

Modelos de Sistemas para Mecatrónica MT5002

Profesor: Ing. Jaime Mora

I Semestre 2020

**PRIMER EXAMEN**

Total de puntos	100
Puntos obtenidos	
Porcentaje	
<b>Nota</b>	

Nombre: Wendy Gómez Ramírez Carné: 2017109745

(Tiempo para lectura de examen: 30 min. Tiempo para realizar la prueba: 6 horas,  
Tiempo para entregar el examen 24 horas desde el inicio del examen)

Pregunta 1	de 10
Pregunta 2	de 10
Pregunta 3	de 14
Pregunta 4	de 20
Pregunta 5	de 20
Pregunta 6	de 16
Pregunta 7	de 10

# Examen I Modelos de Sistemas para Mecatrónica

Wendy Gómez Ramírez

2017109745

## PREGUNTA 1

No se realiza debido a que se entregaron las tutorías.

## PREGUNTA 2

$$\int_0^{\pi+j} z \cos(2z) dz$$

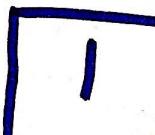
Por el formulario de Pablo Alvarado se tiene que:

$$\int z \cos(az) dz = \frac{1}{a^2} [\cos(az) + az \sin(az)] + C$$

Entonces, para la integral del ejercicio:

$$\int_0^{\pi+j} z \cos(2z) dz = \left\{ \frac{1}{2^2} [\cos(2z) + 2z \sin(2z)] \right\} \Big|_0^{\pi+j}$$

No Comprueba  
si es analítico  
-5



$$\int_0^{\pi+j} z \cos(2z) dz = \left( \frac{1}{4} [\cos(2z) + 2z \sin(2z)] \right) \Big|_0^{\pi+j}$$

Por el formulario de Pablo Alvarado se tiene que:

$$\cos(\omega) = \frac{e^{j\omega} + e^{-j\omega}}{2}$$

$$\sin(\omega) = \frac{e^{j\omega} - e^{-j\omega}}{2j}$$

Sustituyendo estas ecuaciones:

$$\int_0^{\pi+j} z \cos(2z) dz = \left( \frac{1}{4} \left[ \frac{e^{j2z} + e^{-j2z}}{2} + 2z \cdot \frac{e^{j2z} - e^{-j2z}}{2j} \right] \right) \Big|_0^{\pi+j}$$

$$\int_0^{\pi+j} z \cos(2z) dz = \left( \frac{1}{4} \left[ \frac{e^{j2z} + e^{-j2z}}{2} + z \cdot \frac{e^{j2z} - e^{-j2z}}{j} \right] \right) \Big|_0^{\pi+j}$$

$$\int_0^{\pi+j} z \cos(2z) dz = \frac{1}{4} \left[ \frac{e^{j2z} + e^{-j2z}}{2} - jz \cdot (e^{j2z} - e^{-j2z}) \right] \Big|_0^{\pi+j}$$

→ Evaluando:

$$\int_0^{\pi+j} z \cos(2z) dz = \frac{1}{4} \left\{ \left[ \frac{e^{j2(\pi+j)} + e^{-j2(\pi+j)}}{2} - j(\pi+j) \cdot (e^{j2(\pi+j)} - e^{-j2(\pi+j)}) \right] - \left[ \frac{e^0 + e^0}{2} - j(0) (e^0 - e^0) \right] \right\}$$

$$\int_0^{\pi+j} z \cos(2z) dz = \frac{1}{4} \left\{ \frac{e^{2\pi j - 2} + e^{-2\pi j + 2}}{2} - (\pi j - 1) (e^{2\pi j - 2} - e^{-2\pi j + 2}) - \frac{1+i}{2} - 0 \right\}$$

$$\int_0^{\pi+j} z \cos(2z) dz = \frac{1}{4} \left\{ \frac{e^{2\pi j} \cdot e^{-2} + e^{-2\pi j} \cdot e^2}{2} - \left[ \pi j e^{2\pi j - 2} - \pi j e^{-2\pi j + 2} - e^{2\pi j - 2} + e^{-2\pi j + 2} \right] - 1 \right\}$$

$$\int_0^{\pi+j} z \cos(2z) dz = \frac{1}{4} \left\{ \frac{e^{2\pi j - 2} + e^{-2\pi j + 2}}{2} - \frac{2\pi j e^{2\pi j - 2}}{2} + \frac{2\pi j e^{-2\pi j + 2}}{2} + \frac{2e^{2\pi j - 2}}{2} - \frac{2e^{-2\pi j + 2}}{2} - 1 \right\}$$

$$\int_0^{\pi+j} z \cos(2z) dz = \frac{1}{4} \left\{ \left( \frac{e^{2\pi j - 2}}{2} - \frac{2\pi j e^{2\pi j - 2}}{2} + \frac{2e^{2\pi j - 2}}{2} \right) + \left( \frac{e^{-2\pi j + 2}}{2} + \frac{2\pi j e^{-2\pi j + 2}}{2} - \frac{2e^{-2\pi j + 2}}{2} \right) - 1 \right\}$$

$$\int_0^{\pi+j} z \cos(2z) dz = \frac{1}{4} \left\{ \left( \frac{1}{2} - \frac{2\pi j}{2} + \frac{2}{2} \right) \cdot e^{2\pi j - 2} + \left( \frac{1}{2} + \frac{2\pi j}{2} - \frac{2}{2} \right) e^{-2\pi j + 2} - 1 \right\}$$

$$\int_0^{\pi+j} z \cos(2z) dz = \frac{1}{4} \left\{ \left( \frac{1-2\pi j+2}{2} \right) \cdot e^{2\pi j - 2} + \left( \frac{1+2\pi j-2}{2} \right) e^{-2\pi j + 2} - 1 \right\}$$

$$\int_0^{\pi+j} z \cos(2z) dz = \frac{1}{4} \left\{ \left( \frac{3-2\pi j}{2} \right) e^{2\pi j - 2} + \left( \frac{-1+2\pi j}{2} \right) e^{-2\pi j + 2} - 1 \right\}$$

$$\int_0^{\pi+j} z \cos(2z) dz = \frac{1}{4} \left\{ \left( \frac{3-2\pi j}{2} \right) e^{-2} \cdot e^{2\pi j} + \left( \frac{-1+2\pi j}{2} \right) e^2 \cdot e^{-2\pi j} - 1 \right\}$$

Por el formulario de Pablo Alvarado se sabe que:

$$e^{j\omega} = \cos(\omega) + j \sin(\omega)$$

Sustituyendo esta ecuación:

$$\int_0^{\pi+j} z \cos(2z) dz = \frac{1}{4} \left\{ \left( \frac{3-2\pi j}{2} \right) e^{-2} \cdot (\cos(2\pi) + j \sin(2\pi)) + \left( \frac{-1+2\pi j}{2} \right) \cdot e^2 \cdot (\cos(-2\pi) + j \sin(-2\pi)) - 1 \right\}$$

Como:

$$\cos(2\pi) = 1$$

$$\cos(-2\pi) = \cos(2\pi) = 1$$

$$\sin(2\pi) = 0$$

$$\sin(-2\pi) = -\sin(2\pi) = 0$$

Entonces:

$$\int_0^{\pi+j} z \cos(2z) dz = \frac{1}{4} \left\{ \left( \frac{3-2\pi j}{2} \right) \cdot e^{-2} \cdot (1+j \cdot 0) + \left( \frac{-1+2\pi j}{2} \right) \cdot e^2 \cdot (1+j \cdot 0) - 1 \right\}$$

4

$$\int_0^{\pi+j} z \cos(2z) dz = \frac{1}{4} \left\{ \left( \frac{3-2\pi j}{2} \right) e^{-2} - \left( \frac{1-2\pi j}{2} \right) e^2 - 1 \right\}$$

$$\int_0^{\pi+j} z \cos(2z) dz = \frac{1}{4} \left\{ \frac{3}{2} e^{-2} - \frac{2\pi j}{2} e^{-2} - e^2 + \frac{2\pi j}{2} e^2 - 1 \right\}$$

$$\int_0^{\pi+j} z \cos(2z) dz = \frac{1}{4} \left\{ \frac{3}{2} e^{-2} - \pi j e^{-2} - e^2 + \pi j e^2 - 1 \right\}$$

$$\int_0^{\pi+j} z \cos(2z) dz = \frac{1}{4} \left\{ \left( \frac{3}{2} e^{-2} - e^2 - 1 \right) + j \left( \pi e^{-2} + \pi e^2 \right) \right\}$$

$$\int_0^{\pi+j} z \cos(2z) dz = \frac{1}{4} \left\{ \left( \frac{3}{2} e^{-2} - e^2 - 1 \right) + j \pi \cdot 2 \left( \frac{e^{-2} + e^2}{2} \right) \right\}$$

Por el formulario:

$$\cosh(\omega) = \frac{e^\omega + e^{-\omega}}{2}$$

Sustituyendo:

$$\int_0^{\pi+j} z \cos(2z) dz = \frac{1}{4} \left\{ \left( \frac{3}{2} e^{-2} - e^2 - 1 \right) + j 2\pi \cosh(2) \right\}$$

$$\boxed{\int_0^{\pi+j} z \cos(2z) dz = \frac{3e^{-2}}{8} - \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} + j \frac{\pi \cosh(2)}{2}}$$

sph

X -1 falta simplificar  
4/10

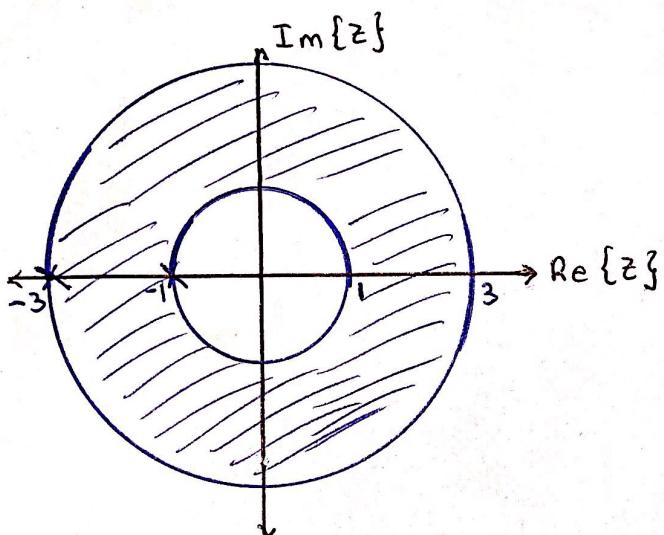
5

## PREGUNTA 3

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$$

Parte 1.

$$1 < |z| < 3$$



Por Fracciones Parciales

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{A}{(z+1)} + \frac{B}{(z+3)}$$

$$A = \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) \cdot \frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{(z+3)} \Big|_{z=-1} = \frac{1}{(-1+3)} = \frac{1}{2}$$

$$B = \lim_{z \rightarrow -3} (z+3) \cdot \frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{(z+1)} \Big|_{z=-3} = \frac{1}{-3+1} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(z+1)(z+3)} = \underbrace{\frac{1/2}{(z+1)}}_{\text{Región externa}} - \underbrace{\frac{-1/2}{(z+3)}}_{\text{Región interna}} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+3} \right]$$

Por formulario, la serie de Laurent es:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-c)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$$

Por el formulario de Pablo Alvarado se sabe que:

$$\frac{1}{z-a} = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n} & \text{para } |z-z_0| > |a-z_0| \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)}{(a-z_0)^{n+1}} & \text{para } |z-z_0| < |a-z_0| \end{cases}$$

Aplicando esto para las dos regiones que setienen:

$$\frac{1}{z+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1+0)^{n-1}}{(z-0)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{z^n}$$

$$\frac{-1}{z+3} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-0)^n}{(-3-0)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(-3)^{n+1}}$$

Por lo tanto, la serie de Laurent de  $f(z)$  va a ser:

$$f(z) = \frac{1}{2} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(-3)^{n+1}} \right]$$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2(-3)^{n+1}} \quad \text{para la región } 1 < |z| < 3$$

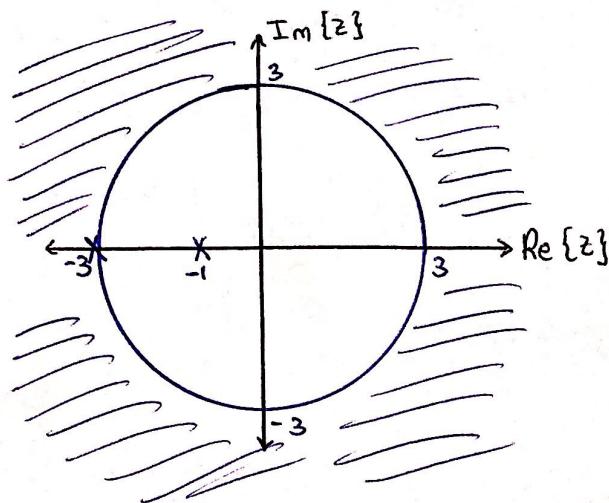
El desarrollo de la serie es:

$$f(z) = \dots + \frac{1}{2z^5} - \frac{1}{2z^4} + \frac{1}{2z^3} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2z} - \frac{1}{6} + \frac{z}{18} - \frac{z^2}{54} + \frac{z^3}{162} - \frac{z^4}{486} \dots$$

Para  $|z| < 3$

## Parte II.

$$|z| > 3$$



Como se tiene que  $f(z) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+3} \right]$

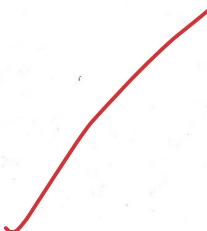
Para  $|z| > 3$  ambas son regiones externas.

Para  $\frac{1}{z+1}$ :

$$\begin{array}{c|c}
 \frac{1}{z+1} & z+1 \\
 \hline
 -\left(1 + \frac{1}{z}\right) & \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^4} + \dots \\
 \hline
 -\frac{1}{z} \\
 -\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}\right) \\
 \hline
 \frac{1}{z^2} \\
 -\left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3}\right) \\
 \hline
 -\frac{1}{z^3} \\
 -\left(\frac{-1}{z^3} + \frac{1}{z^4}\right)
 \end{array}$$

Para  $\frac{1}{z+3}$ :

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{z+3} & \\ \hline -\left(\frac{1}{z} + \frac{3}{z^2}\right) & \frac{1}{z} - \frac{3}{z^2} + \frac{3^2}{z^3} - \frac{3^3}{z^4} + \dots \\ \hline -\frac{3}{z} & \\ -\left(-\frac{3}{z} - \frac{3^2}{z^2}\right) & \\ \hline \frac{3^2}{z^2} & \\ -\left(\frac{3^2}{z^2} + \frac{3^3}{z^3}\right) & \\ \hline -\frac{3^3}{z^3} & \end{array}$$



Como  $f(z) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+3} \right]$ , sustituyendo las expansiones de las series:

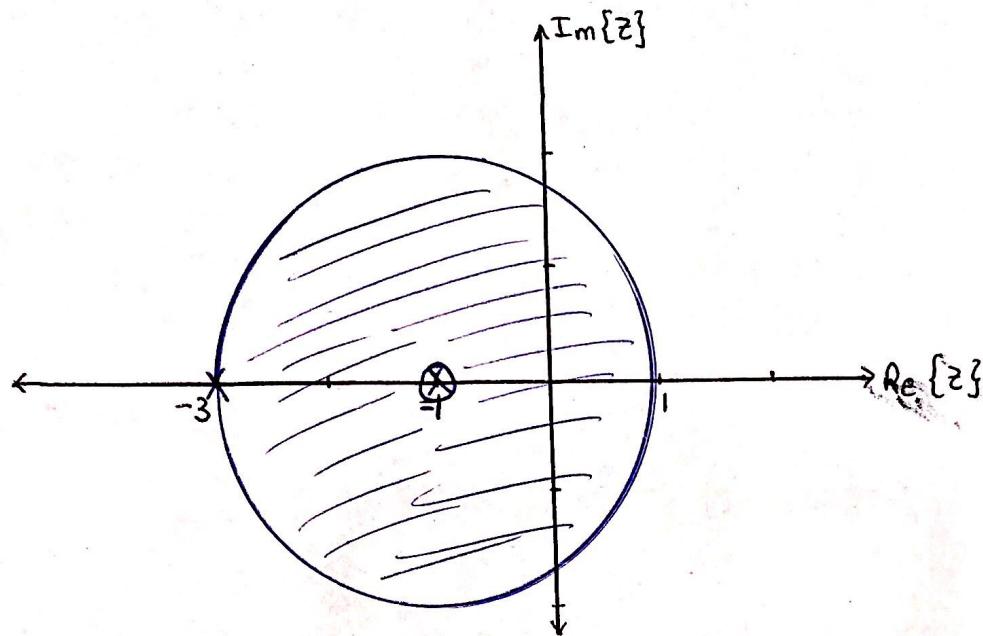
$$f(z) = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^4} + \dots \right) - \left( \frac{1}{z} - \frac{3}{z^2} + \frac{3^2}{z^3} - \frac{3^3}{z^4} + \dots \right) \right]$$

$$f(z) = \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{z^2} - \frac{8}{z^3} + \frac{26}{z^4} - \frac{80}{z^5} + \dots \right]$$

$$f(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{4}{z^3} + \frac{13}{z^4} - \frac{40}{z^5} + \dots \quad \text{para } |z| > 3$$

# Parte III.

$$0 < |z+1| < 2$$



$$\left( F(z) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+3} \right] \right) \quad f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$$

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{(z-z_0)-(a-z_0)} = \frac{1}{z_i-a_i}$$

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{(z--1)-(-1--1)} = \frac{1}{z_i-0} = \frac{1}{z_i}$$

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{(z--1)-(-3--1)} = \frac{1}{z_i--2} = \frac{1}{z_i+2}$$

$$\text{con } z_i = z+1$$

$\frac{1}{z_i + 2}$  es una región interna, por lo tanto:

$$\begin{array}{c|c}
 \frac{1}{2+z_i} & 2+z_i \\
 \hline
 -\left(1+\frac{z_i}{2}\right) & \frac{1}{2}-\frac{z_i}{2^2}+\frac{z_i^2}{2^3}-\frac{z_i^3}{2^4}+\dots \\
 \hline
 -\frac{z_i}{2} \\
 \hline
 -\left(-\frac{z_i}{2}-\frac{z_i^2}{2^2}\right) \\
 \hline
 \frac{z_i^2}{2^2} \\
 \hline
 -\left(\frac{z_i^2}{2^2}+\frac{z_i^3}{2^3}\right) \\
 \hline
 -\frac{z_i^3}{2^3}
 \end{array}$$



Como el círculo está centrado en  $z = -1$ , el  $\frac{1}{z_i}$  se multiplica por todo

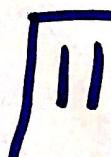
La expansión de la serie va a ser:

$$f(z) = \frac{1}{z_i} \left( \frac{1}{2} - \frac{z_i}{2^2} + \frac{z_i^2}{2^3} - \frac{z_i^3}{2^4} + \dots \right) = \frac{1}{2z_i} - \frac{1}{2^2} + \frac{z_i}{2^3} - \frac{z_i^2}{2^4} + \dots$$

Sustituyendo  $z_i$  por  $z+1$

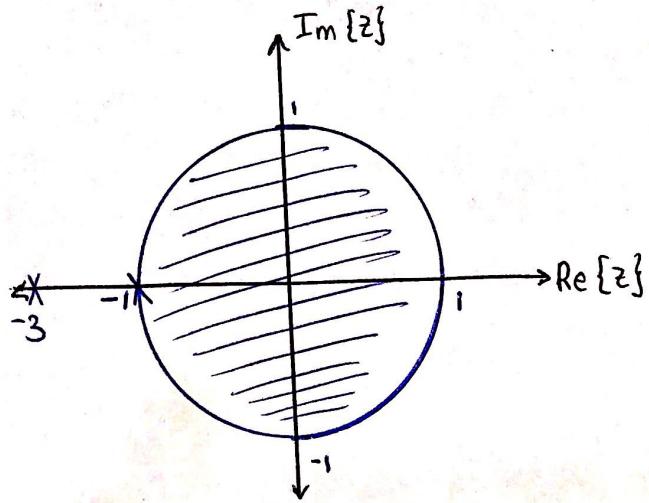
$$f(z) = \frac{1}{2(z+1)} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \cdot (z+1) - \frac{(z+1)^2}{16} + \dots$$

Para  $0 < |z+1| < 2$



## Parte IV

$$|z| < 1$$



$$F(z) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{z+1} & -\frac{1}{z+3} \end{bmatrix}$$

Las dos son regiones internas.

Para  $\frac{1}{z+1}$

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{z+1} & 1+z \\ \hline -\frac{1}{(1+z)} & 1-z+z^2-z^3+z^4-\dots \\ \hline -\frac{z}{z} & \\ \hline -\frac{(-z-z^2)}{z^2} & \\ \hline -\frac{(z^2+z^3)}{-z^3} & \\ \hline -\frac{(-z^3-z^4)}{z^4} & \end{array}$$

Para  $\frac{1}{z+3}$

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{z+3} & 3+z \\ \hline -\left(1+\frac{z}{3}\right) & \frac{1}{3} - \frac{z}{3^2} + \frac{z^2}{3^3} - \frac{z^3}{3^4} + \frac{z^4}{3^5} - \dots \end{array}$$

$$-\frac{z}{3}$$

$$-\left(-\frac{z}{3} - \frac{z^2}{3^2}\right)$$

$$\begin{array}{c} z^2 \\ \hline 3^2 \\ -\left(\frac{z^2}{3^2} + \frac{z^3}{3^3}\right) \end{array}$$

$$-\frac{z^3}{3^3}$$

$$-\left(-\frac{z^3}{3^3} - \frac{z^4}{3^4}\right)$$

$$\frac{z^4}{3^4}$$

$$f(z) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+3} \right]$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2} \left[ \left( 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - \dots \right) - \left( \frac{1}{3} - \frac{z}{9} + \frac{z^2}{27} - \frac{z^3}{81} + \frac{z^4}{243} - \dots \right) \right]$$

$$f(z) = \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{3} - \frac{8}{9}z + \frac{26}{27}z^2 - \frac{80}{81}z^3 + \frac{242}{243}z^4 \right]$$

$$f(z) = \frac{1}{3} - \frac{4}{9}z + \frac{13}{27}z^2 - \frac{40}{81}z^3 + \frac{121}{243}z^4 - \dots$$

Para  $|z| < 1$

1. Para  $|z| < 3 \Rightarrow f(z) = \dots + \frac{1}{2z^3} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2z} - \frac{1}{6} + \frac{z}{18} - \frac{z^2}{54} + \dots$

2. Para  $|z| > 3 \Rightarrow f(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{4}{z^3} + \frac{13}{z^4} - \frac{40}{z^5} + \dots$

3. Para  $0 < |z+1| < 2 \Rightarrow f(z) = \frac{1}{2(z+1)} - \frac{1}{4} + \frac{(z+1)}{8} - \frac{(z+1)^2}{16} + \dots$

4. Para  $|z| < 1 \Rightarrow f(z) = \frac{1}{3} - \frac{4}{9}z + \frac{13}{27}z^2 - \frac{40}{81}z^3 + \dots$

Por formulario, la serie de Laurent se define como:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-c)^n}_{\text{Parte Principal}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n}_{\text{Serie de Taylor}}$$

de la serie de Laurent

14/14

Por lo tanto:

- La serie para la región  $|z| < 3$  es una serie de Laurent ~~debido a que~~ posee la parte principal y la serie de Taylor.
- La serie para la región  $|z| > 3$  es una serie de Laurent que ~~no~~ posee ~~una~~ parte solo parte principal.
- La serie para la región  $0 < |z+1| < 2$  es una serie de Laurent con una parte principal finita.
- La serie para la región  $|z| < 1$  es una serie de Taylor ~~debido a que~~ no posee la parte principal de la serie de Laurent.

# PREGUNTA 4

Mapeo:

$$\omega = \frac{2jz}{z+j}$$

$$\omega = a + jv$$

$$z = x + jy$$

## Parte a

mapeo inverso de  $\omega$ :

$$z = f^{-1}(\omega)$$

Por formulario, el mapeo inverso es

$$z = \frac{-d\omega + b}{c\omega - a}$$

$$\text{Como } \omega = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{2jz}{z + j}$$

$$\Rightarrow a = 2j$$

$$b = 0$$

$$c = 1$$

$$d = j$$

$$\Rightarrow z = \frac{-d\omega + b}{c\omega - a} = \frac{-j\omega}{\omega - 2j}$$

$$\text{Donde } a_{\omega} = -j \quad c_{\omega} = 1$$

$$b_{\omega} = 0 \quad d_{\omega} = -2j$$

Por formulario:

$$\lambda = \frac{a}{c} = -j$$

$$\mu = bc - ad = -(-j)(-2j) = -2j^2 = 2$$

$$\alpha = c^2 = 1$$

$$\beta = cd = -2j$$

$$z = \frac{-d\omega + b}{c\omega - a} = \frac{\lambda + \mu}{\alpha\omega + \beta}$$

⇒ El mapeo inverso de  $\omega$  es:

Ra/

$$\boxed{z = \frac{-j\omega}{\omega - 2j} = -j + \frac{2}{\omega - 2j}}$$

## Parte b

Por formulario de Pablo Alvarado:

$$(w = az + b) \quad \omega = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{\lambda + \mu}{\alpha z + \beta}$$

Donde

$$\lambda = a/c; \mu = bc - ad; \alpha = c^2; \beta = cd$$

Para:

$$\omega = \frac{2jz}{z + j}$$

$$a = 2j$$

$$b = 0$$

$$c = 1$$

$$d = j$$

Por lo tanto:

$$\lambda = \frac{2j}{1} = 2j$$

$$M = (0)(1) - (2j)(j) = 2$$

$$\alpha = c^2 = 1^2 = 1$$

$$\beta = (1)(j) = j$$

Descomponiendo en mapeos elementales:

Rb/

$$z_1 = \alpha z + \beta = z + j$$

$$z_2 = \frac{1}{z_1} = \frac{1}{z+j}$$

$$\omega = M z_2 + \lambda = 2 \cdot \frac{1}{z+j} + 2j$$

Donde:  $\lambda = 2j$

$$\alpha = 2$$

$$\beta = 1$$

$$\lambda = j$$

Secuencia:

1. Se realiza el mapeo lineal  $z_1$ . Como  $\alpha=1$  no hay rotación ni ampliación.  
Traslación de una unidad hacia arriba (eje vertical)
2. Se realiza el mapeo de inversión  $z_2$
3. Se realiza el último mapeo lineal para llegar a  $\omega$ . Como  $\lambda=2$  se escala por 2 y como  $\lambda=2j$  se traslada dos unidades hacia arriba (eje vertical)

## Parte c

$$|z| < |z-j|$$

→ Primer mapeo  $z_1 = z + j$

$$z = z_1 - j$$

$$|z_1 - j| < |z_1 - j - j|$$

$$|z_1 - j| < |z_1 - 2j|$$

→ Segundo mapeo  $z_2 = \frac{1}{z_1}$

Mapeo de una recta, por formulario

$$\Rightarrow \beta = |a|^2 - |b|^2$$

$$|z-a| = |z-b| \Rightarrow a=j \quad b=2j$$

$$\beta = |j|^2 - |2j|^2 = (\sqrt{j^2})^2 - (\sqrt{2j^2})^2 = (1)^2 - (2)^2 = -3$$

Por formulario, como  $\beta \neq 0$  se va a mapear a un círculo:

$$|\omega - \omega_0| = r_\omega$$

$$r_\omega = \left| \frac{a-b}{\beta} \right| = \left| \frac{j-2j}{-3} \right| = \left| \frac{-j}{-3} \right| = \frac{1}{3}$$

$$\omega_0 = \frac{(a-b)^*}{\beta} = \frac{(j-2j)^*}{-3} = \frac{(-j)^*}{-3} = \frac{-j}{3}$$

Por lo tanto:

$$z_2: \left| z_2 - \left( -\frac{j}{3} \right) \right| = \frac{1}{3}$$

Si se mapea un punto de la región interna de  $z_1$ , este se mapea a la región externa de  $z_2$ . Por lo tanto:

$$z_2: \left| z_2 + \frac{j}{3} \right| > \frac{1}{3}$$

→ Tercer mapeo:  $2j + 2z_2$

$$\omega = 2j + 2z_2$$

$$z_2 = \frac{\omega - 2j}{2}$$

Como:

$$\left| z_2 + \frac{j}{3} \right| > \frac{1}{3}$$

Sustituyendo  $z_2$ :

$$\left| \frac{\omega - 2j}{2} + \frac{j}{3} \right| > \frac{1}{3}$$

$$\left| \omega - 2j + 2\left(\frac{j}{3}\right) \right| > 2\left(\frac{1}{3}\right)$$

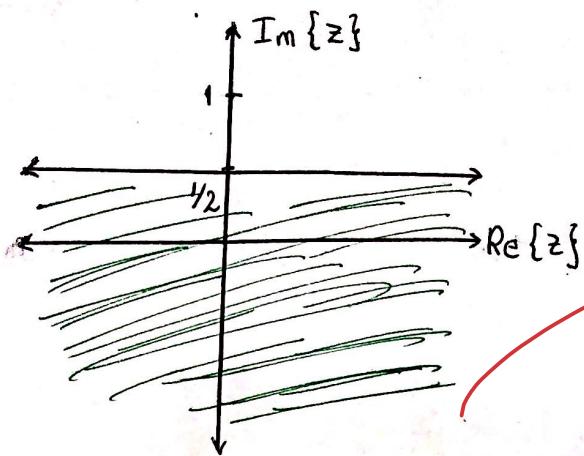
$$\left| \omega - \frac{4}{3}j \right| > \frac{2}{3}$$

La forma en el plano  $\omega$  de la región  $|z| < |z-j|$  es:

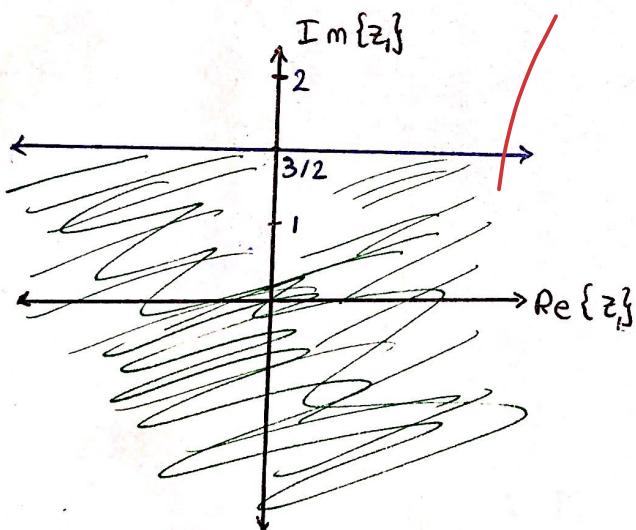
$$\boxed{\left| \omega - \frac{4}{3}j \right| > \frac{2}{3}}$$

## Parte d

Se tiene la región  $|z| < |z-j|$ . Esto es una recta que pasa en el centro de los puntos  $z=0$  y  $\bar{z}=j$



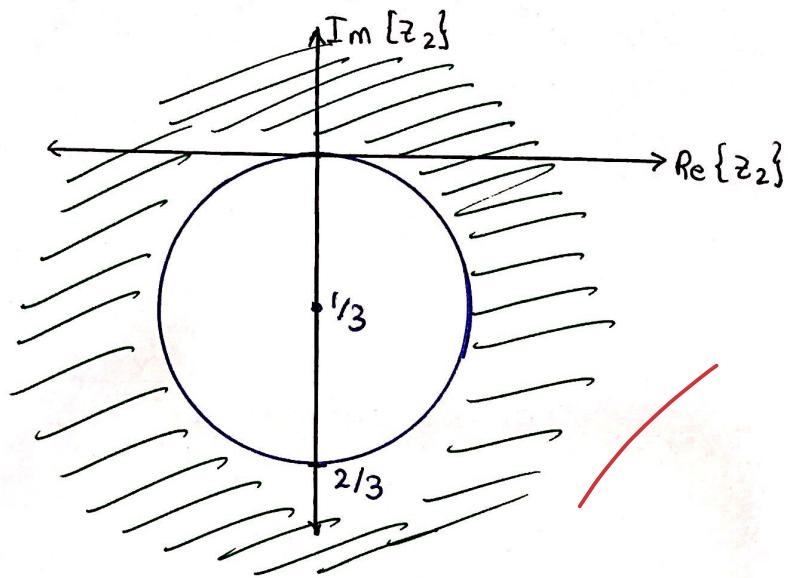
Primero se realiza el mapeo  $z_1$ , que es  $z_1 = z + j$ . Como el número a la par de  $z$  es  $j$ , no se escala ni se rota. Como se tiene un  $+j$ , la recta se mueve una unidad hacia arriba del eje Imaginario



La ecuación de esta región está dada por:

$$|z_1 - j| < |z_1 - 2j|$$

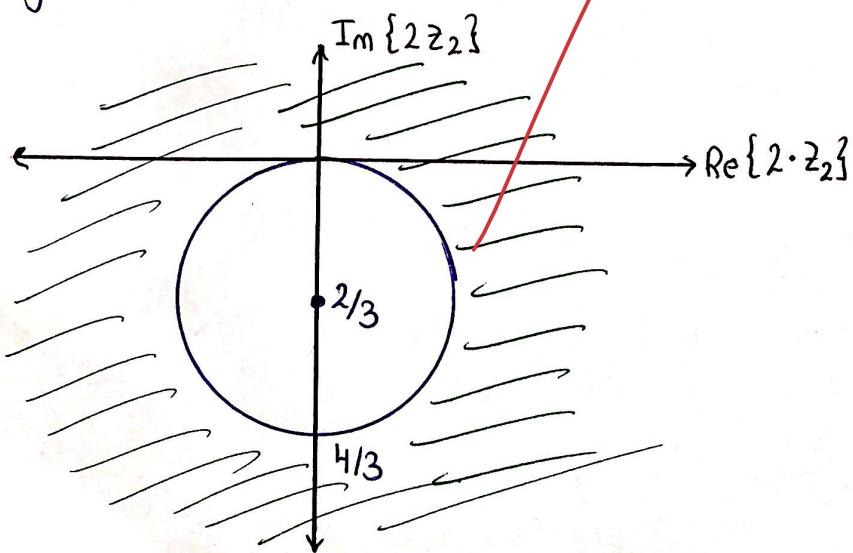
Después, para el mapeo de inversión se sabe que una recta que no pasa por el origen se mapea a un círculo que pasa por el origen. Además, el círculo va a pasar por el punto inverso de donde la recta interseca el eje.



La ecuación de esta región es

$$|z_2 + j\frac{1}{3}| > \frac{1}{3}$$

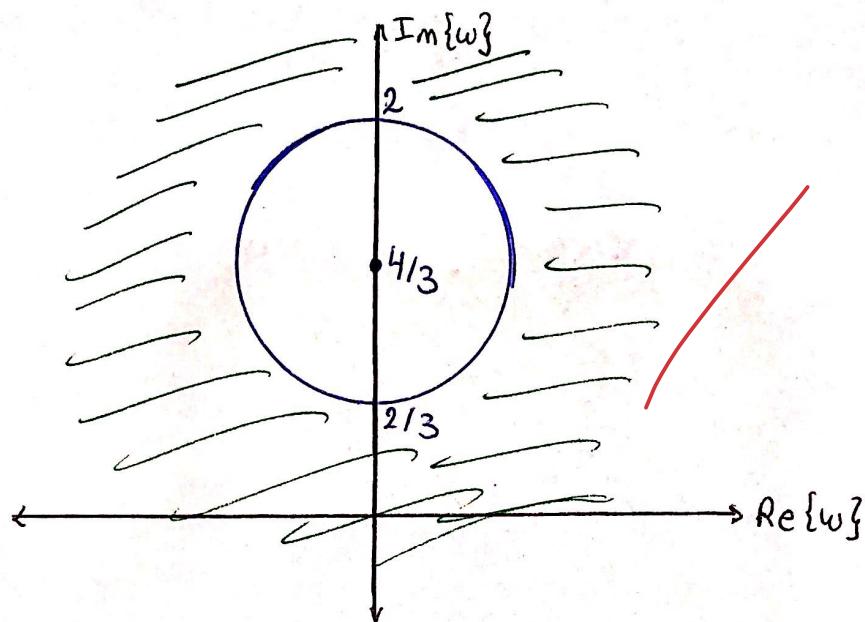
Por último, para el mapeo  $\omega$  se tiene que  $\omega = 2z_2 + 2j$ . Esto implica que se va a escalar por 2 y se va a mover dos unidades hacia arriba en el eje imaginario



La ecuación de esta región es:

$$\left| w + \frac{2}{3} \right| > \frac{2}{3}$$

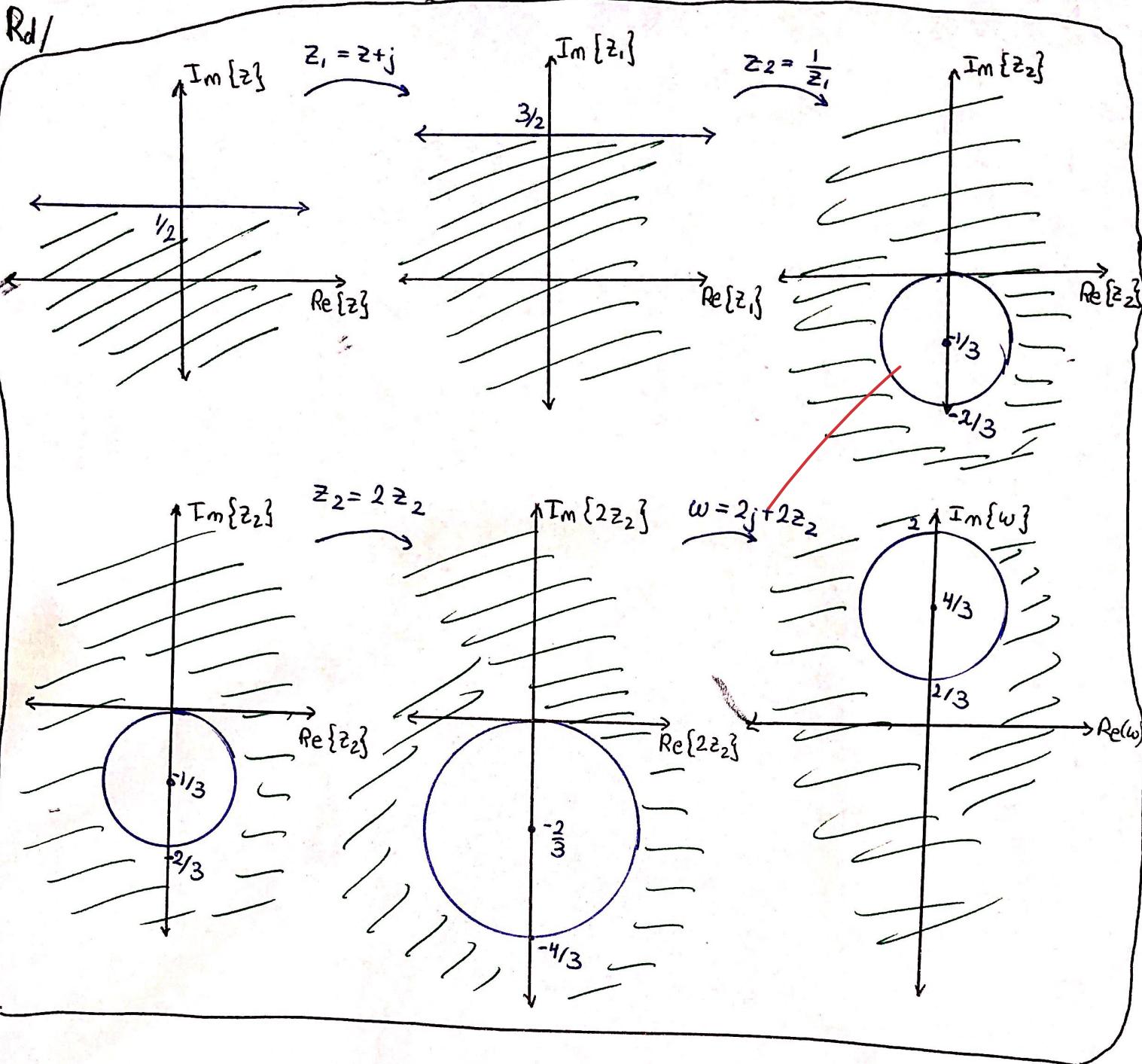
Luego, esta región se desplaza  $+2j$  y con esto se obtiene el mapeo final



La ecuación de la región final es

$$\left| w - \frac{4}{3}j \right| > \frac{2}{3}$$

Por lo tanto, los mapeos paso a paso son:



20/20

23

# PREGUNTA 5

$$x_c(t) = \begin{cases} A \cos(\omega_c t) & -\frac{\varepsilon}{2} < t < \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 & \frac{\varepsilon}{2} < t < T_0 - \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

## Parte A

Por formulario se sabe que una serie de Fourier trigonométrica se expresa como:

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\omega_0 k t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(\omega_0 k t)$$

Donde:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_p}$$

$$c_k = \frac{a_k - j b_k}{2}$$

$$a_k = \frac{2}{T_p} \int_{t_0}^{t_0 + T_p} x(t) \cos(\omega_0 k t) dt$$

$$b_k = \frac{2}{T_p} \int_{t_0}^{t_0 + T_p} x(t) \sin(\omega_0 k t) dt$$

$$T_p = T_0 - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = T_0$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_p} = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$a_K = \frac{2}{T_0} \left[ \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} A \cos(\omega_c t) \cos(\omega_0 K t) dt + \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{-\frac{\varepsilon}{2}} 0 \cdot \cos(\omega_0 K t) dt \right]$$

$$a_K = \frac{2A}{T_0} \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} \cos(\omega_c t) \cos(\omega_0 K t) dt$$

Por las relaciones de ortogonalidad se sabe que,

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(n \omega_0 t) \cdot \cos(m \omega_0 t) dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ T/2 & m = n \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\text{Si } \omega_c \neq \omega_0 K$$

$$\Rightarrow a_K = 0$$

$$\text{Si } \omega_c = \omega_0 K$$

$$\Rightarrow a_K = \frac{2A}{T_0} \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \frac{A \varepsilon}{T_0}$$

$$b_K = \frac{2}{T_0} \left[ \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} A \cos(\omega_c t) \cdot \sin(\omega_0 K t) dt + \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{-\frac{\varepsilon}{2}} 0 \cdot \sin(\omega_0 K t) dt \right]$$

$$b_K = \frac{2A}{T_0} \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} \cos(\omega_c t) \cdot \sin(\omega_0 K t) dt$$

Por relaciones de ortogonalidad se sabe que:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(n\omega_0 t) \cos(m\omega_0 t) dt = 0 \text{ para todo } m \neq n$$

Por lo tanto:

$$b_K = 0$$

$$a_0 = c_0 \Rightarrow K=0$$

$$a_0 = \frac{2}{T_0} \left[ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} A \cos(\omega_c t) \cos(\omega_0 K t) dt - j \int_{-\pi/2}^{\pi/2} A \cos(\omega_c t) \cdot \sin(\omega_0 K t) dt \right] / 2$$

$$a_0 = \frac{2A}{T_0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\omega_c t) \cdot 1 dt - j 0 / 2$$

$$a_0 = \frac{A}{T_0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\omega_c t) dt$$

$$a_0 = \frac{A}{T_0} \left( \frac{\sin(\omega_c t)}{\omega_c} \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$a_0 = \frac{A}{T_0 \omega_c} \left( \sin\left(\frac{\omega_c \pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\omega_c \pi}{2}\right) \right)$$

$$\text{Como } \sin(-x) = -\sin(x)$$

$$a_0 = \frac{A}{T_0 w_c} \left( \sin\left(\frac{w_c \epsilon}{2}\right) - \sin\left(\frac{-w_c \epsilon}{2}\right) \right)$$

$$a_0 = \frac{2A}{T_0 w_c} \sin\left(\frac{w_c \epsilon}{2}\right)$$

La serie de Fourier Trigonométrica de  $x_{\text{periodica}}(t)$  es:

$$x_{pc} = x_{\text{periodica}}(t)$$

$$x_{pc} = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(w_0 k \epsilon) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(w_0 k \epsilon)$$

$$\omega_0 = 2\pi/T_0$$

$$\text{Para } w_c = w_0 K$$

4/60

$$x_{\text{periodica}}(t) = \frac{2A}{T_0 w_c} \sin\left(\frac{w_c \epsilon}{2}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{AE}{T_0} \cdot \cos\left(\frac{2\pi k \epsilon}{T_0}\right)$$

$$\text{Para } w_c \neq w_0 K$$

$$x_{\text{periodica}}(t) = \frac{2A}{T_0 w_c} \sin\left(\frac{w_c \epsilon}{2}\right)$$

## Parte b

Por formulario se sabe que una serie de Fourier exponencial se expresa como

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jw_0 k t}$$

$$c_k = \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0 + T_p} e^{-jw_0 k t} x(t) dt$$

27

Del punto A se sabe que:

$$T_p = T_0$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$C_K = \frac{1}{T_0} \left[ \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} A \cos(\omega_c t) e^{-j\omega_0 K t} dt + \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{T_0 - \frac{\varepsilon}{2}} 0 \cdot e^{-j\omega_0 K t} dt \right]$$

$$C_K = \frac{A}{T_0} \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} \cos(\omega_c t) e^{-j\omega_0 K t} dt$$

Por la tabla de integrales

$$\int e^{bx} \cos(ax) dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{bx} (a \sin(ax) + b \cos(ax))$$

Por lo tanto:

$$C_K = \frac{A}{T_0} \left[ \frac{1}{\omega_c^2 + (-j\omega_0 K)^2} e^{-j\omega_0 K t} (\omega_c \sin(\omega_c t) + (-j\omega_0 K) \cos(\omega_c t)) \right] \Big|_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}}$$

$$C_K = \frac{A}{T_0} \left( \frac{1}{\omega_c^2 + (\omega_0 K)^2} \right) \left[ j e^{-j\omega_0 K t} \left( \frac{\omega_c \sin(\omega_c t)}{j} + (-\omega_0 K) \cos(\omega_c t) \right) \right] \Big|_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}}$$

$$C_K = \frac{A}{T_0} \left( \frac{j}{\omega_c^2 + (\omega_0 K)^2} \right) \left[ e^{-j\omega_0 K t} (-j\omega_c \sin(\omega_c t) - \omega_0 K \cos(\omega_c t)) \right] \Big|_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}}$$

$$C_K = -\frac{A}{T_0} \left( \frac{j}{\omega_c^2 + (\omega_0 K)^2} \right) \left[ e^{-j\omega_0 K t} (\omega_c \sin(\omega_c t) + \omega_0 K \cos(\omega_c t)) \right] \Big|_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}}$$

$$\text{Si } \omega_c = \omega_0 K$$

$$\Rightarrow C_K = \frac{-A}{T_0} \left( \frac{j}{2\omega_c^2} \right) \left[ \omega_c e^{-j\omega_0 K t} (j \sin(\omega_c t) + \cos(\omega_c t)) \right] \Big|_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2}$$

Por formulario:

$$e^{j\omega} = \cos(\omega) + j \sin(\omega)$$

$$C_K = \left( \frac{-j A \omega_c}{2 T_0 \omega_c^2} \right) \left( e^{-j\omega_0 K t} \cdot e^{j\omega_c t} \right) \Big|_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2}$$

$$\text{como } \omega_c = \omega_0 K$$

$$C_K = \left( \frac{-j A}{2 T_0 \omega_c} \right) \left( e^{-j\omega_c t} \cdot e^{j\omega_c t} \right) \Big|_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2}$$

$$C_K = \left( \frac{-j A}{2 T_0 \omega_c} \right) \left( e^{-j\omega_c t + j\omega_c t} \right) \Big|_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} = \left( \frac{-j A}{2 T_0 \omega_c} \right) (e^0)$$

$$C_K = \left( \frac{-j A}{2 T_0 \omega_c} \right) \quad \text{Si } \omega_c = \omega_0 K.$$

$$\text{Si } \omega_c \neq \omega_0 K$$

~~$$(C_K = -j A)$$~~

$$C_K = \frac{-A}{T_0} \left( \frac{j}{\omega_c^2 + (\omega_0 K)^2} \right) \left[ e^{-j\omega_0 K t} (j \omega_c \sin(\omega_c t) + \omega_0 K \cos(\omega_c t)) \right] \Big|_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2}$$

$$C_K = \frac{-A}{T_0} \left( \frac{j}{\omega_c^2 + (\omega_0 K)^2} \right) \cdot \left[ e^{-j\frac{\omega_0 K \epsilon}{2}} \left( j\omega_c \sin\left(\frac{\omega_c \epsilon}{2}\right) + \omega_0 K \cos\left(\frac{\omega_c \epsilon}{2}\right) \right) - e^{j\frac{\omega_0 K \epsilon}{2}} \cdot \left( j\omega_c \sin\left(-\frac{\omega_c \epsilon}{2}\right) + \omega_0 K \cos\left(-\frac{\omega_c \epsilon}{2}\right) \right) \right]$$

Como

$$\cos(x) = \cos(-x)$$

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

$$C_K = \frac{-A}{T_0} \left( \frac{j}{\omega_c^2 + (\omega_0 K)^2} \right) \cdot \left[ e^{-j\frac{\omega_0 K \epsilon}{2}} \left( j\omega_c \sin\left(\frac{\omega_c \epsilon}{2}\right) + \omega_0 K \cos\left(\frac{\omega_c \epsilon}{2}\right) \right) - e^{j\frac{\omega_0 K \epsilon}{2}} \cdot \left( -j\omega_c \sin\left(\frac{\omega_c \epsilon}{2}\right) + \omega_0 K \cos\left(-\frac{\omega_c \epsilon}{2}\right) \right) \right]$$

$$C_K = \frac{-A}{T_0} \left( \frac{j}{\omega_c^2 + (\omega_0 K)^2} \right) \cdot \left[ e^{-j\frac{\omega_0 K \epsilon}{2}} \cdot j\omega_c \sin\left(\frac{\omega_c \epsilon}{2}\right) + e^{-j\frac{\omega_0 K \epsilon}{2}} \cdot \omega_0 K \cos\left(\frac{\omega_c \epsilon}{2}\right) + e^{j\frac{\omega_0 K \epsilon}{2}} \cdot j\omega_c \sin\left(\frac{\omega_c \epsilon}{2}\right) - e^{j\frac{\omega_0 K \epsilon}{2}} \cdot \omega_0 K \cos\left(\frac{\omega_c \epsilon}{2}\right) \right]$$

$$C_K = \frac{-A}{T_0} \left( \frac{j}{\omega_c^2 + (\omega_0 K)^2} \right) \cdot \left[ j\omega_c \sin\left(\frac{\omega_c \epsilon}{2}\right) \cdot \left( e^{-j\frac{\omega_0 K \epsilon}{2}} + e^{j\frac{\omega_0 K \epsilon}{2}} \right) + \omega_0 K \cos\left(\frac{\omega_c \epsilon}{2}\right) \cdot \left( e^{-j\frac{\omega_0 K \epsilon}{2}} - e^{j\frac{\omega_0 K \epsilon}{2}} \right) \right]$$

Por formulario:

$$\cos(\omega) = \frac{e^{j\omega} + e^{-j\omega}}{2}$$

$$\sin(\omega) = \frac{e^{j\omega} - e^{-j\omega}}{2j}$$

$$C_K = \frac{-A}{T_0} \left( \frac{j}{\omega_c^2 + (\omega_0 K)^2} \right) \cdot \left[ 2j\omega_c \sin\left(\frac{\omega_c \epsilon}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_0 K \epsilon}{2}\right) + -2j\omega_0 K \cos\left(\frac{\omega_c \epsilon}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega_0 K \epsilon}{2}\right) \right]$$

(Por las relaciones de ortogonalidad)

$$C_K = \frac{-A}{T_0} \left( \frac{2j \cdot j}{\omega_c^2 + (\omega_0 K)^2} \right) \cdot \left[ \omega_c \sin\left(\frac{\omega_c \epsilon}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_0 K \epsilon}{2}\right) - \omega_0 K \cos\left(\frac{\omega_c \epsilon}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega_0 K \epsilon}{2}\right) \right]$$

$$C_K = + \frac{2A}{T_0} \left( \frac{1}{\omega_c^2 + \omega_0^2 K^2} \right) \left[ \omega_c \sin\left(\frac{\omega_c \epsilon}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_0 K \epsilon}{2}\right) - \omega_0 K \cos\left(\frac{\omega_c \epsilon}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega_0 K \epsilon}{2}\right) \right]$$

Como:

$$x(t) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} C_K e^{j\omega_0 K t}$$

Si  $\omega_c = \omega_0 K$

$$x_{\text{periodica}}(\epsilon) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} \left( \frac{-jA}{2T_0 \omega_c} \right) e^{j\omega_0 K \epsilon}$$

Si  $\omega_c \neq \omega_0 K$

$$x_{\text{periodica}}(\epsilon) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} \left[ \cancel{\frac{2A}{T_0} \left( \frac{1}{\omega_c^2 + \omega_0^2 K^2} \right)} \left( \omega_c \sin\left(\frac{\omega_c \epsilon}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_0 K \epsilon}{2}\right) - \omega_0 K \cos\left(\frac{\omega_c \epsilon}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega_0 K \epsilon}{2}\right) \right] e^{j\omega_0 K \epsilon} \right]$$

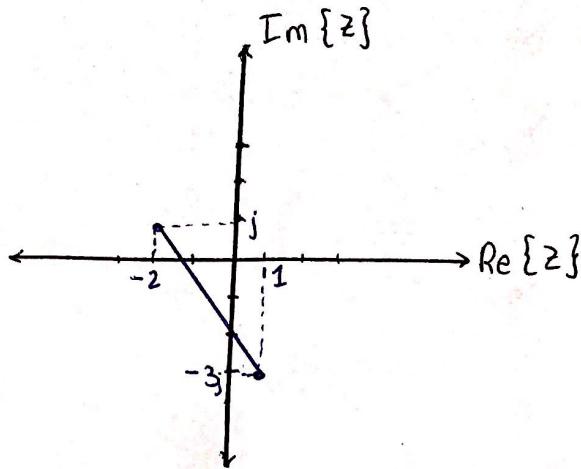
6/10

Con  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$  para ambos casos.

31

# Pregunta 6

$$w = f(z) = z^2$$



$$w = z^2$$

$$w = u + jv$$

$$z = x + jy$$

$$w = z^2 = (x + jy)(x + jy)$$

$$w = (x^2 - y^2) + (2xyj)$$

$$w = (x^2 - y^2) + j2xy$$

$$\text{Como } w = u + jv$$

$$u + jv = (x^2 - y^2) + j2xy$$

Comparando las partes reales y las imaginarias:

$$u = x^2 - y^2$$

$$( \cancel{v = 2} ) \quad v = 2xy$$

# Parte a

Para el punto  $z = -2 + j$

$$z = x + jy$$

$$x = -2$$

$$y = 1$$

$$u = x^2 - y^2 = (-2)^2 - (1)^2 = 3$$

$$v = 2xy = 2(-2)(1) = -4$$

$$\omega = u + jv = 3 - j4$$

Para el punto  $z = 1 - 3j$

$$z = x + jy$$

$$x = 1$$

$$y = -3$$

$$u = x^2 - y^2 = (1)^2 - (-3)^2 = -8$$

$$v = 2xy = 2(1)(-3) = -6$$

$$\omega = u + jv = -8 - 6j$$

La imagen de los puntos en el plano  $w$  debido al mapeo  $\omega = z^2$  es:

$$z = -2 + j \Rightarrow \omega = 3 - 4j$$

$$z = 1 - 3j \Rightarrow \omega = -8 - 6j$$

# Parte b

Para la recta

$$m = \frac{-3 - 1}{1 - -2} = -\frac{4}{3}$$

$$b = y - mx = (1) - \left(-\frac{4}{3}\right)(-2) = -\frac{5}{3}$$

$$y = -\frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$$

Parametrizando:

$$x = t$$

$$y = -\frac{4}{3}t - \frac{5}{3}$$

Como  $u = x^2 - y^2$ , sustituyendo  $x$  y  $y$ :

$$u = (t)^2 - \left(-\frac{4}{3}t - \frac{5}{3}\right)^2 = t^2 - \left(\frac{16}{9}t^2 + \frac{40}{9}t + \frac{25}{9}\right)$$

$$u = t^2 - \frac{16}{9}t^2 + -\frac{40}{9}t - \frac{25}{9}$$

$$u = -\frac{7}{9}t^2 - \frac{40}{9}t - \frac{25}{9}$$

Como  $v = 2xy$ , sustituyendo  $x$  y  $y$ :

$$v = 2(t) \left(-\frac{4}{3}t - \frac{5}{3}\right) = 2t \left(-\frac{4}{3}t - \frac{5}{3}\right)$$

$$v = -\frac{8}{3}t^2 - \frac{10}{3}t$$

$$0 = -\frac{8}{3}t^2 - \frac{10}{3}t - v$$

$$0 = \frac{8}{3}t^2 + \frac{10}{3}t + v$$

$$0 = 8t^2 + 10t + 3v$$

$$0 = t^2 + \frac{10t}{8} + \frac{3v}{8}$$

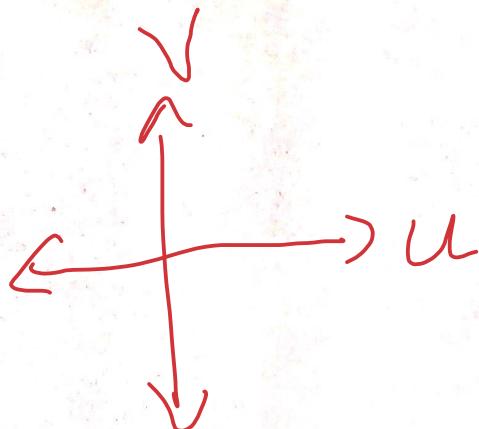
$$0 = t^2 + \frac{5t}{4} + \frac{3v}{8}$$

$$\star. t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\left(\frac{5}{4}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 - 4(1)\left(\frac{3v}{8}\right)}$$

$$t = -\frac{5}{8} \pm \frac{\sqrt{\frac{25}{16} - \frac{3}{2}v}}{2}$$

Sustituyendo en la ecuación de  $u$

$$u = -\frac{7}{9}t^2 - \frac{40}{9}t - \frac{25}{9}$$



$$\cancel{(u = -\frac{7}{9} \left( -\frac{5}{8} \pm \sqrt{\frac{25}{16} - \frac{3}{2}v} \right) )}$$

La imagen de la recta en el plano  $w$  es:

$$(u = -\frac{7}{9} \left( -\frac{5}{8} \pm \sqrt{\frac{25}{16} - \frac{3}{2}v} \right)^2 - \frac{40}{9} \left( -\frac{5}{8} \pm \sqrt{\frac{25}{16} - \frac{3}{2}v} \right) - \frac{25}{9})$$

4/8

## PREGUNTA 7

$$\oint_C \frac{\sin^6 z}{(z - \frac{\pi}{6})^3} dz \quad \text{Si } C \text{ es el círculo } |z|=1$$

$\frac{\pi}{6} < 1 \Rightarrow$  el círculo contiene este punto

Hay un polo de orden 3 en  $z = \frac{\pi}{6}$

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{\gamma} \frac{\sin^6 z}{(z - \frac{\pi}{6})^3} dz$$

Donde  $\gamma$  es un círculo centrado en  $z = \frac{\pi}{6}$ . Escribiendo  $f_1(z) = z \sin^6 z$  entonces

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{\gamma} \frac{f_1(z)}{(z - \frac{\pi}{6})^3} dz$$

Utilizando la fórmula de la integral de Cauchy

Por formulario:

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = f^{(n)}(z_0) \frac{2\pi i}{n!}$$

$$\oint_C f(z) dz = \frac{2\pi i}{2!} \left[ \frac{d^2}{dz^2} f_1(z) \right] \Big|_{z=\frac{\pi}{6}}$$

$$\oint_C f(z) dz = \pi i \left[ \frac{d^2}{dz^2} \sin^6 z \right] \Big|_{z=\frac{\pi}{6}}$$

~~Esercizi~~

$$\oint_C f(z) dz = \pi j \left[ \frac{d}{dz} (6 \sin^5 z) \right]_{z=\frac{\pi}{6}}$$

$$\oint_C f(z) dz = \pi j \left[ 30 \sin^4 z \right] \Big|_{z=\frac{\pi}{6}}$$

$$\oint_C f(z) dz = \pi j \left[ 30 \cdot \frac{1}{16} \right] = \pi j \cdot \frac{15}{8}$$

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C \frac{\sin^6 z}{(z - \frac{\pi}{6})^3} dz = \frac{15\pi j}{8}$$