Wendy Gómez Ramírez
2017109745

Guía de estudio semana 16

Transformada Z

1. ¿Qué es la transformada Z?

Es la contraparte de tiempo discreto de la transformada de Laplace. Permite trabajar con sistemas discretos en el tiempo.

2. ¿Qué es una señal en tiempo continuo y una variable discretos?

Una señal de tiempo continuo es una señal esencial que es continua en el tiempo. Una señal esencial es toda aquella señal de importancia vital para describir el comportamiento de un sistema; sin esto, no se puede entender nada.

Una variable discreta es una variable que posee valores establecidos a partir del tiempo. Una señal discreta siempre se puede identificar con un número finito de instantes contables en el tiempo, aunque algunos pueden tener un número infinito.

3. Defina: Señal esencial, sistema de tiempo continuo, sistema en tiempo discreto, sistema en tiempo híbrido.

Señales esenciales: son todas aquellas de importancia vital para describir el comportamiento de un sistema. Sin esto, no se puede entender nada.

Señal de tiempo continuo: Sistema donde las señales esenciales son continuas en el tiempo.

Sistema en tiempo discreto: Sistema donde las señales esenciales son discretas en el tiempo.

Sistema en tiempo híbrido: Sistema donde unas señales son en tiempo discreto y otras en tiempo continuo.

4. Represente las 3 posibles formas de representación de una función de variable discreta.

- Funcional

$$x(n) = \begin{cases} 1 & para\ n = 1 \\ 5 - n & para\ 2 \leq n \leq 4 \\ 0 & el\ resto \end{cases}$$

Esta es la representación más usual en el análisis matemático de funciones discretas.

- Tabular

n	$\ldots$	-1	0	1	2	3	4	5	$\ldots$
$x(n)$	$\ldots$	0	0	1	3	2	1	0	$\ldots$

- Como secuencia

Secuencia de duración infinita con el origen en n = 0 (indicado con "↑"):

$$x(n) = \{\ldots, 0, \underset{\uparrow}{0}, 1, 3, 2, 1, 0, \ldots\}$$

Si la secuencia es 0 para n < 0 se puede representar como:

$$x(n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 1, 3, 2, 1, 0, \ldots\}$$

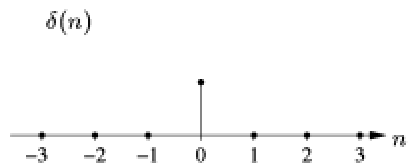
Si es finita:

$$x(n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 1, 3, 2, 1\} = \{0, 1, 3, 2, 1\}$$

5. Hay algunas funciones muy importantes en tiempo discreto, defínalas y haga una representación gráfica de cada una de ellas:

   a. Impulso Unitario

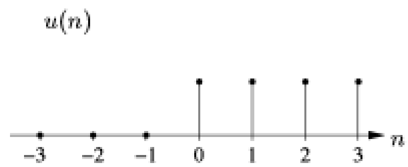
$$\delta(n) = \begin{cases} 1\ para\ n = 0 \\ 0\ para\ n \neq 0 \end{cases}$$



b. Escalón Unitario

$$u(n) = \begin{cases} 0 \; para \; n < 0 \\ 1 \; para \; n \geq 0 \end{cases}$$

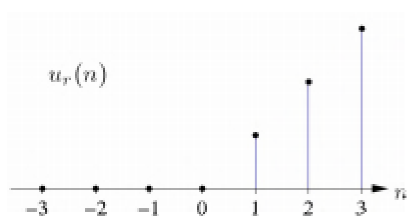
$$u(n) = \sum_{i=-\infty}^{n} \delta(i)$$



c. Rampa Unitaria

$$u_r(n) = \sum_{i=-\infty}^{n} u(i-1)$$

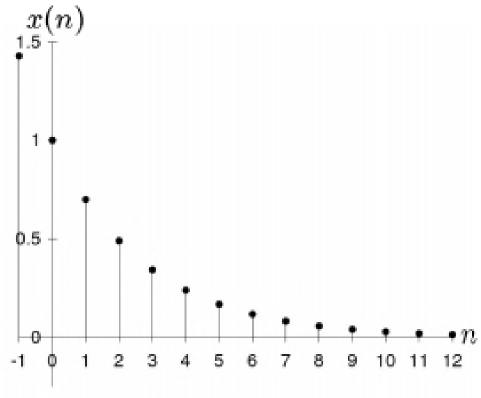
$$u_r(n) = \begin{cases} 0 \; para \; n < 0 \\ n \; para \; n \geq 0 \end{cases}$$



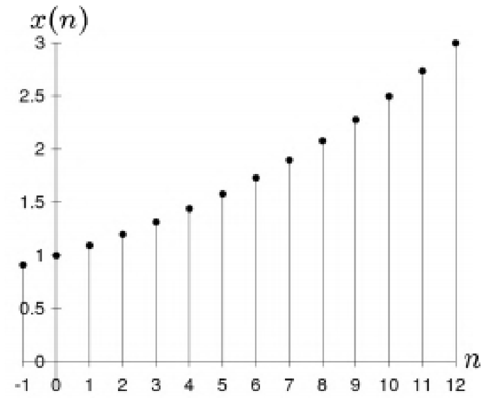
d. Señal Exponencial

$$x(n) = a^n$$

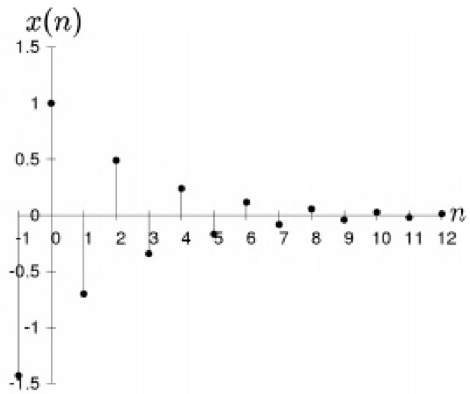
Su comportamiento depende de la constante a. Para los valores reales y complejos de a, el comportamiento es estable si |a|<1 o inestable si |a|>1.



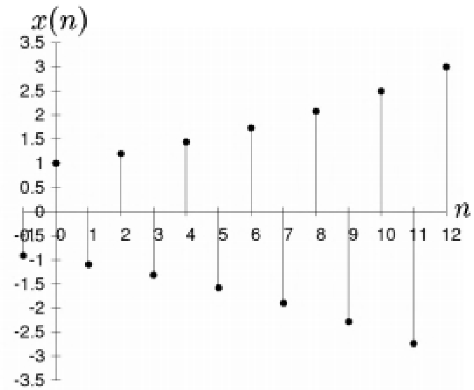
(a)



(b)



(c)

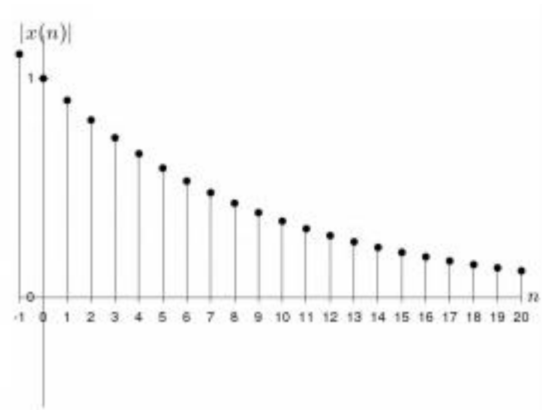


(d)

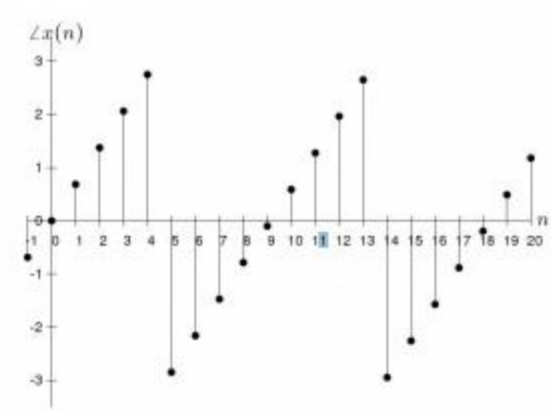
Donde (a) $0 < a < 1$ (b) $a > 1$ (c) $-1 < a < 0$ (d) $a < -1$.

Si a es complejo entonces puede expresarse como

$$a = re^{j\psi} \Rightarrow x \ln 1 = r^n e^{j\Psi n}$$



(a)



(b)

Magnitud y fase de la función exponencial compleja con $a = re^{j\psi}$, $r < 1$ y $0 < \psi < \pi$.
(a) Magnitud. (b) Fase

i. Encuentre la componente real y la componente imaginaria del mapeo $f(z) = e^{z}$.

$$z = x + jy$$

$$f(z) = e^{x+jy} = e^{x}e^{jy}$$

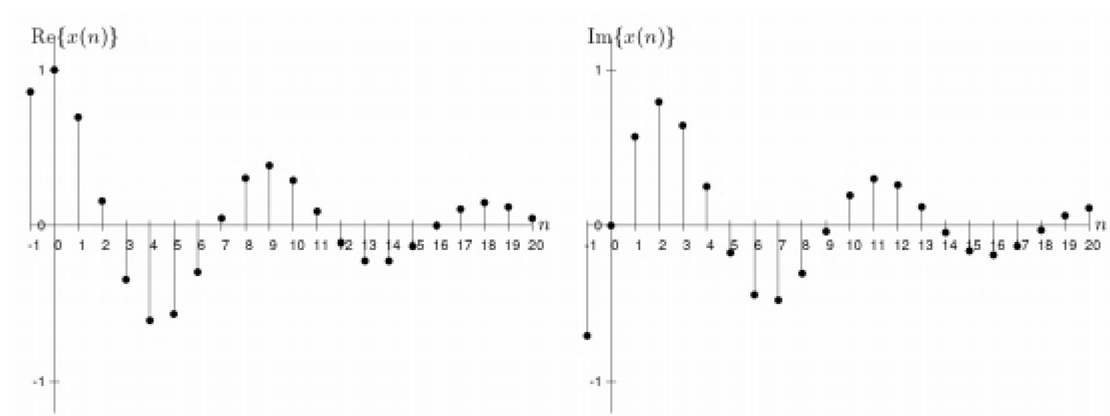
Donde $e^{x} = r$ y $y = \psi$

$$a = re^{j\psi}$$

Utilizando la identidad de Euler:

$$x(n) = r^{n}\cos(\psi n) + jr^{n}\,\mathrm{sen}(\psi n)$$

Donde la parte real se muestra en la figura (a) y la parte imaginaria en la figura (b)



(a) (b)

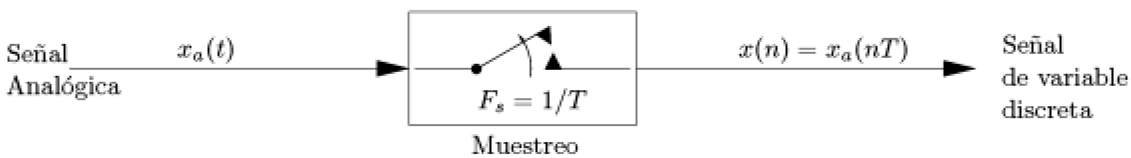
6. ¿Qué es el proceso de muestreo? ¿Qué es el muestreo uniforme, plantee un ejemplo grafico del muestreo uniforme de una señal cualquiera continua en el tiempo?

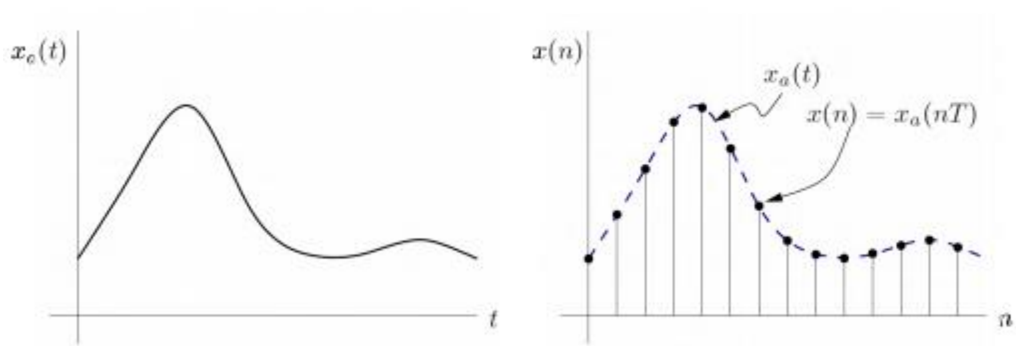
El muestreo es la conversión de una señal de variable continua a otra de variable discreta que es el resultado de tomar “muestras” de la señal de variable continua en ciertos instantes. Si $x_a(t)$ es la entrada al bloque de muestreo, entonces la salida puede ser tomada en instantes equidistantes $x_a(nT)$, donde a T se le denomina el intervalo de muestreo.

En el muestreo periódico o uniforme la relación entre la señal analógica $x_a(t)$ y la señal de variable discreta x(n) está dada por

$$x(n) = x_a(nT) \quad n \in \mathbb{Z}, T \in \mathbb{R}$$

donde la secuencia x(n) contiene entonces muestras de la señal analógica xa(t) separadas por un intervalo T.





Las variables t y n de las señales de variable continua y discreta respectivamente están relacionadas a través del intervalo de muestreo T

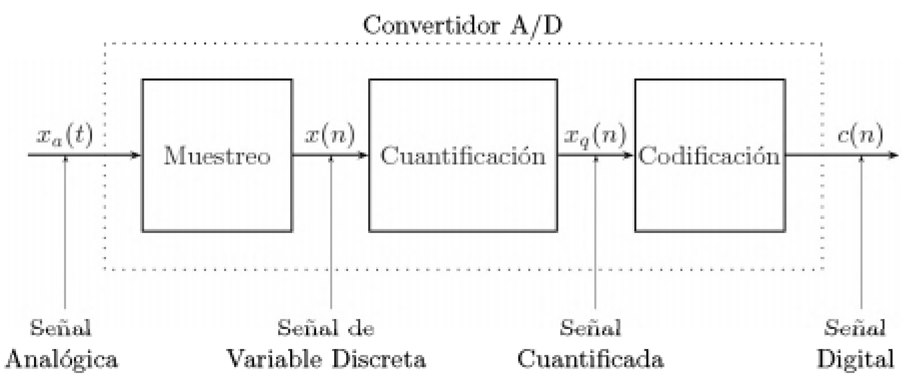
$$t = nT = n \,/\, F_s$$

donde a F_s se le denomina tasa de muestreo.

7. ¿Qué es la conversión Analógica-Digital? ¿Qué es la etapa de muestreo, etapa de cuantificación y etapa de codificación?

Conceptualmente en la conversión de una señal analógica a una representación digital inter vienen tres pasos:

1) Muestreo es la conversión de una señal de variable continua a otra de variable discreta que es el resultado de tomar “muestras” de la señal de variable continua en ciertos instantes. Si xa(t) es la entrada al bloque de muestreo, entonces la salida puede ser tomada en instantes equidistantes xa(nT), donde a T se le denomina el intervalo de muestreo.
2) Cuantificación es la conversión de la señal de variable discreta y valores continuos a otra señal de variable discreta, pero con valores discretos. El valor de cada muestra es aproximado entonces con un valor de un conjunto finito de posibles valores. A la diferencia entre el valor continuo y su aproximación se le denomina error de cuantificación.
3) Codificación consiste en la asignación de una representación usualmente binaria para los valores cuantificados.



8. Revisar series de potencia y su convergencia en variable compleja.

En variable compleja, una serie de Potencias centrada en z=0 se define como:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

La convergencia y divergencia se trata de la forma:

$$S_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(z)$$

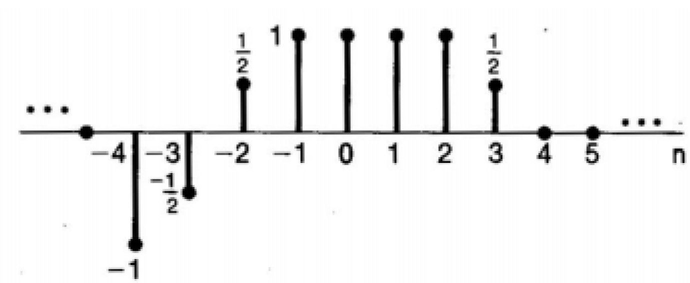
Si se cumple que $\lim_{n\to\infty} S_n(z) = S(z)$ la serie converge.

Si no se cumple que $\lim_{n\to\infty} U_n(z) = 0$ la serie diverge. Pero si se cumple, no se puede asegurar que converge.

También se puede utilizar la razón de D'Alambert para averiguar la convergencia de una serie.

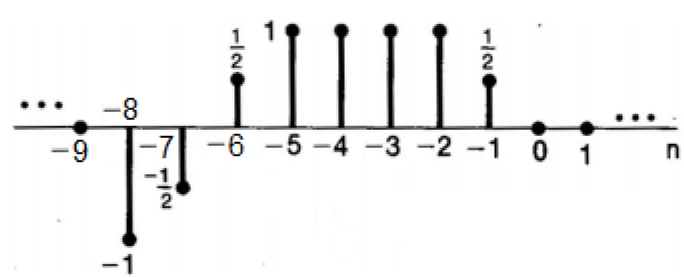
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n : R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_n + 1}\right|$$

9. Una señal discreta se muestra en la siguiente figura:

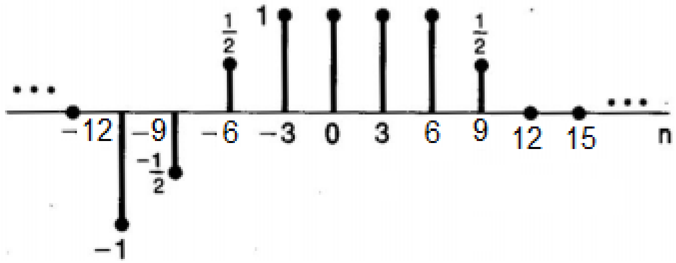


Dibuje cada una de las siguientes señales e indique claramente los valores en cada gráfico:

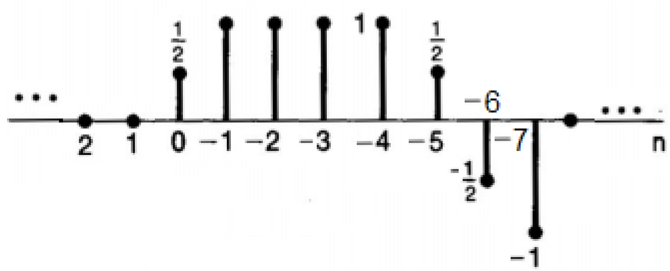
a. $x[n-4]$



b. $x[3n]$



c. $x[3-n]$



10. Considere la señal discreta

$$x[n] = 1 - \sum_{k=3}^{\infty} \delta[n-1-k]$$

Determine los valores de los enteros M y n_0 de manera que $x[n]$ se exprese como:

$$x[n] = u[Mn - n_0]$$

Como:

$$u(n) = \sum_{i=-\infty}^{n} \delta(i)$$

$$x[n] = 1 - \sum_{k=3}^{\infty} \delta[n-1-k] = x[n] = 1 - u(n-1-(-n))$$

$$x[n] = 1 - u(n-1+n) = 1 - u(2n-1)$$

$$u(2n-1)=\begin{cases}0 \; para \; 2n<1\\1 \; para \; 2n\geq 1\end{cases}$$

$$1-u(2n-1)=\begin{cases}1 \; para \; 2n<1\\0 \; para \; 2n\geq 1\end{cases}=u(-2n+1)$$

$$\boxed{x[n]=u(-2n+1)}$$

11. Determine la trasformada de Laplace de una señal muestreada. ¿Cómo se relaciona este resultado con la transformada Z?

$$x_a(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(t)\delta(t-nT)=n=\sum_{-\infty}^{\infty}x_a(nT)\delta(t-nT)$$

Aplicando Laplace:

$$L\{x_a(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)\delta(t-nT)\right]e^{-st}\,dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)e^{-st}\,dt$$

$$L\{x_a(t)\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)\,e^{-s(nT)}$$

$$z=e^{sT}$$
$$x_a(nT)=x(n)$$

$$L\{x_a(t)\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x\,(n)z^{-n}=X(z)\quad\rightarrow transformada\; z\; bilateral$$

12. Escriba la definición de la transformada Z y la transformada Z inversa

Transformada Z:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x\,[n]z^{-n}$$

Transformada Z inversa:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{n-1}$$

13. Considerando el mapeo conforme $z = e^{sT}$: si se tienen líneas paralelas al eje imaginario en el plano s ¿cuál es la imagen obtenida en el plano z? ¿Cuál es la imagen en el plano z que se obtiene al mapear el eje imaginario (σ = 0) del plano s?

$$z = e^{sT}$$

$$s = \frac{1}{T}\ln z$$

$$s = \sigma + j\omega$$

$$z = e^{(\sigma+j\omega)T} = e^{\sigma T}e^{j\omega T}$$

Con σ constante, si se tiene una línea vertical, va a pasar a ser un círculo con radio $e^{\sigma T}$.

Si se mapea el eje imaginario, se va a obtener el círculo unitario en z.

14. Considerando que las regiones de convergencia de las transformadas Laplace, es decir las transformadas de funciones continuas, se definen como líneas paralelas al eje imaginario en el plano s, entonces para funciones discretas:

a. Una función derecha en el tiempo, tiene una transformada Z cuya ROC está dada por: La región externa del círculo unitario.

b. Una función izquierda en el tiempo, tiene una transformada Z cuya ROC está dada por: La región interna del círculo unitario.

c. Una función bilateral en el tiempo tiene una transformada Z cuya ROC está dada por: La región entre dos anillos.

15. ¿Qué es una ecuación de diferencias? Encuentre al menos un ejemplo.

Las llamadas ecuaciones de diferencias permiten trabajar con sistemas con una respuesta al impulso de longitud infinita, y son el equivalente en el dominio discreto de las ecuaciones diferenciales.

Ejemplo:

$$y(n) = ay(n-1) + x(n)$$

16. Encuentre la transformada Z de la sucesión:

$$\{2k\} = \{\underset{\uparrow}{0}, 2, 4, 6, 8\}$$

$$X(2k) = 2z^{-1} + 4z^{-2} + 6z^{-3} + 8z^{-4}$$

17. Describa las propiedades de la transformada Z:

a. Linealidad

Si $x_1(n) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet X_1(z)$ y $x_2(n) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet X_2(z)$, entonces:

$$x(n) = a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet X(z) = a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z)$$

b. Desplazamiento en el tiempo

Si $x(n) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet X(z)$, entonces $x(n-k) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet z^{-k}X(z)$

La ROC de $z^{-k}X(z)$ es la misma de $X(z)$ excepto z=0 si k>0 y z=∞ si k<0.

c. Escalamiento en el dominio de Z

Si $x(n) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet X(z)$, ROC: $r_1 < |z| < r_2$, entonces:

$$a^n x(n) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet X(a^{-1}z) \qquad \text{ROC: } |a|r_1 < |z| < |a|r_2$$

d. Inversión de tiempo

$$x(n) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet X(z),\ \text{ROC: } r_1 < |z| < r_2$$

$$x(-n) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet X(z^{-1}),\ \text{ROC: } \frac{1}{r_2} < |z| < \frac{1}{r_1}$$

e. Conjugación

$$x(n) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet X(z),\ \text{ROC: R}$$

$$x^*(n) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet X^*(z^*),\ \text{ROC: R}$$

f. Convolución

$$x_1(n) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet X_1(z), \quad \text{ROC:} R_1$$

$$x_2(n) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet X_2(z), \quad \text{ROC:} R_2$$

Entonces:

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet X(z) = X_1(z)X_2(z), \qquad \text{ROC} \geq R_1 \cap R_2$$

g. Diferenciación en el dominio Z

$$x(n) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet X(z)$$

$$nx(n) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet -z\frac{\partial X(z)}{\partial z}$$

h. Teorema del valor inicial

Si es causal ($x(n) = 0, \forall n < 0$), entonces:

$$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z)$$

Puesto que es causal:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} = x(0) + x(1)z^{-1} + \cdots$$

Si $z \to \infty$ todos los términos $z^{-1}, z^{-2}, \ldots$ tienden a cero y por lo tanto:

$$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z)$$

18. Defina los siguientes tipos de sistemas en tiempo discreto:

a. Sistemas variantes e invariantes en el tiempo

Un sistema en reposo $\mathcal{T}$ es invariante en el tiempo o invariante al desplazamiento si:

$$x(n) \xrightarrow{\mathcal{T}} y(n) \quad \Rightarrow \quad x(n-k) \xrightarrow{\mathcal{T}} y(n-k)$$

b. Sistemas Lineales

Un sistema es lineal si satisface el teorema de superposición, es decir, para las constantes a_1, a_2 y para las señales $x_1(n)$ y $x_2(n)$ se cumple

$$\mathcal{T}\left[a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)\right] = a_1 \mathcal{T}\left[x_1(n)\right] + a_2 \mathcal{T}\left[x_2(n)\right]$$

Como consecuencia, todo sistema lineal tiene la propiedad multiplicativa o de escalado:

$$\mathcal{T}\left[a_1 x_1(n)\right] = a_1 \mathcal{T}\left[x_1(n)\right]$$

Y la propiedad aditiva:

$$\mathcal{T}\left[x_1(n) + x_2(n)\right] = \mathcal{T}\left[x_1(n)\right] + \mathcal{T}\left[x_2(n)\right].$$

c. Sistemas LTI Discretos caracterizados por ecuaciones de diferencias lineales con coeficientes constantes

Las llamadas ecuaciones de diferencias permiten trabajar con sistemas con una respuesta al impulso de longitud infinita, y son el equivalente en el dominio discreto de las ecuaciones diferenciales.

$$y(n) = ay(n-1) + x(n)$$

19. Escriba la definición de la transformada Z unilateral y la transformada Z unilateral inversa.

Transformada Z:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x\,[n] z^{-n}$$

Transformada Z inversa:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1}$$