Elaborado por: Ing. José Miguel Barboza Retana

Práctica #5. Integración compleja.

- Resuelva los siguientes problemas utilizando integración:

1) Demuestre que $\int_C (z+1)dz = 0$, donde C es la frontera del cuadrado con vértices en $z = 0, z = 1, z = 1 + j$ y $z = j$.

2) Evalúe la integral de contorno $\oint_C \frac{2z}{(z-1)(z+2)(z+j)} dz$, donde C es un contorno que incluye los tres puntos $z = 1$, $z = -2$ y $z = -j$

3) Evalúe la integral de contorno $\oint_C \frac{z^4}{(z-1)^3}$, donde el contorno C encierra al punto $z = 1$.

4) Evalúe $\int_C (z^2 + 3z)dz$ a lo largo de los siguientes contornos C en el plano complejo z:
   a) La recta que une $z = 2$ con $z = j2$
   b) La recta que une $z = 2$ con $z = 2 + j2$ y luego con $z = j2$
   c) El segmento del círculo $|z| = 2$ desde $z = 2$ hasta $z = j2$ en el sentido contrario a las manecillas del reloj

5) Evalúe $\oint_C (5z^4 - z^3 + 2)\, dz$ alrededor de los siguientes contornos cerrados C en el plano complejo z.
   a) El círculo $|z| = 1$
   b) El cuadrado con vértices en 0, 1, $1 + j$ y j
   c) La curva que consiste en las parábolas $y = x^2$ de 0 a $1 + j$ y $y^2 = x$ de $1 + j$ a 0

6) Evalúe la integral de contorno $\oint_C \frac{1}{z-4} dz$ donde C es cualquier curva cerrada simple y el punto $z = 4$ se encuentra:
   a) Dentro de C
   b) Fuera de C

7) Utilice el teorema de Cauchy para evaluar la integral de contorno $\oint_C \frac{2z}{(2z-1)(z+2)}dz$ donde C es:
   a) El círculo $|z| = 1$
   b) El círculo $|z| = 3$

8) Utilice el teorema de Cauchy para evaluar la integral de contorno $\oint_C \frac{5z}{(z+1)(z-2)(z+j4)}dz$ donde C es:
   a) El círculo $|z| = 3$
   b) El círculo $|z| = 5$

9) Utilice el teorema de Cauchy para evaluar las siguientes integrales de contorno:
   a) $\oint_C \frac{z^3+z}{(2z+1)^3}dz$ donde C es el círculo unitario
   b) $\oint_C \frac{4z}{(z-1)(z+2)^2}dz$ donde C es el círculo $|z| = 3$

10) Evalúe la integral de contorno $\oint_C \frac{z^3-z^2+z-1}{z^3+4z}dz$ donde C es:
   a) $|z| = 1$
   b) $|z| = 3$

11) Evalúe la integral de contorno $\oint_C \frac{1}{z^3(z^2+2z+2)}dz$ donde C es el círculo $|z| = 3$

12) Evalúe la integral $\oint_C \frac{z}{z^2+1}dz$ donde C es:
   a) El círculo $|z| = \frac{1}{2}$
   b) El círculo $|z| = 2$

13) Evalúe la integral $\oint_C \frac{z^2+3jz-2}{z^3+9z}dz$ donde C es:
   c) El círculo $|z| = 1$
   d) El círculo $|z| = 4$

14) Calcule los residuos de todos los polos de la función $f(z) = \frac{(z^2+2)(z^2+4)}{(z^2+1)(z^2+6)}$ y posteriormente calcule la integral $\oint_C f(z)dz$ donde C es:

a) El círculo $|z| = 2$
b) El círculo $|z - j| = 1$
c) El círculo $|z| = 4$

15) Evalúe la integral $\oint_C \frac{1}{z^2(1+z^2)^2}\, dz$ donde C es:

a) El círculo $|z| = \frac{1}{2}$
b) El círculo $|z| = 2$

16) Utilice el teorema del residuo para evaluar las siguientes integrales de contorno:

a) $\oint_C \frac{3z^2+2}{(z-1)(z^2+4)}\, dz$ donde C es: $\begin{cases} (i)\ |z-2| = 2 \\ (ii)\ \ |z| = 4 \end{cases}$

b) $\oint_C \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}\, dz$ donde C es: $\begin{cases} (i)\ |z| = 3 \\ (ii)\ \ |z+j| = 2 \end{cases}$

c) $\oint_C \frac{1}{(z+1)^3(z-1)(z-2)}\, dz$ donde C es: $\begin{cases} (i)\ |z| = \frac{1}{2} \\ (ii)\ |z+1| = 1 \\ (iii) \text{ rectángulo con vértices en } \pm j, 3 \pm j \end{cases}$

17) Utilizando una integral de contorno apropiada, evalúe las siguientes integrales reales:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+x+1}\, dx$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}\, dx$

c) $\int_{0}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)^2}\, dx$

d) $\int_{0}^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta}\, d\theta$

e) $\int_{0}^{2\pi} \frac{4}{5+4\,\mathrm{si}}\, d\theta$

f) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)}\, dx$

g) $\int_{0}^{2\pi} \frac{1}{3-2\cos\theta+\sin\theta}\, d\theta$

h) $\int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^4+1}\, dx$

i) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+4x+5)^2}\, dx$

j) $\int_{0}^{2\pi} \frac{\cos\theta}{3+2\,\mathrm{co}}\, d\theta$