\frac{w\tau}{2}}$$

De lo que se puede obtener que la función de densidad espectral de f(t) es:

$$F(jw) = V\tau\ sa(\frac{w\tau}{2})$$

10. Determine los coeficientes de la serie de Fourier exponencial si la función dada en el inciso (9) se repite cada 4 segundos.

$$c_k = \frac{1}{T_p} \cdot X(jk\omega_0)$$

$$T_p = 4s$$

$$F(\omega) = V\tau sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$F(k\omega_0) = V\tau sa\left(\frac{k\omega_0\tau}{2}\right)$$

$$\omega_0 = 2\pi T_p = 2\pi(4) = 8\pi$$

$$F(k\omega_0) = V\tau sa\left(\frac{8\pi k\tau}{2}\right) = V\tau sa(4\pi k\tau)$$

$$\Rightarrow c_k = \frac{1}{4} \cdot V\tau sa(4\pi k\tau)$$

$$\boxed{c_k = \frac{1}{4} \cdot V\tau sa(4\pi k\tau)}$$

11. Determine el Teorema de Parseval para señales de energía.

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(t)\, dt$$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F^*(j\omega) e^{-j\omega t} d\omega\right] dt$$

$$E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F^*(j\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t}\, dt\right] d\omega$$

$$E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F^*(j\omega) F(j\omega)\, d\omega$$

$$E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |f(\omega)|^2\, d\omega$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |f(\omega)|^2\, d\omega}$$

12. Encuentre la Transformada de Fourier de una señal de tensión eléctrica dada por $f(t) = e^{-at}u(t) \quad \forall\, a > 0$. A partir de la respuesta encontrada determine la energía suministrada por esa señal a una resistencia de $1\ \Omega$.

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt$$

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-at-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-t(a+j\omega)} dt$$

$$\boxed{F(j\omega) = \frac{a - j\omega}{a^2 + \omega^2}}$$

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2\, d\omega$$

$$|F(j\omega)| = \frac{1}{a^2 + \omega^2}\left[\sqrt{a^2+\omega^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$$

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}\right)^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2 + \omega^2} d\omega$$

$$E = \frac{1}{2\pi a} \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2\pi a}\left[\tan^{-1}(\infty) - \tan^{-1}(-\infty)\right]$$

$$E = \frac{1}{2\pi a}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{2\pi a}$$

$$\boxed{E = \frac{1}{2a}}$$