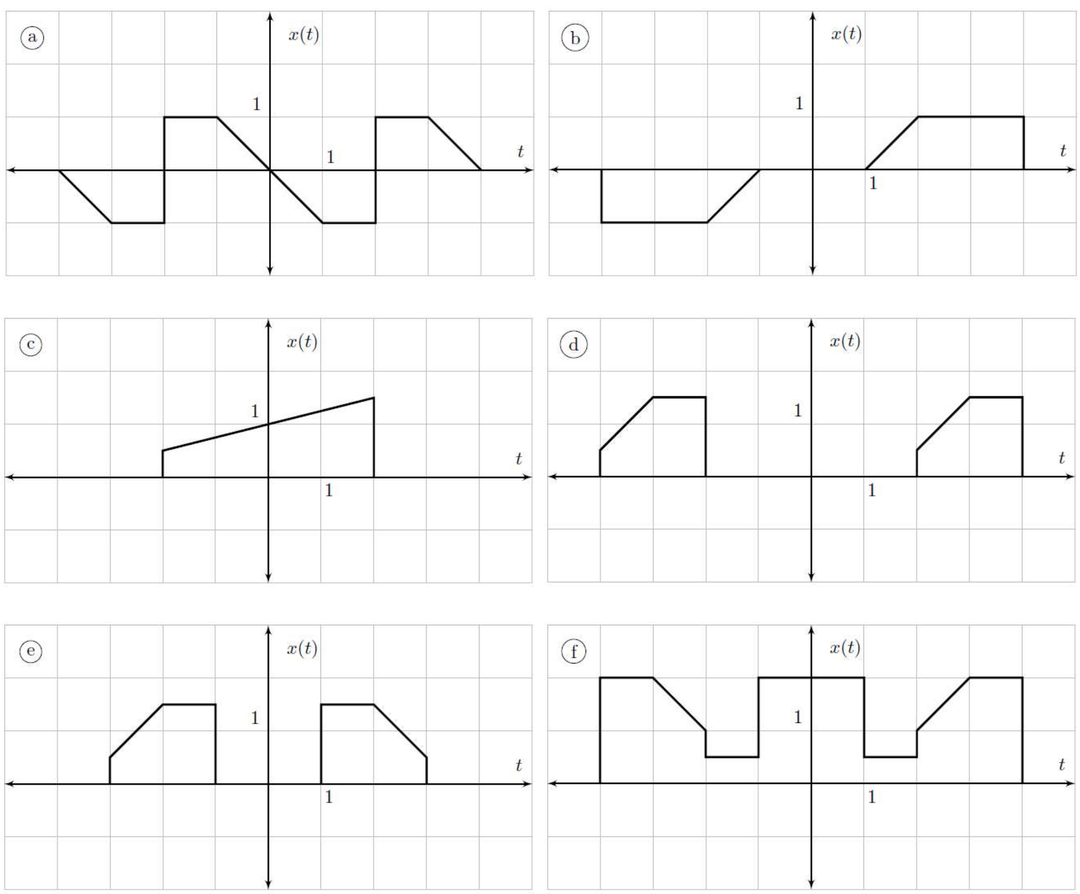
Instituto Tecnológico de Costa Rica I Semestre 2021
Área de Ingeniería Mecatrónica
MT-5001 Modelos de Sistemas para Mecatrónica
Profesor: Ing. Felipe Meza-Obando

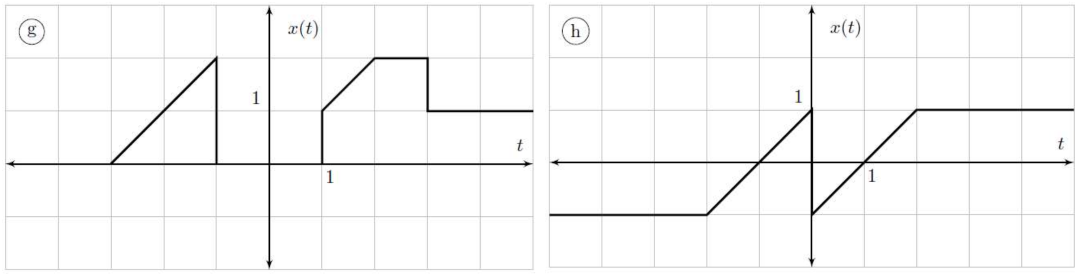
Elaborado por: Ing. José Miguel Barboza Retana

Práctica #7. Transformada de Fourier.

- Resuelva los siguientes problemas relacionados con la transformada de Fourier, la integral de convolución y el análisis de sistemas LTI:

  1) Encuentre las transformadas de Fourier de las funciones mostradas en la siguiente figura, utilizando la linealidad y la propiedad de derivación. Exprese, en los casos donde es posible, las expresiones en términos puramente reales o en términos puramente imaginarios.





2) Calcule la transformada de Fourier de la función $x(t) = e^{-a|t|}$, con $a > 0$.

3) Determine la transformada de Fourier de la función:

$$x(t) = \begin{cases} \dfrac{a}{\tau}t + a & (-\tau \leq t \leq 0) \\ -\dfrac{a}{\tau}t + a & (0 < t \leq \tau) \\ 0 & en\,el\,resto \end{cases}$$

Y también para su derivada, grafique ambas funciones y encuentre sus respectivos espectros.

4) Si la transformada de Fourier de $x(t)$ es $X(j\omega)$, encuentre la transformada de

$$ax\left(\frac{t - t_0}{T}\right)$$

5) Si la transformada de Fourier de $x(t)$ es $X(j\omega)$, encuentre el espectro de:

$$x_D(t) = x(t - t_0) \pm x(t + t_0)$$

Encuentre el espectro $X_D(j\omega)$ para el caso especial $x(t) = u(t)$, $t_0 = \frac{1}{2}$.

6) Una función escalón unitario real se puede modelar con $u(t) * r\left(\frac{t}{T}\right)$ con:

$$r(t) = u\left(t + \frac{1}{2}\right) - u\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

Grafique esta función y encuentre su transformada de Fourier. ¿En qué afecta el término T a ésta función y a su espectro?

7) Encuentre la transformada de Fourier de $x(t) = u(t)e^{-\frac{t}{T}}\cos(\omega_0 t)$.

8) Determine cuál es el resultado de $x(t) * \delta(t - t_0)$.

9) Encuentre el resultado de la convolución $\operatorname{sa}\left(\frac{\pi t}{T}\right) * \operatorname{sa}\left(\frac{\pi t}{T}\right)$.

10) Encuentre la transformada de Fourier de:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

11) Encuentre la transformada de Fourier de:

$$x(t) = \sum_{n=-K}^{K} \delta(t - nT)$$

12) Demuestre que para las áreas bajo la curva de una función y de su espectro se cumple:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = X(0) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)d\omega = 2\pi x(0)$$

13) Determine la transformada de Fourier de la función:

$$x(t) = \begin{cases} 1 + \cos(at) & \left(-\frac{\pi}{a} \leq t \leq \frac{\pi}{a}\right) \\ 0 & en\ el\ resto \end{cases}$$

14) Encuentre la transformada $\mathcal{F}\{x(t)\cos(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t)\}$ en términos de $X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$. Esta se conoce como la propiedad de demodulación.

15) Una señal analógica $x_a(t)$ tiene un espectro limitado en banda $X_a(j\omega)$ cuya frecuencia máxima se sabe es $10\,kHz$. ¿Cuál es la frecuencia mínima $f_{s_{min}}$ a la cual se debe

muestrear $x_a(t)$ tal que las muestras $x(n) = x_a\left(\frac{n}{f_s}\right)$ representan sin pérdida de información a $x_a(t)$?

16) Un sistema LTI causal responde a una función $x(t)$ con $y(t)$, donde estas funciones se definen como:

$$x(t) = u\left(t + \frac{1}{2}\right) - u\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

$$y(t) = x\left(2t + \frac{1}{2}\right)(2t + 1) - x\left(2t - \frac{1}{2}\right)(1 - 2t)$$

a) Grafique las funciones $x(t)$ y $y(t)$.
b) ¿Cuál es la respuesta a $x_2(t) = x\left(\frac{t-1}{2}\right)$?
c) ¿Cuál es la respuesta $y_3(t)$ al escalón unitario?
d) ¿Cuál es la respuesta al impulso?

17) Sea la función $r(t) = u\left(\frac{1}{2} - t\right)u\left(t + \frac{1}{2}\right)$, donde $u(t)$ es el escalón unitario, grafique cada una de las siguientes funciones:

a) $r(t)\cos(t)$
b) $r(t)\cos(\pi t)$
c) $r(t)\sin(10\pi t)$
d) $r\left(\frac{t}{T}\right)\sin(t)$
e) $u(t) * \mathrm{r}(t)$
f) $r(t) * \mathrm{r}(t)$
g) $u(t) * \mathrm{u}(t)$
h) $u(1 - t^2)$
i) $tu(t)\,\mathrm{u}(1 - t)$
j) $(1 - t)u(t)u(1 - t)$
k) $(1 - t)u(t)u(-1 - t)$

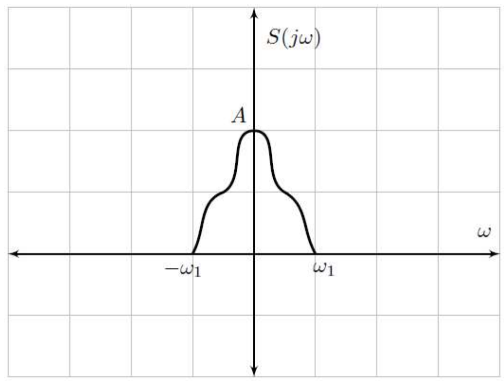
18) Dos señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$ tienen áreas A_1 y A_2 respectivamente. Demuestre que el área de la función $x(t) = x_1(t) * x_2(t)$ es igual a $A_1 A_2$.

19) Considere un sistema LTI con respuesta al impulso $h(t) = e^{-at}u(t)$, $a > 0$. Determine la respuesta ante la señal de entrada $x(t) = e^{-bt}u(t)$, $b > 0$ sin realizar la convolución de forma directa.

20) Considere un filtro paso bajas ideal cuya respuesta al impulso está dada por $h(t) = \frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t}$. Determine la salida

del filtro ante una señal de entrada que tiene la misma forma que $h(t)$, es decir $x(t) = \frac{\sin(\omega_i t)}{\pi t}$.

21) Dada la señal $s(t)$ cuyo espectro se muestra en la siguiente figura y además la señal $p(t) = \cos(\omega_0 t)$. Utilice la propiedad de multiplicación para encontrar el espectro de la señal $r(t) = s(t)\,p(t)$.



22) Determine y grafique la transformada de Fourier de la siguiente señal:

$$x(t) = \frac{\sin(t)\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\pi t^2}$$

23) Utilice la ecuación de análisis de la transformada de Fourier para calcular las transformadas de las siguientes funciones:

a) $e^{-2(t-1)}u(t-1)$

b) $e^{-2|t-1|}$

Grafique y etiquete debidamente la magnitud de cada transformada.

24) Utilice la ecuación de análisis de la transformada de Fourier para calcular las transformadas de las siguientes funciones:

a) $\delta(t+1) + \delta(t-1)$

b) $\frac{d}{dt}\{u(-2-t) + u(t-2)\}$

Grafique y etiquete debidamente la magnitud de cada transformada.

25) Determine la transformada de Fourier de cada una de las siguientes señales periódicas:

a) $\sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$

b) $1 + \cos\left(6\pi t + \frac{\pi}{8}\right)$

26) Utilice la ecuación de síntesis de la transformada de Fourier para determinar las transformadas inversas de Fourier de:

a) $X_1(j\omega) = 2\pi\delta(\omega) + \pi\delta(\omega - 4\pi) + \pi\delta(\omega + 4\pi)$

b) $X_2(j\omega) = \begin{cases} 2 & (0 \le \omega \le 2) \\ -2 & (-2 \le \omega \le 0) \\ 0 & (|\omega| > 2) \end{cases}$

27) Utilice la ecuación de síntesis de la transformada de Fourier para determinar las transformadas inversas de $X(j\omega) = |X(j\omega)|e^{j\sphericalangle X(j\omega)}$, donde:

$$|X(j\omega)| = 2\{u(\omega + 3) - u(\omega - 3)\}$$
$$\sphericalangle X(j\omega) = -\frac{3}{2}\omega + \pi$$

Use su respuesta para determinar los valores de t donde $x(t) = 0$.

28) Sabiendo que $x(t)$ tiene transformada de Fourier $X(j\omega)$, exprese las transformadas de Fourier de las siguientes funciones en términos de $X(j\omega)$:

a) $x_1(t) = x(1 - t) + x(-1 - t)$

b) $x_2(t) = x(3t - 6)$

c) $x_3(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t - 1)$

29) Para cada una de las siguientes transformadas de Fourier, determine sin evaluar la transformada inversa, si la señal en el tiempo es (i) real, imaginaria o ninguna, (ii) par, impar o ninguna:

a) $X_1(j\omega) = u(\omega) - u(\omega - 2)$

b) $X_2(j\omega) = \cos(2\omega)\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)$

c) $X_3(j\omega) = A(\omega)e^{jB(\omega)}$, donde $A(\omega) = \frac{\sin(2\omega)}{\omega}$ y $B(\omega) = 2\omega + \frac{\pi}{2}$

d) $X_4(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}\delta\left(\omega - \frac{k\pi}{4}\right)$

30) Considere la señal:

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \left(t < -\frac{1}{2}\right) \\ t + \frac{1}{2} & \left(-\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}\right) \\ 1 & \left(t > \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

a) Encuentre una expresión cerrada para $X(j\omega)$
b) Determine la transformada de $g(t) = x(t) - \frac{1}{2}$

31) Considere la señal:

$$x(t) = \begin{cases} 0 & (|t| > 1) \\ \frac{t+1}{2} & (-1 \leq t \leq 1) \end{cases}$$

a) Encuentre una expresión cerrada para $X(j\omega)$
b) Compruebe que la parte real de su respuesta en a) corresponde a la transformada de Fourier de la parte par de $x(t)$
c) Determine la transformada de Fourier de la parte impar de $x(t)$

32) Utilice las propiedades de la transformada de Fourier para encontrar la transformada de la siguiente señal:

$$x(t) = t\left(\frac{\sin(t)}{\pi t}\right)^2$$

Además, utilice su resultado y la relación de Parseval para determinar el valor numérico de:

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \left(\frac{\sin(t)}{\pi t}\right)^4 dt$$

33) Dadas las relaciones:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$
$$g(t) = x(3t) * h(3t)$$

Y sabiendo que las transformadas de Fourier de $x(t)$ y $h(t)$, son $X(j\omega)$ y $H(j\omega)$ respectivamente. Use las propiedades de las transformada de Fourier para demostrar que $g(t)$ tiene la forma:

$$g(t) = Ay(Bt)$$

Determine el valor de A y B.

34) Considere el par de transformadas:

$$e^{-|t|} \leftrightarrow \frac{2}{1+\omega^2}$$

a) Use las propiedades adecuadas para encontrar la transformada de $te^{-|t|}$
b) Usando la propiedad de dualidad y su resultado del punto a) encuentre la transformada de:

$$\frac{4t}{(1+t^2)^2}$$

35) Sea $x(t)$ una señal cuya transformada de Fourier es:

$$X(j\omega) = \delta(\omega) + \delta(\omega - \pi) + \delta(\omega - 5)$$

Y además $h(t) = u(t) - u(t-2)$, conteste lo siguiente:

a) ¿$x(t)$ es periódica?
b) ¿$x(t) * h(t)$ es periodica?
c) ¿Puede ser periódica la convolución de dos señales aperiódicas?

36) Considere una señal $x(t)$ con transformada de Fourier $X(j\omega)$. Suponga que se conoce lo siguiente:
a) $x(t)$ es real y no negativa
b) $\mathcal{F}^{-1}\{(1+j\omega)X(j\omega)\} = Ae^{-2t}u(t)$, donde A es independiente de t.
c) $\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = 2\pi$

Determine una expresión en forma cerrada para $x(t)$.

37) Sea $x(t)$ una señal con transformada $X(j\omega)$. Suponga que se conoce lo siguiente:
a) $x(t)$ es real
b) $x(t) = 0$, para $t \leq 0$

c) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Re\{X(j\omega)\}e^{j\omega t}d\omega = |t|e^{-|t|}$

Determine una expresión en forma cerrada para $x(t)$.

38) Considere la señal:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(k\frac{\pi}{4}\right)}{\left(k\frac{\pi}{4}\right)}\delta\left(t - k\frac{\pi}{4}\right)$$

a) Determine $g(t)$ tal que $x(t) = \left(\frac{\sin(t)}{\pi t}\right)g(t)$
b) Use la propiedad de multiplicación para argumentar que $X(j\omega)$ es periódica. Consiga una expresión para $X(j\omega)$ sobre un periodo.

39) Determine si los siguientes enunciados son ciertos o falsos. Justifique.
a) Una señal impar e imaginaria siempre tiene una transformada de Fourier impar e imaginaria.
b) La convolución de una transformada impar de Fourier con una transformada par de Fourier siempre es impar.

40) Encuentre la respuesta al impulso de un sistema con respuesta en frecuencia:

$$H(j\omega) = \frac{(\sin^2(3\omega))\cos(\omega)}{\omega^2}$$

41) Considere un sistema LTI causal con respuesta en frecuencia

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 3}$$

Para una entrada particular $x(t)$ se observa que este sistema produce la salida:

$$y(t) = e^{-3t}u(t) - e^{-4t}u(t)$$

Determine $x(t)$.

42) Calcule la transformada de Fourier de cada una de las siguientes señales:

a) $[e^{-at}\cos(\omega_0 t)]u(t)$, $a > 0$
b) $e^{-3|t|}\sin(2t)$

c) $x(t) = \begin{cases} 1+\cos(\pi t) & (|t| \leq 1) \\ 0 & (|t| > 1) \end{cases}$

d) $\sum_{k=0}^{\infty} a^k \delta(t-kT)$, $|a| < 1$

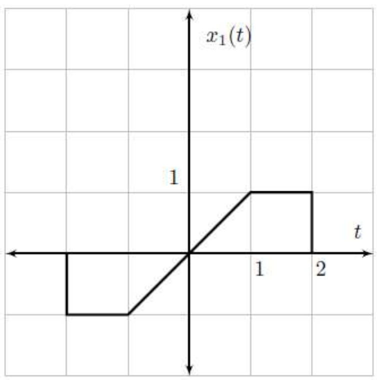
e) $[te^{-2t}\sin(4t)]u(t)$

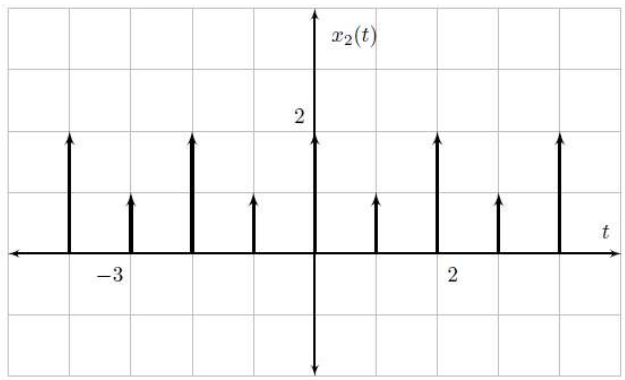
f) $\left[\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\right]\left[\frac{\sin(2\pi(t-1))}{\pi(t-1)}\right]$

g) $x_1(t)$ como se muestra en la figura

h) $x_2(t)$ como se muestra en la figura, considere que es una señal periódica.

i) $x(t) = \begin{cases} 1-t^2 & (0 < t < 1) \\ 0 & en\ otro\ valor \end{cases}$





43) Determine la señal continua correspondiente a cada una de las siguientes transformadas:

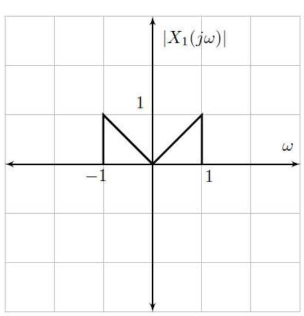
a) $X(j\omega) = \frac{2\sin(3(\omega-2\pi))}{(\omega-2\pi)}$

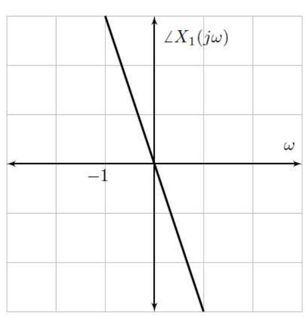
b) $X(j\omega) = \cos\left(4\omega + \frac{\pi}{3}\right)$

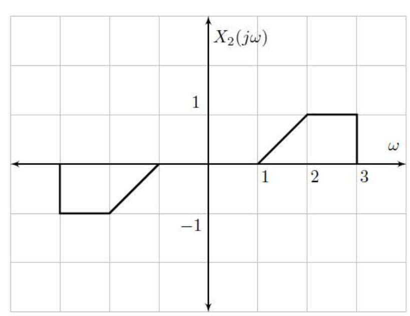
c) $X_1(j\omega)$ dada por la magnitud y fase graficada en la figura

d) $X(j\omega) = 2[\delta(\omega-1) - \delta(\omega+1)] + 3[\delta(\omega-2\pi) + \delta(\omega+2\pi)]$

e) $X_2(j\omega)$ como se muestra en la figura



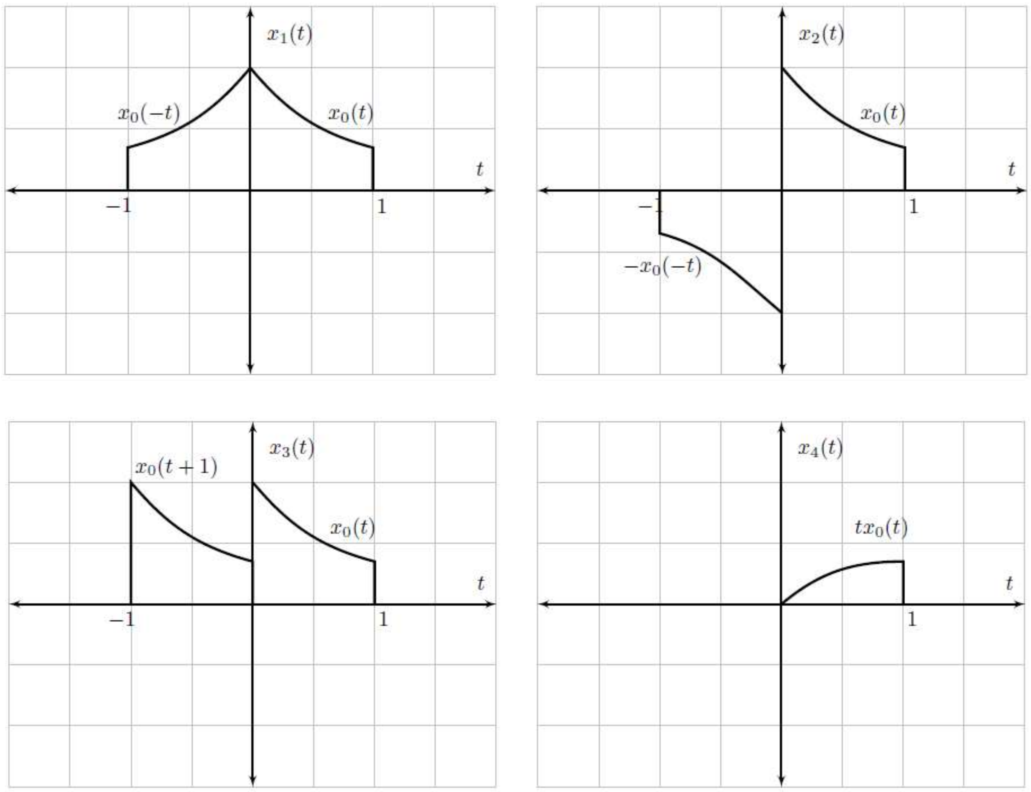




44) Considere la señal:

$$x_0(t) = \begin{cases} e^{-t} & (0 \leq t \leq 1) \\ 0 & en\ otro\ valor \end{cases}$$

Determine la transformada de Fourier de cada una de las siguientes señales evaluando de forma explícita únicamente la transformada de $x_0(t)$, entonces utilice las propiedades que considere apropiadas.

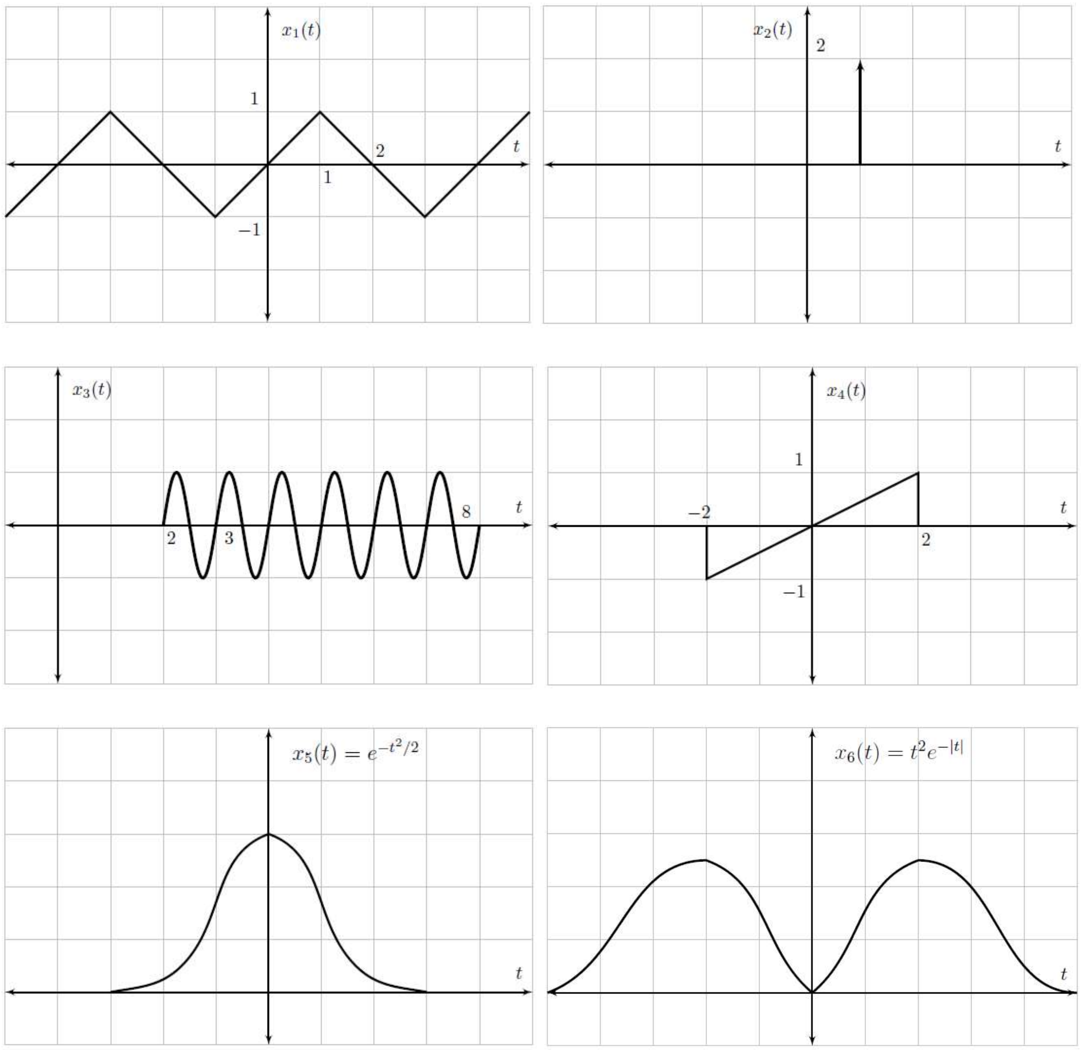


45) Determine cuál de las señales en la siguiente figura, tiene transformada de Fourier que satisfaga las siguientes condiciones:

a) $Re\{X(j\omega)\} = 0$
b) $Im\{X(j\omega)\} = 0$
c) Que exista un a tal que $e^{ja\omega}X(j\omega)$ sea real
d) $\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)d\omega = 0$
e) $\int_{-\infty}^{\infty} \omega X(j\omega)d\omega = 0$
f) Que $X(j\omega)$ sea periódica

Además, construya una señal que tenga las propiedades a), d) y e).

(Las demás no debe tenerlas).



46) Sea $X(j\omega)$ la cual denota la transformada de Fourier de la señal $x(t)$ mostrada en la siguiente figura.

a) Encuentre $\sphericalangle X(j\omega)$

b) Encuentre $X(j0)$

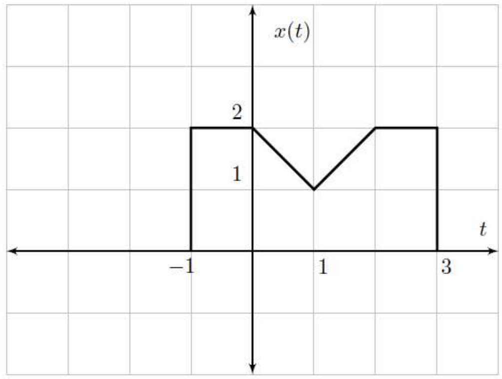
c) Encuentre $\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) d\omega$

d) Evalúe $\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \frac{2\sin(\omega)}{\omega} e^{j2\omega} d\omega$

e) Evalúe $\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$

f) Grafique la transformada inversa de $Re\{X(j\omega)\}$

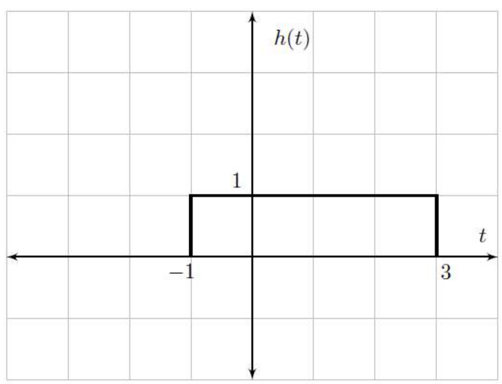
(Debe realizar estos cálculos sin evaluar de forma explícita $X(j\omega)$)



47) Calcule la convolución de cada uno de los siguientes pares de señales $x(t)$ y $h(t)$ mediante el cálculo de $X(j\omega)$ y $H(j\omega)$.

a) $x(t) = te^{-2t}u(t)$, $h(t) = e^{-4t}u(t)$
b) $x(t) = te^{-2t}u(t)$, $h(t) = te^{-4t}u(t)$
c) $x(t) = e^{-t}u(t)$, $h(t) = e^{t}u(-t)$

Adicionalmente, suponga que $x(t) = e^{-(t-2)}u(t-2)$ y $h(t)$ es como se muestra en la siguiente figura. Verifique la propiedad de convolución mostrando que la transformada de $y(t) = x(t) * h(t)$ es igual a $X(j\omega)H(j\omega)$.



48) Considere las señales:

$$x(t) = u(t-1) - 2u(t-2) + u(t-3)$$

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t-kT)$$

Donde $T > 0$. Si c_k denota los coeficientes de la serie de Fourier para $\tilde{x}(t)$ y $X(j\omega)$ denota la transformada de Fourier de $x(t)$:

a) Determine una expresión de forma cerrada para $X(j\omega)$
b) Determine una expresión para los coeficientes de Fourier c_k y verifique que:

$$c_k = \frac{1}{T} X\left(j\frac{2\pi k}{T}\right)$$

49) Suponga que $g(t) = x(t)\cos(t)$ y que la transformada de Fourier de $g(t)$ es:

$$G(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq 2 \\ 0 & \text{con otro valor} \end{cases}$$

a) Determine $x(t)$
b) Especifique la transformada de Fourier $X_1(j\omega)$ de una señal $x_1(t)$ tal que:

$$g(t) = x_1(t)\cos(t)$$

50) Demuestre que los siguientes sistemas LTI, tienen todos la misma respuesta a la señal $x(t) = \cos(t)$.

$$h_1(t) = u(t)$$

$$h_2(t) = -2\delta(t) + 5e^{-2t}u(t)$$

$$h_3(t) = 2te^{-t}u(t)$$

Además, determine la respuesta al impulso de otro sistema LTI con la misma respuesta a $\cos(t)$.

51) Considere un sistema LTI S con respuesta al impulso:

$$h(t) = \frac{\sin\big(4(t-1)\big)}{\pi(t-1)}$$

Determine la salida de S para cada una de las siguientes entradas:

a) $x_1(t) = \cos\left(6t - \frac{\pi}{2}\right)$
b) $x_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \sin(3kt)$
c) $x_3(t) = \frac{\sin(4(t+1))}{\pi(t+1)}$
d) $x_4(t) = \left(\frac{\sin(2t)}{\pi t}\right)^2$

52) La entrada y salida de un sistema LTI causal están relacionadas por la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 8y(t) = 2x(t)$$

a) Encuentre la respuesta de este sistema al impulso
b) ¿Cuál es la respuesta de este sistema si $x(t) = te^{-2t}u(t)$?
c) Repita el punto a) para el sistema LTI causal descrito por la ecuación:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \sqrt{2}\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 2\frac{d^2x(t)}{dt^2} - 2x(t)$$

53) Un Sistema LTI S causal y estable tiene respuesta en frecuencia:

$$H(j\omega) = \frac{j\omega + 4}{6 - \omega^2 + 5j\omega}$$

a) Determine una ecuación diferencial que relacione la entrada $x(t)$ con la salida $y(t)$ de S.
b) Determine la respuesta al impulso $h(t)$ de S.
c) ¿Cuál es la salida de S cuando la entrada es $x(t) = e^{-4t}u(t) - te^{-4t}u(t)$?

54) Considere un sistema LTI continuo con respuesta en frecuencia:

$$H(j\omega) = \frac{a - j\omega}{a + j\omega}$$

Donde $a > 0$. Determine:
a) ¿Cuál es la magnitud de $H(j\omega)$? ¿Cuál es $\sphericalangle H(j\omega)$? ¿Cuál es la respuesta de este sistema al impulso?

b) Determine la salida del sistema del punto a) con $a = 1$ cuando la entrada es:

$$\cos\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) + \cos(t) + \cos(\sqrt{3}t)$$

Además, haga un bosquejo tanto de la entrada como de la salida.

55) Considere un sistema LTI cuya respuesta a la entrada:

$$x(t) = [e^{-t} + e^{-3t}]u(t)$$

Está dada por:

$$y(t) = [2e^{-t} - 2e^{-4t}]u(t)$$

a) Encuentre la respuesta en frecuencia de este sistema.
b) Determine la respuesta del sistema al impulso.
c) Encuentre la ecuación diferencial que relaciona la entrada y la salida de este sistema.

Respuestas

1) a) $\frac{2j}{\omega}[\mathrm{sa}(\omega)+4\,\mathrm{sa}(4\omega)-3\,\mathrm{sa}(3\omega)-2\cos(2\omega)]$

b) $\frac{2j}{\omega}[\mathrm{sa}(\omega)-2\,\mathrm{sa}(2\omega)+\cos(4\omega)]$

c) $2\,\mathrm{sa}(2\omega)\left(\frac{\omega-j}{\omega}\right)+\frac{j}{\omega}e^{-j2\omega}$

d) $\frac{4\cos(3\omega)}{\omega^2}\left[\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)+\omega\sin(\omega)\right]+\frac{2j}{\omega^2}\cos(3\omega)\left[\omega\cos(\omega)-2\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]$

e) $3\,\mathrm{sa}(3\omega)-3\,\mathrm{sa}(\omega)+\frac{2\cos(2\omega)}{\omega^2}-\frac{2\cos(3\omega)}{\omega^2}$

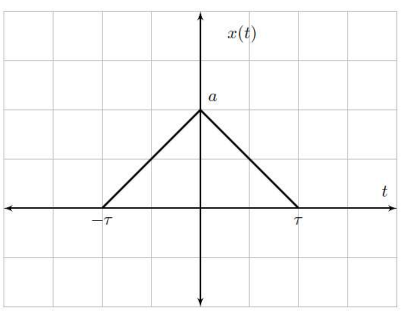
f) $\frac{2}{\omega^2}[\cos(3\omega)-\cos(2\omega)]+16\,\mathrm{sa}(4\omega)-2\,\mathrm{sa}(2\omega)$

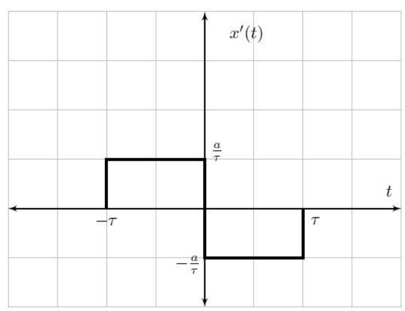
g) $\frac{4}{\omega}\cos(2\omega)\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)+2\,\mathrm{sa}(\omega)[\cos(2\omega)-1]+j\frac{2\cos(2\omega)}{\omega}\left[\cos(\omega)-\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\mathrm{sa}\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]$

h) $\frac{2j}{\omega}[1-2\,\mathrm{sa}(2\omega)]$

2) $\frac{2a}{a^2+\omega^2}$

3)





$X'(j\omega)=-\frac{j2a}{\omega\tau}[\cos(\omega\tau)-1]$

$X(j\omega)=-\frac{2a}{\omega^2\tau}[\cos(\omega\tau)-1]$

4) $a|T|X(j\omega T)e^{-j\omega t_0}$

5) $X_D(j\omega)=2\cos(\omega t_0)\,X(j\omega)$, $X_D(j\omega)=2j\sin(\omega t_0)\,X(j\omega)$

$X_D(j\omega)=\mathrm{sa}\left(\frac{\omega}{2}\right)$, $X_D(j\omega)=-j\frac{2}{\omega}\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)$

6) $-j\frac{T}{\omega}\mathrm{sa}\left(\frac{\omega T}{2}\right)+T\pi\delta(\omega)$

7) $\frac{T+j\omega T^2}{1+2j\omega T-\omega^2T^2+\omega_0{}^2T^2}$

8) $x(t-t_0)$

9) $|T|\,\mathrm{sa}\left(\frac{\pi t}{T}\right)$

10) $X(j\omega) = \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{T}\right)$

11) $X(j\omega) = \sum_{n=-K}^{K} e^{j\omega nT}$

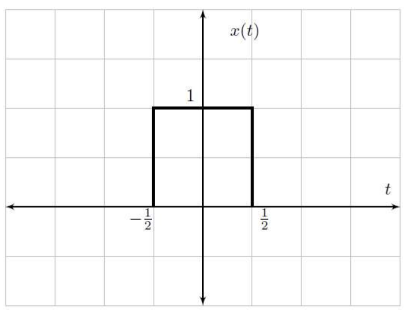
12) Ambas relaciones son correctas.

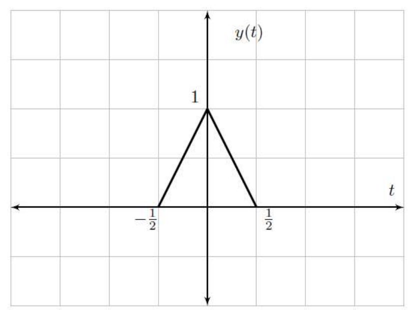
13) $\sin\left(\frac{\omega\pi}{a}\right)\left[\frac{2\omega^2+2\omega a-2a^2}{\omega^3-\omega a^2}\right]$

14) $\frac{1}{4}X(j\omega - j2\omega_0) + X(j\omega_0) + \frac{1}{4}X(j\omega + j2\omega_0)$

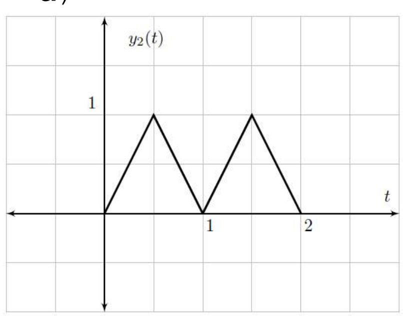
15) $f_{s_{mín}} = 20\ kHz$

16) a)

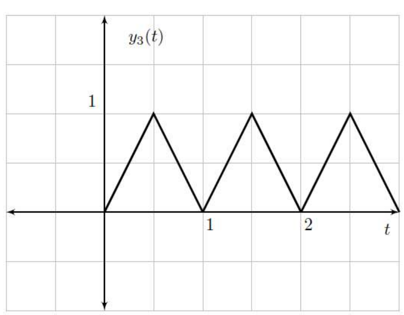




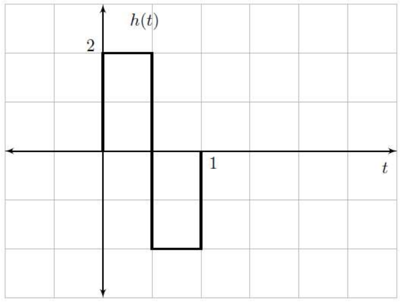
b)



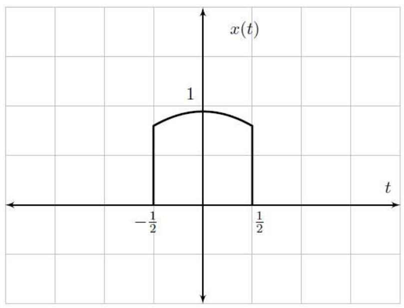
c)



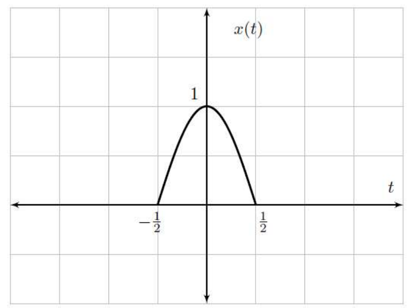
d)



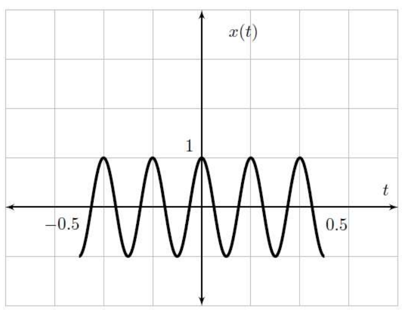
17) a)



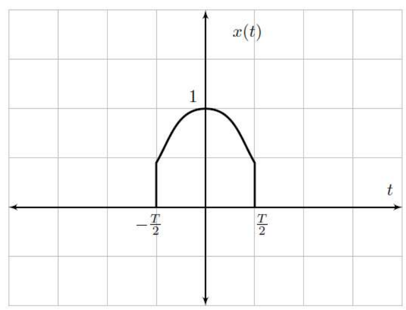
b)



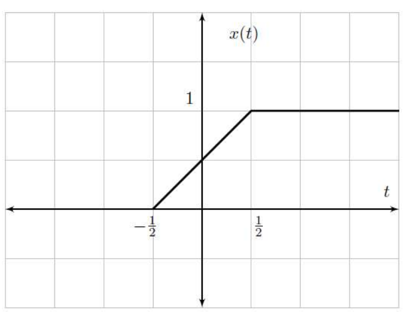
c)



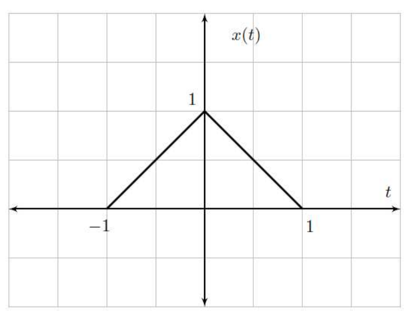
d)



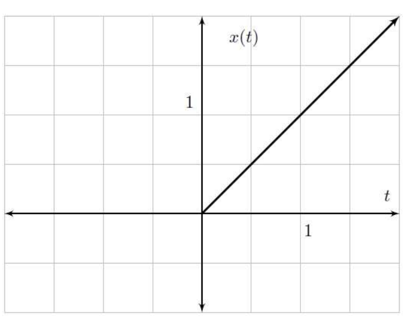
e)



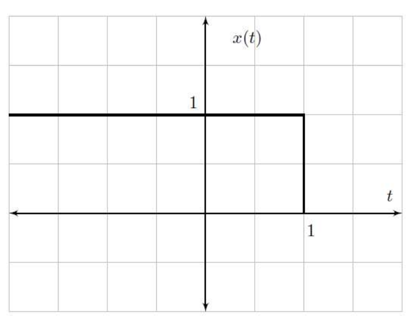
f)

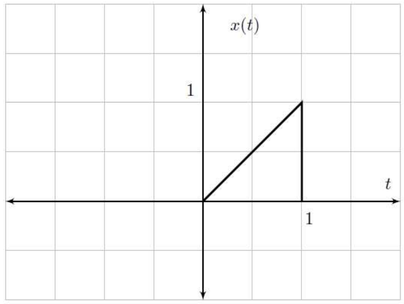


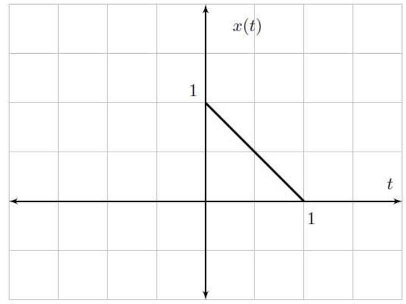
g)

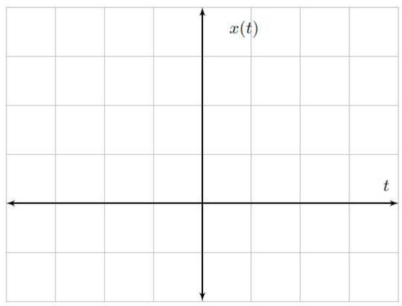


h)



i) 

j) 

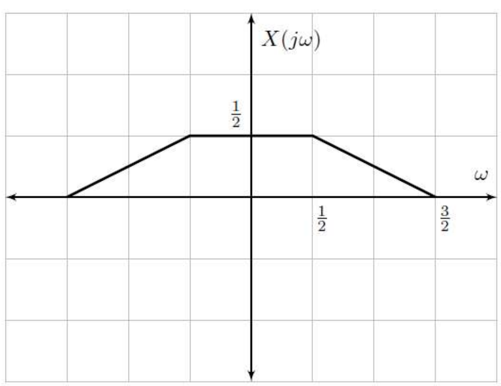
k) 

18) Si es correcto.

19) $y(t) = te^{-at}u(t)$

20) $$y(t) = \begin{cases} \frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t} & si\ \omega_c \leq \omega_i \\ \frac{\sin(\omega_i t)}{\pi t} & si\ \omega_i \leq \omega_c \end{cases}$$

21) $R(j\omega) = \frac{1}{2}S\big(j(\omega - \omega_0)\big) + \frac{1}{2}S\big(j(\omega + \omega_0)\big)$

22) 

23) a) $\frac{e^{-j\omega}}{2+j\omega}$

b) $\frac{4e^{-j\omega}}{4+\omega^2}$

24) a) $2\cos(\omega)$
b) $-2j\sin(2\omega)$

25) a) $\frac{\pi}{j}\left[e^{j\frac{\pi}{4}}\delta(\omega-2\pi)-e^{-j\frac{\pi}{4}}\delta(\omega+2\pi)\right]$
b) $2\pi\delta(\omega)+\pi\left[e^{j\frac{\pi}{8}}\delta(\omega-6\pi)+e^{-j\frac{\pi}{8}}\delta(\omega+6\pi)\right]$

26) a) $1+\cos(4\pi t)$
b) $-\frac{4j\sin^2(t)}{\pi t}$

27) $x(t)=-\frac{2\,\mathrm{s}\ \left(3\left(t-\frac{3}{2}\right)\right)}{\pi\left(t-\frac{3}{2}\right)},\ \ t=\frac{k\pi}{3}+\frac{3}{2}$ para k enteros distintos de 0

28) a) $X_1(j\omega)=2X(-j\omega)\cos(\omega)$
b) $X_2(j\omega)=\frac{1}{3}e^{-j2\omega}X\left(j\frac{\omega}{3}\right)$
c) $X_3(j\omega)=-\omega^2e^{j\omega}X(j\omega)$

29) a) ninguno, ninguno
b) imaginario, impar
c) imaginario, ninguno
d) real, par

30) a) $\frac{2\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{j\omega^2}+\pi\delta(\omega)$
b) $\frac{2\,\mathrm{si}\ \left(\frac{\omega}{2}\right)}{j\omega^2}$

31) a) $\frac{\sin(\omega)}{j\omega^2}-\frac{e^{-j\omega}}{j\omega}$
b) $\frac{\sin(\omega)}{\omega}$
c) $\frac{\sin(\omega)}{j\omega^2}-\frac{\cos(\omega)}{j\omega}$

32) a) $X(j\omega)=\begin{cases}\frac{j}{2\pi} & (-2\le\omega<0)\\ -\frac{j}{2\pi} & (0\le\omega<2)\\ 0 & con\ otro\ valor\end{cases}$
b) $A=\frac{1}{2\pi^3}$

33) $A=\frac{1}{3},\quad B=3$

34) a) $-\frac{4j\omega}{(1+\omega^2)^2}$

b) $j2\pi\omega e^{-|\omega|}$

35) a) No

b) Sí

c) Sí

36) $x(t) = \sqrt{12}[e^{-t} - e^{-2t}]u(t)$

37) $x(t) = 2te^{-|t|}u(t)$

38) a) $g(t) = \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{k\pi}{4}\right)$

b) $X(j\omega) = \begin{cases} 4 & |\omega| \leq 1 \\ 0 & 1 < |\omega| \leq 4 \end{cases}$

39) a) Falso

b) Verdadero

40) $$h(t) = \begin{cases} \frac{5}{4} & |t| < 1 \\ -\frac{|t|}{4} + \frac{3}{2} & 1 \leq |t| \leq 5 \\ -\frac{|t|}{8} + \frac{7}{8} & 5 < |t| < 7 \\ 0 & \textit{con otro valor} \end{cases}$$

41) $h(t) = e^{-4t}u(t)$

42) a) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a-j\omega_0+j\omega}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+j\omega_0+j\omega}\right)$

b) $\frac{3j}{9+(\omega+2)^2} - \frac{3j}{9+(\omega-2)^2}$

c) $\frac{2\sin(\omega)}{\omega} + \frac{2\omega\sin(\omega)}{\pi^2-\omega^2}$

d) $\frac{1}{1-ae^{j\omega T}}$

e) $\frac{\frac{1}{2j}}{(2-j4+j\ \ )^2} - \frac{\frac{1}{2j}}{(2+j4+j\omega)^2}$

f) $\begin{cases} e^{-j} & |\omega| < \pi \\ \frac{1}{2\pi}(3\pi+\omega)e^{-j\omega} & -3\pi < \omega < -\pi \\ \frac{1}{2\pi}(3\pi+\omega)e^{-j\omega} & \pi < \omega < 3\pi \\ 0 & \textit{en otro valor} \end{cases}$

g) $\frac{2j}{\omega}\left[\cos(2\omega) - \frac{\sin(\omega)}{\omega}\right]$

h) $\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\pi)[2 + (-1)^k]$

i) $\frac{1}{j\omega} + \frac{2e^{-j\omega}}{-\omega^2} - \frac{2e^{-j} \ -2}{j\omega^3}$

43) a) $x(t) = \begin{cases} e^{j2\pi t} & |t| < 3 \\ 0 & en\ otro\ valor \end{cases}$

b) $x(t) = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}\delta(t-4) + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}\delta(t+4)$

c) $x(t) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(t-3)}{t-3} + \frac{\cos(t-3)-1}{(t-3)^2}\right]$

d) $x(t) = \frac{2j}{\pi}\sin(t) + \frac{3}{\pi}\cos(2\pi t)$

e) $x(t) = \frac{\cos(3t)}{j\pi t} + \frac{\sin(t)-\sin(2t)}{j\pi t^2}$

44) a) $\frac{2-2e^{-1}\cos(\omega)-2\omega e^{-1}\sin(\omega)}{1+\omega^2}$

b) $j\left[\frac{-2\omega+2e^{-1}\sin(\omega)+2\omega e^{-1}\cos(\omega)}{1+\omega^2}\right]$

c) $\frac{1+e^{j\omega}-e^{-1}(1+e^{-j\omega})}{1+j\omega}$

d) $\frac{1-2e^{-1}e^{-j\omega}-j\omega e^{-1}e^{-j\omega}}{(1+j\omega)^2}$

45) a) $x_1(t)$ y $x_4(t)$

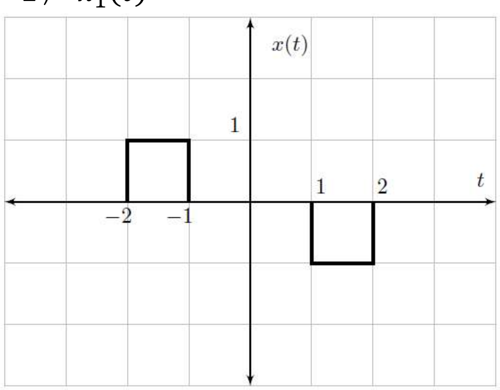
b) $x_5(t)$ y $x_6(t)$

c) $x_1(t)$ y $x_2(t)$

d) Todas excepto $x_5(t)$

e) $x_2(t)$, $x_3(t)$, $x_5(t)$ y $x_6(t)$

f) $x_1(t)$



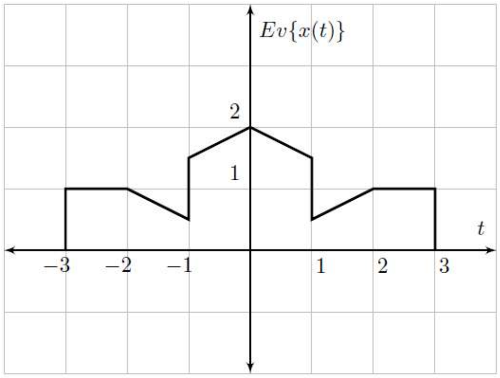
46) a) $-\omega$

b) 7

c) 4π

d) 7π

e) 26π

f) 

47) a) $y(t) = \frac{1}{4}e^{-4t}u(t) - \frac{1}{4}e^{-2t}u(t) + \frac{1}{2}te^{-2t}u(t)$

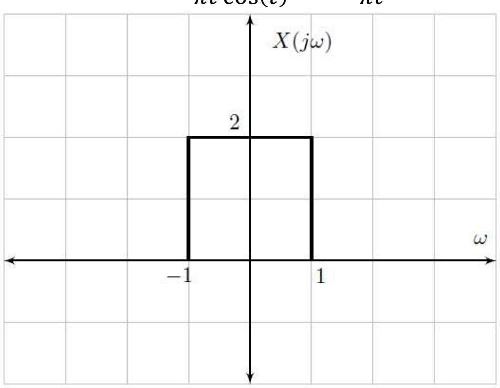
b) $y(t) = \frac{1}{4}e^{-2t}u(t) + \frac{1}{4}te^{-2t}u(t) - \frac{1}{4}e^{-4t}u(t) + \frac{1}{4}te^{-4t}u(t)$

c) $y(t) = \frac{1}{2}e^{-|t|}$

48) a) $X(j\omega) = \frac{2\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\omega}\left[1 - e^{-j\omega}\right]e^{-j\frac{3\omega}{2}}$

b) Usando $T = 2$, $\frac{\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{\pi k}\left[1 - e^{-j\pi}\ \right]e^{-j\frac{3\pi k}{2}} = \begin{cases} -\frac{2j}{k\pi} & k\ impar \\ 0 & k\ par \\ 0 & k = 0 \end{cases}$

49) a) $x(t) = \frac{\sin(2t)}{\pi t\cos(t)} = \frac{2\,\mathrm{si}\ \ (t\ )}{\pi t}$

b) 

50) a) $y_1(t) = y_2(t) = y_3(t) = \sin(t)$

b) $h_4(t) = \frac{1}{2}[h_1(t) + h_2(t)]$

51) a) $y_1(t) = 0$

b) $y_2(t) = \frac{1}{2}\sin(3t - 3)$

c) $y_3(t) = \frac{\sin(4t)}{\pi t}$

d) $y_4(t) = \left(\frac{\sin(2(t-1))}{\pi(t-1)}\right)^2$

52) a) $h(t) = e^{-2t}u(t) - e^{-4t}u(t)$

b) $y(t) = \frac{1}{4}e^{-2t}u(t) - \frac{1}{2}te^{-2t}u(t) + t^2e^{-2t}u(t) - \frac{1}{4}e^{-4t}u(t)$

c) $h(t) = 2\delta(t) - \sqrt{2}(1+2j)e^{-\frac{(1+j)t}{\sqrt{2}}}u(t) - \sqrt{2}(1-2j)e^{-\frac{(1-j)t}{\sqrt{2}}}u(t)$

53) a) $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 4x(t)$

b) $h(t) = 2e^{-2t}u(t) - e^{-3t}u(t)$

c) $y(t) = \frac{1}{2}e^{-2t}u(t) - \frac{1}{2}e^{-4t}u(t)$

54) a) $|H(j\omega)| = 1$, $\sphericalangle H(j\omega) = -2\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$, $h(t) = -\delta(t) + 2ae^{-at}u(t)$

b) $y(t) = \cos\left(\frac{t}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\sqrt{3}t - \frac{2\pi}{3}\right)$

55) a) $H(j\omega) = \frac{3(3+j\omega)}{(4+j\quad)(2+j\omega)}$

b) $h(t) = \frac{3}{2}[e^{-4t} + e^{-2t}]u(t)$

c) $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 8y(t) = 3\frac{dx(t)}{dt} + 9x(t)$