Ernesto Pocasangre Kreling
2019084090

Modelos de sistemas Gr 1
2021

- **Ejercicio #1.** Describa en el plano w la imagen de la recta $x = \beta$ (β *constante*) del plano z bajo el mapeo $w = z^2$

$w = z^2$ y $z = \beta + jy \rightarrow w = (\beta + jy)^2 = \beta^2 + 2\beta y j - y^2$

* como $w = u + jv$ se tiene

$$u = \beta^2 - y^2 \quad (1)$$

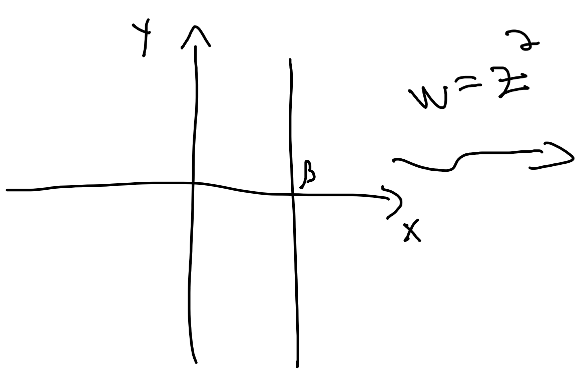
$$v = 2\beta y \rightarrow y = \frac{v}{2\beta} \quad (2)$$

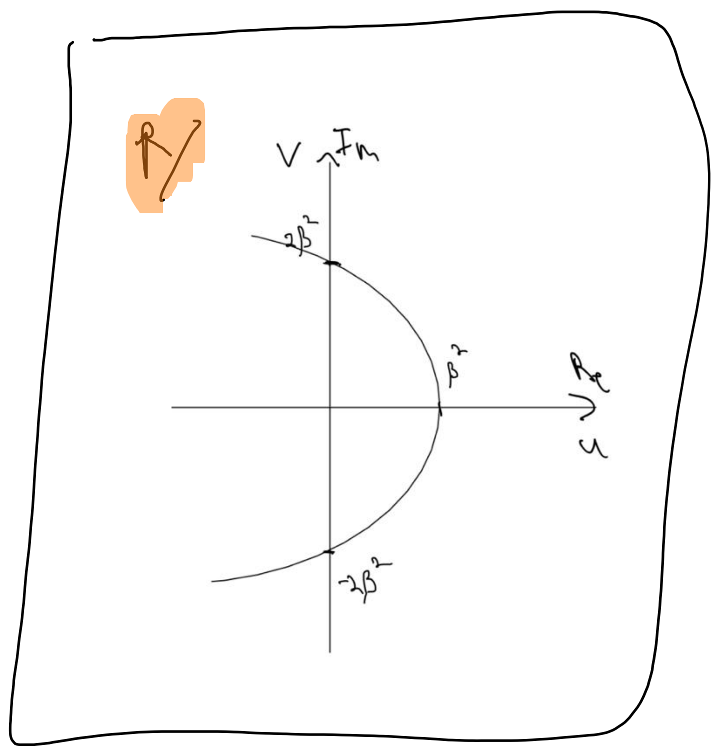
$(1) \leftarrow (2)$

$$u = \beta^2 - \left(\frac{v}{2\beta}\right)^2 = \beta^2 - \frac{v^2}{4\beta^2}$$

* Para $v = 0 \rightarrow u = \beta^2$

* Para $u = 0 \rightarrow v = \pm 2\beta^2$





- **Ejercicio #2.** Encuentre a qué corresponde en el plano w la región del plano $z = x + jy$ dada por $y \geq 0$ bajo el mapeo:

$$w = f(z) = e^{j\theta} \frac{z - z_0}{z - z_0^*}$$

Encuentre los valores particulares de θ y z_0 si se cumple que $f(j) = 0$ y $f(\infty) = -1$

$$\boxed{z_0 = x_0 + y_0 j}$$

$\frac{z - z_0}{z - z_0^*}$ es mapeo Bilineal $\quad w_1 = \frac{az + b}{cz + d}$

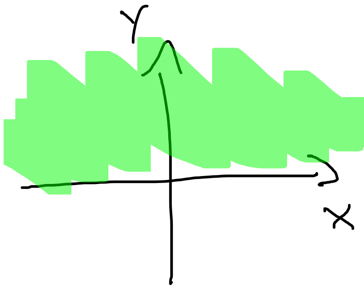
$\therefore$ se tiene $a = c = 1$ y $b = -z_0$ y $d = -z_0^*$

$\therefore$ $\lambda = \frac{a}{c} = 1$; $\alpha = c^2 = 1$; $\beta = cd = -z_0^*$; $\mu = bc - ad$
$= -z_0 + z_0^*$
$= -2y_0 j$

$$w_1 = \lambda + \frac{\mu}{\alpha z + \beta} = \frac{-2y_0 j}{z - z_0^*} + 1$$

1. $z_1 = z - z_0^* = z - x_0 + j y_0$
2. $z_2 = \frac{1}{z_1}$
3. $w_1 = -2y_0 j \cdot z_2 + 1$
4. $w = e^{j\theta} w_1$

Ernesto Pocasangre Kreling
2019084090

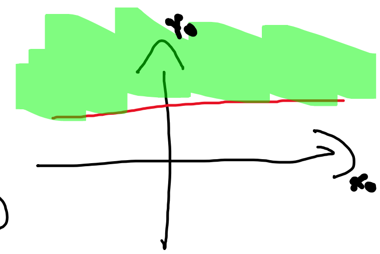


$y \geq 0$

1° mapeo

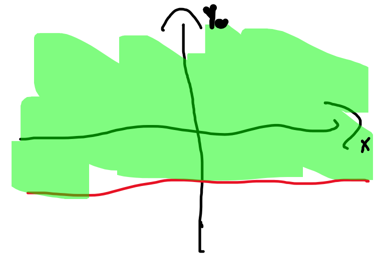
x_0 no afecta

$Y_0 > 0$



$|z_1| \geq |z_1 - j2y_0|$

$Y_0 < 0$



$|z_1| \leq |z_1 - j2y_0|$

2° mapeo (Inv)

$$\beta = |a|^2 - |b|^2 = 0^2 - |j2y_0|^2 = -4y_0^2$$

$\beta \neq 0 \rightarrow$ círculo

$$w_0 = \frac{(a-b)^*}{\beta} = \frac{(0-j2y_0)^*}{-4y_0^2} = \boxed{\frac{-j}{2y_0}}$$

$$r_w = \left|\frac{a-b}{\beta}\right| = \left|\frac{0-j2y_0}{4y_0^2}\right| = \boxed{\frac{1}{2|y_0|}}$$

~ para casos anteriores ~

si $y_0 > 0$

$$\left|z_2 + \frac{j}{2y_0}\right| < \frac{1}{2|y_0|}$$

ya que la región de z_1 no incluye el "0"

si $y_0 < 0$

$$\left|z_2 + \frac{j}{2y_0}\right| > \frac{1}{2|y_0|}$$

ya que la región de z_1 incluye el "0" entonces $\frac{1}{z_1} \rightarrow \infty$

Ernesto Pocasangre Kreling
2019084090

$$w_1 = -2jY_0 Z_2 + 1$$

$$\to Z_2 = \frac{w_1 - 1}{-2jY_0}$$

se reemplaza

$$\left|\frac{w_1 - 1}{-2jY_0} + \frac{j}{2Y_0}\right| \; ? \; \frac{1}{2|Y_0|}$$

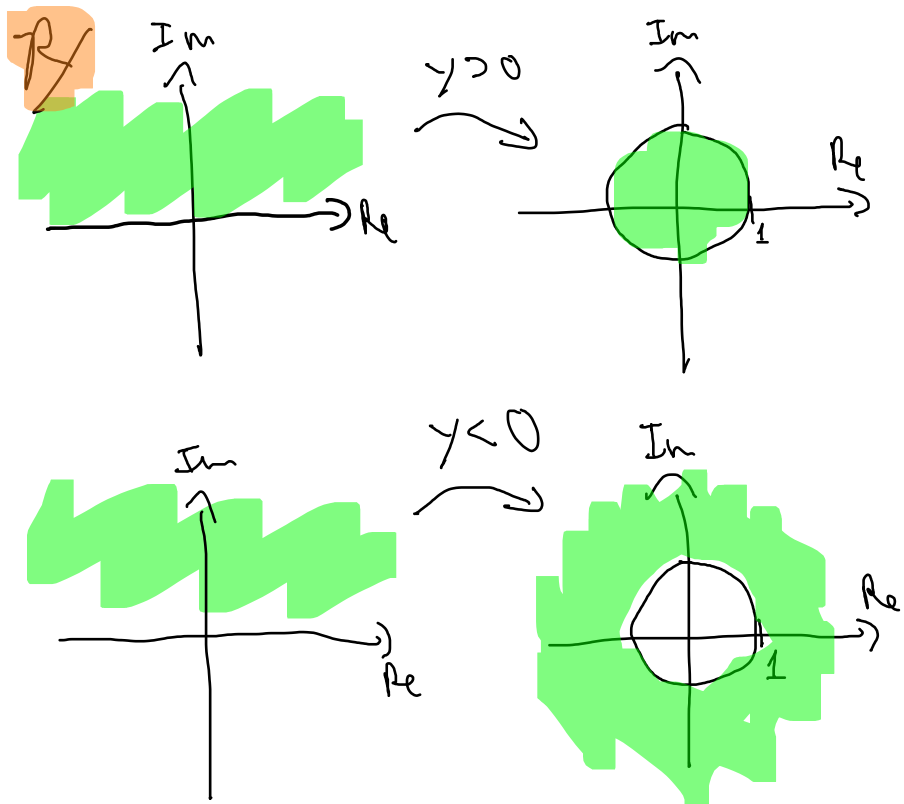
$$\left|\frac{w_1 - 1 + 1}{-2jY_0}\right| = \frac{1}{2|Y_0|}$$

$$\boxed{|w_1| = 1}$$

si $Y_0 > 0$: $|w_1| < 1$

si $Y_0 < 0$: $|w_1| > 1$

R/



* Si $f(j) = 0$

$$0 = e^{j\theta}\frac{z - z_0}{z - z_0^*} \to z = z_0 = j$$

* Si $f(\infty) = -1$

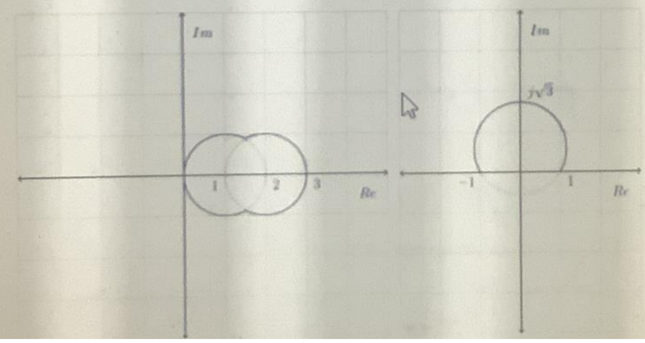
$$\lim_{z\to\infty} e^{j\theta}\cancel{\frac{z - z_0}{z - z_0^*}}^{\,1} \to e^{j\theta} = -1$$

$$\theta = \pi$$

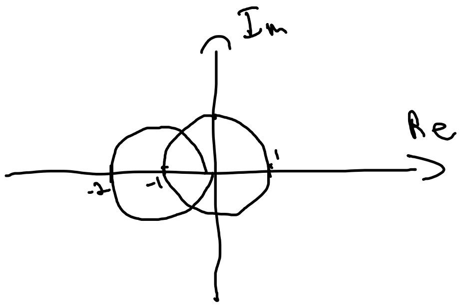
R/ $z_0 = j$

$\theta = \pi$

- **Ejercicio #3.** Encuentre un mapeo bilineal $w = f(z)$ que transforme la curva A del plano z mostrada a la izquierda de la siguiente figura, en la curva B del plano w mostrada a la derecha, si se sabe que la sección de la curva A ubicada sobre $|z-1| = 1$ es transformada en el segmento de recta que une -1 y 1 en el plano w.



Se hace la traslación $z_1 = z - 2$



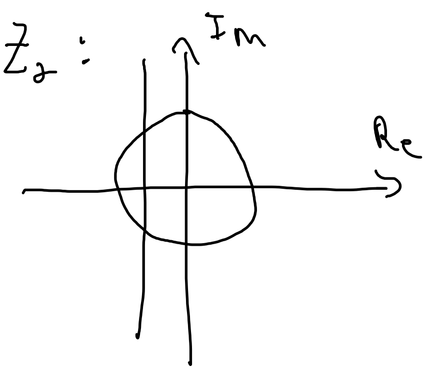
Se hace el mapeo de inversión $z_2 = \frac{1}{z_1}$

$\rightarrow |z_1| = 1 \rightarrow |z_2| = 1$

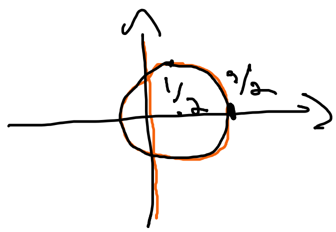
$\rightarrow |z_1 + 1| = 1 \xrightarrow{\text{a recta}} v = \frac{x_0}{y_0} u - \frac{1}{2y_0}$

$\rightarrow 0 = x_0 u - \frac{1}{2} \rightarrow u = -1/2$

$\therefore z_2 :$



$Z_3 = Z_2 + \frac{1}{2}$ * se traslada a la derecha



$\frac{3}{2} \cdot r = \sqrt{3}$

$r = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$$Z_4 = e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot Z_3 = W$$

$$W = \frac{2\sqrt{3}}{3} e^{j\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{z-2} + \frac{1}{2} \right]$$

R/

$$\boxed{W = \frac{2\sqrt{3}}{3} e^{j\pi/2} \left[\frac{1}{z-2} + \frac{1}{2} \right]}$$

- **Ejercicio #4.** ¿Para qué valores de a y b es la función de variable compleja analítica?

$$f(z) = x^2 + ay^2 - 2xy + j(bx^2 - y^2 + 2xy)$$

Para que sea analítica debe cumplir con Cauchy-Riemann

$$u = x^2 + ay^2 - 2xy$$
$$v = bx^2 - y^2 + 2xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2y \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2ya - 2x$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2xb + 2y \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -2y + 2x$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow 2x - 2y = 2x - 2y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow 2ya - 2x = -[2xb + 2y]$$

$$\therefore -2y = 2ya \qquad \therefore -2x = -2xb$$

$$\underline{\underline{a = -1}} \qquad \underline{\underline{b = 1}}$$

$$\boxed{R/\ a = -1 \quad b = 1}$$

- **Ejercicio #5.** ¿En qué puntos del plano z el mapeo $w = z^3 + 2z^2$ no es conforme?

Es conforme si $\exists f'(z)$ y $f'(z) \neq 0$

$$w' = 3z^2 + 4z$$

$$w' = 0 = z(3z + 4)$$

$$\therefore \boxed{z = 0} \quad y \quad 3z + 4 = 0 \quad \boxed{z = \frac{-4}{3}}$$

R/ w no es conforme en $z = 0$ o $z = \frac{-4}{3}$

Ernesto Pocasangre Kreling
2019084090

- **Ejercicio #6.** Demuestre que $u(x,y) = e^x(x\cos(y) - y\sin(y))$ es una función armónica y encuentre una función conjugada armónica $v(x,y)$. Escriba $f(z = x + jy) = u(x,y) + jv(x,y)$ en términos de z.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x[x\cos y - y\sin y] + e^x\cos y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^x[x\cos y - y\sin y] + e^x\cos y + e^x\cos y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^x[-x\,\text{sen}\,y - [\sin y + y\cos y]]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^x[-x\cos y - \cos y - \cos y + y\,\text{sen}\,y]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{comprobar}$$

$$\cancel{e^x}[x\cos y - y\sin y] + \cancel{e^x}\cos y + \cancel{e^x}\cos y + \cancel{e^x}[-x\cos y - 2\cos y + y\,\text{sen}\,y] = 0$$

$$\cancel{x\cos y} \cancel{- y\sin y} \cancel{+ 2\cos y} \cancel{- x\cos y} \cancel{- 2\cos y} \cancel{+ y\sin y} = 0$$

$$0 = 0 \quad \blacksquare$$

Ernesto Pocasangre Kreling
2019084090

si cumple Cauchy-Riemann es harmonica

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \wedge \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

se tiene

$$e^x[x\cos y - y\,\mathrm{sen}\,y + \cos y] = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\int e^x[x\cos y - y\,\mathrm{sen}\,y + \cos y]\,dy = \int \frac{dv}{dy}\,dy$$

$$e^x[x\,\mathrm{sen}\,y + \cancel{\mathrm{sen}\,y} - (-y\cos y + \cancel{\mathrm{sen}\,y})] + F(x) = v$$

ahora

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x[x\,\mathrm{sen}\,y + y\cos y] + e^x[\mathrm{sen}\,y] + F'(x)$$

y se cumple

$$= -\{e^x(-x\,\mathrm{sen}\,y - \mathrm{sen}\,y - y\cos y)\}$$

$$\boxed{\therefore F'(x) = 0} \Rightarrow F(x) = K$$

$$\boxed{V_{(x,y)} = e^x\left[x\,\text{sen}\,y + y\cos y\right] + K \;;\quad K \in \mathbb{C}}$$

$$f_{(z)} = u + jV$$

$$= e^x\left[x\cos y - y\,\text{sen}\,y\right] + j e^x\left[x\,\text{sen}\,y + y\cos y\right] + jK$$

$$= e^x\left[x\left(\cos y + j\,\text{sen}\,y\right) - y\left(\text{sen}\,y - j\cos y\right)\right] + jK$$

$$= e^x\left[x\left(\cos y + j\,\text{sen}\,y\right) + jy\left(\cos y + j\,\text{sen}\,y\right)\right] + jK$$

$$= e^x e^{jy}(x + jy) + jK = z e^z + jK$$

$$\therefore \quad f_{(z)} = z e^z + jK$$

$$K \in \mathbb{C}$$