Wendy Gómez Ramírez
2017109745

Solución Cuestionario Integración con Variable Compleja

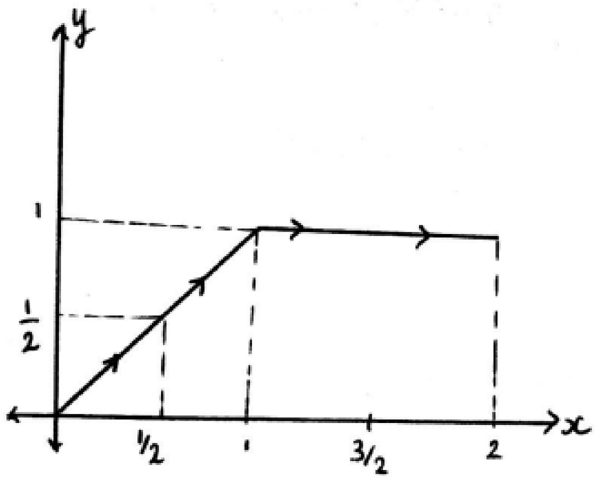
EL-5002 Modelos de Sistemas para Mecatrónica

1. Defina los siguientes conceptos:

a. Arco: Conjunto de puntos z(x,y) con x(t) y *y*(t). Ambas funciones son continuas en el intervalo de a<t<b. Por lo tanto, los puntos del arco se describen en términos de:
z(t)= x(t) +jy(t)
Se puede asegurar que todos los puntos de z son continuos porque x y *y* son continuas.

b. Arco Simple: también es llamado arco de Jordan. Este es un arco que no se corta a sí mismo. Ejemplo:

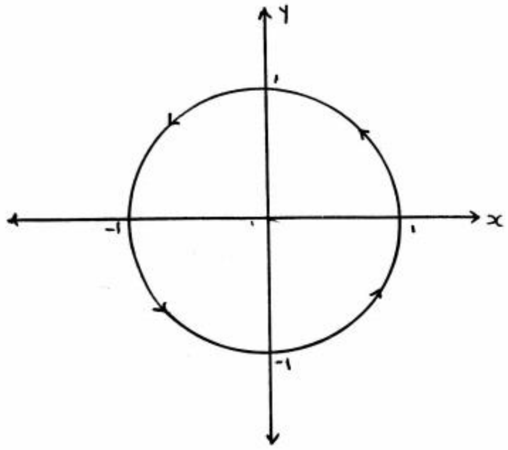
$$z(t_1) \neq z(t_2)\ ;\ t_1 \neq t_2$$
$$z(t) = \begin{cases} t + jt & 0 \leq x \leq 1 \\ t + j & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$



c. Arco simple cerrado: También es llamado curva de Jordan. El arco es simple excepto porque Z_a=Z_b. Ejemplo:

z(t) $\quad a \leq t \leq b$
z(a)=z(b)

$z(t) = \cos(t) + jsen(t)$
$0 \leq t \leq \pi$



d. Arco Suave o contorno: Es el que describe una función z(t) con $a \leq t \leq b$. Si la derivada de z(t) existe, es continua en el intervalo y no es nula en el intervalo abierto de a hasta b; entonces es un arco suave. Consiste en un número finito de arcos suaves unidos en los extremos.

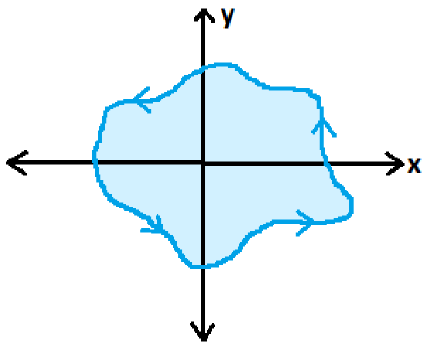
2. Enuncie el Teorema de la curva de Jordan.

Si una curva es simple y cerrada. Esta curva divide el plano complejo en una región acotada y otra limitada (adentro y afuera de la curva). La región acotada es convexa si cualquier par de puntos internos se pueden unir con una sola línea recta sin que salga de la región.

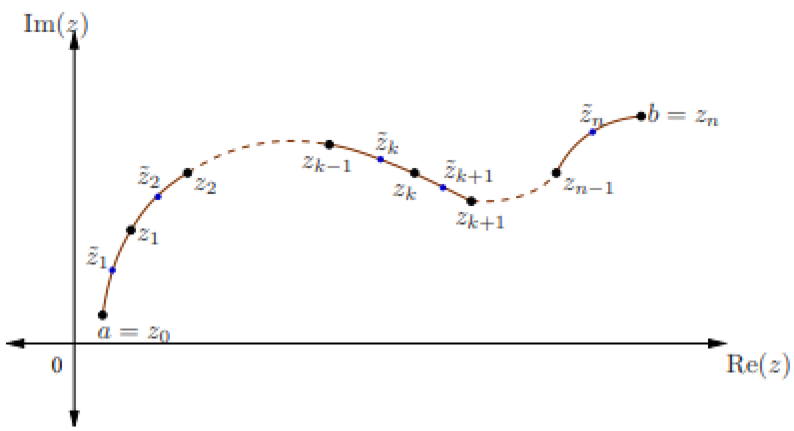
3. Indique la convención relativa a la orientación de caminos cerrados.

El sentido de la curva se define según la región que se encuentre a la izquierda de la trayectoria, si la región acotada se encuentra a la izquierda entonces la curva tiene sentido positivo. En el caso contrario, a la izquierda de la región limitada entones el sentido es negativo.

|z| < M   M = cte positiva



4. La integral de contorno es el término utilizado para evaluar integrales de línea en el plano complejo. ¿Cómo se encuentra la integral de contorno de $f(z)$ a lo largo de la trayectoria C? A partir de la definición encontrada, verifique lo obtenido en el punto 2.



$$s_n = f(\widetilde{z_1})(z_1 - z_0) + f(\widetilde{z_2})(z_2 - z_1) + \ldots. + f(\widetilde{z_n})(z_n - z_{n+1})$$

$$(z_k - z_{k-1}) = \Delta z_k$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(\widetilde{z_k})\,\Delta z_k$$

Donde n es la cantidad de secciones de la curva.

Integral de contorno de f(z) alrededor de la curva C:

$$\boxed{\int_C f(z)dz = \lim_{|\Delta z_k| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\widetilde{z_k})\,\Delta z_k}$$

$$\boxed{\oint f(z)dz}$$

z = x + j y

f(z) u(x,y) + j v(x,y)

$$\int_C f(z)dz = \int_C [u(x,y) + j\,v(x,y)](dx + j\,dy$$

$$\int_C f(z)dz = \int_C (udx - vdy) + j \int_C (vdx + udy)$$

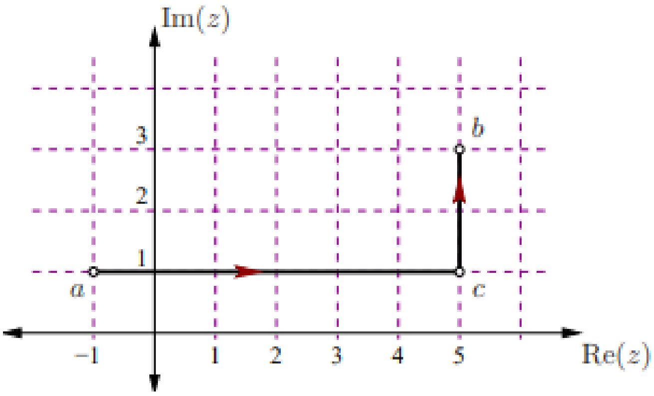
$$\int_C f\big(z(t)\big)dz\,(t) = \int f\big(z(t)\big)\frac{dz(t)}{dt}dt$$

$$\boxed{\int_C f(z)dz = \int_a^b f\big(z(t)\big)z'(t)dt} \qquad a \le t \le b$$

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b (u + jv)(x'(t) + j\,y'(t))dt$$

$$\boxed{\int_C f(z)dz = \int_a^b [ux'(t) - vy'(t)]dt + j \int_a^b [vx'(t) + uy'(t)]dt}$$

5. Evalúe $\int_c z^2 dz$ a lo largo de la trayectoria C de a = (−1 + j) hasta b = (5 + j3), formada por dos segmentos de recta. El primer segmento de recta está dado por los puntos de a=(−1+j) a c = (5 + j) y el segundo segmento de c = (5 + j) a b = (5 + j3).



Parametrizando

→Para el segmento de a a c:

x=t

z(t) = t+j   -1 ≤ t ≤ 5

dz = dt

→Para el segmento de c a d:

y=t

z(y) = 5 + jt   1 ≤ t ≤ 3

dz = jdt

Resolviendo la integral:

$$\int_C z^2 dz = \int_{-1}^{5} (t+j)^2 dt + \int_1^3 (5+jt)^2 j dt$$

$$\int_C z^2 dz = \int_{-1}^{5} (t^2 + j2t - 1) dt + \int_1^3 (25 + 10jt - t^2) j dt$$

$$\int_C z^2 dz = \int_{-1}^{5} (t^2 + j2t - 1) dt + \int_1^3 (25j - 10t - jt^2) j dt$$

$$\int_C z^2 dz = \left[\frac{t^3}{3} + j\frac{2t^2}{2} - t\right] \Big|_{-1}^{5} + \left[-j\frac{t^3}{3} - \frac{10t^2}{2} + j25t\right] \Big|_1^3$$

$$\int_C z^2 dz = \left[\frac{t^3}{3} + jt^2 - t\right] \Big|_{-1}^{5} + \left[-j\frac{t^3}{3} - \frac{10t^2}{2} + j25t\right] \Big|_1^3$$

$$\int_C z^2 dz = \left[\frac{125}{3} + j25 - 5 - (-\frac{1}{3} + j + 1)\right] + \left[j75 - 45 - j9 - (j25 - 5 - \frac{j}{3})\right]$$

$$\int_C z^2 dz = \left[\frac{125}{3} + j25 - 5 + \frac{1}{3} - j - 1)\right] + \left[j75 - 45 - j9 - j25 + 5 + \frac{j}{3})\right]$$

$$\int_C z^2 dz = \frac{126}{3} - 46 + j24 + j41 + \frac{j}{3}$$

$$\int_C z^2 dz = \frac{126}{3} - 46 + j65 + \frac{j}{3}$$

$$\int_C z^2 dz = \frac{126 - 138}{3} + \frac{j195 + j}{3}$$

$$\int_C z^2 dz = \frac{-12}{3} + \frac{j196}{3}$$

$$\boxed{\int_C z^2 dz = -4 + \frac{j196}{3}}$$

6. Busque las Propiedades principales de las Integrales de contorno de variable compleja.

$$\int_C \{f(z) + g(z)\} dz = \int_C f(z)\, dz + \int_C g(z)\, dz$$

$$\int_C Af(z) dz = A \int_C f(z)\, dz$$

$$\int_a^b f(z) dz = -\int_b^a f(z)\, dz$$

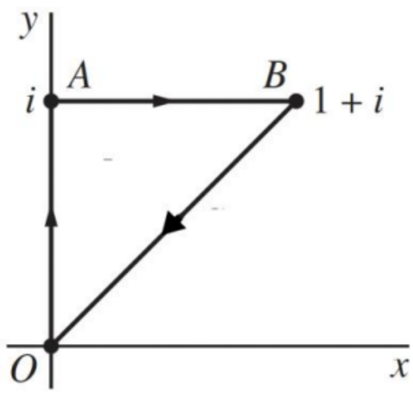
$$\int_C f(z) dz = -\int_{-C} f(z)\, dz$$

$$\int_a^b f(z) dz = \int_a^m f(z)\, dz + \int_m^b f(z)\, dz \qquad a, b, m\ están\ sobre\ c$$

$$\int_C f(z) dz = \int_{C1} f(z)\, dz + \int_{C2} f(z)\, dz \qquad c1 + c2 = c$$

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq ML$$

7. Calcular la integral de $f(z)$ en el contorno que muestra, donde la función está dada por $f(z) = y - x - j3x^2\ con\ z = x + jy$.



Resolviendo el ejercicio por parametrización:

-De 0 a A:

z(t) = jt

z´(t) = j

x=0

y=t

Para esta sección:

$$f\big(z(t)\big) = \int_0^1 (tj)dt = \frac{jt^2}{2}\,|_0^1 = \frac{j}{2}$$

-De A a B:

z(t)= j+t

z´(t)=1

x=t

y=1

Para esta ecuación:

$$f\big(z(t)\big) = \int_0^1 (1 - t - j3t^2)dt = \left(t - \frac{t^2}{2} - jt^3\right)|_0^1 = 1 - \frac{1}{2} - j = \frac{1}{2} - j$$

-De B a 0:

z(t)=tj+t

z´(t)=j+1

x=t

y=t

Para esta ecuación:

$$f\big(z(t)\big) = \int_0^1 (t - t - j3t^2)dt = \int_0^1 (3t^2 - j3t^2)dt = (t^3 - jt^3)|_0^1 = j - 1$$

$$I_T = -1 + j + \frac{1}{2} - j + \frac{j}{2}$$

$$I_T = -\frac{1}{2} + \frac{j}{2}$$

$$\boxed{I_T = \frac{1}{2}(-1 + j)}$$

8. Enuncie el Teorema Integral de Cauchy y demuéstrelo aplicando el Teorema de Green.

Si una función es analítica y es una curva cerrada se cumple que:

$$\oint_c f(z)dz = 0$$

Demostrándolo, usando el teorema de Green:

Teorema de Green:

$$\oint Pdx + Qdy \;=\; \iint_R (\tfrac{dQ}{dx} - \tfrac{dP}{dy})dxdy$$

$$\oint f(z)dz = 0 \;\; ; \;\; \ni f'(z)$$

$$\int udx + ydy = \iint_R (\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy})dA$$

$$\int u(x,y)dx - v(x,y)dy + j\int u(x,y)dy + v(x,y)dx$$

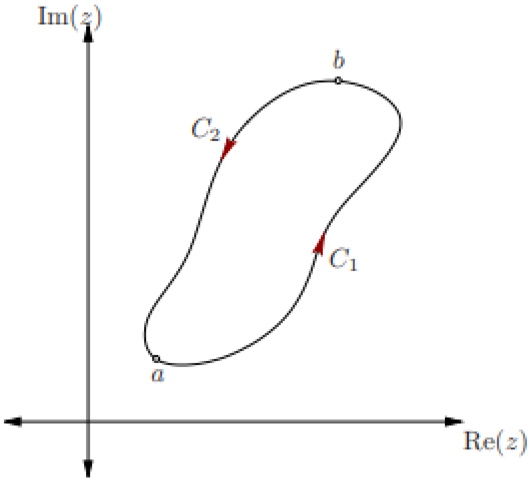
$$= \iint_R \left(\frac{-dv(x,y)}{dx} - \frac{du(x,y)}{dy}\right) dA + j\iint_R \left(\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy}\right) dA$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy} \;\; \Lambda \;\; \frac{dv}{dx} = \frac{-du}{dy}$$

$$\iint_R \left(\frac{du}{dy} - \frac{du}{dy}\right) dA + j\iint_R \left(\frac{dv}{dy} - \frac{dv}{dy}\right) dA$$

$$\boxed{\oint f(z)dz = 0 + j0}$$

$$\oint f(z)dz = \int_{C1} f(z)dz + \int_{C2} f(z)dz = 0$$



-Si se invierte C2:

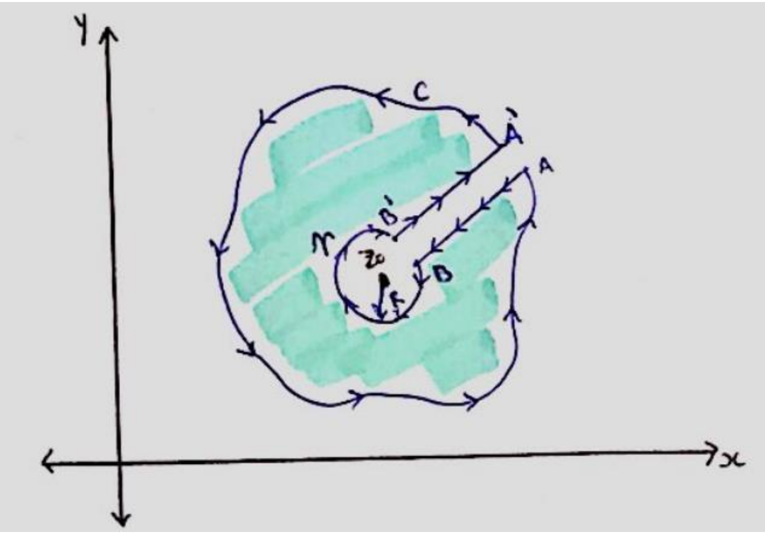
$$\oint f(z)dz = \int_{C1} f(z)dz - \int_{-C2} f(z)dz = 0$$

$$\int_{C1} f(z)dz = \int_{-C2} f(z)dz$$

9. . ¿Qué consecuencias tiene el Teorema Integral de Cauchy? ¿Cómo se puede utilizar para evaluar integrales complejas en contornos cerrados?

Tiene como consecuencia que se necesita que la función sea analítica, y en los polos de las funciones complejas, la función no es analítica.

Esta singularidad se elimina deformando el contorno.

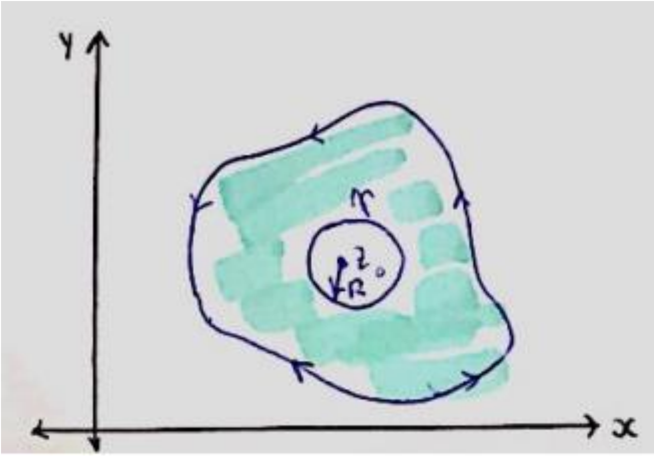


$$\int_{AB} f(z)dz = -\int_{BA} f(z)dz$$

$$\int_{-\gamma} f(z)dz = -\int_{\gamma} f(z)dz$$

$$\int_{C} f(z)dz + \int_{AB} f(z)dz + \int_{-\gamma} f(z)dz + \int_{B\prime A\prime} f(z)dz = 0$$

$$\int_{C} f(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz$$



Si hay varias singularidades, se hacen varios círculos:

$$\int_C f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz + \int_{\gamma 1} f(z)dz + \ \dots + \int_{\gamma n} f(z)dz$$

10. Evaluar la integral $\oint \frac{dz}{z^n}$ cuando n es entero, alrededor de cualquier contorno que contenga el origen.

$$z = re^{j\Theta}$$

$$z^n = re^{jn\Theta}$$

$$dz = re^{j\Theta} j d\Theta$$

$$\oint \frac{dz}{z^n} = \int_C r^{-n} e^{-jn\Theta}$$

$$\oint \frac{dz}{z^n} = \int_0^{2\pi} \frac{jre^{j\Theta}}{r^n e^{jn\Theta}}$$

$$\oint \frac{dz}{z^n} = j \int_0^{2\pi} \frac{d\Theta}{r^{n-1} e^{j(n-1)\Theta}}$$

-Si n=1:

$$\oint \frac{dz}{z^n} = j \int_0^{2\pi} \frac{d\Theta}{r^{n-1} e^{j(n-1)\Theta}} = j \int_0^{2\pi} d\Theta = 2\pi j$$

-Si n≠1:

$$\oint \frac{dz}{z^n} = j \int_0^{2\pi} \frac{d\Theta}{r^{n-1} e^{j(n-1)\Theta}}$$

$$= \frac{j}{r^{n-1}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{j\Theta(n-1)}} d\Theta = \frac{j}{r^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{j\Theta(-n+1)} d\Theta = \frac{j^{1-n}}{r^{n-1}} \left[e^{j2\pi(1-n)} - 1\right] = 0$$

$$\boxed{\oint f(z)dz = \begin{cases} n = 1, & 2\pi j \\ n \neq 1, & 0 \end{cases}}$$

11. Utilizando el resultado encontrado en la pregunta 14, evaluar la integral de:

$\oint_C \frac{z}{(z-1)(z+2j)} dz$ contorno donde C es:

a. Cualquier contorno que contenga ambos puntos z = 1 y z = −2j.

$$\int_{D1} f(z)dz = 2\pi j \left(\frac{z}{z+2j}\right)|_{z=1} = 2\pi j \frac{1}{1+2j} = \frac{2\pi j}{1+2j}$$

$$\int_{D2} f(z)dz = 2\pi j \left(\frac{z}{z-1}\right)|_{z=-2j} = 2\pi j \frac{-2j}{-1-2j} = \frac{-4\pi}{1+2j}$$

$$\oint \frac{z}{(z-1)(z+2j)} = \frac{2\pi j}{1+2j} - \frac{4\pi}{1+2j}$$

$$\oint \frac{z}{(z-1)(z+2j)} = \frac{2\pi j}{1+2j}\frac{1-2j}{1-2j} - \frac{4\pi}{1+2j}\frac{1-2j}{1-2j}$$

$$\oint \frac{z}{(z-1)(z+2j)} = \frac{2\pi j + 4\pi}{1-2j+2j+4} - \left(\frac{-8\pi j + 4\pi}{4+2j-2j+1}\right)$$

$$\oint \frac{z}{(z-1)(z+2j)} = \frac{2\pi j}{5} + \frac{4\pi}{5} + \frac{8\pi j}{5} - \frac{4\pi}{5}$$

$$\oint \frac{z}{(z-1)(z+2j)} = \frac{10\pi j}{5}$$

$$\boxed{\oint \frac{z}{(z-1)(z+2j)} = 2\,\pi j}$$

b. Cualquier contorno que contenga a z = −2j pero excluye a z = 1.

$$\int_{D2} f(z)dz = 2\pi j \left(\frac{z}{z-1}\right)|_{z=-2j} = 2\pi j \frac{-2j}{-1-2j} = \frac{-4\pi}{1+2j}$$

$$\oint \frac{z}{(z-1)(z+2j)} = -\frac{4\pi}{1+2j}\frac{1-2j}{1-2j} = \frac{8\pi j - 4\pi}{4+2j-2j+1}$$

$$\boxed{\oint \frac{z}{(z-1)(z+2j)} = \frac{4\pi}{5}(2j-1)}$$

12. Enuncie la Fórmula de la Integral de Cauchy.

La integral de Cauchy establece una relación entre la derivación y la integración compleja, de la cuál se deduce que, si una función es analítica, implica que también es derivable infinitas veces. La fórmula se expresa de la siguiente forma:

$$\oint_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)2\pi j}{n!}$$

13. . Utilizando la Fórmula de la Integral de Cauchy, evalúe la integral de contorno

$$\oint_c \frac{2z}{(z-1)(z+2)(z+j)}dz$$

Donde C es un contorno que incluye los siguientes puntos $z_1 = 1$, $z_2 = -2 \wedge z_3 = -j$.

$$\int_{D1} f(z)dz = 2\pi j\left(\frac{2z}{(z+2)(z+j)}\right)|_{z=1} = 2\pi j\frac{2}{3(1+j)} = \frac{2\pi j * 2}{3+3j} = \frac{4\pi j}{3(1+j)}$$

$$\int_{D2} f(z)dz = 2\pi j\left(\frac{2z}{(z-1)(z+j)}\right)|_{z=-2} = 2\pi j\frac{-4}{-3(-2+j)} = \frac{2\pi j * -4}{-6-3j} = \frac{-8\pi j}{-3(-2+j)}$$

$$\int_{D3} f(z)dz = 2\pi j\left(\frac{2z}{(z-1)(z+2)}\right)|_{z=-j} = 2\pi j\frac{-2j}{(-1-j)(-j+2)} = \frac{4\pi}{(-1-j)(-j+2)}$$

$$\oint \frac{2z}{(z-1)(z+2)(z+j)}dz = \frac{4\pi j}{3(1+j)} + \frac{8\pi j}{3(-2+j)} + \frac{4\pi}{(-j-1)(-j+2)}$$

$$\oint \frac{2z}{(z-1)(z+2)(z+j)}dz = \frac{4\pi j}{3(1+j)} + \frac{8\pi j}{3(-2+j)} + \frac{4\pi}{-1-2j+j-2}$$

$$\oint \frac{2z}{(z-1)(z+2)(z+j)}dz = \frac{4\pi j}{3+3j} + \frac{8\pi j}{-6+3j} + \frac{4\pi}{-3-j}$$

$$\oint \frac{2z}{(z-1)(z+2)(z+j)}dz = \frac{4\pi j}{3+3j} * \frac{3-3j}{3-3j} + \frac{8\pi j}{-6+3j} * \frac{-6-3j}{-6-3j} + \frac{4\pi}{-3-j} * \frac{-3+j}{-3+j}$$

$$\oint \frac{2z}{(z-1)(z+2)(z+j)}dz = \frac{12\pi j + 12\pi}{18} + \frac{-48\pi j + 24\pi}{45} + \frac{-12\pi + 4\pi j}{10}$$

$$\oint \frac{2z}{(z-1)(z+2)(z+j)}dz = \frac{2\pi j + 2\pi}{3} + \frac{-16\pi j + 8\pi}{15} + \frac{-6\pi + 2\pi j}{5}$$

$$\oint \frac{2z}{(z-1)(z+2)(z+j)}dz = \frac{10\pi j + 10\pi - 16\pi j + 8\pi - 18\pi + 6\pi j}{3 * 15 * 5} = 0$$

$$\boxed{\oint \frac{2z}{(z-1)(z+2)(z+j)}dz = 0}$$

14. Demuestre y enuncie el Teorema del Residuo.

Este teorema afirma que, si una función es analítica dentro y sobre una curva cerrada simple C excepto en un cierto número finito de polos, el valor de su integral depende de la sumatoria de los residuos de la función de casa polo. Esto se expresa de la siguiente forma:

$$\oint_c f(z)dz = 2\pi j \sum_{i¿1}^{n} a_{\prime 1}^{(i)}$$

$$I = \oint f(z)dz = \int_{\gamma 1} f(z)dz + \int_{\gamma 2} f(z)dz + \ ...$$

$$f(z) = \frac{a_{-n}^{(i)}}{(z-z_i)^n} + \ ... + \frac{a_{-1}}{(z-z_i)} + a_0 + \ a_1(z-z_i) \ + \ ... \qquad r_i < |z-z_i| < R_i$$

$$\int_{\gamma 1} f(z)dz = \int_{\gamma 1} \left[\frac{a_{-n}^{(i)}}{(z-z_i)^n} + \ ... + \frac{a_{-1}}{(z-z_i)} + a_0 + \ a_1(z-z_i) \ + \ ... \right] dz$$

$$\oint_r \frac{dz}{z^n} \begin{cases} 2\pi j & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$$

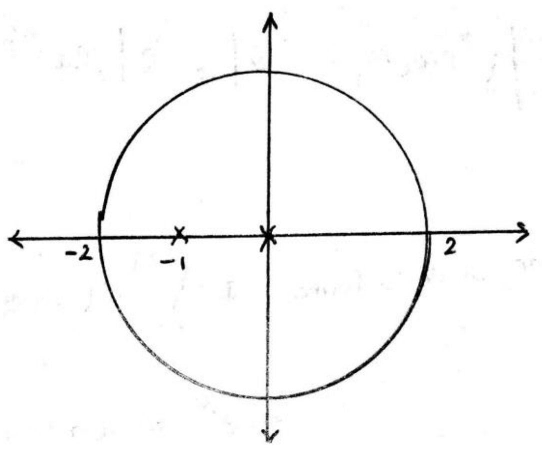
$$I = \oint_{\gamma 1} f(z)dz = \ a_{-1}(2\pi j)$$

$$\boxed{I = \oint_{\mathrm{C}} f(z)dz = \ 2\pi j \sum_{i=1}^{n} a_{-1}^{(i)}}$$

15. Utilice el Teorema del Residuo para evaluar la integral de contorno $\oint_c \frac{1}{z(1+z)} dz \quad C$ si el contorno C es:

a. $|z| = 1/2$

b. $|z| = 2$



a) Para la región $|z|$ = ½ solo un polo está adentro:

$$a_{-1}^{0} = \lim_{z\to 0} z * \frac{1}{z(1+z)} = \lim_{z\to 0}\frac{1}{(1+z)} = 1$$

$$\boxed{\oint f(z) = 2\pi j(1) = 2\pi j \; para\; un\; radio\; de\; ½}$$

b) Para la región |z|=2 ambos polos están dentro de la región:

$$a_{-1}^{0} = 1$$

$$a_{-1}^{-1} = \lim_{z\to -1}(1+z) * \frac{1}{z(1+z)} = \lim_{z\to 0}\frac{1}{z} = -1$$

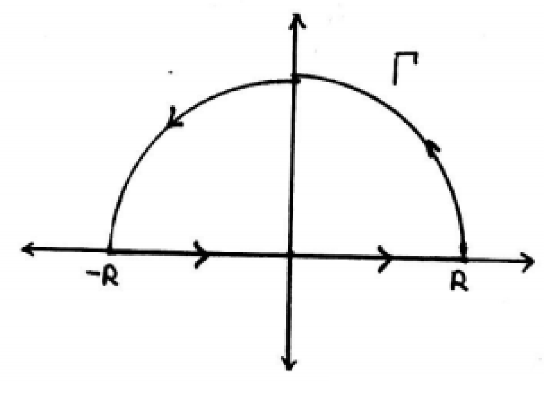
$$\oint f(z) = 2\pi j(1-1) = 0$$

$$\boxed{\oint f(z) = 0 \;\; para\; un\; radio\; de\; 2}$$

16. Revise los casos de integración sobre semicírculos extensos.

Para la integral de la forma: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

$\oint_c f(z)dz \quad se\; usa\; el\; contorno$:



$$\oint_c f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(x)dx + + \int_r f(z)dz$$

$$\oint_c f(z)dz \; = \; \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

En Γ:

$$z = Re^{j\theta} \qquad 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$dz = jRe^{j\theta} \qquad 0 \leq \theta \leq \pi$$

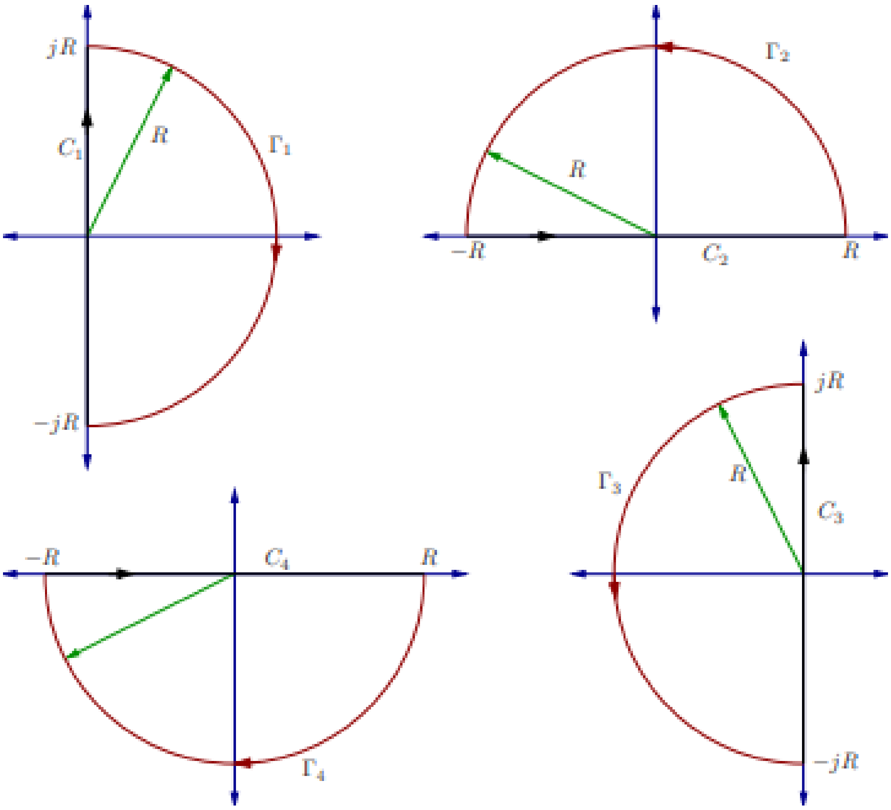
$$\oint_{r} f(z)dz = \int_{0}^{\pi} f\left(Re^{j\theta}\right) jRe^{j\theta} d\theta$$

Longitus de Γ es πr

$$\left| \int_{0}^{\pi} f\left(Re^{j\theta}\right) jRe^{j\theta} d\theta \right| \leq \pi R \left| jRe^{j\theta} f\left(Re^{j\theta}\right) \right| = \pi R^2 \left| f\left(Re^{j\theta}\right) \right|$$

En esta última formula se puede observar que el radio aumenta mucho más rápido que el numerador para que la integral de Γ se haga cero.

El semicírculo se acomoda según más convenga.



$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_i} f(z)\,dz = 0$	si $\lim_{R\to\infty} \max \lvert Rf(Re^{j\theta})\rvert = 0$, para $i \in \{1,2,3,4\}$
$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_1} f(z)e^{az}\,dz = 0$	si $\lim_{R\to\infty} \max \lvert f(Re^{j\theta})\rvert = 0$, $a < 0$ y $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$
$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_3} f(z)e^{az}\,dz = 0$	si $\lim_{R\to\infty} \max \lvert f(Re^{j\theta})\rvert = 0$, $a > 0$ y $\pi/2 \le \theta \le 3\pi/2$
$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_2} f(z)e^{jaz}\,dz = 0$	si $\lim_{R\to\infty} \max \lvert f(Re^{j\theta})\rvert = 0$, $a > 0$ y $0 \le \theta \le \pi$
$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_4} f(z)e^{jaz}\,dz = 0$	si $\lim_{R\to\infty} \max \lvert f(Re^{j\theta})\rvert = 0$, $a < 0$ y $\pi \le \theta \le 2\pi$

17. Determine las condiciones en las cuales se puede evaluar integrales reales aplicando la teoría de variable compleja. Explique el procedimiento para los casos de integrales de la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \ \ y \int_{0}^{2\pi} G(sen\Theta, cos\Theta)d\Theta$$

donde G es una función racional de $sen\theta$ y $cos\theta$.

1) Para integrales de la forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

-Se extiende la integral a variable compleja, para esto solamente se sustituye todas las x por z.
-Debe reescribirse el denominador de la forma que queden explícitos cada uno de los polos de la función.
-Para la integral se selecciona el contorno de integración el semicírculo extenso que va de 0 a π.
-Identificar los polos que quedan contenidos en el semicírculo.
La integral resultante se resuelve por medio de Cauchy o Residuo.

2)Para la integral de la forma:

$$I = \int_{0}^{2\pi} G(sen\Theta, cos\Theta)d\Theta$$

Contorno: Círculo unitario

$$z = e^{j\Theta} \ \Rightarrow sen\Theta = \frac{1}{2j}(z - \frac{1}{z})$$

$$cos\Theta = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$$

$$dz = je^{j\Theta}d\Theta$$

$$d\Theta = \frac{dz}{jz}$$

$$\oint f(z)dz = I$$

$$|z| = 1$$