Guia de estudio semana 8 y 9- Series de Fourier

EL-5002 Modelos de Sistemas para Mecatrónica

1. Busque al menos tres ejemplos de conjuntos de funciones mutuamente ortogonales.
2. Defina las funciones escalón e impulso unitarios continuas.
3. Un concepto primordial en el análisis de señales y sistemas es la transformación de una señal, por lo que es útil recordar transformaciones de señales fundamentales (composición o manipulación de funciones). Para la transformación de la variable independiente de una señal, defina los siguientes casos:
    a. Corrimiento en el tiempo
    b. Inversión en el tiempo
    c. Escalamiento en el tiempo
4. Enuncie la representación de una señal de energía finita por medio de la serie exponencial de Fourier. Especifique claramente:
    a. El conjunto de funciones ortogonales utilizadas.
    b. El intervalo en que se cumple con la condición de ortogonalidad.
    c. El cálculo de los coeficientes de la serie de Fourier exponencial
    d. Armónicos
5. ¿Se puede extender el resultado anterior a señales periódicas? Explique
6. Encuentre la representación de $f(t)$ en términos de la serie exponencial de Fourier, cuando en un periodo se tiene que:
$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ -1 & 1 < t < 2 \end{cases}$$
7. La serie de Fourier trigonométrica se utiliza para representar una función de variable real usando un conjunto de funciones de variable real. Deduzca a partir de la serie exponencial de Fourier su representación trigonométrica. Especifique claramente:
    a. El conjunto de funciones ortogonales utilizadas
    b. El intervalo en que se cumple con la condición de ortogonalidad
    c. El cálculo de los coeficientes de la serie de Fourier trigonométrica.
    d. La relación entre los coeficientes de la serie exponencial con los coeficientes de la serie trigonométrica de Fourier
8. Represente en una serie de Fourier trigonométrica la función periódica, definida en el intervalo $(0,2)$ como $f(t) = t^2$
9. Deduzca la representación de la serie trigonométrica de Fourier compacta (también conocida como la serie cosenoidal de Fourier). Indique las relaciones entre los coeficientes de esta representación y la representación exponencial de la serie de Fourier.
10. ¿Cuándo converge la serie de Fourier?

11. Una señal periódica continua $x(t)$ es de valor real y tiene un periodo fundamental de T= 8s.Los coeficientes de la serie exponencial de Fourier diferentes de cero para $x(t)$ son:

$$F_1 = F_1^* = 2$$
$$F_3 = F_3^* = 4j$$

Exprese $x(t)$ de la forma:

$$x(t\ ) = \sum_{K=0}^{\infty} C_K\ cos(\omega_K\ t + \varphi_K)$$

12. Indique la simetría de onda par e impar.
13. El análisis de simetría nos permite determinar que términos están ausentes de la serie de Fourier y simplificar las expresiones de los términos restantes. Deduzca las propiedades de la serie de Fourier si la señal tiene simetría de onda par o impar.
14. Defina que es simetría de media onda y como afecta a los coeficientes de la serie de Fourier.
15. Encuentre la expansión en series de Fourier de una función periódica $f(t)$ con periodo 2π que está definida en el intervalo $-\pi < t < \pi$ por:

$$f(t) = \begin{cases} -1 & -\pi < t < 0 \\ 1 & 0 < t < \pi \end{cases}$$

16. Deduzca las siguientes propiedades de la serie de Fourier:
    a. Linealidad
    b. Desplazamiento en el tiempo
    c. Inversión de tiempo
    d. Escalamiento de tiempo
    e. Multiplicación
    f. Conjugación y simetría conjugada
    g. Teorema de Parseval para señales de potencia
    h. Derivación e integración de las series de Fourier
17. Determine la serie de Fourier de un tren de impulsos dado por

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

18. Defina que son los espectros de frecuencia compleja:
    a. Espectro de amplitud de una función periódica
    b. Espectro de fase de una función periódica

19. Encuentre el espectro de frecuencia para una función cuadrada periódica como un caso generalizado, teniendo la siguiente definición de la función: