TUTORÍA 3. Series complejas

Wendy Gómez Ramírez
2017109745

Ejercicio 1

Sea la función: $f(z) = \dfrac{\cos(z+1)}{z(z+1)(z-1)(z^2-6z+25)}$

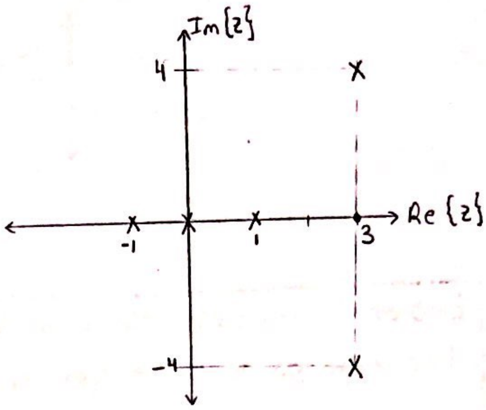
Indique cuantos posibles desarrollos de Laurent centrados en $z_0=3$ existen para $f(z)$ y las correspondientes regiones de convergencia.

$z^2-6z+25$

$\Delta = b^2-4ac = (-6)^2-4(1)(25) = 36-100 = -64$

$z = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{6 \pm \sqrt{-64}}{2(1)} = \dfrac{6 \pm 8j}{2} = 3 \pm j4$

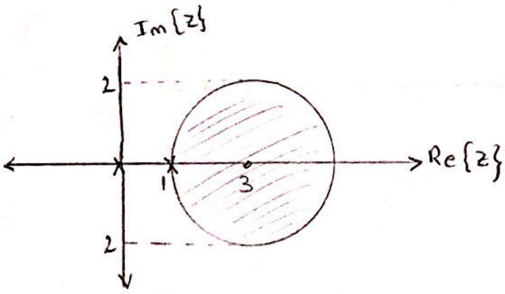
$f(z) = \dfrac{\cos(z+1)}{z(z+1)(z-1)(z+3+j4)(z+3-j4)}$



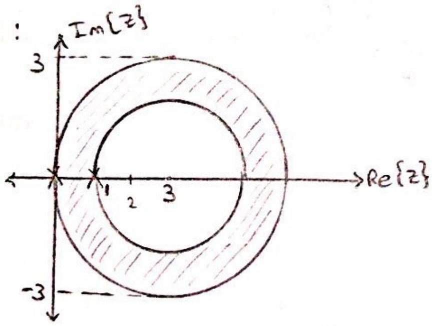
Pueden existir 4 desarrollos de Laurent

Los cuales son

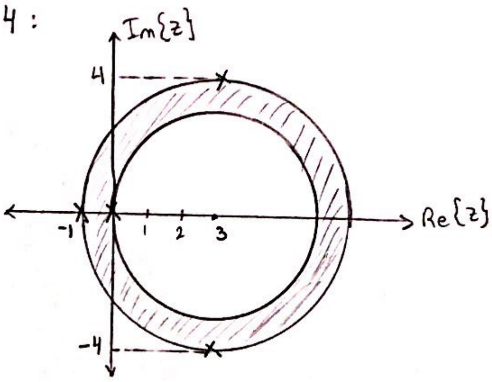
→ $|z-3| < 2$:



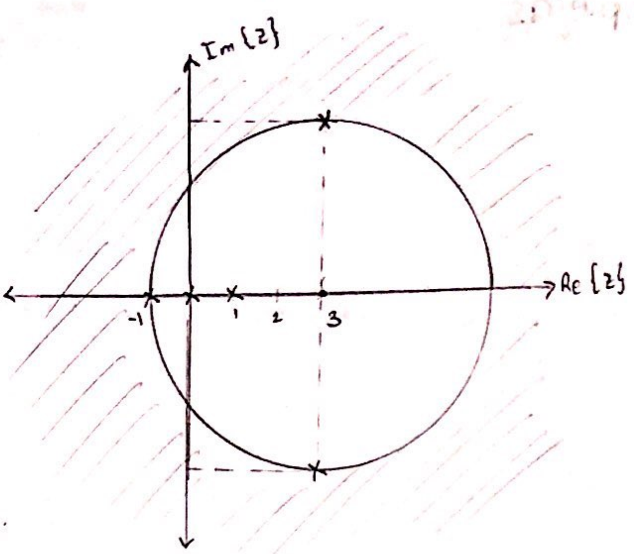
→ $2 < |z-3| < 3$:



→ $3 < |z-3| < 4$:



$\rightarrow |z-3|>4$



$\Rightarrow$ Existen 4 posibles desarrollos de Laurent centrados en $z_0=3$ con regiones de convergencia:

- $|z-3|<2$
- $2<|z-3|<3$
- $3<|z-3|<4$
- $4<|z-3|$

Ejercicio 2

Encuentre la representación en serie de potencias de la función:

$$f(z) = \frac{1}{z-j}$$

En las regiones:

a) $|z| < 1$

b) $|z| > 1$

c) $1 < |z-1-j| < \sqrt{2}$

a) Para $|z|<1$ $\longrightarrow$ región interior

$$\begin{array}{l|l} 1 & -j+z \\ \hline -(1+jz) & j + z - jz^2 - z^3 + jz^4 \\ \hline -jz & \\ -(-jz+z^2) & \\ \hline -z^2 & \\ -(-z^2 - jz^3) & \\ \hline jz^3 & \\ -(jz^3 - z^4) & \\ \hline z^4 & \\ -(z^4 + jz^5) & \\ \hline -jz^5 & \end{array}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} j^{n+1} z^n (-1)^n$$

a) $\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n j^{n+1} z^n \text{ para la región } |z|<1}$

b) Para $|z|>1$ $\rightarrow$ región exterior

$$\begin{array}{l|l} 1 & z-j \\ \hline -\left(1 - \frac{j}{z}\right) & \frac{1}{z} + \frac{j}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \frac{j}{z^4} \\ \hline \frac{j}{z} & \\ -\left(\frac{j}{z} + \frac{1}{z^2}\right) & \\ \hline -\frac{1}{z^2} & \\ -\left(-\frac{1}{z^2} + \frac{j}{z^3}\right) & \\ \hline -\frac{j}{z^3} & \\ -\left(\frac{-j}{z^3} + \frac{-1}{z^4}\right) & \end{array}$$

b/ $\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{j^n}{z^{n+1}} \quad \text{para la región } |z|>1}$

c/ Para $1 < |z-1-j| < \sqrt{2}$

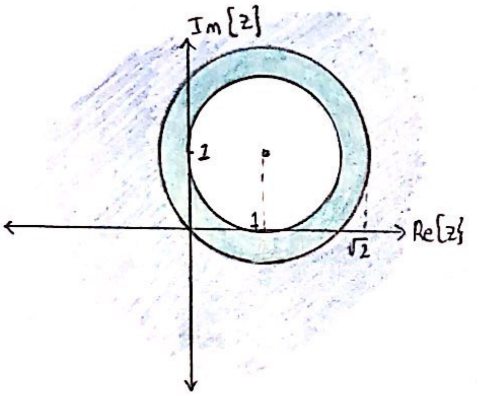
$$f(z) = \frac{1}{z-j}$$

$$z_0 = (1+j)$$

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{(z-z_0)-(a-z_0)} = \frac{1}{z_i - a_i}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z-j} = \frac{1}{(z-1-j)-(j-1-j)} = \frac{1}{(z-1-j)+1} = \frac{1}{z_i+1} \quad \text{con } z_i = z-1-j$$

$$f(z) = \frac{1}{z_i+1}$$



La región $1<|z-1-j|<\sqrt{2}$ es parte de la región $1<|z-1-j|$ por lo que se puede calcular para esto

→ Para $1<|z-1-j|$ ← región exterior

$$\begin{array}{r|l} 1 & z_i+1 \\ \hline -\left(1+\frac{1}{z_i}\right) & \frac{1}{z_i} - \frac{1}{z_i^2} + \frac{1}{z_i^3} \\ \hline -\frac{1}{z_i} & \\ -\left(-\frac{1}{z_i} - \frac{1}{z_i^2}\right) & \\ \hline \frac{1}{z_i^2} & \\ -\left(\frac{1}{z_i^2} + \frac{1}{z_i^3}\right) & \\ \hline -1/z_i^3 & \end{array}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z_i)^{-n-1} \; ; \quad 1<|z-1-j|<\sqrt{2}$$

c/ $\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1-j)^{-n-1} \quad \text{para la región } 1<|z-1-j|<\sqrt{2}}$

Ejercicio 3

Encuentre el desarrollo en serie de Taylor para la siguiente función:

$$\frac{1}{z(z-4j)}$$

Centrado en el punto $z_0 = 2j$

$$\frac{1}{z(z-4j)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{(z-4j)}$$

$$A = \lim_{z\to 0} z \cdot \frac{1}{z(z-4j)} = \frac{1}{0-4j} = \frac{j}{4}$$

$$B = \lim_{z\to 4j} (z-4j) \cdot \frac{1}{z(z-4j)} = \frac{1}{4j} = -\frac{j}{4}$$

$$f(z) = \frac{1}{z(z-4j)} = \frac{\frac{j}{4}}{z} - \frac{\frac{j}{4}}{(z-4j)} = \frac{j}{4z} - \frac{j}{4(z-4j)}$$

- Para el punto $z_0 = 2j$:

$$f(z_0) = \frac{j}{8j} - \frac{j}{4(2j-4j)} = \frac{1}{8} - \frac{j}{-8j} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$f'(z_0) = \frac{-j}{4z^2} + \frac{j}{4(z-4j)^2} = \frac{-j}{4(2j)^2} + \frac{j}{4(2j-4j)^2} = \frac{-j}{-16} + \frac{j}{-16} = 0$$

$$f''(z_0) = \frac{j2}{4z^3} - \frac{j\,2}{4(z-4j)^3} = \frac{j}{2z^3} - \frac{j}{2(z-4j)^3} = \frac{j}{2(2j)^3} - \frac{j}{2(2j-4j)^3} = \frac{-1}{16} - \frac{1}{16} = \frac{-2}{16} = \frac{-1}{8}$$

$$f'''(z_0) = \frac{-3j}{2z^4} + \frac{3j}{2(z-4j)^4} = \frac{-3j}{2(2j)^4} + \frac{3j}{2(2j-4j)^4} = \frac{-3j}{32} + \frac{3j}{32} = 0$$

$$f^{IV}(z_0) = \frac{12j}{2z^5} - \frac{12j}{2(z-4j)^5} = \frac{6j}{z^5} - \frac{6j}{(z-4j)^5} = \frac{6j}{(2j)^5} - \frac{6j}{(2j-4j)^5} = \frac{6j}{32j} + \frac{6j}{32j} = \frac{3}{16} + \frac{3}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

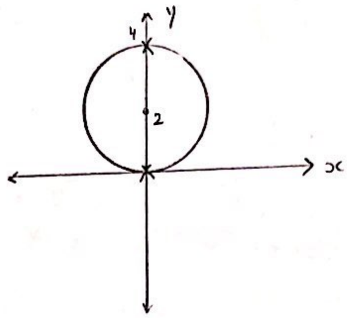
$\Rightarrow$ El desarrollo para la función en serie de Taylor es:

$$f(z)=\frac{1}{z(z-4j)}=\frac{1}{4}+(z-2j)\cdot 0-\frac{1}{8}\cdot\frac{(z-2j)^2}{2!}+0\cdot\frac{(z-2j)^3}{3!}+\frac{3}{8}\,\frac{(z-2j)^4}{4!}-\dots$$

$$\boxed{f(z)=\frac{1}{z(z-4j)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\cdot\frac{(z-2j)^2}{2!}+\frac{3}{8}\cdot\frac{(z-2j)^4}{4!}-\dots}$$

———o———

OTRA FORMA DE RESOLVER El EJERCICIO (Tutorías):



$$f(z)=\frac{1}{z(z-4j)}$$

$$f(z)=\frac{A}{z}+\frac{B}{z-4j}$$

$$A=\lim_{z\to 0} z\cdot f(z)=\frac{1}{-4j}=\frac{j}{4}$$

$$B=\lim_{z\to 4j}(z-4j)\cdot f(z)=\frac{1}{4j}=\frac{-j}{4}$$

$$f(z)=\frac{j}{4z}+\frac{-j}{4(z-4j)}=\frac{j}{4}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z-4}\right)$$

Por formulario: $\frac{1}{z-a}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(a-z_0)^{n+1}}$; $|z-z_0|<|a-z_0|$ con $z_0=2j$

$$\frac{1}{z}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2j)^n}{(-2j)^{n+1}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{j}{2}\right)^{n+1}(z-2j)^n$$

$$\frac{1}{z-4}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2j)^n}{(4j-2j)^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{j}{2}\right)^{n+1}(z-2j)^n$$

$$\frac{1}{z(z-4j)}=\frac{j}{4}\left[-\sum_{n=0}^{\infty}(z-2j)^n\left(\frac{j}{2}\right)^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{j}{2}\right)^{n+1}(z-2j)^n\right]=\frac{j}{4}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\left(\frac{j}{2}\right)^{n+1}(z-2j)^n+(-1)^{n+1}\left(\frac{j}{2}\right)^{n+1}(z-2j)^n\right)\right]$$

$$=\frac{j}{4}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{j}{2}\right)^{n+1}\left[-1+(-1)^{n+1}\right](z-2j)^n\right]$$

$$\boxed{\frac{1}{z(z-4j)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{j^n}{2^{n+3}}\left[1+(-1)^n\right](z-2j)^n}$$

Ejercicio 4

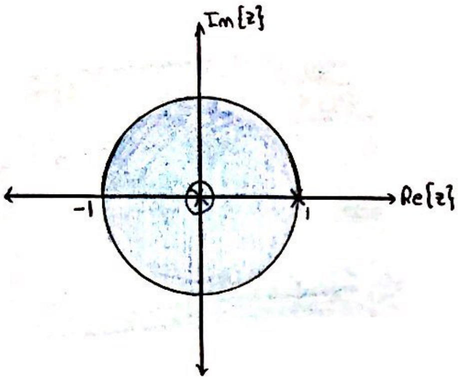
Encuentre la serie de Laurent para:

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)^2}$$

Alrededor de $z_0=0$ y $z_0=1$, especifique los posibles regiones de convergencia para cada caso.

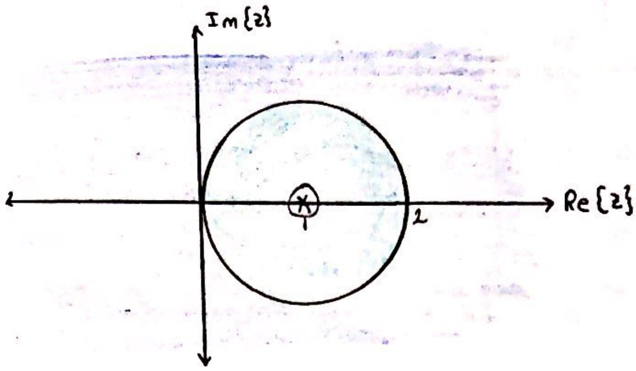
$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{(z-1)^2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z^2-2z+1}$$

PARA $z_0=0$:



- $0<|z|<1$
- $|z|>1$

PARA $z_0=1$



- $0<|z-1|<1$
- $|z-1|>1$

→ Para $0<|z|<1$:

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z^2-2z+1}$$

$$\begin{array}{l|l}
1 & 1-2z+z^2 \\ \hline
-(1-2z+z^2) & 1+2z+3z^2 \\
\quad 2z-z^2 & \\
\quad -(2z-4z^2+2z^3) & \\
\qquad 3z^2-2z^3 & \\
\qquad -(3z^2-6z^3+3z^4) & \\
\qquad\quad 4z^3-3z^4 &
\end{array}$$

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot (1+2z+3z+\dots)$$

$$f(z) = \frac{1}{z} + 2 + 3z + \dots$$

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, z^{n-1} \; ; \; 0<|z|<1}$$

→ Para $|z|>1$:

$$f(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{(z-2)^2}$$

$$\frac{1}{z-a}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n}$$

$$\frac{-1}{(z-a)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-n\,(a-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^{n+1}}$$

$$\frac{1}{(z-1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{z^{n+1}}$$

$$f(z)=\frac{1}{z}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{z^{n+1}}$$

$$\boxed{f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{z^{n+2}}\quad \text{para } |z|>1}$$

→ Para $0<|z-1|<1$:

$$\frac{1}{z-a}=\frac{1}{(z-z_0)-(a-z_0)}=\frac{1}{z_i-a_i}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z-1}=\frac{1}{(z-1)-(1-1)}=\frac{1}{(z-1)}=\frac{1}{z_i}\quad \text{con } z_i=z-1$$

$$f(z)=\frac{1}{z_i-1}\cdot\frac{1}{z_i}$$

$$\begin{array}{l|l}
1 & -1+z_i \\ \hline
-(1-z_i) & -1-z_i-z_i^2-z_i^3 \\
\quad z_i & \\
-(z_i-z_i^2) & \\
\quad z_i^2 & \\
-(z_i^2-z_i^3) & \\
\quad z_i^3 &
\end{array}$$

$$f(z)=\frac{1}{z_i}\cdot(-1-z_i-z_i^2-z_i^3-\dots)$$

$$f(z)=\frac{-1}{z_i}-1-z_i-z_i^2-\dots$$

como $z_i=z-1$

$$\Rightarrow f(z)=\frac{-1}{z-1}-1-(z-1)-(z-1)^2-\dots$$

$$\boxed{f(z)=\sum_{n=-1}^{\infty}-(z-1)^n\quad \text{para } 0<|z-1|<1}$$

→ Para $|z-1|>1$: $f(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{(z-2)^2}$

Por Formulario:

$$\frac{1}{z-a}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n}\implies\frac{1}{z}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(z-1)^n}$$

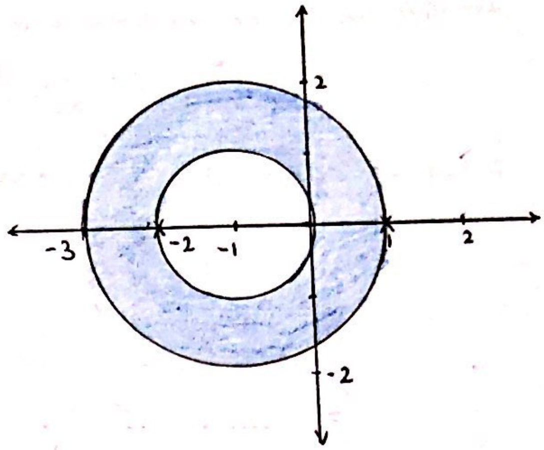
$$\boxed{f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z(z-1)^n}\quad \text{para } |z-1|>1}$$

Ejercicio 5

Encuentre la serie de Laurent para

$$F(z) = \frac{1}{(z-1)(z+2)}$$

Centrada alrededor de $z_0 = -1$ para la región de convergencia anular



Región de convergencia

$$1 < |z-1| < 2$$

$$\frac{1}{(z-1)(z+2)} = \frac{A}{(z-1)} + \frac{B}{(z+2)}$$

$$A = \lim_{z\to 1} (z-1) \cdot \frac{1}{(z-1)(z+2)} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$$

$$B = \lim_{z\to -2} (z+2) \cdot \frac{1}{(z-1)(z+2)} = \frac{1}{-2-1} = \frac{-1}{3}$$

$$f(z) = \frac{1}{3}\left[\underbrace{\frac{1}{z-1}}_{\text{Región interna}} - \underbrace{\frac{1}{z+2}}_{\text{región externa}}\right]$$

Serie de Laurent:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-c)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$$

Por formulario : $z_0 = -1$

$$\frac{1}{z-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{2^{n+1}}$$

$$\frac{-1}{z+2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2+1)^{n-1}}{(z+1)^n}$$

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3(z+1)^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{3 \cdot 2^{n+1}}}$$

Ejercicio 6

Se sabe que una función $f(z)$ se puede expandir en una serie de potencias centrada en $z_0=1$ de la forma: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n$

Para todo z dentro de la región de convergencia $|z-1| < \frac{1}{2}$

Indique cuál región de convergencia tiene la serie:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{2}\,\frac{z+1}{z-1}\right)^n$$

Si los coeficientes a_n son los mismos en ambas series

$$w-1 = \frac{1}{2}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$$

$a_n = 0 \ \forall n < 0$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (w-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (w-1)^n$$

$$|w-1| < \frac{1}{2}$$

$$\left|\frac{1}{2}\,\frac{z+1}{z-1}\right| < \frac{1}{2}$$

$$|z+1| < |z-1|$$