Guía de estudio semana 8

Series de Fourier

1. Busque al menos tres ejemplos de conjuntos de funciones mutuamente ortogonales.

1) $\phi_n(t) = \sin(n\pi t)\,, n > 0 \; para\ el\ intervalo[0,2]$

2) $\phi_n(x) = \cos(nx)\,, n > 0 \; para\ el\ intervalo\ [-\pi, \pi]$

3) $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(2x)}{\sqrt{\pi}}, \dots\right\} \; para\ el\ intervalo\ [-\pi, \pi]$

2. Defina las funciones escalón e impulso unitarios continuas.

- Escalón unitario

$$H(t-a) = \begin{cases} 0 & Si\ t < a \\ \infty & Si\ t \geq a \end{cases}$$

- Impulso unitario

$$\delta(t-a) = \begin{cases} 0 & Si\ t \neq a \\ \infty & Si\ t = a \end{cases}$$

3. Un concepto primordial en el análisis de señales y sistemas es la transformación de una señal, por lo que es útil recordar transformaciones de señales fundamentales (composición o manipulación de funciones). Para la transformación de la variable independiente de una señal, defina los siguientes casos:

a. Corrimiento en el tiempo

Si una señal periódica se desplaza en el tiempo, su periodo T_p no es alterado. Si los coeficientes c_k del desarrollo en series de Fourier de la función x(t) se calculan, entonces, para $x(t - \tau)$ y haciendo la sustitución de variable $u : \; t - \tau$

$$
\begin{aligned}
c'_k &= \frac{1}{T_p}\int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{-j\omega_0 kt}x(t-\tau)\,dt \\
&= \frac{1}{T_p}\int_{t_0-\tau}^{t_0-\tau+T_p} e^{-j\omega_0 k(u+\tau)}x(u)\,du \\
&= \frac{1}{T_p}\int_{t'_0}^{t'_0+T_p} e^{-j\omega_0 ku}e^{-j\omega_0 k\tau}x(u)\,du \\
&= e^{-j\omega_0 k\tau}\frac{1}{T_p}\int_{t'_0}^{t'_0+T_p} e^{-j\omega_0 ku}x(u)\,du \\
&= e^{-j\omega_0 k\tau}c_k
\end{aligned}
$$

Nótese que el término que aparece debido al desplazamiento temporal solo produce un cambio de fase, mas no de magnitud a los coeficientes.

b. Inversión en el tiempo

Si x(t) tiene como expansión en serie de Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 kt}$$

entonces se obtiene con k’: —k que

$$x(-t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-j\omega_0 kt} = \sum_{k'=\infty}^{-\infty} c_{-k'} e^{j\omega_0 k' t} = \sum_{k'=-\infty}^{\infty} c_{-k'} e^{j\omega_0 k' t}$$

Lo que implica que la función x(—t) tiene como coeficientes c_{-k}.

c. Escalamiento en el tiempo

La dilatación o contracción del eje temporal t (con inversión o sin ella) se plantea en términos de un escalamiento temporal, es decir, multiplicando la variable t por una constante α. Cuando esto ocurre, el periodo de la nueva señal x(αt) es modificado por la misma constante α:

$$x(\alpha t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 k(\alpha t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j(\alpha\omega_0)kt}$$

Esto puede interpretarse de la siguiente manera: el escalamiento en el tiempo de una función no altera los coeficientes c_k, pero sí la serie de Fourier, puesto que sus bases funcionales $e^{j(\alpha\omega_0)kt}$ tienen una nueva frecuencia fundamental $\alpha\omega_0$.

4. Enuncie la representación de una señal de energía finita por medio de la serie exponencial de Fourier. Especifique claramente:

a. El conjunto de funciones ortogonales utilizadas.

$$\phi_n(t) = e^{j\omega_0 t} \quad con \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

b. El intervalo en que se cumple con la condición de ortogonalidad.

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi_n \phi_m^* \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[e^{jn\omega_0 t} - e^{j(n-m)\omega_0 t} \right] \ ; \ n \neq m$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi_n \phi_m^* \, dt = \frac{1}{j(n-m)\omega_0} e^{j(n-m)\omega_0 t_1} \left[e^{j(n-m)\omega_0 (t_2 - t_1)} - 1 \right]$$

$$\omega_0 (t_2 - t_1) = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{t_2 - t_1}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{jn\omega_0 t} \, e^{jm\omega_0 t} \ dt = \begin{cases} t_2 - t_1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

$$f(t) = \sum_{n=-N}^{N} F_n e^{jn\omega_0 t} \quad t_1 < t < t_2$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \quad t_1 < t < t_2$$

c. El cálculo de los coeficientes de la serie de Fourier exponencial

$$e^{-jm\omega_0 t} f(t) = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \right) e^{-jm\omega_0 t}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{-jm\omega_0 t}\ dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(F_1 e^{j\omega_0 t} \right) e^{-j^{m\omega_0 t}} + \cdots + F_n e^{j^{m\omega_0 t}} e^{-j^{m\omega_0 t}} + \cdots \right] dt$$

$$F_n = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_2}^{t_1} f(t) e^{-j^{n\omega_0 t}}\ dt$$

d. Armónicos

$$f_n = \frac{1}{k_n} \int_{t_1}^{t_2} f(t) {\phi_n}^* dt\ ;\ k_n = t_2 - t_1$$

5. ¿Se puede extender el resultado anterior a señales periódicas? Explique

Sí, se puede expresar como una serie trigonométrica de Fourier que está compuesta por senos y cosenos. Existen relaciones entre la serie exponencial de Fourier y la trigonométrica, las cuales son:

$$C_n = 2|F_n| = 2\sqrt{F_n F_n^*} \quad n \neq 0$$

$$\phi_n = \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{Im}\{F_n\}}{\mathrm{Re}\{F_n\}} \right)$$

$$F_0 = C_0$$

6. Encuentre la representación de $f(t)$ en términos de la serie exponencial de Fourier, cuando en un periodo se tiene que:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ -1 & 1 < t < 2 \end{cases}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_P} = \frac{2\pi}{(2-0)} = \pi$$

$$F_n = \frac{1}{T_P}\int_{t_1}^{t_2} f(t)e^{-j\omega_0 nt}\,dt$$

$$F_n = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 e^{-j\pi nt}dt - \int_1^2 e^{-j\pi nt}dt\right]$$

$$F_n = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{e^{-jn\pi t}}{-j\pi n}\right)\Big|_0^1 - \left(\frac{e^{-jn\pi t}}{-j\pi n}\right)\Big|_1^2\right]$$

$$F_n = \frac{1}{2}\left[\left(-\frac{e^{-jn\pi}}{j\pi n} + \frac{1}{j\pi n}\right) - \left(-\frac{e^{-2jn\pi}}{j\pi n} + \frac{e^{-jn\pi}}{j\pi n}\right)\right]$$

$$F_n = \frac{1}{2}\left[-\frac{e^{-jn\pi}}{j\pi n} + \frac{1}{j\pi n} + \frac{e^{-2jn\pi}}{j\pi n} - \frac{e^{-jn\pi}}{j\pi n}\right]$$

$$F_n = \frac{1}{2}\left[\frac{-e^{-jn\pi} + 1 + e^{-2jn\pi} - e^{-jn\pi}}{j\pi n}\right]$$

$$F_n = \frac{1}{2}\left[\frac{-2e^{-jn\pi} + 1 + e^{-2jn\pi}}{j\pi n}\right]$$

Para n impares:

$$F_n = \frac{1}{2}\left[\frac{-2e^{-j\pi} + 1 + e^{-2j\pi}}{j\pi n}\right] = \frac{2+1+1}{2j\pi n} = \frac{2}{j\pi n}$$

Para n pares:

$$F_n = \frac{-2+1+1}{2j\pi n} = 0$$

$$\Rightarrow F_n = \begin{cases} \dfrac{2}{j\pi n} & n\ impar \\ 0 & n\ par \end{cases}$$

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\pi t}$$

$$\boxed{f(t)=\frac{2}{j\pi}\left[e^{j\pi t}+\frac{1}{3}e^{3j\pi t}+\frac{1}{5}e^{5j\pi t}+\cdots\right]+\frac{2}{j\pi}\left[-e^{-j\pi t}-\frac{1}{3}e^{-3j\pi t}-\frac{1}{5}e^{-5j\pi t}-\cdots\right]}$$

7. La serie de Fourier trigonométrica se utiliza para representar una función de variable real usando un conjunto de funciones de variable real. Deduzca a partir de la serie exponencial de Fourier su representación trigonométrica. Especifique claramente:

a. El conjunto de funciones ortogonales utilizadas

$$\phi_n(t)=e^{j\omega_0 t} \quad con \;\; n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$$

b. El intervalo en que se cumple con la condición de ortogonalidad

$$[t_1,t_2]$$

c. El cálculo de los coeficientes de la serie de Fourier trigonométrica.

$$F_n=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_2}^{t_1} f(t)e^{-j^{n\omega_0 t}}\,dt$$

$$F_n{}^*=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_2}^{t_1}\left[f(t)e^{-j^{n\omega_0 t}}\right]^* dt$$

$$F_n{}^*=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_2}^{t_1} f(t)e^{j^{n\omega_0 t}}\,dt=F_{-n}$$

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}=\sum_{n=-\infty}^{-1} F_n e^{jn\omega_0 t}+F_0+\sum_{n=1}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$x(t)=\sum_{n=1}^{\infty}F_{-n}e^{-jn\omega_0 t}+F_0+\sum_{n=1}^{\infty}F_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$x(t)=\sum_{n=1}^{\infty}F_{-n}[\cos(n\omega_0 t)-jsen(n\omega_0 t)]+F_0+\sum_{n=1}^{\infty}F_n[\cos(n\omega_0 t)+jsen(n\omega_0 t)]$$

$$x(t)=F_0+\sum_{n=1}^{\infty}(F_{-n}+F_n)\cos(n\omega_0 t)+j\sum_{n=1}^{\infty}(F_n-F_{-n})sen(n\omega_0 t)$$

$$F_n+F_{-n}=F_n+F_n^*=2\,\mathrm{Re}\{F_n\}$$

$$F_n-F_{-n}=F_n-F_n^*=2jIm\{F_n\}$$

$$Im\{z\}=\frac{(z-z^*)}{2j}$$

$$x(t)=F_0+\sum_{n=1}^{\infty}2\,\mathrm{Re}\{F_n\}\cos(n\omega_0 t)-\sum_{n=1}^{\infty}Im\{F_n\}sen(n\omega_0 t)$$

La representación trigonométrica de la serie de Fourier de f(t) en el intervalo de t_1 a t_2 es:

$$\boxed{\begin{gathered}x(t)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\omega_0 t)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n sen(n\omega_0 t)\\ \omega_0=\frac{2\pi}{t_2-t_1}\end{gathered}}$$

Los coeficientes de la serie trigonométrica son:

$$f_n=\frac{1}{k_n}\int_{t_1}^{t_2}f(t)\phi_n{}^*dt$$

$$a_n = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt}{\int_{t_1}^{t_2} \cos^2(n\omega_0 t)\,dt}$$

$$\boxed{a_n = \frac{2}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt}$$

$$\boxed{b_n = \frac{2}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\mathrm{sen}(n\omega_0 t)\,dt}$$

d. La relación entre los coeficientes de la serie exponencial con los coeficientes de la serie trigonométrica de Fourier

$$\frac{1}{2}a_0 = F_0$$

$$a_n = 2\,\mathrm{Re}\{F_n\}$$

$$b_n = j[F_n - F_{-n}] = 2\,\mathrm{Im}\{F_n\}$$

$$F_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)\ \ ; n \neq 0$$

8. Represente en una serie de Fourier trigonométrica la función periódica, definida en el intervalo (0,2) como $f(t) = t^2$.

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_P} = \frac{2\pi}{(2-0)} = \pi$$

$$a_k = \frac{2}{T_P}\int_{t_0}^{t_0+T_P} x(t)\cos(\omega_0 k t)\,dt$$

$$a_k = \int_0^2 t^2 \cos(\pi k t)\, dt = \left[\frac{2t\cos(\pi k t)}{(\pi k)^2} + \frac{(\pi k)^2 t^2 - 2}{(\pi k)^3} sen(\pi k t)\right]\Bigg|_0^2$$

$$a_k = \left(\frac{4 * 1}{(\pi k)^2} + \frac{4(\pi k)^2 - 2}{(\pi k)^3} * 0\right) - (0 + 0)$$

$$a_k = \frac{4}{(\pi k)^2}$$

$$b_k = \frac{2}{2}\int_0^2 t^2 sen(\pi k t)\, dt = \left[\frac{2 - (\pi k)^2 t^2}{(\pi k)^3}\cos(\pi k t) + \frac{2t\sin(\pi k t)}{(\pi k)^2}\right]\Bigg|_0^2$$

$$b_k = \left(\frac{2 - (\pi k)^2 * 4}{(\pi k)^3} + 0\right) - \frac{2}{(\pi k)^3}$$

$$b_k = \frac{2}{(\pi k)^3} - \frac{4(\pi k)^2}{(\pi k)^3} - \frac{2}{(\pi k)^3}$$

$$b_k = \frac{-4}{\pi k}$$

$$c_k = \frac{a_k - j b_k}{2}$$

$$C_k = \frac{\int_0^2 t^2 \cos(\pi k t)\, dt - j\int_0^2 t^2 \sin(\pi k t)\, dt}{2}$$

$$c_K \Rightarrow k = 0$$

$$c_0 = a_0 = \frac{\int_0^2 t^2 \cdot 1 - j \cdot 0}{2}$$

$$a_0 = \frac{\int_0^2 t^2}{2}$$

$$a_0 = \frac{\left(\frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^2}{2}$$

$$a_0 = \frac{\left(\frac{2^3}{3}\right)}{2} = \frac{\frac{8}{3}}{2} = \frac{8}{6}$$

$$a_0 = \frac{4}{3}$$

$$\boxed{f(t) = \frac{4}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 k^2} \cos(\pi k t) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi k} \sin(\pi k t)}$$

9. Deduzca la representación de la serie trigonométrica de Fourier compacta (también conocida como la serie cosenoidal de Fourier). Indique las relaciones entre los coeficientes de esta representación y la representación exponencial de la serie de Fourier.

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n)$$

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\phi_n = \tan^{-1}\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$$

Relaciones entre la exponencial y la trigonométrica:

$$C_n = 2|F_n| = 2\sqrt{F_n F_n^*} \quad n \neq 0$$

$$\phi_n = \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{Im}\{F_n\}}{\mathrm{Re}\{F_n\}}\right)$$

$$F_0 = C_0$$

10. ¿Cuándo converge la serie de Fourier?

Las llamadas condiciones de Dirichlet para la función x(t) garantizan la convergencia de la serie de Fourier en todo punto de x(t) exceptuando en sus discontinuidades, donde la serie converge al valor medio de la discontinuidad. Estas condiciones son:

I. La función x(t) es absolutamente integrable en cualquier periodo, esto es:

$$\int_{t_0}^{t_0+T_p} |x(t)|\, dt < \infty$$

II. La función x(t) contiene un número finito de máximos y mínimos en cualquier periodo.

III. La función x(t) tiene un número finito de discontinuidades en cualquier periodo.

Estas condiciones son suficientes, mas no siempre necesarias; es decir, existen funciones con representaciones válidas en series de Fourier que no satisfacen las condiciones de Dirichlet.

11. Una señal periódica continua $x(t)$ es de valor real y tiene un periodo fundamental de T= 8s. Los coeficientes de la serie exponencial de Fourier diferentes de cero para $x(t)$ son:

$$F_1 = F_1^* = 2$$

$$F_3 = F_3^* = 4j$$

Exprese $x(t)$ de la forma:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cos(\omega_k t + \varphi_k)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$$

$$F_0 = C_0$$

$$C_1 = F_1 = F_1^* = 2$$

$$C_3 = F_3 = F_3^* = 4j$$

$$x(t) = 2\left(e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}\right) + 4j\left(e^{j6\pi t} + e^{-j6\pi t}\right)$$

Utilizando la relación de Euler:

$$x(t) = \frac{2}{2} * 2\left(e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}\right) + \frac{2}{2} * 4j\left(e^{j6\pi t} + e^{-j6\pi t}\right)$$

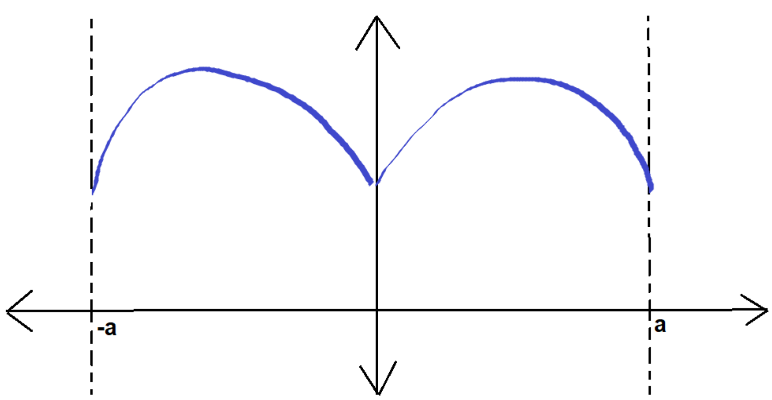
$$x(t) = 4\cos(2\pi t) + 8jcos(6\pi t)$$

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2 + 2k}{j^{k-1}} \cos(2\pi k t)}$$

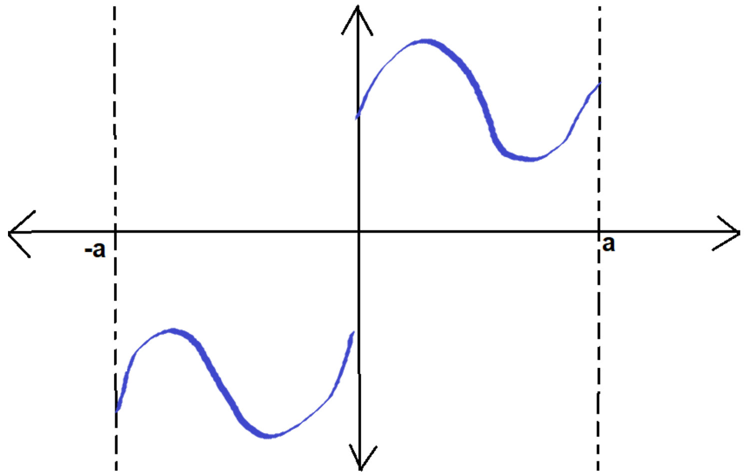
12. Indique la simetría de onda par e impar.

Una señal va a ser par cuando una función es continua y periódica. Esto permite determinar qué términos están ausentes en la serie de Fourier y simplificar las expresiones

- f(t) es una función par si f(t)=f(-t) para todo t

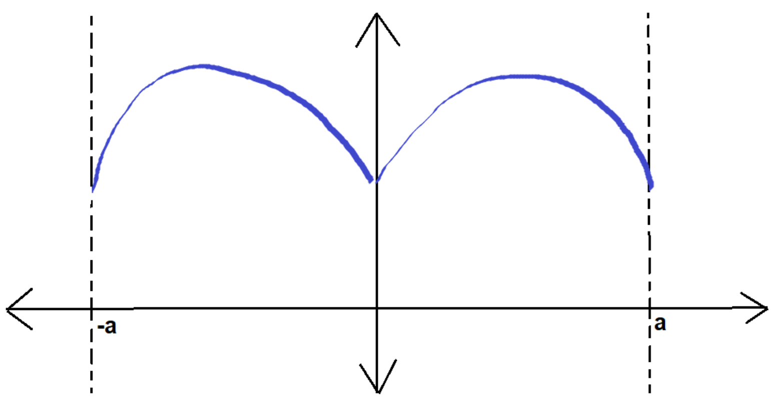


- f(t) es una función impar si f(t)=-f(-t)



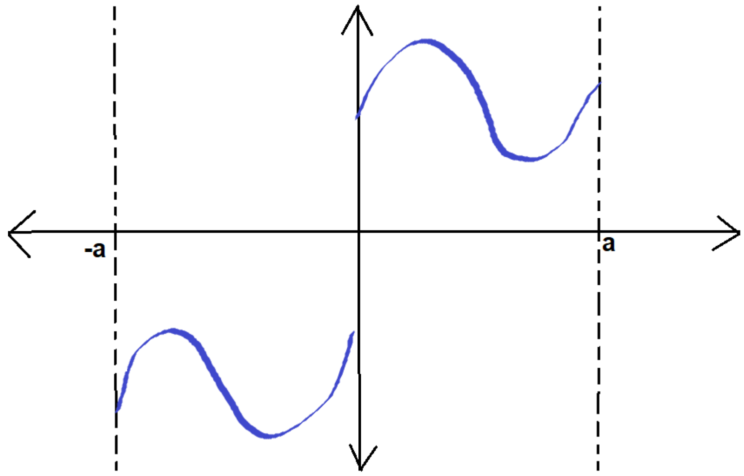
13. El análisis de simetría nos permite determinar qué términos están ausentes de la serie de Fourier y simplificar las expresiones de los términos restantes. Deduzca las propiedades de la serie de Fourier si la señal tiene simetría de onda par o impar.

- f(t) es una función par si f(t)=f(-t) para todo t



$$\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{a} f(t)\,dt$$

- f(t) es una función impar si f(t)=-f(-t)



$$\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(t)\, dt = 0$$

Si se tiene una serie de Fourier del intervalo de t_1 a t_2:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen(n\omega_0 t)$$

$$a_n = f(t)\cos(\omega_0 nt)$$

$$b_n = f(t)\,\mathrm{sen}(\omega_0 nt)$$

Las operaciones entre funciones pares e impares son:

Señal 1	Operación	Señal 2	Resultado
Par	+	Par	Par
Impar	+	Impar	Impar
Par	*	Par	Par
Impar	*	Impar	Par
Par	*	Impar	Impar

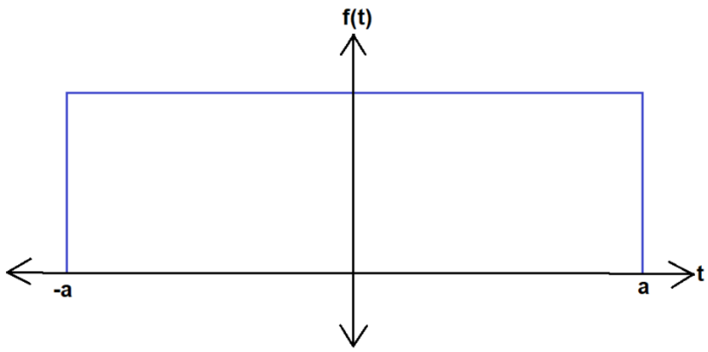
La derivada de una función par da como resultado una función impar.

La derivada de una función impar da como resultado una función par.

14. Defina que es simetría de media onda y como afecta a los coeficientes de la serie de Fourier.

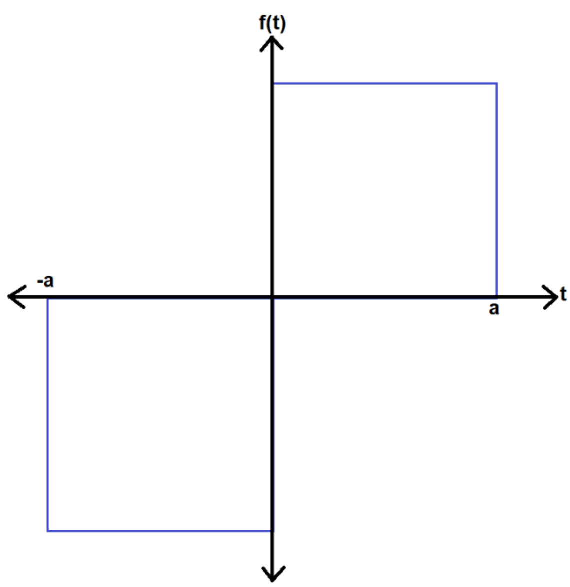
Para una señal par, la serie trigonométrica de Fourier se escribe como:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t)$$



Para una señal impar, la serie trigonométrica de Fourier se escribe como:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen(n\omega_0 t)$$



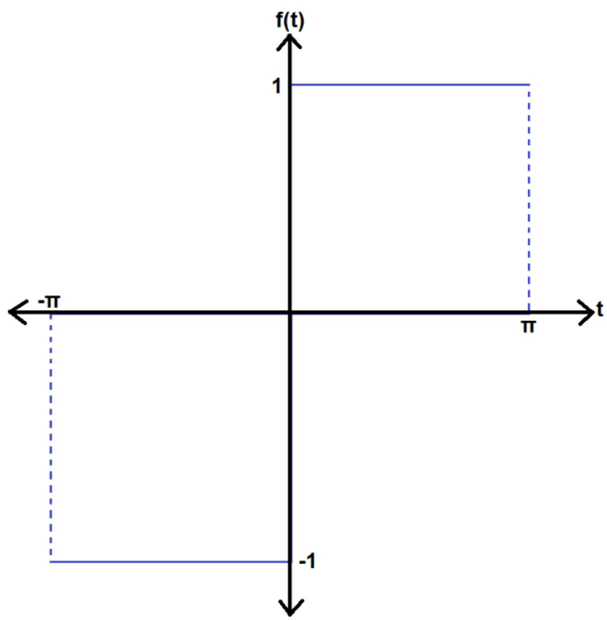
El cálculo de los coeficientes es el mismo para señales pares e impares y se calculan como:

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt$$

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,\mathrm{sen}(n\omega_0 t)\,dt$$

15. Encuentre la expansión en series de Fourier de una función periódica $f(t)$ con periodo 2π que está definida en el intervalo $-\pi < t < \pi$ por:

$$f(t) = \begin{cases} -1 & -\pi < t < 0 \\ 1 & 0 < t < \pi \end{cases}$$



$$f(t+\pi) = -f(t) \Rightarrow impar$$

Solo van a estar presentes los armónicos impares.

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,\mathrm{sen}(n\omega_0 t)\,dt$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

$$b_n = \frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi} \text{sen}(nt\,)\,dt = \frac{2}{\pi}\left(\frac{-\cos(nt)}{n}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{-\cos(n\pi)}{n} + \frac{1}{n}\right)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1+1}{n}\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{4}{\pi n}$$

$$b_n = \frac{4}{\pi n}$$

$$\boxed{x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n} sen(nt\,)}$$

16. Deduzca las siguientes propiedades de la serie de Fourier:

a. Linealidad

Si se tiene x(t) y y(t), periódicas con un periodo T (misma frecuencia amabas y periodo). Entonces, cualquier combinación lineal de ellas va a tener el mismo periodo.

Si la serie de Fourier de x(t) es A_k y la serie de Fourier de y(t) es B_k, entonces se cumple que

Si $z(t) = ax(t) + by(t)$

La serie de Fourier de z(t) va a ser:

$$C_k = aA_k + bB_k$$

Donde C_k es el coeficiente de la combinación línea de la serie de Fourier.

b. Desplazamiento en el tiempo

Si una señal periódica se desplaza en el tiempo, su periodo T_p no es alterado. Si los coeficientes c_k del desarrollo en series de Fourier de la función x(t) se calculan, entonces, para $x(t - \tau\,)$ y haciendo la sustitución de variable $u:\ t - \tau$

$$
\begin{aligned}
c'_k &= \frac{1}{T_p}\int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{-j\omega_0 kt} x(t-\tau)\,dt \\
&= \frac{1}{T_p}\int_{t_0-\tau}^{t_0-\tau+T_p} e^{-j\omega_0 k(u+\tau)} x(u)\,du \\
&= \frac{1}{T_p}\int_{t'_0}^{t'_0+T_p} e^{-j\omega_0 ku} e^{-j\omega_0 k\tau} x(u)\,du \\
&= e^{-j\omega_0 k\tau}\frac{1}{T_p}\int_{t'_0}^{t'_0+T_p} e^{-j\omega_0 ku} x(u)\,du \\
&= e^{-j\omega_0 k\tau} c_k
\end{aligned}
$$

Nótese que el término que aparece debido al desplazamiento temporal solo produce un cambio de fase, mas no de magnitud a los coeficientes.

c. Inversión de tiempo

Si x(t) tiene como expansión en serie de Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 kt}$$

entonces se obtiene con k’: —k que

$$x(-t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-j\omega_0 kt} = \sum_{k'=\infty}^{-\infty} c_{-k'} e^{j\omega_0 k't} = \sum_{k'=-\infty}^{\infty} c_{-k'} e^{j\omega_0 k't}$$

Lo que implica que la función x(—t) tiene como coeficientes c_{-k}.

d. Escalamiento de tiempo

La dilatación o contracción del eje temporal t (con inversión o sin ella) se plantea en términos de un escalamiento temporal, es decir, multiplicando la variable t por una constante α. Cuando esto ocurre, el periodo de la nueva señal x(αt) es modificado por la misma constante α:

$$x(\alpha t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 k(\alpha t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j(\alpha\omega_0)kt}$$

Esto puede interpretarse de la siguiente manera: el escalamiento en el tiempo de una función no altera los coeficientes c_k, pero sí la serie de Fourier, puesto que sus bases funcionales $e^{j(\alpha\omega_0)kt}$ tienen una nueva frecuencia fundamental $\alpha\omega_0$.

e. Multiplicación

El producto de dos series se hace término por término.

$$\sum_i \sum_j a_i b_j$$

$$\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(A_n e^{j\omega_0 nt}\right)\right]\left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(B_l e^{j\omega_0 lt}\right)\right]$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n B_l \, e^{j\omega_0 (l+n)t}$$

$$k = n + l \Rightarrow l = k - n$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n B_{k-n} \, e^{j\omega_0 kt}$$

f. Conjugación y simetría conjugada

$$f^*(t) = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{j\omega_0 nt}\right)^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n^* e^{-j\omega_0 nt} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{-n}^* e^{j\omega_0 nt}$$

g. Teorema de Parseval para señales de potencia

$$P = \frac{1}{T}\int_{-T/_2}^{T/_2} |f(t)|^2\, dt = \frac{1}{T}\int_{-T/_2}^{T/_2} f(t) f^*(t)\, dt$$

$$P = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/_2} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m e^{jm\omega_0 t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n^* e^{jn\omega_0 t}\right] dt$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$P = \sum_{m=-8}^{\infty} F_m \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n^* * \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/_2} e^{j(m-n)\omega_0 t}$$

Cuando m=n:

$$\mathrm{e}^{j(m-n)\omega_0 t} = \mathrm{e}^0 = 1$$

$$\int_{-T/2}^{T/_2} dt = T$$

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/_2} dt = \frac{1}{T} * T = 1$$

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n F_n^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2$$

$$\boxed{P = \frac{1}{T}\int_{-T/_2}^{T/_2} |f(t)|^2\, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2}$$

h. Derivación e integración de las series de Fourier

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen(n\omega_0 t)$$

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\omega_0(-a_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t) + b_n \cos(n\omega_0 t))$$

$$\int_{t_1}^{t_2} [f(t)\, dt] = a_0(t_2 - t_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\omega_0} \{-b_n[\cos(n\omega_0 t_2) - \cos(n\omega_0 t_1)] + a_n[\operatorname{sen}(n\omega_0 t_2) - \operatorname{sen}(n\omega_0 t_1)]\}$$

17. Determine la serie de Fourier de un tren de impulsos dado por

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{T} + \frac{2}{T}\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\omega_0 t) \;\; con\ \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

18. Defina que son los espectros de frecuencia compleja:

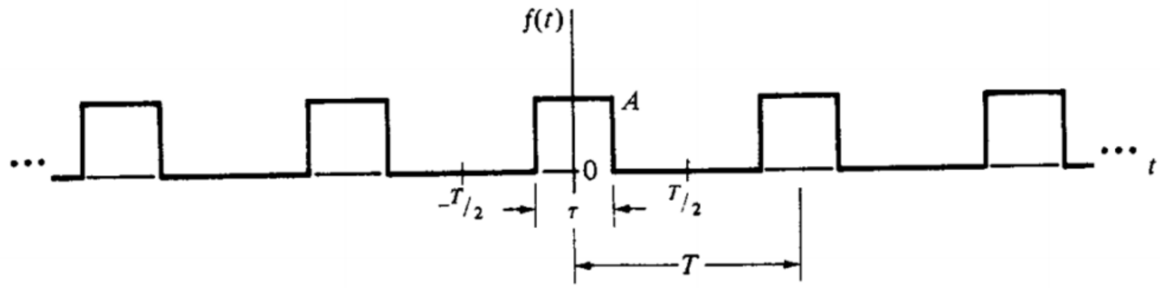
a. Espectro de amplitud de una función periódica

Gráfica de la magnitud de los coeficientes complejos F_n de la serie de Fourier vs la frecuencia angular ω.

b. Espectro de fase de una función periódica

Grafica el ángulo de de los coeficientes complejos F_n de la serie de Fourier vs la frecuencia angular ω.

19. Encuentre el espectro de frecuencia para una función cuadrada periódica como un caso generalizado, teniendo la siguiente definición de la función:



$$F(\omega) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt$$

$$F(\omega) = \frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} Ae^{-jn\omega_0 t}\,dt$$

$$F(\omega) = \frac{-A}{jn\omega_0 T}\left(e^{-\frac{jn\omega_0\tau}{2}} - e^{\frac{jn\omega_0\tau}{2}}\right)\;;\;\; n \neq 0$$

$$F(\omega) = \frac{2A}{n\omega_0 T}\,sen\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)$$

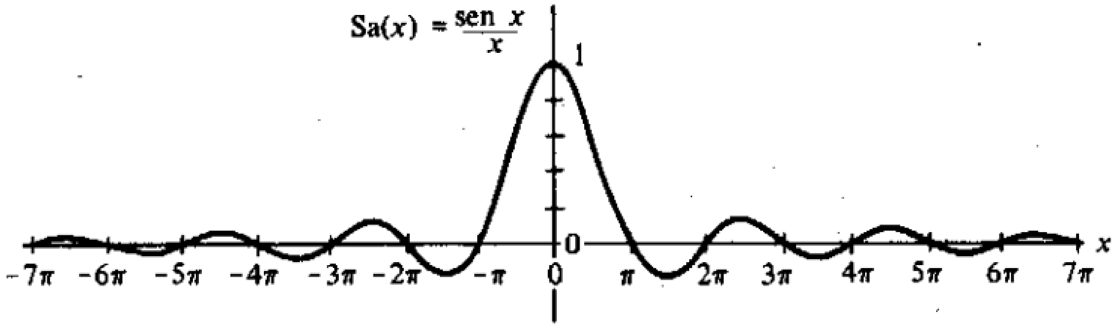
$$F(\omega) = \frac{A\tau}{T}\frac{sen\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)}{\frac{n\omega_0\tau}{2}}$$

Con $x = n\omega_0\tau/2$

$$F(\omega) = \frac{A\tau}{T}\frac{sen(x)}{x}$$

$$F(\omega) = \frac{A\tau}{T}sa(x)$$

$$\boxed{F(\omega) = \frac{A\tau}{T}sa(n\omega_0\tau/2)}$$



Sa(x) = sen x / x
1
0
x
-7π -6π -5π -4π -3π -2π -π 0 π 2π 3π 4π 5π 6π 7π