Instituto Tecnológico de Costa Rica **I Semestre 2020**
Área de Ingeniería Mecatrónica
MT-5001 Modelos de Sistemas para Mecatrónica
Profesor: Ing. Jaime Mora.

Elaborado por: Ing. José Miguel Barboza Retana

Práctica #6. Serie de Fourier.

- Resuelva los siguientes problemas que pueden involucrar cualquiera de las tres formas de la serie de Fourier:

1) Considere la señal $x(t) = \sin(\omega_0 t)$ cuya frecuencia fundamental es ω_0. Utilizando la definición de la serie de Fourier, determine por inspección los coeficientes de la serie.

2) Determine, utilizando el método del problema 1), los coeficientes de la serie de Fourier para la función $x(t) = 1 + \sin(\omega_0 t) + 2\cos(\omega_0 t) + \cos\left(2\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right)$.

3) Obtenga la expansión en serie de Fourier de la función periódica $f(t)$ de periodo 2π definida por $f(t) = t$ para $0 < t < 2\pi$.

4) Una función periódica $f(t)$ con periodo 2π está definida por $f(t) = t^2 + t$ para $-\pi < t < \pi$. Dibuje la gráfica de la función $f(t)$ y obtenga su representación en serie de Fourier.

5) Una función periódica $f(t)$ con periodo 2π está definida dentro del periodo $0 < t < 2\pi$ por:

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\pi & \frac{1}{2}\pi \leq t \leq \pi \\ \pi - \frac{1}{2}t & \pi \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

Dibuje la gráfica de la función $f(t)$ para $-2\pi \leq t \leq 3\pi$ y encuentre los coeficientes de la expansión en serie de Fourier.

6) Una función periódica $f(t)$ con periodo 2π está definida dentro del periodo $-\pi < t < \pi$ por:

$$f(t) = \begin{cases} -1 & -\pi < t < 0 \\ 1 & 0 < t < \pi \end{cases}$$

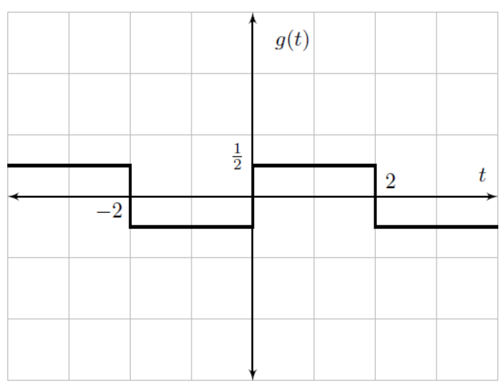
Encuentre su expansión en serie de Fourier.

7) Una función periódica $f(t)$ con periodo 2π está definida por $f(t) = t^2$ para $-\pi < t < \pi$. Obtener la expansión en serie de Fourier de dicha función.

8) Obtener la expansión en serie de Fourier de la onda seno rectificada, descrita como $f(t) = |\sin(t)|$.

9) Suponga que $g(t)$ y $h(t)$ son funciones periódicas de periodo 2π y están definidas en el intervalo $-\pi < t < \pi$ por $g(t) = t^2$ y $g(t) = t$. Determine la expansión en serie ara ambas funciones y verifique por medio de la propiedad de linealidad el resultado del ejercicio 4).

10) Considere la señal $g(t)$ con periodo fundamental de 4 de la siguiente figura.



Si se conoce que una onda periódica cuadrada simétrica $x(t)$ tiene coeficientes dados por:

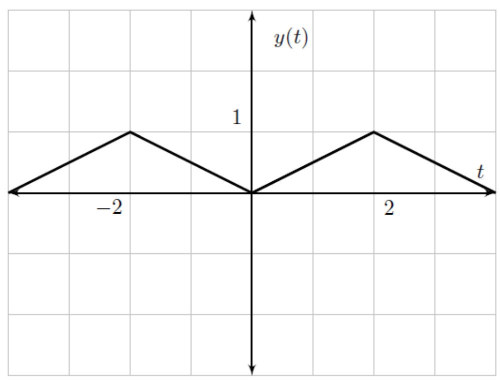
$$c_k = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & k = 0 \\ \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{\pi k} & k \neq 0 \end{cases}$$

Y que $g(t)$ puede ser expresada en términos de $x(t)$ de la siguiente forma:

$$g(t) = x(t-1) - \frac{1}{2}$$

Entonces determine los coeficientes d_k de la serie de Fourier para $g(t)$.

11) Considere la señal de onda triangular $y(t)$ con periodo $T_p = 4$ y frecuencia fundamental $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$ mostrada en la siguiente figura:



Si la derivada de esta señal es la función $g(t)$ del problema anterior, determine los coeficientes e_k para la serie de Fourier de $y(t)$ a partir de los d_k que usted ya calculó.

12) En cada uno de los siguientes incisos está especificada una función periódica de periodo 2π sobre un periodo. Para cada caso dibuje la gráfica de la función en el intervalo $-4\pi \leq t \leq 4\pi$ y obtenga la representación en serie de Fourier de la función.

a) $f(t) = \begin{cases} -\pi & (-\pi < t < 0) \\ t & (0 < t < \pi) \end{cases}$

b) $f(t) = \begin{cases} t+\pi & (-\pi < t < 0) \\ 0 & (0 < t < \pi) \end{cases}$

c) $f(t) = 1 - \frac{t}{\pi} \quad (0 < t < 2\pi)$

d) $f(t) = \begin{cases} 0 & -\pi < t < -\frac{\pi}{2} \\ 2\cos(t) & -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < t < \pi \end{cases}$

e) $f(t) = \cos\left(\frac{1}{2}t\right) \quad (-\pi < t < \pi)$

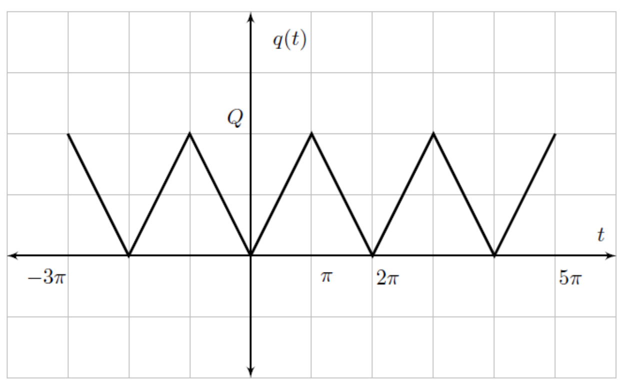
f) $f(t) = |t| \quad (-\pi < t < \pi)$

g) $f(t) = \begin{cases} 0 & (-\pi < t < 0) \\ 2t - \pi & (0 < t < \pi) \end{cases}$

13) Obtenga la expansión en serie de Fourier de la función periódica $f(t)$ de periodo 2π definida sobre el periodo $-\pi < t < \pi$ por $f(t) = (\pi - t)^2$ y utilice ese resultado para probar que:

$$\frac{1}{12}\pi^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$$

14) En la siguiente figura se muestra la carga $q(t)$ sobre las placas de un capacitor en el tiempo t. Exprese $q(t)$ como una expansión en serie de Fourier.



15) La respuesta recortada de un rectificador de media onda es la función periódica $f(t)$ de periodo 2π definida sobre el periodo $0 < t < 2\pi$ por la expresión:

$$f(t) = \begin{cases} 5\sin(t) & (0 \leq t \leq \pi) \\ 0 & (\pi \leq t \leq 2\pi) \end{cases}$$

Exprese $f(t)$ por medio de una expansión en serie de Fourier.

16) Demuestre que la serie de Fourier que representa la señal $f(t)$ donde:

$$f(t) = \begin{cases} \pi^2 & (0 \leq t \leq \pi) \\ (t-\pi)^2 & (\pi \leq t \leq 2\pi) \end{cases}, \qquad f(t+2\pi) = f(t)$$

Corresponde a la siguiente expresión:

$$f(t) = \frac{2}{3}\pi^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2}{k^2}\cos(kt) + \frac{(-1)^k}{k^2}\sin(kt)\right] - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin[(2k-1)t]}{(2k-1)^3}$$

Utilice este resultado para comprobar que:

a) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2}\right) = \frac{1}{6}\pi^2$

b) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}\right) = \frac{1}{12}\pi^2$

17) Una función periódica $f(t)$ con periodo 2π está definida dentro del dominio $0 \leq t \leq \pi$ por:

$$f(t) = \begin{cases} t & \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right) \\ \pi - t & \left(\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi\right) \end{cases}$$

Dibuje la gráfica de $f(t)$ para $-2\pi \leq t \leq 4\pi$ en ambos casos donde:

a) $f(t)$ es una función par

b) $f(t)$ es una función impar

Encuentre la expansión en serie de Fourier que representa la función par para todo valor de t y úsela para probar que:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{1}{8}\pi^2$$

18) Una función periódica $f(t)$ de periodo 2π está definida dentro del intervalo $0 \leq t \leq 2\pi$ por:

$$f(t) = \begin{cases} 2 - \frac{t}{\pi} & (0 \leq t \leq \pi) \\ \frac{t}{\pi} & (\pi \leq t \leq 2\pi) \end{cases}$$

Dibuje la gráfica de $f(t)$ para $-4\pi \leq t \leq 4\pi$ y obtenga su expansión en serie de Fourier. Posteriormente, realizando un desplazamiento de $\frac{\pi}{2}$ en la respuesta, compruebe que la función periódica $f\left(t-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{3}{2}$ está representada por una serie de senos de armónicas impares.

19) Una función periódica $f(t)$ de periodo 4, (esto es, $f(t+4)=f(t)$) está definida para el rango $-2<t<2$ por la siguiente expresión:

$$f(t)=\begin{cases} 0 & (-2 \leq t \leq 0) \\ 1 & (0 \leq t \leq 2) \end{cases}$$

Dibuje la gráfica de $f(t)$ para $-6<t<6$ y obtenga la expansión en serie de Fourier de la función.

20) Una función periódica $f(t)$ de periodo 2, está definida por:

$$f(t)=\begin{cases} 3t & (0<t<1) \\ 3 & (1<t<2) \end{cases}$$

$$f(t+2)=f(t)$$

Dibuje la gráfica de $f(t)$ para $-4<t<4$ y obtenga la expansión en serie de Fourier de la función.

21) Encuentre la expansión en serie de Fourier de la función periódica:

$$f(t)=t \quad (-l<t<l)$$
$$f(t+2l)=f(t)$$

22) Una función periódica $f(t)$ de periodo $2l$ está definida sobre un periodo por:

$$f(t)=\begin{cases} -\frac{K}{l}(l+t) & (-l<t<0) \\ \frac{K}{l}(l-t) & (0<t<l) \end{cases}$$

Determine la expansión en serie de Fourier e ilustre gráficamente para el intervalo $-3l < t < 3l$.

23) Una función periódica de periodo 10 está definida en el periodo $-5 < t < 5$ por:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (-5 < t < 0) \\ 3 & (0 < t < 5) \end{cases}$$

Determine la expansión en serie de Fourier e ilustre gráficamente la función para $-12 < t < 12$.

24) Una señal periódica continua $x(t)$ es de valor real y tiene un periodo fundamental de $T = 8$. Los coeficientes de la serie de Fourier diferentes de cero para $x(t)$ son:

$$a_1 = a_{-1} = 2$$
$$a_3 = a_{-3}^* = 4j$$

Exprese $x(t)$ en la forma:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k \cos(\omega_0 t + \theta_k)$$

25) Una señal periódica continua $x(t)$ es de valor real y tiene un periodo fundamental de $T = 8$. Los coeficientes de la serie de Fourier diferentes de cero para $x(t)$ se especifican como:

$$a_1 = a^*{}_{-1} = j$$
$$a_5 = a_{-5} = 2$$

Exprese $x(t)$ en la forma:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k \cos(\omega_0 t + \theta_k)$$

26) Utilice la ecuación de síntesis de la serie de Fourier para encontrar los coeficientes c_k para la señal periódica continua:

$$x(t) = \begin{cases} 1.5 & 0 \le t < 1 \\ -1.5 & 1 \le t < 2 \end{cases}$$

Con frecuencia fundamental $\omega_0 = \pi$.

27) Sea $x_1(t)$ una señal periódica continua con una frecuencia fundamental ω_1 y coeficientes de Fourier c_k. Dado que:

$$x_2(t) = x_1(1-t) + x_1(t-1)$$

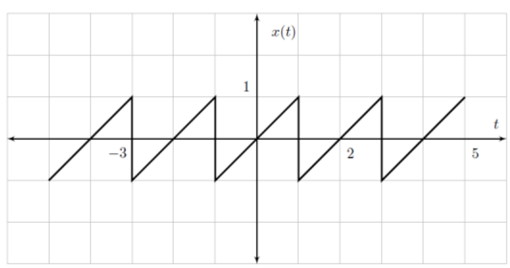
¿Cómo se relacionan la frecuencia fundamental ω_2 de $x_2(t)$ con ω_1?
Encuentre también una relación entre los coeficientes de la serie de Fourier d_k de $x_2(t)$ y los coeficientes c_k. Utilice las propiedades de la serie de Fourier.

28) Suponga que se nos proporciona la siguiente información sobre una señal $x(t)$:

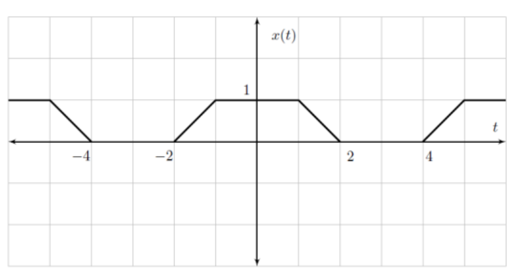
a) $x(t)$ es real y par
b) $x(t)$ es periódica con periodo $T = 2$ y tiene coeficientes de Fourier c_k
c) $c_k = 0$ para $|k| > 1$
d) $\frac{1}{2}\int_0^2 |x(t)|^2 dt = 1$

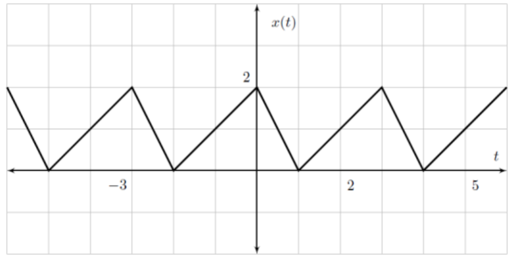
Encuentre dos señales diferentes que satisfagan estas condiciones.

29) Determine los coeficientes de la serie de Fourier que represente las siguientes señales:

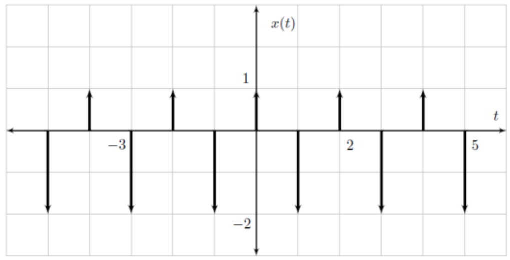


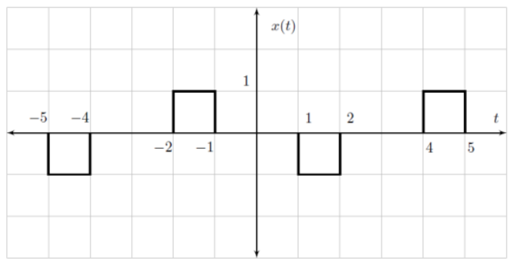
a) b)



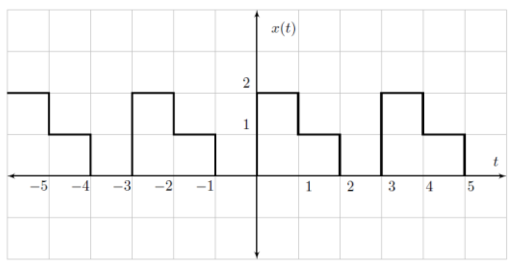


c) d)





e) f)



g) Calcule también los coeficientes de la señal $x(t) = e^{-t}$ para $-1 \leq t \leq 1$.

h) Además, para una señal periódica con periodo 4 definida como:

$$x(t) = \begin{cases} \sin(\pi t) & (0 \leq t \leq 2) \\ 0 & (2 \leq t \leq 4) \end{cases}$$

30) Considere las siguientes tres señales continuas, cada una de ellas con periodo fundamental $T_p = \frac{1}{2}$:

$$y(x) = \cos(4\pi t)$$
$$y(t) = \sin(4\pi t)$$
$$z(t) = x(t)y(t)$$

a) Calcule los coeficientes de la serie de Fourier para $x(t)$
b) Calcule los coeficientes de la serie de Fourier para $y(t)$
c) Utilice los resultados de a) y b) para determinar los coeficientes de $z(t)$.
d) Encuentre nuevamente los coeficientes de $z(t)$ pero esta vez utilizando la expansión directa de $z(t)$ en forma trigonométrica y compare con el resultado de c).

31) Suponga que se conocen los siguientes datos sobre la señal $x(t)$:
a) $x(t)$ es una señal real.
b) $x(t)$ es periódica con periodo $T = 4$ y tiene coeficientes de Fourier c_k.
c) $c_k = 0$ para $|k| > 1$.
d) La señal con coeficientes de Fourier $d_k = e^{-j\frac{\pi k}{2}} a_{-k}$ es impar.
e) $\frac{1}{4}\int_0^4 |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2}$

Encuentre una expresión para $x(t)$.

32) Sea $x(t)$ una señal periódica con periodo fundamental T_P y coeficientes de la serie de Fourier c_k. Obtenga para cada una de las siguientes funciones, los coeficientes d_k de la serie de Fourier en términos de c_k y T_p:
a) $x(t - t_0) + x(t + t_0)$
b) $\mathcal{E}v\{x(t)\}$, donde $\mathcal{E}v\{\cdot\}$ es el operador parte par.
c) $Re\{x(t)\}$
d) $\frac{d^2x(t)}{dt^2}$
e) $x(3t - 1)$, calcule primero el nuevo periodo de la función.

33) Suponga que se conoce la siguiente información sobre una señal $x(t)$:
a) $x(t)$ es una señal real.
b) $x(t)$ es periódica con periodo $T = 6$ y tiene coeficientes de Fourier c_k.
c) $c_k = 0$ para $k = 0$ y $k > 2$.
d) $x(t) = -x(t - 3)$

e) $\frac{1}{6}\int_{-3}^{3}|x(t)|^2 dt = \frac{1}{2}$

f) c_1 es un número real positivo.

Demuestre que $x(t) = A\cos(Bt + C)$ y determine el valor de A, B, y C.

34) Se especifican los coeficientes de la serie de Fourier de una señal continua que es periódica con periodo 4. Determine la señal $x(t)$ en cada caso.

a) $c_k = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ (j)^k \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}k\right)}{\pi k} & otro\ valor \end{cases}$

b) $c_k = (-1)^k \frac{\sin\left(\frac{\pi}{8}k\right)}{2\pi k}$

c) $c_k = \begin{cases} jk & |k| < 3 \\ 0 & otro\ valor \end{cases}$

d) $c_k = \begin{cases} 1 & k\ par \\ 2 & k\ impar \end{cases}$

35) Sea la siguiente función:

$$x(t) = \begin{cases} t & (0 \le t \le 1) \\ 2 - t & (1 \le t \le 2) \end{cases}$$

Una señal con periodo fundamental $T = 2$ y coeficientes de Fourier c_k, determine:

a) El valor de c_0

b) La representación en serie de Fourier para $\frac{dx(t)}{dt}$

c) Use el resultado de la parte b) y la propiedad de diferenciación para determinar los coeficientes de la serie de Fourier de $x(t)$

36) Sea $x(t)$ una señal periódica cuyos coeficientes de la serie de Fourier son:

$$c_k = \begin{cases} 2 & k = 0 \\ j\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} & otro\ valor \end{cases}$$

Utilice las propiedades de la serie de Fourier para responder lo siguiente:

a) ¿$x(t)$ es real?

b) ¿$x(t)$ es par?

c) ¿$\frac{dx(t)}{dt}$ es par?