Instituto Tecnológico de Costa Rica **I Semestre 2021**
Área de Ingeniería Mecatrónica
MT-5001 Modelos de Sistemas para Mecatrónica
Profesor: Ing. Felipe Meza-Obando

Elaborado por: Ing. José Miguel Barboza Retana

Práctica #8. Transformada de Laplace.

- Resuelva los siguientes problemas relacionados con la transformada de Laplace, resolución de ecuaciones diferenciales y el análisis de sistemas LTI:

1) Encuentre la transformada de Laplace para cada una de las siguientes señales. Para cada caso, indique su respectiva ROC.
   a) $x(t) = 3e^{-2t}u(t) - 2e^{-t}u(t)$.
   b) $x(t) = 2u(t) + e^{-t}\cos(t)\,u(t)$
   c) $x(t) = \delta(t) - \frac{4}{3}e^{-t}u(t) + \frac{1}{3}e^{2t}u(t)$

2) Utilizando expansión en fracciones parciales, determine la transformada inversa de Laplace de la siguiente expresión:

$$X(s) = \frac{2s^2 + 5s + 5}{(s+1)^2(s+2)}, \ \ \sigma > -1$$

3) Determine la causalidad del sistema descrito por la siguiente función de transferencia:

$$X(s) = \frac{e^s}{s+1}, \qquad \sigma > -1$$

4) Determine la función de transferencia del sistema descrito por las siguientes ecuaciones y determine la estabilidad del mismo. Encuentre la ecuación diferencial característica del sistema.

$$x(t) = e^{-3t}u(t)$$

$$y(t) = [e^{-t} - e^{-2t}]u(t)$$

5) Suponga que se conoce la siguiente información sobre un sistema LTI:
   a) El sistema es causal
   b) La función de transferencia es racional y sólo tiene 2 polos, en $s = -2$ y en $s = 4$.
   c) Si $x(t) = 1$ entonces $y(t) = 0$.
   d) El valor de la respuesta al impulso en $t = 0^+$ es 4.

   Encuentre una expresión para la función de transferencia del sistema.

6) Considere un sistema estable y causal con respuesta al impulso $h(t)$ y función de transferencia $H(s)$. Suponga que $H(s)$ es racional, contiene un polo $s = -2$ y no tiene un cero en el origen. La localización de los demás polos y ceros se desconoce. Para cada uno de los siguientes enunciados determine son: definitivamente válido, definitivamente falso o si no hay información suficiente para averiguar la validez.
   a) $\mathcal{F}\{h(t)e^{-3t}\}$ converge.
   b) $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)dt = 0$.
   c) $th(t)$ es la respuesta al impulso de un sistema causal y estable.
   d) $\frac{d}{dt}h(t)$ contiene al menos un polo en su transformada de Laplace.
   e) $h(t)$ tiene una duración finita.
   f) $H(s) = H(-s)$.
   g) $\lim_{s\to\infty} H(s) = 2$.

7) Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + 6\frac{d}{dt}x(t) + 9x(t) = \sin(t), \quad (t \geq 0)$$

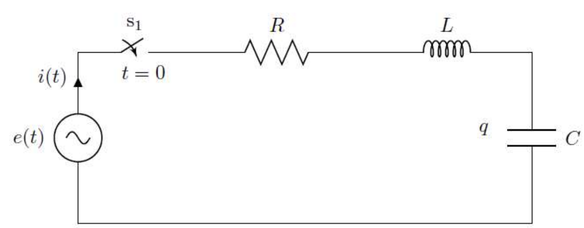
   Sujeta a las condiciones iniciales $x = 0$ y $\frac{dx}{dt} = 0$ en $t = 0$.

8) Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

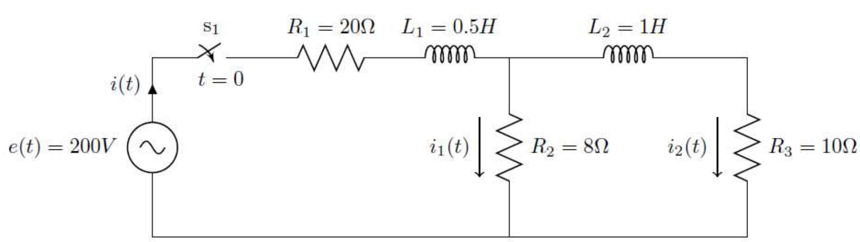
$$\frac{d^3}{dt^3}x(t) + 5\frac{d^2}{dt^2}x(t) + 17\frac{d}{dt}x(t) + 13x(t) = 1, \quad (t \geq 0)$$

Sujeta a las condiciones iniciales $x = \frac{dx}{dt} = 1$ y $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$ en $t = 0$.

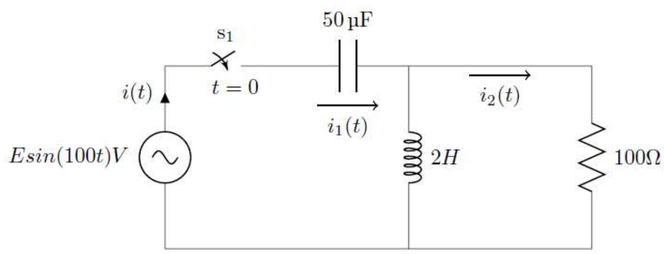
9) El circuito RLC de la siguiente figura está conformado por una resistencia R, un condensador C, un inductor L y una fuente de tensión $e(t)$ conectados en serie. Antes de cerrar el interruptor s_1 en el tiempo $t = 0$, tanto la carga en el condensador como la corriente del circuito son cero. Determine la carga $q(t)$ en el condensador y la corriente resultante $i(t)$ en el circuito en el tiempo t. Considere que: $R = 160\Omega$, $L = 1H$, $C = 10^{-4}F$ y $e(t) = 20V$.



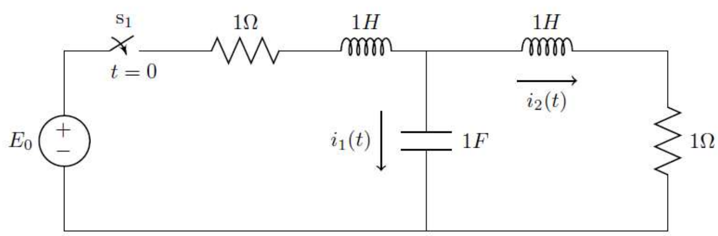
10) En la red mostrada en la siguiente figura no hay flujo de corriente en ninguno de los lazos antes del cierre de s_1 en el tiempo $t = 0$. Deduzca las expresiones para $i_1(t)$ e $i_2(t)$ para todo tiempo t.



11) Utilizando la transformada de Laplace encuentre las transformadas $I_1(s)$ e $I_2(s)$ de las respectivas corrientes mostradas en el siguiente circuito. Después determine $i_2(t)$ si se sabe que $i_1(0) = i_2(0) = q_1(0) = 0$.



12) En el circuito de la siguiente figura no hay energía almacenada (esto es, no hay carga en los condensadores ni corriente fluyendo en los inductores) antes de cerrar s_1 en el tiempo $t = 0$. Determine $i_1(t)$ para $t > 0$ para una tensión constante aplicada $E_0 = 10V$.



13) La respuesta $x(t)$ de un sistema a una función de fuerza $u(t)$ está determinada por la ecuación diferencial:

$$9\frac{d^2}{dt^2}x(t) + 12\frac{d}{dt}x(t) + 13x(t) = 2\frac{d}{dt}u(t) + 3u(t)$$

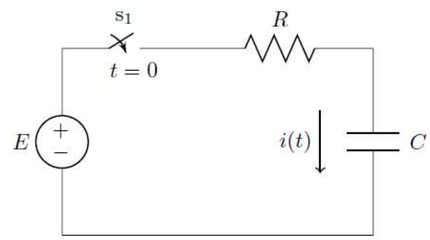
a) Determine la función de transferencia del sistema. (Suponga todas las condiciones iniciales iguales a cero)
b) ¿Cuál es la ecuación característica del sistema? ¿Cuál es el orden del sistema?
c) Grafique el diagrama de polos y ceros del sistema.

14) Determine la respuesta al impulso del sistema lineal cuya respuesta $x(t)$ a una entrada $u(t)$ está determinada por la ecuación diferencia:

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + 5\frac{d}{dt}x(t) + 6x(t) = 5u(t)$$

15) El circuito de la siguiente figura está formado por una resistencia R y un condensador C conectados en serie

a una fuente de tensión constante E. Antes de cerrar el interruptor en el tiempo $t = 0$, tanto la carga del condensador como la corriente resultante en el circuito son cero. Determine la corriente $i(t)$ en el circuito para el tiempo t después de cerrar el interruptor. Verifique el valor de $i(t)$ justo en el instante después de cerrar el interruptor utilizando el teorema del valor inicial.



16) Determine cuál o cuáles de las siguientes funciones de transferencia representan un sistema estable.

a) $\frac{s-1}{(s+2)(s^2+4)}$

b) $\frac{(s+2)(s-2)}{(s+1)(s-1)(s+4)}$

c) $\frac{s-1}{(s+2)(s+4)}$

d) $\frac{6}{(s^2+s+1)(s+1)^2}$

e) $\frac{5(s+10)}{(s+5)(s^2-s+10)}$

17) Verifique el teorema del valor inicial para las siguientes funciones:

a) $2 - 3\cos(t)$

b) $(3t-1)^2$

c) $t + 3\sin(2t)$

18) Verifique el teorema del valor final para las siguientes funciones:

a) $1 + 3e^{-t}\sin(2t)$

b) $t^2 e^{-2t}$

c) $3 - 2e^{-3t} + e^{-t}\cos(2t)$

19) Encuentre la transformada de Laplace de:

a) $x(t) = \cos(at)\,u(t)$

b) $x(t) = \sin(at)\,u(t)$

c) $x(t) = \mathrm{sa}(t)$

d) $x(t) = \mathrm{sa}(at)\, u(t)$

20) Encuentre las regiones de convergencia de las transformadas de Laplace de las siguientes funciones:

a) $e^{-3t}u(t)$
b) $e^{-3t}u(-t+3)u(t+3)$
c) $e^{-3|t|}$
d) $e^{-3t}u(-t)$
e) e^{-et}
f) $e^{-3|t|}u(-t)$

21) Dada la señal:

$$x(t) = e^{-3t}u(t-1)$$

Encuentre su transformada de Laplace $X(s)$ y su región de convergencia. Además, si:

$$g(t) = Ae^{-3t}u(-t-t_0)$$

Entonces encuentre los valores de A y t_0 para los cuales la expresión algebraica de $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} = X(s)$. Indique la región de convergencia de $G(s)$.

22) Dada la señal:

$$x(t) = e^{-3t}u(t) + e^{-\beta}\, u(t)$$

Encuentre su transformada de Laplace y los valores de $\beta \in \mathbb{C}$ necesarios para que la región de convergencia de $X(s)$ sea $\sigma > -1$.

23) Encuentre los polos y región de convergencia de la transformada de Laplace de la función:

$$x(t) = e^{t}\sin(2t)\, u(-t)$$

24) Grafique las funciones:

a) $e^{at}u(t)$, $a > 0$
b) $e^{at}u(t)$, $a < 0$
c) $e^{-at}u(t)$, $a > 0$
d) $e^{-at}u(t)$, $a < 0$
e) $e^{at}u(-t)$, $a > 0$
f) $e^{at}u(-t)$, $a < 0$

g) $e^{-at}u(-t)$, $a > 0$
h) $e^{-at}u(-t)$, $a < 0$

25) Encuentre la transformada de Laplace de la función $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$ si se conoce lo siguiente:

$$X_1(s) = \frac{1}{s+1} \quad ROC\colon \sigma > -1$$
$$X_2(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \quad ROC\colon \sigma > -1$$

26) Encuentre la transformada de Laplace de $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$ si se conoce los siguiente:

$$x_1(t) = e^{at}u(t)$$
$$x_2(t) = -e^{-a}\ u(-t)$$

Considere $a \in \mathbb{R}$.

27) Utilice la propiedad de desplazamiento en s para encontrar la transformada de Laplace de $x(t)\cos(\omega_0 t)$ si $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$.

28) Encuentre el número y la ubicación de los polos y ceros, finitos e infinitos, de las siguientes expresiones algebraicas de transformadas de Laplace:
a) $\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+3}$
b) $\frac{s+1}{s^2-1}$
c) $\frac{s^3-1}{s^2+s\ 1}$

29) Se sabe que una señal $x(t)$ es absolutamente integrable, y su transformada de Laplace tiene un polo en $s = 2$. Indique cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas, y las razones para ello.
a) $x(t)$ es de duración finita.
b) $x(t)$ puede ser izquierda.
c) $x(t)$ puede ser derecha.
d) $x(t)$ puede ser bilateral.

30) ¿Cuántas señales pueden tener una transformada de Laplace con la siguiente expresión algebraica?

$$X(s) = \frac{(s-1)}{(s+2)(s+3)(s^2+s+1)}$$

31) Si $x(t)$ es una función cuya transformada de Laplace es racional con exactamente dos polos en $s=-1$ y $s=-3$. Se sabe que para otra función $g(t)=e^{2t}x(t)$ existe su transformada de Fourier $G(j\omega)$. Indique si $x(t)$ es izquierda, derecha o bilateral.

32) Calcule la transformada inversa de Laplace tanto con la integral de Bromwich como por medio de la descomposición en fracciones parciales de:

$$X(s) = \frac{2(s+2)}{s^2+7s+12} \quad ROC\text{:}\ \sigma > -3$$

33) Para una señal $x(t)$ se conoce que:

1) $x(t)=0$ para todo $t>0$
2) $x(k/10)=0$ para $k \in \mathbb{N}^+$
3) $x(1/20)=e^{-1}$

Indique cuáles enunciados son congruentes con la información proporcionada para $x(t)$, si $X(s)$ es su transformada de Laplace y se sabe que $X(s)$ es racional:

a) $X(s)$ tiene un solo polo finito.
b) $X(s)$ tiene un solo par de polos finitos.
c) $X(s)$ tiene más de dos polos finitos.

34) Para una señal:

$$g(t) = x(t) + ax(-t)$$

Con $x(t)=\beta e^{-t}u(t)$, se sabe que su transformada de Laplace es:

$$G(s) = \frac{s}{s^2-1} \quad (-1<\sigma<1)$$

Determine los valores válidos de las constantes a y β.

35) Se conoce lo siguiente sobre la señal $x(t)$ con transformada de Laplace $X(s)$:

a) $x(t)$ es real y par.
b) $X(s)$ tiene cuatro polos y ningún cero en el plano finito s.
c) $X(s)$ tiene un polo en $s = \sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}$
d) $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = 1$

Encuentre la expresión para $X(s)$ y su respectiva ROC.

36) Dado el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de dos señales derechas $x(t)$ y $y(t)$:

$$\frac{d}{dt}x(t) = -2y(t) + \delta(t)$$
$$\frac{d}{dt}y(t) = 2x(t)$$

Encuentre $X(s)$ y $Y(s)$ con sus regiones de convergencia. Encuentre además las soluciones en el dominio del tiempo $x(t)$ y $y(t)$.

37) Un sistema LTI causal está descrito por la relación de su salida $y(t)$ respecto a su entrada $x(t)$ a partir de la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^3}{dt^3}y(t) + (1+a)\frac{d^2}{dt^2}y(t) + a(a+1)\frac{d}{dt}y(t) + a^2y(t) = x(t)$$

a) Determine para qué valores de a el sistema es estable.
b) Si la señal $g(t)$ se define como:

$$g(t) = \frac{d}{dt}h(t) + h(t)$$

Indique cuántos polos tiene su transformada de Laplace $G(s)$.

38) Analice la existencia de la transformada de Laplace bilateral de las funciones:

a) $x(t) = 1$
b) $x(t) = \sin(\omega t)$
c) $x(t) = \cos(\omega t)$

39) Sean las siguientes funciones:

$$x_1(t) = e^{-at}u(t)$$
$$x_2(t) = e^{-2a(t+1)}u(t+1)$$

Con $a \in \mathbb{R},\ a > 0$.

a) Determine las transformadas bilateral y unilateral de $x_1(t)$ y $x_2(t)$.
b) Calcule la transformada bilateral inversa del producto $\mathcal{L}_b\{x_1(t)\}\mathcal{L}_b\{x_2(t)\}$ para encontrar $g(t) = x_1(t) * x_2(t)$.
c) Calcule la transformada unilateral inversa del producto $\mathcal{L}_u\{x_1(t)\}\mathcal{L}_u\{x_2(t)\}$ y compare con el resultado obtenido para $g(t)$.

40) Encuentre la transformada unilateral de Laplace para:
a) $x(t) = e^{-2t}u(t+1)$
b) $x(t) = \delta(t+1) + \delta(t) + e^{-2(t+3)}u(t+1)$
c) $x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-4t}u(t)$

41) Resuelva utilizando la transformada unilateral de Laplace la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + 4\frac{d}{dt}x(t) + 5x(t) = 8\cos(t)$$

Si $x(t) = \frac{d}{dt}x(t) = 0$ en $t = 0$.

42) Determine la transformada de Laplace, la región de convergencia asociada y el diagrama de polos y ceros para cada una de las siguientes funciones:
a) $x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-3t}u(t)$
b) $x(t) = e^{-4t}u(t) + e^{-5t}\sin(5t)\,u(t)$
c) $x(t) = e^{2t}u(-t) + e^{3t}u(-t)$
d) $x(t) = te^{2|t|}$
e) $x(t) = |t|e^{-2|t|}$
f) $x(t) = |t|e^{2t}u(-t)$
g) $x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & en\ el\ resto \end{cases}$
h) $x(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq 1 \\ 2-t & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$
i) $x(t) = \delta(t) + u(t)$
j) $x(t) = \delta(3t) + u(3t)$

43) Determine la función en el tiempo $x(t)$ para cada una de las transformadas de Laplace y sus regiones asociadas:

a) $\frac{1}{s^2+9}$ $\quad \sigma > 0$

b) $\frac{s}{s^2+9}$ $\quad \sigma < 0$

c) $\frac{s+1}{(s+1)^2+9}$ $\quad \sigma < -1$

d) $\frac{s+2}{s^2+7s+12}$ $\quad -4 < \sigma < -3$

e) $\frac{s+1}{s^2+5s+6}$ $\quad -3 < \sigma < -2$

f) $\frac{(s+1)^2}{s^2-s+1}$ $\quad \sigma > \frac{1}{2}$

g) $\frac{s^2-s+1}{(s+1)^2}$ $\quad \sigma > -1$

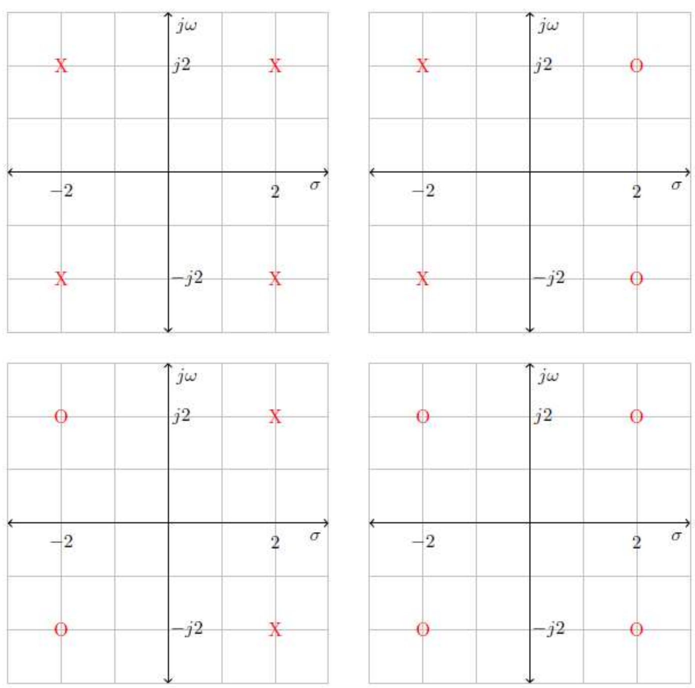
44) Para cada uno de los siguientes enunciados acerca de $x(t)$, y para cada uno de los cuatro diagramas de polos y ceros de la figura, determine la restricción correspondiente de la ROC.

a) $x(t)e^{-3t}$ es absolutamente integrable.

b) $x(t) * \left(e^{-t}u(t)\right)$ es absolutamente integrable.

c) $x(t) = 0,\ \ t > 1$

d) $x(t) = 0,\ \ t < -1$



45) Considere una señal $y(t)$ la cual está relacionada con dos señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$ mediante:

$$y(t) = x_1(t-2) * x_2(-t+3)$$

Donde:

$$x_1(t) = e^{-2t}u(t)$$
$$x_2(t) = e^{-3t}u(t)$$

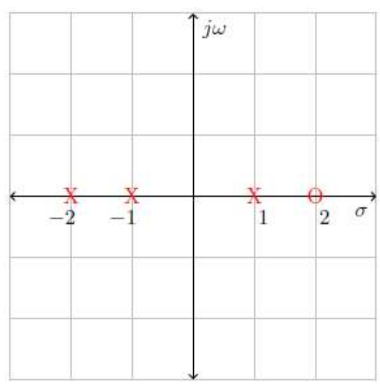
Utilice las propiedades de la transformada de Laplace para encontrar $Y(s)$.

46) Se conocen los siguientes datos acerca de la señal $x(t)$ con transformada de Laplace $X(s)$:

a) $X(s)$ tiene exactamente dos polos.
b) $X(s)$ no tiene ceros en el plano s finito.
c) $X(s)$ tiene un polo en $s = -1 + j$.
d) $e^{2t}x(t)$ no es absolutamente integrable.
e) $X(0) = 8$

Determine $X(s)$ y especifique su respectiva ROC.

47) Considere un sistema LTI cuya función de transferencia $H(s)$ presenta el siguiente diagrama de polos y ceros.



a) Indique todas las ROC posibles que se pueden asociar a ese diagrama.
b) Para cada una de las regiones identificadas en a), indique si el sistema asociado es estable y/o causal.

48) Considere un sistema LTI con entrada $x(t) = e^{-t}u(t)$ y respuesta al impulse $x(t) = e^{-2t}u(t)$.

a) Determine las transformadas de Laplace de $x(t)$ y $h(t)$.
b) Usando la propiedad de convolución, determine la transformada de Laplace $Y(s)$ de la salida $y(t)$.
c) A partir del resultado obtenido en b), determine $y(t)$.

d) Verifique el resultado de b) realizando convolución explícita de $x(t)$ y $h(t)$.

49) Un medidor de presión que se puede modelar como un sistema LTI, presenta la respuesta en tiempo a una entrada escalón unitario dada por $(1-e^{-t}-te^{-t})u(t)$. Para cierta entrada $x(t)$ se observa que la salida es $(2-3e^{-t}+e^{-3t})u(t)$. Para esta medición observada, determine la verdadera presión de entrada al medidor como una función del tiempo.

50) Considere un sistema LTI continuo en el cual la entrada $x(t)$ y la salida $y(t)$ están relacionadas por la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t)-\frac{d}{dt}y(t)-2y(t)=x(t)$$

Sean $X(s)$ y $Y(s)$ las transformadas de Laplace de $x(t)$ y $y(t)$ respectivamente, y sea $H(s)$ la transformada de Laplace de $h(t)$, la respuesta el impulso del sistema.

a) Determine $H(s)$ y dibuje su diagrama de polos y ceros.
b) Determine $h(t)$ para cada uno de los tres siguientes casos:
   b.1) Sistema estable.
   b.2) Sistema causal.
   b.3) Sistema ni causal ni estable.

51) La función de transferencia de un sistema LTI causal es:

$$H(s)=\frac{s+1}{s^2+2s+2}$$

Determine la respuesta $y(t)$ cuando la entrada es: $x(t)=e^{-|t|}\quad -\infty<t<\infty$.

52) Suponga que se conoce la siguiente información acerca de un sistema LTI causal y estable con respuesta al impulso $h(t)$ y una función racional $H(s)$ del sistema:

a) $H(1)=0.2$
b) Cuando la entrada es $u(t)$, la salida no es absolutamente integrable.

c) Cuando la entrada es $tu(t)$, la salida no es absolutamente integrable.
d) La señal $\frac{d^2}{dt^2}h(t) + 2\frac{d}{dt}h(t) + 2h(t)$ es de duración finita.
e) $H(s)$ tiene exactamente un cero en el infinito.

Determine $H(s)$ y su región de convergencia.

53) Considere un sistema caracterizado por la siguiente ecuación diferencial:

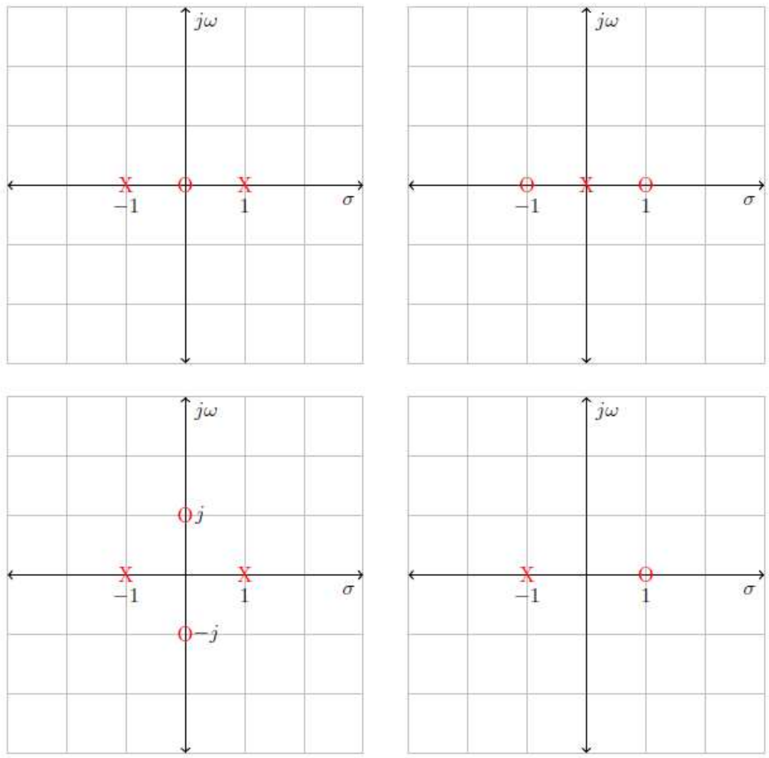
$$\frac{d^3}{dt^3}y(t) + 6\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 11\frac{d}{dt}y(t) + 6y(t) = x(t)$$

a) Determine la respuesta de estado cero de este sistema para la entrada $x(t) = e^{-4t}u(t)$.
b) Determine la respuesta de estado cero de este sistema para $t > 0^-$, dado que:

$$y(0^-) = 1, \qquad \left.\frac{d}{dt}y(t)\right|_{t=0^-} = -1, \qquad \left.\frac{d^2}{dt^2}y(t)\right|_{t=0^-} = 1$$

c) Determine la salida cuando la entrada es $x(t) = e^{-4t}u(t)$ y las condiciones iniciales son las mismas que en el punto b).

54) Determine cuál, si lo hubiera, de los diagramas de polos y ceros en la siguiente figura podría corresponder a una función par en el tiempo. Para aquellos que sí pudieran, indique la ROC requerida.



55) Sea $h(t)$ la respuesta al impulso de un sistema LTI causal estable con función de transferencia racional.

a) ¿El sistema con respuesta al impulso $\frac{d}{dt}h(t)$ garantiza ser causal y estable?

b) ¿El sistema con respuesta al impulso $\int_{-\infty}^{t} h(\tau)\, d\tau$ garantiza ser causal e inestable?

56) Sea $x(t)$ la señal muestreada especificada como:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nT}\delta(t - nT)$$

Donde $T > 0$.

a) Determine $X(s)$, incluyendo su región de convergencia.

b) Dibuje el diagrama de polos y ceros para $X(s)$.

57) Considere el sistema LTI mostrado en la siguiente figura, del cual se proporciona la siguiente información:

$$X(s) = \frac{s+2}{s-2}$$
$$x(t) = 0, \quad t > 0$$

$$y(t) = -\frac{2}{3}e^{2t}u(-t) + \frac{1}{3}e^{-t}u(t)$$

a) Determine $H(s)$ y su respectiva ROC.
b) Determine $h(t)$.

58) La señal:

$$y(t) = e^{-2t}u(t)$$

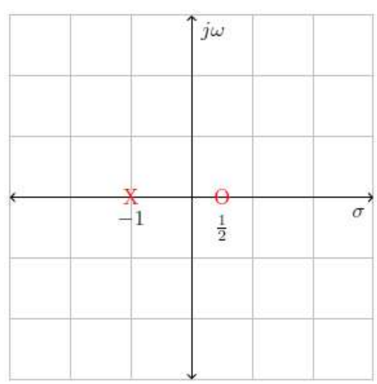
Es la salida de un sistema causal cuya función de transferencia es:

$$H(s) = \frac{s-1}{s+1}$$

a) Encuentre al menos dos posibles entradas que puedan producir la salida $y(t)$.
b) ¿Cuál es la entrada si se sabe que $\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|dt < \infty$?

59) El inverso de un sistema LTI $H(s)$ se define como un sistema que cuando se conecta en cascada con $H(s)$ da como resultado una función de transferencia total igual a la unidad o, de manera equivalente, una respuesta al impulso total que es un impulso.

a) Si $H_1(s)$ denota la función de transferencia de un sistema inverso para $H(s)$, determine la relación algebraica general entre $H(s)$ y $H_1(s)$.
b) En la siguiente figura se muestra un diagrama de polos y ceros para un sistema estable y causal $H(s)$. Determine el diagrama de polos y ceros para su sistema inverso.



60) Considere un sistema estable y causal con una respuesta al impulso real $h(t)$ y función de transferencia $H(s)$. Se sabe que $H(s)$ es racional, uno de sus polos está en $-1+j$, uno de sus ceros está en $3+j$ y tiene exactamente

dos ceros en el infinito. Para cada uno de los siguientes enunciados determine si es válido, es falso o no hay suficiente información para determinar su validez.

a) $h(t)e^{-3t}$ es absolutamente integrable.
b) La ROC para $H(s)$ es $\sigma > -1$.
c) La ecuación diferencial que relaciona la entrada $x(t)$ con la salida $y(t)$ puede escribirse en una forma que solo tenga coeficientes reales.
d) $\lim_{s\to\infty} H(s) = 1$
e) $H(s)$ no tiene más que cuatro polos.
f) $H(j\omega) = 0$ para al menos un valor finito de ω.
g) Si la entrada es $e^{3t}\sin(t)$, la salida es $e^{3t}\cos(t)$.

Respuestas

1) a) $X(s) = \frac{s-1}{s^2+3s+2}$, $\sigma > -1$
   b) $X(s) = \frac{2s^2+5s+1}{(s^2+2s+1\ )(s+2)}$, $\sigma > -1$
   c) $X(s) = \frac{(s-1)^2}{(s+1)(s-2)}$, $\sigma > 2$

2) $x(t) = [2te^{-t} - e^{-t} + 3e^{-2t}]u(t)$

3) $h(t) = e^{-(t+1)}u(t+1)$, no es causal.

4) $H(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$, $\sigma > -1$, el sistema es estable.
$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 3\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = \frac{d}{dt}x(t) + 3x(t)$$

5) $H(s) = \frac{4s}{(s+2)(s-4)}$, $\sigma > 4$

6) a) Falso.
   b) Falso.
   c) Verdadero.
   d) Verdadero.
   e) Falso.
   f) Falso.
   g) Hace falta información.

7) $x(t) = \frac{3}{50}e^{-3t} + \frac{1}{10}te^{-3t} + \frac{2}{25}\sin(t) - \frac{3}{50}\cos(t), \quad (t \geq 0)$

8) $x(t) = \frac{1}{13} + \frac{8}{5}e^{-t} - \frac{1}{65}e^{-2t}[44\cos(3t) - 27\sin(3t)], \quad (t \geq 0)$

9) $q(t) = \frac{1}{500}\left(1 - e^{-80}\ \cos(60t) - \frac{4}{3}e^{-80}\ \sin(60t)\right)$

$i(t) = \frac{1}{3}e^{-80t}\sin(60t)$

10) $i_1(t) = 4.55 - 7.49e^{-59.1t} + 2.89e^{-14.9t}$

$i_2(t) = 3.64 + 1.22e^{-59.1t} - 4.86e^{-14.9t}$

11) $I_1(s) = \frac{E_1(50+s)s}{(s^2+10^4)(s+100)^2}$

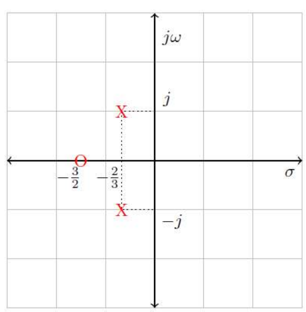
$I_2(s) = \frac{Es^2}{(s^2+10^4)(s+100)^2}$

$i_2(t) = E\left(-\frac{1}{200}e^{-100t} + \frac{1}{2}te^{-100t} + \frac{1}{200}\cos(100t)\right)$

12) $i_1(t) = 20\sqrt{\frac{1}{7}}e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}t\right)$

13) a) $\frac{2s+3}{9s^2+12s+13}$

b) $9s^2 + 12s + 13$. Es un sistema de orden 2

c) 

14) $5(e^{-2t} - e^{-3t})$

15) $i(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{RC}}, \quad i(0^+) = \frac{E}{R}$

16) a) Críticamente estable

b) Inestable

c) Estable

d) Estable

e) Inestable

17) a) -1

b) 1

c) 0

18) a) 1

b) 0

c) 3

19) a) $\frac{s}{s^2+a^2}$ $\sigma > 0$

b) $\frac{a}{s^2+a^2}$ $\sigma > 0$

c) $\pi[u(\omega+1) - u(\omega-1)]$

d) $-\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{s}{a}\right)$ $\sigma > 0$

20) a) $\sigma > -3$

b) Todo el plano s

c) $-3 < \sigma < 3$

d) $\sigma < -3$

e) No converge para ningún σ

f) $\sigma < 3$

21) $X(s) = \frac{e^{-(s+3)}}{s+3}$, ROC: $\sigma > -3$

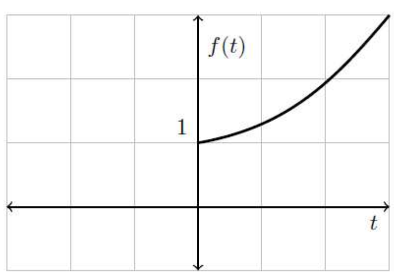
$A = 1$, $t_0 = -1$, $\sigma < -3$

22) $X(s) = \frac{1}{s+3} + \frac{1}{s+\beta}$

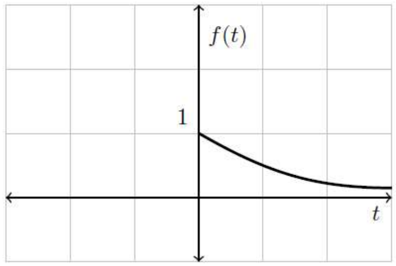
$Re\{\beta\} = 1$, $Im\{\beta\} \in \mathbb{R}$

23) Dos polos simples en $s = 1 \pm 2j$

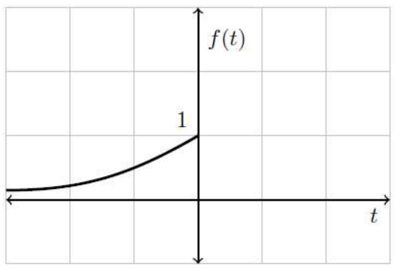
ROC: $\sigma < 1$

24) a) d) 

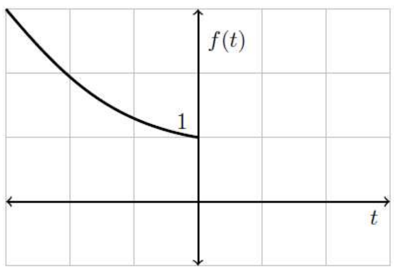
b) c)



e) h)



f) g)



25) $X(s) = \frac{1}{s+2}$, ROC: $\sigma > -2$

26) $X(s) = \frac{2s}{(s+a)(s-a)}$ para $a < 0$, ROC: $-|a| < \sigma < |a|$

27) $\frac{1}{2}X(s - j\omega_0) + \frac{1}{2}X(s + j\omega_0)$

28) a) Ceros: $s = \infty$, $s = -2$. Polos simples: $s = -1$, $s = -3$
b) Ceros: $s = \infty$. Polos simples: $s = 1$
c) Ceros: $s = 1$. Polos simples: $s = \infty$

29) a) Falso.
b) Cierto.
c) Falso.
d) Cierto.

30) Cuatro señales (dos bilaterales, una izquierda y una derecha)

31) Bilateral.

32) $x(t) = [4e^{-4t} - 2e^{-3t}]u(t)$

33) a) No es posible.
b) Si es posible.
c) Si es posible.

34) $a = -1,\ \beta = \frac{1}{2}$

35) $X(s) = \frac{4}{s^4+4}$, ROC: $-1 < \sigma < 1$

36) $X(s) = \frac{s}{s^2+4}$, ROC: $\sigma > 0$
$Y(s) = \frac{2}{s^2+4}$, ROC: $\sigma > 0$
$x(t) = \cos(2t)\,u(t)$
$y(t) = \sin(2t)\,u(t)$

37) a) $a > 0$
b) Dos polos.

38) Ninguna de las tres señales tiene transformada de Laplace.

39) a) $X_1(s) = \frac{1}{s+a},\ \ \sigma > -a$
$X_2(s) = \frac{e^s}{s+2a},\ \ \sigma > -2a$

b) $\frac{1}{a}\left[e^{-a(t+1)} - e^{-2a(t+1)}\right]u(t+1)$
c) $\frac{1}{a}\left[e^{-a(t+1)} - e^{-2a(t+1)}\right]u(t+1)$

40) a) $\frac{1}{s+2}$, ROC: $\sigma > -2$
b) $1 + \frac{e^{-6}}{s+2}$, ROC: $\sigma > -2$
c) $\frac{1}{s+4} + \frac{1}{s+2}$, ROC: $\sigma > -2$

41) $x(t) = \left[\cos(t) + \sin(t) - e^{-2t}[\cos(t) + 3\sin(t)]\right]u(t)$

42) a) $X(s) = \frac{2s+5}{s^2 5s+6},$ ROC: $\sigma > -2$
b) $X(s) = \frac{s^2+15s+}{s^3+14s^2+90s+100},$ ROC: $\sigma > -4$

c) $X(s)=\frac{5-2s}{s^2-5s+6}$, ROC: $\sigma<2$

d) $X(s)=\frac{-8s}{s^4-8s^2+16}$, ROC: $-2<\sigma<2$

e) $X(s)=\frac{2s^2+8}{s^4-8s^2+1}$, ROC: $-2<\sigma<2$

f) $X(s)=\frac{1}{(s-2)^2}$, ROC: $\sigma<2$

g) $X(s)=\frac{1-e^{-s}}{s}$, ROC: todo el plano s

h) $X(s)=\frac{1+e^{-2}(2s-2)+e^{-2s}(1-2s)}{s^2}$, ROC: todo el plano s

i) $X(s)=\frac{s+1}{s}$, ROC: $\sigma>0$

j) $X(s)=\frac{s+1}{s}$, ROC: $\sigma>0$

43) a) $\frac{1}{3}\sin(3t)\,u(t)$

b) $-\cos(3t)\,u(-t)$

c) $-e^{-t}\cos(3t)\,u(-t)$

d) $e^{-3t}u(-t)+2e^{-4t}u(t)$

e) $e^{-2t}u(-t)+2e^{-3t}u(t)$

f) $\delta(t)+2\sqrt{3}e^{\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{\pi}{2}\right)u(t)$

g) $\delta(t)+3e^{-t}(t-1)u(t)$

44) a) $\begin{Bmatrix}\sigma>2 & \sigma>-2\\ \sigma>2 & todo\ s\end{Bmatrix}$

b) $\begin{Bmatrix}-1<\sigma<2 & \sigma>-1\\ -1<\sigma<2 & \sigma>-1\end{Bmatrix}$

c) $\begin{Bmatrix}\sigma<-2 & \sigma<-2\\ \sigma<2 & todo\ s\end{Bmatrix}$

d) $\begin{Bmatrix}\sigma>2 & \sigma>-2\\ \sigma>2 & todo\ s\end{Bmatrix}$

45) $Y(s)=\left[\frac{e^{-2s}}{s+2}\right]\left[\frac{e^{-3s}}{3-s}\right]$, ROC: $-2<\sigma<3$

46) $X(s)=\frac{16}{s^2+2s+2}$, ROC: $\sigma>-1$

47) a) $\sigma<-2$

$-2<\sigma<-1$

$-1<\sigma<1$

$\sigma>1$

b) Inestable y anticausal

Inestable y bilateral (no causal)

Estable y bilateral (no causal)

Inestable y causal

48) a) $X(s) = \frac{1}{s+1}$, ROC: $\sigma > -1$

$H(s) = \frac{1}{s+2}$, ROC: $\sigma > -2$

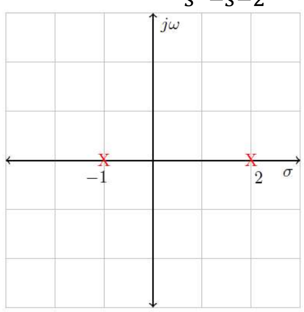
b) $Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$, ROC: $\sigma > -1$

c) $y(t) = [e^{-t} - e^{-2t}]u(t)$

d) $y(t) = [e^{-t} - e^{-2t}]u(t)$

49) $x(t) = 2u(t) + 4e^{-3t}u(t)$

50) a) $H(s) = \frac{1}{s^2-s-2}$



b) b.1) $h(t) = -\frac{1}{3}e^{2t}u(-t) - \frac{1}{3}e^{-t}u(t)$

b.2) $h(t) = \frac{1}{3}e^{2t}u(t) - \frac{1}{3}e^{-t}u(t)$

b.3) $h(t) = -\frac{1}{3}e^{2t}u(-t) + \frac{1}{3}e^{-t}u(-t)$

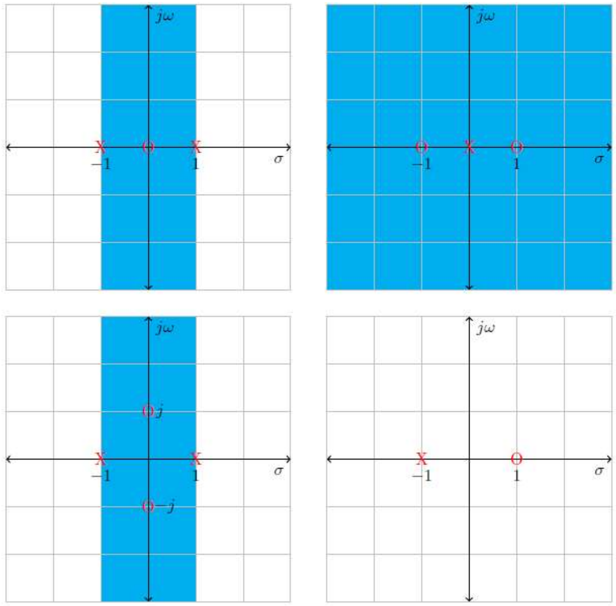
51) $y(t) = \frac{2}{5}e^{t}u(-t) + \frac{2\sqrt{5}}{5}e^{-t}\cos(t - 1.107)\,u(t)$

52) $H(s) = \frac{s}{s^2+2s+2}$, ROC: $\sigma > -1$

53) a) $y(t) = \left[\frac{1}{6}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t} - \frac{1}{6}e^{-4t}\right]u(t)$

b) $y(t) = e^{-t}u(t)$

c) $y(t) = \left[\frac{7}{6}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t} - \frac{1}{6}e^{-4t}\right]u(t)$

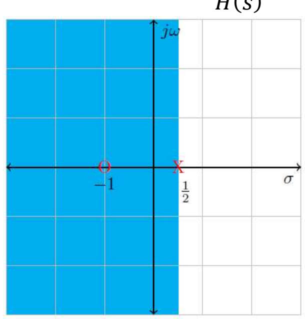
54) 

55) a) Sí, también es estable y causal.
b) Sí, es causal e inestable.

56) a) $X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\ (1+s)}$, ROC: todo el plano s.
b) No tiene polos ni ceros.

57) a) $H(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)}$, ROC: $\sigma > -1$
b) $h(t) = [-e^{-t} + 2e^{-2t}]u(t)$

58) a) $x_1(t) = \left[\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{t}\right]u(t)$
$x_2(t) = \left[\frac{1}{3}e^{-2t}\right]u(t) - \left[\frac{2}{3}e^{t}\right]u(-t)$
b) $x(t) = \left[\frac{1}{3}e^{-2t}\right]u(t) - \left[\frac{2}{3}e^{t}\right]u(-t)$

59) a) $H_1(s) = \frac{1}{H(s)}$
b) 

60) a) Verdadero.
b) Falso.

c) Verdadero.
d) Falso.
e) Verdadero.
f) Falso.
g) Falso.