Instituto Tecnológico de Costa Rica **I Semestre 2020**
Área de Ingeniería Mecatrónica
MT-5001 Modelos de Sistemas para Mecatrónica
Profesor: Ing. Jaime Mora.

Elaborado por: Ing. José Miguel Barboza Retana

Práctica #5. Series complejas.

- Resuelva los siguientes problemas utilizando series complejas y los conceptos sobre singularidades:

1) Encuentre la representación de la serie de potencias de la función $f(z) = \frac{1}{z-j}$ en las regiones:
   a) $|z| < 1$
   b) $|z| > 1$
   c) $|z - 1 - j| < \sqrt{2}$

2) Utilizando división polinomial desarrolle una serie de potencias para la función $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ en el disco $|z| < 1$ y utilizando ese desarrollo obtenga la serie para las siguientes funciones en la misma región de convergencia:
   a) $\frac{z}{z^2+1}$
   b) $\frac{z+1}{z^2+1}$

3) Encuentre los primeros 4 términos distintos de cero de las expansiones en serie de Taylor de las siguientes funciones alrededor de los puntos indicados y determine, en cada caso, el radio de convergencia:
   a) $\frac{1}{1+z}$ para $z_0 = 1$
   b) $\frac{1}{z(z-j4)}$ para $z_0 = j2$
   c) $\frac{1}{z^2}$ para $z_0 = 1 + j$

4) Sin encontrar explícitamente cada expansión en serie de Taylor, encuentre el radio de convergencia de la función $f(z) = \frac{1}{z^4-1}$ alrededor de los puntos:
   a) $z = 0$
   b) $z = 1 + j$
   c) $z = 2 + j2$.

   Por qué no existe la expansión de la serie de Taylor de la función alrededor del punto $z = j$?

5) Determine la expansión en serie de Laurent de la función $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}$ alrededor de:
   a) $z = 0$
   b) $z = a$, cualquier número complejo distinto de cero.

6) Determine la expansión en serie de Laurent de $f(z) = \frac{1}{z(z-1)^2}$ alrededor de:
   a) $z = 0$
   b) $z = 1$

   Especifique que la región de validez para cada una de ellas.

7) Determine la expansión en serie de Laurent de $f(z) = z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right)$ alrededor de los puntos:
   a) $z = 0$
   b) $z = \infty$
   c) $z = a$, cualquier número complejo finito y distinto de cero.
      (Para este último caso, no calcule los coeficientes de forma explícita)

8) Desarrolle $f(z) = \frac{z}{(z-1)(2-z)}$ en una expansión en serie de Laurent válida para:
   a) $|z| < 1$
   b) $1 < |z| < 2$
   c) $|z| > 2$
   d) $|z - 1| > 1$
   e) $0 < |z - 2| < 1$

9) Encuentre la serie de Laurent para $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+2)}$ si esta se centra alrededor del punto $z_0 = 0$, para la región de convergencia $1 < |z| < 2$

10) Para la función $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+2)}$ indique cuántas regiones de convergencia son posibles para la serie de Laurent centrada en $z_0 = 1 + j$. Encuentre la serie para cada una de esas regiones.

11) La función de variable compleja $f(z)$ tiene, entre otros, los siguientes desarrollos en serie de Laurent:

1) $f(z) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k}(z+3)^k$

2) $f(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{(-j)^{k+1}}{k(z-1)^k}$

3) $f(z) = \sum_{k=-4}^{\infty} 2^k(z-1-j)^k$

4) $f(z) = \sum_{k=2}^{\infty} 5^{-k}(z+j)^k$

donde para todas las series se han utilizado regiones de convergencia que contienen como punto límite al punto dónde ellas se centran.

a) Indique dónde al menos deben encontrarse polos, ceros (ambos con su respectivo orden) puntos regulares y singularidades esenciales.
b) Indique el valor de los residuos de $f(z)$ en los cuatro puntos donde se centran las series anteriores.

12) Encuentre las singularidades y los ceros de las siguientes funciones de variable compleja:

a) $\frac{1}{z^4-z^2(1+j)+j}$

b) $\frac{z-1}{z^4-z^2(1+j)+j}$

c) $\frac{\sin(z-1)}{z^4-z^2(1+j)+j}$

d) $\frac{z-1}{[z^4-z^2(1+j)+j]^3}$

13) Determine la localización y clasificación de las singularidades y los ceros de las funciones. Especifique también cualquier cero que pueda existir.

a) $\frac{\cos z}{z^2}$

b) $\frac{1}{(z+j)^2(z-j)}$

c) $\frac{z}{z^4-1}$

d) $\frac{\sin z}{z^2+\pi}$

e) $e^{\frac{z}{1-z}}$

f) $\frac{z-1}{z^2+1}$

g) $\frac{z+j}{(z+2)^2(z-3)}$

h) $\frac{1}{z^2(z^2-4z+5)}$

14) Desarrolle cada una de las siguientes funciones en serie de Laurent alrededor de $z = 0$. Indique el tipo de singularidad en caso de existir alguna.

a) $\frac{1-\cos z}{z}$

b) $\frac{e^{z^2}}{z^3}$

15) Determine los residuos de la función $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$ en cada uno de sus polos en el plano finito z.

16) Determine los residuos de las siguientes funciones en los puntos indicados:

a) $\frac{e^z}{(1+z^2)^2}$ en $z = j$

b) $\left(\frac{\sin z}{z^2}\right)^3$ en $z = 0$

c) $\frac{z^4}{(z+1)^3}$ en $z = -1$

17) Determine los residuos de las siguientes funciones en cada uno de sus polos finitos, a menos que se indique lo contrario:

a) $\frac{2z+1}{z^2-z-2}$

b) $\frac{1}{z^2(1-z)}$

c) $\frac{3z^2+2}{(z-1)(z^2+9)}$

d) $\frac{z^3-z^2+z-1}{z^3+4z}$

e) $\frac{z^6+4z^4+z^3+1}{(z-1)^5}$

f) $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$

g) $\frac{\cos z}{z}$ solo en $z = 0$

h) $\frac{z}{\sin z}$ solo en $z = \pi$

i) $\frac{1}{(z^2+1)^2}$ solo en $z = j$