Wendy Gómez Ramírez
2017109745

Guía de estudio semana 8

Series de Fourier

1. Busque al menos tres ejemplos de conjuntos de funciones mutuamente ortogonales.

1) $\phi_n(t) = \sin(n\pi t)\,, n > 0 \; para\ el\ intervalo [0,2]$
2) $\phi_n(x) = \cos(nx)\,, n > 0 \; para\ el\ intervalo\ [-\pi, \pi]$
3) $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(2x)}{\sqrt{\pi}}, \dots\right\} \; para\ el\ intervalo\ [-\pi, \pi]$

2. Defina las funciones escalón e impulso unitarios continuas.

- Escalón unitario

$$H(t-a) = \begin{cases} 0 & Si\ t < a \\ \infty & Si\ t \geq a \end{cases}$$

- Impulso unitario

$$\delta(t-a) = \begin{cases} 0 & Si\ t \neq a \\ \infty & Si\ t = a \end{cases}$$

3. Un concepto primordial en el análisis de señales y sistemas es la transformación de una señal, por lo que es útil recordar transformaciones de señales fundamentales (composición o manipulación de funciones). Para la transformación de la variable independiente de una señal, defina los siguientes casos:

a. Corrimiento en el tiempo

Si una señal periódica se desplaza en el tiempo, su periodo T_p no es alterado. Si los coeficientes c_k del desarrollo en series de Fourier de la función x(t) se calculan, entonces, para $x(t - \tau)$ y haciendo la sustitución de variable $u : t - \tau$

$$\begin{aligned}
c'_k &= \frac{1}{T_p}\int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{-j\omega_0 kt}x(t-\tau)\,dt \\
&= \frac{1}{T_p}\int_{t_0-\tau}^{t_0-\tau+T_p} e^{-j\omega_0 k(u+\tau)}x(u)\,du \\
&= \frac{1}{T_p}\int_{t'_0}^{t'_0+T_p} e^{-j\omega_0 ku}e^{-j\omega_0 k\tau}x(u)\,du \\
&= e^{-j\omega_0 k\tau}\frac{1}{T_p}\int_{t'_0}^{t'_0+T_p} e^{-j\omega_0 ku}x(u)\,du \\
&= e^{-j\omega_0 k\tau}c_k
\end{aligned}$$

Nótese que el término que aparece debido al desplazamiento temporal solo produce un cambio de fase, mas no de magnitud a los coeficientes.

b. Inversión en el tiempo

Si x(t) tiene como expansión en serie de Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 kt}$$

entonces se obtiene con k’: —k que

$$x(-t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-j\omega_0 kt} = \sum_{k'=\infty}^{-\infty} c_{-k'} e^{j\omega_0 k't} = \sum_{k'=-\infty}^{\infty} c_{-k'} e^{j\omega_0 k't}$$

Lo que implica que la función x(—t) tiene como coeficientes c_{-k}.

c. Escalamiento en el tiempo

La dilatación o contracción del eje temporal t (con inversión o sin ella) se plantea en términos de un escalamiento temporal, es decir, multiplicando la variable t por una constante α. Cuando esto ocurre, el periodo de la nueva señal x(αt) es modificado por la misma constante α:

$$x(\alpha t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 k(\alpha t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j(\alpha\omega_0)kt}$$

Esto puede interpretarse de la siguiente manera: el escalamiento en el tiempo de una función no altera los coeficientes c_k, pero sí la serie de Fourier, puesto que sus bases funcionales $e^{j(\alpha\omega_0)kt}$ tienen una nueva frecuencia fundamental $\alpha\omega_0$.

4. Enuncie la representación de una señal de energía finita por medio de la serie exponencial de Fourier. Especifique claramente:

a. El conjunto de funciones ortogonales utilizadas.

$$\phi_n(t) = e^{j\omega_0 t} \quad con\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

b. El intervalo en que se cumple con la condición de ortogonalidad.

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi_n \phi_m^* \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[e^{jn\omega_0 t} - e^{j(n-m)\omega_0 t} \right] \ ; \ n \neq m$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi_n \phi_m^* \, dt = \frac{1}{j(n-m)\omega_0} e^{j(n-m)\omega_0 t_1} \left[e^{j(n-m)\omega_0 (t_2 - t_1)} - 1 \right]$$

$$\omega_0 (t_2 - t_1) = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{t_2 - t_1}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{jn\omega_0 t} \, e^{jm\omega_0 t} \, dt = \begin{cases} t_2 - t_1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

$$f(t) = \sum_{n=-N}^{N} F_n e^{jn\omega_0 t} \quad t_1 < t < t_2$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \quad t_1 < t < t_2$$

c. El cálculo de los coeficientes de la serie de Fourier exponencial

$$e^{-jm\omega_0 t} f(t) = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \right) e^{-jm\omega_0 t}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{-jm\omega_0 t}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(F_1 e^{j\omega_0 t} \right) e^{-j^{m\omega_0 t}} + \cdots + F_n e^{j^{m\omega_0 t}} e^{-j^{m\omega_0 t}} + \cdots \right] dt$$

$$F_n = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_2}^{t_1} f(t) e^{-j^{n\omega_0 t}}\, dt$$

d. Armónicos

$$f_n = \frac{1}{k_n} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \phi_n{}^{*} dt \ ; \ k_n = t_2 - t_1$$

5. ¿Se puede extender el resultado anterior a señales periódicas? Explique

Sí, se puede expresar como una serie trigonométrica de Fourier que está compuesta por senos y cosenos. Existen relaciones entre la serie exponencial de Fourier y la trigonométrica, las cuales son:

$$C_n = 2|F_n| = 2\sqrt{F_n F_n^*} \quad n \neq 0$$

$$\phi_n = \tan^{-1} \left(\frac{\mathrm{Im}\{F_n\}}{\mathrm{Re}\{F_n\}} \right)$$

$$F_0 = C_0$$

6. Encuentre la representación de $f(t)$ en términos de la serie exponencial de Fourier, cuando en un periodo se tiene que:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ -1 & 1 < t < 2 \end{cases}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_P} = \frac{2\pi}{(2-0)} = \pi$$

$$F_n = \frac{1}{T_P}\int_{t_1}^{t_2} f(t)e^{-j\omega_0 nt}\,dt$$

$$F_n = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 e^{-j\pi nt}dt - \int_1^2 e^{-j\pi nt}dt\right]$$

$$F_n = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{e^{-jn\pi t}}{-j\pi n}\right)\Bigg|_0^1 - \left(\frac{e^{-jn\pi t}}{-j\pi n}\right)\Bigg|_1^2\right]$$

$$F_n = \frac{1}{2}\left[\left(-\frac{e^{-jn\pi}}{j\pi n} + \frac{1}{j\pi n}\right) - \left(-\frac{e^{-2jn\pi}}{j\pi n} + \frac{e^{-jn\pi}}{j\pi n}\right)\right]$$

$$F_n = \frac{1}{2}\left[-\frac{e^{-jn\pi}}{j\pi n} + \frac{1}{j\pi n} + \frac{e^{-2jn\pi}}{j\pi n} - \frac{e^{-jn\pi}}{j\pi n}\right]$$

$$F_n = \frac{1}{2}\left[\frac{-e^{-jn\pi} + 1 + e^{-2jn\pi} - e^{-jn\pi}}{j\pi n}\right]$$

$$F_n = \frac{1}{2}\left[\frac{-2e^{-jn\pi} + 1 + e^{-2jn\pi}}{j\pi n}\right]$$

Para n impares:

$$F_n = \frac{1}{2}\left[\frac{-2e^{-j\pi} + 1 + e^{-2j\pi}}{j\pi n}\right] = \frac{2+1+1}{2j\pi n} = \frac{2}{j\pi n}$$

Para n pares:

$$F_n = \frac{-2+1+1}{2j\pi n} = 0$$

$$\Rightarrow F_n = \begin{cases} \dfrac{2}{j\pi n} & n\ impar \\ 0 & n\ par \end{cases}$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\pi t}$$

$$\boxed{f(t) = \frac{2}{j\pi}\left[e^{j\pi t} + \frac{1}{3}e^{3j\pi t} + \frac{1}{5}e^{5j\pi t} + \cdots\right] + \frac{2}{j\pi}[-e^{-j\pi t} - \frac{1}{3}e^{-3j\pi t} - \frac{1}{5}e^{-5j\pi t} - \cdots]}$$

7. La serie de Fourier trigonométrica se utiliza para representar una función de variable real usando un conjunto de funciones de variable real. Deduzca a partir de la serie exponencial de Fourier su representación trigonométrica. Especifique claramente:

a. El conjunto de funciones ortogonales utilizadas

$$\phi_n(t) = e^{j\omega_0 t} \quad con \;\; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

b. El intervalo en que se cumple con la condición de ortogonalidad

$$[t_1, t_2]$$

c. El cálculo de los coeficientes de la serie de Fourier trigonométrica.

$$F_n = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_2}^{t_1} f(t)e^{-j^{n\omega_0 t}}\, dt$$

$$F_n{}^* = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_2}^{t_1} \left[f(t)e^{-j^{n\omega_0 t}}\right]^* dt$$

$$F_n{}^* = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_2}^{t_1} f(t)e^{j^{n\omega_0 t}}\, dt = F_{-n}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{-1} F_n e^{jn\omega_0 t} + F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_{-n} e^{-jn\omega_0 t} + F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_{-n} [\cos(n\omega_0 t) - jsen(n\omega_0 t)] + F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n [\cos(n\omega_0 t) + jsen(n\omega_0 t)]$$

$$x(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (F_{-n} + F_n) \cos(n\omega_0 t) + j \sum_{n=1}^{\infty} (F_n - F_{-n}) sen(n\omega_0 t)$$

$$F_n + F_{-n} = F_n + F_n^* = 2 \operatorname{Re}\{F_n\}$$

$$F_n - F_{-n} = F_n - F_n^* = 2jIm\{F_n\}$$

$$Im\{z\} = \frac{(z - z^*)}{2j}$$

$$x(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re}\{F_n\} \cos(n\omega_0 t) - \sum_{n=1}^{\infty} Im\{F_n\} sen(n\omega_0 t)$$

La representación trigonométrica de la serie de Fourier de f(t) en el intervalo de t_1 a t_2 es:

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen(n\omega_0 t) \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{t_2 - t_1}}$$

Los coeficientes de la serie trigonométrica son:

$$f_n = \frac{1}{k_n} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \phi_n{}^* dt$$

$$a_n = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)\cos(n\omega_0 t\,)\,dt}{\int_{t_1}^{t_2} \cos^2(n\omega_0 t\,)\,dt}$$

$$\boxed{a_n = \frac{2}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\cos(n\omega_0 t\,)\,dt}$$

$$\boxed{b_n = \frac{2}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\mathrm{sen}(n\omega_0 t\,)\,dt}$$

d. La relación entre los coeficientes de la serie exponencial con los coeficientes de la serie trigonométrica de Fourier

$$\frac{1}{2}a_0 = F_0$$

$$a_n = 2\,\mathrm{Re}\{F_n\}$$

$$b_n = j[F_n - F_{-n}] = 2\,\mathrm{Im}\{F_n\}$$

$$F_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)\ \ ; n \neq 0$$

8. Represente en una serie de Fourier trigonométrica la función periódica, definida en el intervalo (0,2) como $f(t) = t^2$.

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_P} = \frac{2\pi}{(2-0)} = \pi$$

$$a_k = \frac{2}{T_P}\int_{t_0}^{t_0+T_P} x(t)\cos(\omega_0 k t)\,dt$$

$$a_k = \int_0^2 t^2 \cos(\pi k t)\, dt = \left[\frac{2t\cos(\pi k t)}{(\pi k)^2} + \frac{(\pi k)^2 t^2 - 2}{(\pi k)^3} sen(\pi k t)\right]\Bigg|_0^2$$

$$a_k = \left(\frac{4 * 1}{(\pi k)^2} + \frac{4(\pi k)^2 - 2}{(\pi k)^3} * 0\right) - (0 + 0)$$

$$a_k = \frac{4}{(\pi k)^2}$$

$$b_k = \frac{2}{2}\int_0^2 t^2 sen(\pi k t)\, dt = \left[\frac{2 - (\pi k)^2 t^2}{(\pi k)^3}\cos(\pi k t) + \frac{2t\sin(\pi k t)}{(\pi k)^2}\right]\Bigg|_0^2$$

$$b_k = \left(\frac{2 - (\pi k)^2 * 4}{(\pi k)^3} + 0\right) - \frac{2}{(\pi k)^3}$$

$$b_k = \frac{2}{(\pi k)^3} - \frac{4(\pi k)^2}{(\pi k)^3} - \frac{2}{(\pi k)^3}$$

$$b_k = \frac{-4}{\pi k}$$

$$c_k = \frac{a_k - j b_k}{2}$$

$$C_k = \frac{\int_0^2 t^2 \cos(\pi k t)\, dt - j\int_0^2 t^2 \sin(\pi k t)\, dt}{2}$$

$$c_K \Rightarrow k = 0$$

$$c_0 = a_0 = \frac{\int_0^2 t^2 \cdot 1 - j \cdot 0}{2}$$

$$a_0 = \frac{\int_0^2 t^2}{2}$$

$$a_0 = \frac{\left(\frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^2}{2}$$

$$a_0 = \frac{\left(\frac{2^3}{3}\right)}{2} = \frac{\frac{8}{3}}{2} = \frac{8}{6}$$

$$a_0 = \frac{4}{3}$$

$$\boxed{f(t) = \frac{4}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 k^2} \cos(\pi k t) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi k} \sin(\pi k t)}$$

9. Deduzca la representación de la serie trigonométrica de Fourier compacta (también conocida como la serie cosenoidal de Fourier). Indique las relaciones entre los coeficientes de esta representación y la representación exponencial de la serie de Fourier.

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n)$$

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\phi_n = \tan^{-1}\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$$

Relaciones entre la exponencial y la trigonométrica:

$$C_n = 2|F_n| = 2\sqrt{F_n F_n^*} \quad n \neq 0$$

$$\phi_n = \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{Im}\{F_n\}}{\mathrm{Re}\{F_n\}}\right)$$

$$F_0 = C_0$$