Modelos de Sistemas para Mecatrónica MT5002	Total de puntos	100
Profesor: Ing. Jaime Mora	Puntos obtenidos	
I Semestre 2020	Porcentaje	
PRIMER EXAMEN	**Nota**	

Nombre: Wendy Gómez Ramírez Carné: 2017109745

(Tiempo para lectura de examen: 30 min. Tiempo para realizar la prueba: 6 horas, Tiempo para entregar el examen 24 horas desde el inicio del examen)

Pregunta 1	de 10
Pregunta 2	de 10
Pregunta 3	de 14
Pregunta 4	de 20
Pregunta 5	de 20
Pregunta 6	de 16
Pregunta 7	de 10

Examen I Modelos de Sistemas para Mecatrónica

Wendy Gómez Ramírez
2017109745

PREGUNTA 1

No se realiza debido a que se entregaron las tutorías.

PREGUNTA 2

$$\int_0^{\pi+j} z\cos(2z)dz$$

Por el formulario de Pablo Alvarado se tiene que:

$$\int z\cos(az)dz = \frac{1}{a^2}\left[\cos(az) + az\,\mathrm{sen}(az)\right] + C$$

Entonces, para la integral del ejercicio:

$$\int_0^{\pi+j} z\cos(2z)dz = \left\{\frac{1}{2^2}\left[\cos(2z) + 2z\,\mathrm{sen}(2z)\right]\right\}\Big|_0^{\pi+j}$$

$$\int_0^{\pi+j} z\cos(2z)dz = \left(\frac{1}{4}\left[\cos(2z)+2z\,\mathrm{sen}(2z)\right]\right)\Big|_0^{\pi+j}$$

Por el formulario de Pablo Alvarado se tiene que:

$$\cos(\omega) = \frac{e^{j\omega}+e^{-j\omega}}{2}$$

$$\mathrm{sen}(\omega) = \frac{e^{j\omega}-e^{-j\omega}}{2j}$$

Sustituyendo estas ecuaciones:

$$\int_0^{\pi+j} z\cos(2z)dz = \left(\frac{1}{4}\left[\frac{e^{j2z}+e^{-j2z}}{2}+2z\cdot\frac{e^{j2z}-e^{-j2z}}{2j}\right]\right)\Big|_0^{\pi+j}$$

$$\int_0^{\pi+j} z\cos(2z)dz = \left(\frac{1}{4}\left[\frac{e^{j2z}+e^{-j2z}}{2}+z\cdot\frac{e^{j2z}-e^{-j2z}}{j}\right]\right)\Big|_0^{\pi+j}$$

$$\int_0^{\pi+j} z\cos(2z)dz = \frac{1}{4}\left[\frac{e^{j2z}+e^{-j2z}}{2}-jz\cdot\left(e^{j2z}-e^{-j2z}\right)\right]\Big|_0^{\pi+j}$$

→ Evaluando:

$$\int_0^{\pi+j} z\cos(2z)dz = \frac{1}{4}\left\{\left[\frac{e^{j2(\pi+j)}+e^{-j2(\pi+j)}}{2}-j(\pi+j)\cdot\left(e^{j2(\pi+j)}-e^{-j2(\pi+j)}\right)\right]-\right.$$

$$\left[\frac{e^0+e^0}{2}-j(0)\left(e^0-e^0\right)\right]$$

2

$$\int_0^{\pi+j} z\cos(2z)dz = \frac{1}{4}\left\{ \frac{e^{2\pi j-2}+e^{-2\pi j+2}}{2} - (\pi j-1)\left(e^{2\pi j-2} - e^{-2\pi j+2}\right) - \frac{1+1}{2} - 0 \right\}$$

$$\int_0^{\pi+j} z\cos(2z)dz = \frac{1}{4}\left\{ \frac{e^{2\pi j}\cdot e^{-2}+e^{-2\pi j}\cdot e^{2}}{2} - \left[\pi j\, e^{2\pi j-2} - \pi j\, e^{-2\pi j+2} - e^{2\pi j-2} + e^{-2\pi j+2}\right] - 1 \right\}$$

$$\int_0^{\pi+j} z\cos(2z)dz = \frac{1}{4}\left\{ \frac{e^{2\pi j-2}}{2} + \frac{e^{-2\pi j+2}}{2} - \frac{2\pi j\, e^{2\pi j-2}}{2} + \frac{2\pi j e^{-2\pi j+2}}{2} + \frac{2\, e^{2\pi j-2}}{2} - \frac{2e^{-2\pi j+2}}{2} - 1 \right.$$

$$\int_0^{\pi+j} z\cos(2z)dz = \frac{1}{4}\left\{ \left(\frac{e^{2\pi j-2}}{2} - \frac{2\pi j e^{2\pi j-2}}{2} + \frac{2e^{2\pi j-2}}{2}\right) + \left(\frac{e^{-2\pi j+2}}{2} + \frac{2\pi j e^{-2\pi j+2}}{2} - \frac{2e^{-2\pi j+2}}{2}\right) - 1 \right.$$

$$\int_0^{\pi+j} z\cos(2z)dz = \frac{1}{4}\left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{2\pi j}{2} + \frac{2}{2}\right)\cdot e^{2\pi j-2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{2\pi j}{2} - \frac{2}{2}\right) e^{-2\pi j+2} - 1 \right\}$$

$$\int_0^{\pi+j} z\cos(2z)dz = \frac{1}{4}\left\{ \left(\frac{1-2\pi j+2}{2}\right)\cdot e^{2\pi j-2} + \left(\frac{1+2\pi j-2}{2}\right) e^{-2\pi j+2} - 1 \right\}$$

3

$$\int_0^{\pi+j} z\cos(2z)dz = \frac{1}{4}\left\{\left(\frac{3-2\pi j}{2}\right)e^{2\pi j-2} + \left(\frac{-1+2\pi j}{2}\right)e^{-2\pi j+2} - 1\right\}$$

$$\int_0^{\pi+j} z\cos(2z)dz = \frac{1}{4}\left\{\left(\frac{3-2\pi j}{2}\right)e^{-2}\cdot e^{2\pi j} + \left(\frac{-1+2\pi j}{2}\right)e^{2}\cdot e^{-2\pi j} - 1\right\}$$

Por el formulario de Pablo Alvarado se sabe que:

$$e^{j\omega} = \cos(\omega) + j\operatorname{sen}(\omega)$$

Sustituyendo esta ecuación:

$$\int_0^{\pi+j} z\cos(2z)dz = \frac{1}{4}\left\{\left(\frac{3-2\pi j}{2}\right)e^{-2}\cdot\left(\cos(2\pi)+j\operatorname{sen}(2\pi)\right) + \left(-\frac{1+2\pi j}{2}\right)\cdot e^{2}\cdot\left(\cos(-2\pi) + j\operatorname{sen}(-2\pi)\right) - 1\right\}$$

Como:

$\cos(2\pi) = 1$

$\cos(-2\pi) = \cos(2\pi) = 1$

$\operatorname{sen}(2\pi) = 0$

$\operatorname{sen}(-2\pi) = -\operatorname{sen}(2\pi) = 0$

Entonces:

$$\int_0^{\pi+j} z\cos(2z)dz = \frac{1}{4}\left\{\left(\frac{3-2\pi j}{2}\right)\cdot e^{-2}\cdot(1+j\cdot 0) + \left(-\frac{1+2\pi j}{2}\right)\cdot e^{2}\cdot(1+j0) - 1\right\}$$

$$\int_0^{\pi+j} z\cos(2z)dz = \frac{1}{4}\left\{\left(\frac{3-2\pi j}{2}\right)\cdot e^{-2} - \left(\frac{1-2\pi j}{2}\right)e^{2} - 1\right\}$$

$$\int_0^{\pi+j} z\cos(2z)dz = \frac{1}{4}\left\{\frac{3}{2}e^{-2} - \frac{2\pi j}{2}e^{-2} - e^{2} + \frac{2\pi j}{2}e^{2} - 1\right\}$$

$$\int_0^{\pi+j} z\cos(2z)dz = \frac{1}{4}\left\{\frac{3}{2}e^{-2} - \pi j e^{-2} - e^{2} + \pi j e^{2} - 1\right\}$$

$$\int_0^{\pi+j} z\cos(2z)dz = \frac{1}{4}\left\{\left(\frac{3}{2}e^{-2} - e^{2} - 1\right) + j\left(\pi e^{-2} + \pi e^{2}\right)\right\}$$

$$\int_0^{\pi+j} z\cos(2z)dz = \frac{1}{4}\left\{\left(\frac{3}{2}e^{-2} - e^{2} - 1\right) + j\pi\cdot 2\left(\frac{e^{-2}+e^{2}}{2}\right)\right\}$$

Por el formulario:

$$\cosh(\omega) = \frac{e^{\omega}+e^{-\omega}}{2}$$

Sustituyendo:

$$\int_0^{\pi+j} z\cos(2z)dz = \frac{1}{4}\left\{\left(\frac{3}{2}e^{-2} - e^{2} - 1\right) + j2\pi\cosh(2)\right\}$$

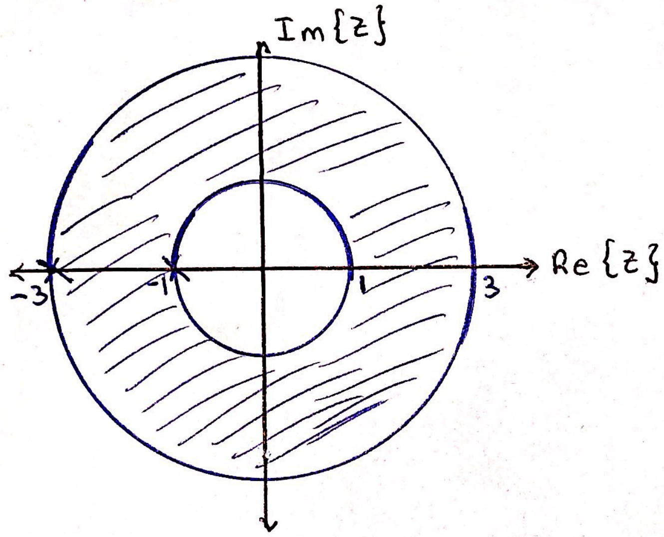
$$\boxed{\int_0^{\pi+j} z\cos(2z)dz = \frac{3e^{-2}}{8} - \frac{e^{2}}{4} - \frac{1}{4} + \frac{j\pi\cosh(2)}{2}}$$

PREGUNTA 3

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$$

Parte 1.

$1 < |z| < 3$



Por fracciones Parciales

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{A}{(z+1)} + \frac{B}{(z+3)}$$

$$A = \lim_{z \to -1} (z+1) \cdot \frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{(z+3)} = \frac{1}{(-1+3)} = \frac{1}{2}$$

$$B = \lim_{z \to -3} (z+3) \cdot \frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{(z+1)} = \frac{1}{-3+1} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(z+1)(z+3)} = \underbrace{\frac{1/2}{(z+1)}}_{\text{Región externa}} - \underbrace{\frac{1/2}{(z+3)}}_{\text{Región interna}} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+3}\right]$$

Por formulario, la serie de Laurent es:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n=\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-c)^n+\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$$

Por el formulario de Pablo Alvarado se sabe que:

$$\frac{1}{z-a}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n} & \text{para } |z-z_0|>|a-z_0| \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)}{(a-z_0)^{n+1}} & \text{para } |z-z_0|<|a-z_0|\end{cases}$$

Aplicando esto para las dos regiones que se tienen:

$$\frac{1}{z+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1+0)^{n-1}}{(z-0)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z^n}$$

$$\frac{-1}{z+3}=--\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-0)^n}{(-3-0)^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(-3)^{n+1}}$$

Por lo tanto, la serie de Laurent de $f(z)$ va a ser:

$$f(z)=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(-3)^{n+1}}\right]$$

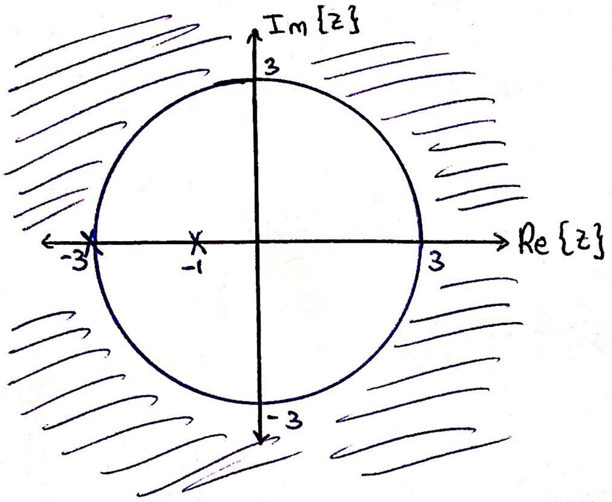
$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2(-3)^{n+1}} \quad \text{para la región } 1<|z|<3$$

El desarrollo de la serie es:

$$\boxed{f(z)=\ldots+\frac{1}{2z^5}-\frac{1}{2z^4}+\frac{1}{2z^3}-\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{2z}-\frac{1}{6}+\frac{z}{18}-\frac{z^2}{54}+\frac{z^3}{162}-\frac{z^4}{486}\ldots \quad \text{para } 1<|z|<3}$$

Parte II.

$|z| > 3$



Como se tiene que $f(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+3}\right]$

Para $|z|>3$ ambas son regiones externas.

Para $\frac{1}{z+1}$:

$$\begin{array}{r|l} 1 & z+1 \\ \hline -\left(1+\frac{1}{z}\right) & \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^4} + \dots \end{array}$$

$$-\frac{1}{z}$$

$$-\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}\right)$$

$$\frac{1}{z^2}$$

$$-\left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3}\right)$$

$$-\frac{1}{z^3}$$

$$-\left(\frac{-1}{z^3} + \frac{-1}{z^4}\right)$$

Para $\frac{1}{z+3}$:

$$
\begin{array}{l|l}
1 & z+3 \\ \hline
-\left(\frac{1}{z}+\frac{3}{z}\right) & \frac{1}{z}-\frac{3}{z^2}+\frac{3^2}{z^3}-\frac{3^3}{z^4}+\cdots \\
\quad -\frac{3}{z} & \\
\quad -\left(-\frac{3}{z}-\frac{3^2}{z^2}\right) & \\
\qquad \frac{3^2}{z^2} & \\
\qquad -\left(\frac{3^2}{z^2}+\frac{3^3}{z^3}\right) & \\
\qquad\quad -\frac{3^3}{z^3} &
\end{array}
$$

Como $f(z)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z+3}\right]$, Sustituyendo las expansiones de las series:

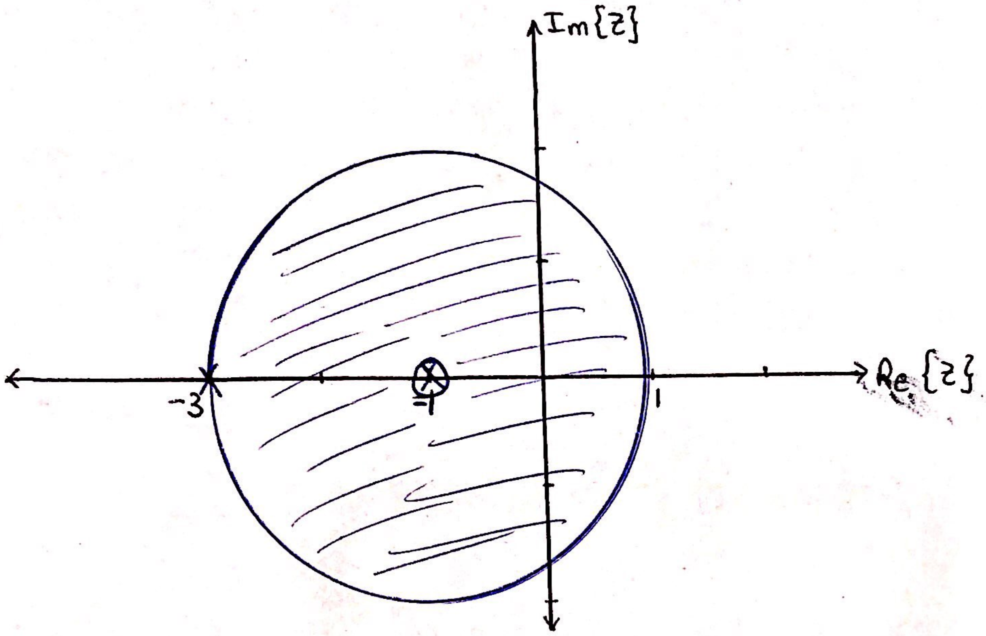
$$f(z)=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^4}+\cdots\right)-\left(\frac{1}{z}-\frac{3}{z^2}+\frac{3^2}{z^3}-\frac{3^3}{z^4}+\cdots\right)\right]$$

$$f(z)=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{z^2}-\frac{8}{z^3}+\frac{26}{z^4}-\frac{80}{z^5}+\cdots\right]$$

$$\boxed{f(z)=\frac{1}{z^2}-\frac{4}{z^3}+\frac{13}{z^4}-\frac{40}{z^5}+\cdots \quad \text{para } |z|>3}$$

Parte III.

$0 < |z+1| < 2$



$\left(\cancel{f(z)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z+3}\right]}\right) \quad f(z)=\frac{1}{(z+1)(z+3)}$

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{(z-z_0)-(a-z_0)} = \frac{1}{z_i - a_i}$$

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{(z--1)-(-1--1)} = \frac{1}{z_i - 0} = \frac{1}{z_i}$$

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{(z--1)-(-3--1)} = \frac{1}{z_i --2} = \frac{1}{z_i+2}$$

con $z_i = z+1$

$\frac{1}{z_i+2}$ es una región interna, por lo tanto:

$$\begin{array}{r|l} 1 & 2+z_i \\ \hline -\left(1+\frac{z_i}{2}\right) & \frac{1}{2}-\frac{z_i}{2^2}+\frac{z_i^2}{2^3}-\frac{z_i^3}{2^4}+\dots \\ \hline -\frac{z_i}{2} & \\ -\left(-\frac{z_i}{2}-\frac{z_i^2}{2^2}\right) & \\ \hline \frac{z_i^2}{2^2} & \\ -\left(\frac{z_i^2}{2^2}+\frac{z_i^3}{2^3}\right) & \\ \hline -\frac{z_i^3}{2^3} & \end{array}$$

Como el círculo está centrado en $z=-1$, el $\frac{1}{z_i}$ se multiplica por todo

La expansión de la serie va a ser:

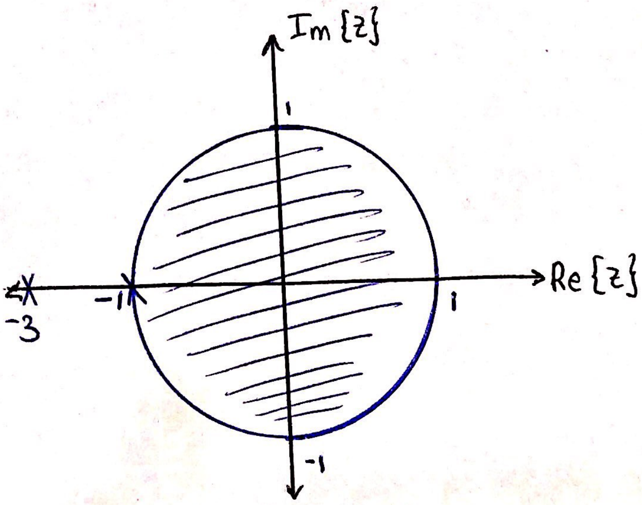
$$f(z)=\frac{1}{z_i}\left(\frac{1}{2}-\frac{z_i}{2^2}+\frac{z_i^2}{2^3}-\frac{z_i^3}{2^4}+\dots\right)=\frac{1}{2z_i}-\frac{1}{2^2}+\frac{z_i}{2^3}-\frac{z_i^2}{2^4}+\dots$$

Sustituyendo z_i por $z+1$

$$\boxed{F(z)=\frac{1}{2(z+1)}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\cdot(z+1)-\frac{(z+1)^2}{16}+\dots \quad \text{Para } 0<|z+1|<2}$$

Parte IV

$|z| < 1$



$$f(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+3}\right]$$

Las dos son regiones internas.

Para $\dfrac{1}{z+1}$

$$\begin{array}{l|l} 1 & 1+z \\ \hline -(1+z) & 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - \dots \\ \quad -z & \\ \quad -(-z - z^2) & \\ \qquad z^2 & \\ \qquad -(z^2 + z^3) & \\ \qquad\quad -z^3 & \\ \qquad\quad -(-z^3 - z^4) & \\ \qquad\qquad z^4 & \end{array}$$

Para $\dfrac{1}{z+3}$

$$
\begin{array}{l|l}
1 & 3+z \\
\hline
-\left(1+\frac{z}{3}\right) & \frac{1}{3}-\frac{z}{3^2}+\frac{z^2}{3^3}-\frac{z^3}{3^4}+\frac{z^4}{3^5}-\dots \\
\hline
-\frac{z}{3} & \\
-\left(-\frac{z}{3}-\frac{z^2}{3^2}\right) & \\
\hline
\frac{z^2}{3^2} & \\
-\left(\frac{z^2}{3^2}+\frac{z^3}{3^3}\right) & \\
\hline
-\frac{z^3}{3^3} & \\
-\left(-\frac{z^3}{3^3}-\frac{z^4}{3^4}\right) & \\
\hline
\frac{z^4}{3^4} &
\end{array}
$$

$$f(z)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z+3}\right]$$

$$\Rightarrow f(z)=\frac{1}{2}\left[\left(1-z+z^2-z^3+z^4-\dots\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{z}{9}+\frac{z^2}{27}-\frac{z^3}{81}+\frac{z^4}{243}-\dots\right)\right]$$

$$f(z)=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}-\frac{8}{9}z+\frac{26}{27}z^2-\frac{80}{81}z^3+\frac{242}{243}z^4\dots\right]$$

$$\boxed{f(z)=\frac{1}{3}-\frac{4}{9}z+\frac{13}{27}z^2-\frac{40}{81}z^3+\frac{121}{243}z^4-\dots \quad \text{Para } |z|<1}$$

1. Para $1<|z|<3 \Rightarrow f(z) = \cdots + \frac{1}{2z^3} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2z} - \frac{1}{6} + \frac{z}{18} - \frac{z^2}{54} + \cdots$

2. Para $|z|>3 \Rightarrow f(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{4}{z^3} + \frac{13}{z^4} - \frac{40}{z^5} + \cdots$

3. Para $0<|z+1|<2 \Rightarrow f(z) = \frac{1}{2(z+1)} - \frac{1}{4} + \frac{(z+1)}{8} - \frac{(z+1)^2}{16} + \cdots$

4. Para $|z|<1 \Rightarrow f(z) = \frac{1}{3} - \frac{4}{9}z + \frac{13}{27}z^2 - \frac{40}{81}z^3 + \cdots$

Por formulario, la serie de Laurent se define como:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-c)^n}_{\text{Parte Principal de la serie de Laurent}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n}_{\text{Serie de Taylor}}$$

Por lo tanto:

1. La serie para la región $1<|z|<3$ es una serie de Laurent debido a que posee la parte principal y la serie de Taylor.
2. La serie para la región $|z|>3$ es una serie de laurent que ~~sol~~ posee ~~una parte~~ solo parte principal
3. La serie para la región $0<|z+1|<2$ es una serie de Laurent con una parte principal finita.
4. La serie para la región $|z|<1$ es una serie de Taylor debido a que no posee la parte principal de la serie de Laurent.

PREGUNTA 4

Mapeo:

$$\omega = \frac{2jz}{z+j}$$

$$\omega = u + jv$$

$$z = x + jy$$

Parte a

mapeo inverso de ω:

$$z = f^{-1}(\omega)$$

Por formulario, el mapeo inverso es

$$z = \frac{-d\omega + b}{c\omega - a}$$

Como $\omega = \dfrac{az+b}{cz+d} = \dfrac{2jz}{z+j}$

$\Rightarrow a = 2j$

$b = 0$

$c = 1$

$d = j$

$$\Rightarrow z = \frac{-d\omega + b}{c\omega - a} = \frac{-j\omega}{\omega - 2j}$$

Donde $a_\omega = -j \qquad c_\omega = 1$

$b_\omega = 0 \qquad d_\omega = -2j$

Por formulario:

$$\lambda = \frac{a}{c} = -j$$

$$\mu = bc - ad = -(-j)(-2j) = -2j^2 = 2$$

$$\alpha = c^2 = 1$$

$$\beta = cd = -2j$$

$$z = \frac{-d\omega + b}{c\omega - a} = \lambda + \frac{\mu}{\alpha\omega + \beta}$$

$\Rightarrow$ El mapeo inverso de ω es:

Ra/ $$\boxed{z = \frac{-j\omega}{\omega - 2j} = -j + \frac{2}{\omega - 2j}}$$

Parte b

Por formulario de Pablo Alvarado:

$$(\cancel{\omega = qz + b}) \quad \omega = \frac{qz + b}{cz + d} = \lambda + \frac{\mu}{\alpha z + \beta}$$

Donde

$$\lambda = a/c \; ; \; \mu = bc - ad \; ; \; \alpha = c^2 \; ; \; \beta = cd$$

Para:

$$\omega = \frac{2jz}{z + j}$$

$a = 2j$

$b = 0$

$c = 1$

$d = j$

Por lo tanto:

$\lambda = \frac{2j}{1} = 2j$

$\mu = (0)(1) - (2j)(j) = 2$

$\alpha = c^2 = 1^2 = 1$

$\beta = (1)(j) = j$

Descomponiendo en mapeos elementales:

Rb/

$z_1 = \alpha z + \beta = z + j$

$z_2 = \frac{1}{z_1} = \frac{1}{z+j}$

$w = \mu z_2 + \lambda = 2 \cdot \frac{1}{z+j} + 2j$

Donde: $\lambda = 2j$

$\mu = 2$

$\alpha = 1$

$\beta = j$

Secuencia:

1. Se realiza el mapeo lineal z_1. Como $\alpha = 1$ no hay rotación ni ampliación. Traslación de una unidad hacia arriba (eje vertical)
2. Se realiza el mapeo de inversión z_2
3. Se realiza el ultimo mapeo lineal para llegar a w. Como $\mu = 2$ se escala por 2 y como $\lambda = 2j$ se traslada dos unidades hacia arriba (eje vertical)

Parte c

$|z| < |z-j|$

→ Primer mapeo $z_1 = z + j$

$z = z_1 - j$

$|z_1 - j| < |z_1 - j - j|$

$|z_1 - j| < |z_1 - 2j|$

→ Segundo mapeo $z_2 = \frac{1}{z_1}$

Mapeo de una recta, por formulario

$\Rightarrow \quad \beta = |a|^2 - |b|^2$

$|z-a| = |z-b| \Rightarrow a = j \quad y \quad b = 2j$

$$\beta = |j|^2 - |2j|^2 = (\sqrt{j^2})^2 - (\sqrt{2j^2})^2 = (1)^2 - (2)^2 = -3$$

Por formulario, como $\beta \neq 0$ se va a mapear a un círculo:

$|w - w_0| = r_w$

$$r_w = \left|\frac{a-b}{\beta}\right| = \left|\frac{j-2j}{3}\right| = \left|\frac{-j}{3}\right| = \frac{1}{3}$$

$$w_0 = \frac{(a-b)^*}{\beta} = \frac{(j-2j)^*}{3} = \frac{(-j)^*}{-3} = \frac{-j}{3}$$

Por lo tanto:

$$z_2 : \left| z_2 - \left(\frac{-j}{3} \right) \right| = \frac{1}{3}$$

Si se mapea un punto de la región interna de z_1, este se mapea a la región externa de z_2. Por lo tanto:

$$z_2 : \left| z_2 + \frac{j}{3} \right| > \frac{1}{3}$$

→ Tercer mapeo: $2j + 2z_2$

$$w = 2j + 2z_2$$

$$z_2 = \frac{w - 2j}{2}$$

Como:

$$\left| z_2 + \frac{j}{3} \right| > \frac{1}{3}$$

Sustituyendo z_2:

$$\left| \frac{w-2j}{2} + \frac{j}{3} \right| > \frac{1}{3}$$

$$\left| w - 2j + 2\left(\frac{j}{3}\right) \right| > 2\left(\frac{1}{3}\right)$$

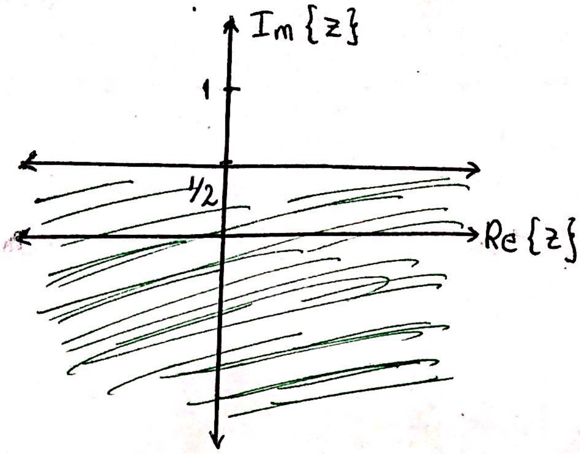
$$\left| w - \frac{4}{3}j \right| > \frac{2}{3}$$

La forma en el plano w de la region $|z| < |z-j|$ es:

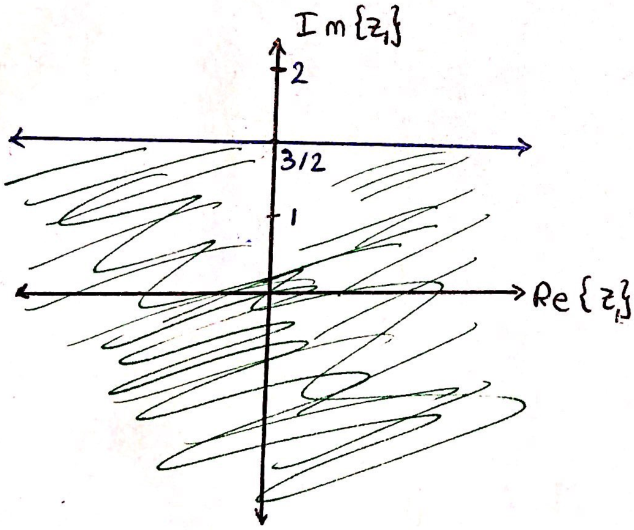
$$\boxed{\left| w - \frac{4}{3}j \right| > \frac{2}{3}}$$

Parte d

Se tiene la región $|z|<|z-j|$. Esto es una recta que pasa en el centro de los puntos $z=0$ y $z=j$



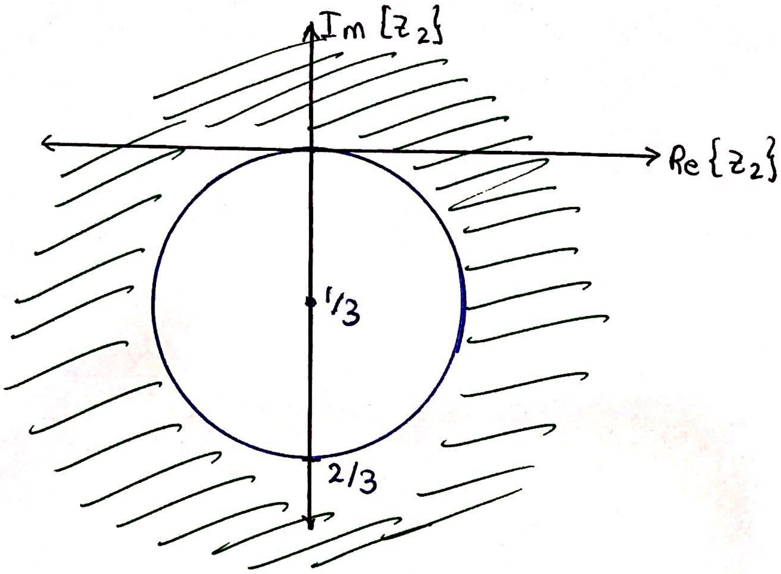
Primero se realiza el mapeo z_1 que es $z_1 = z+j$. Como el número a la par de z es 1, no se escala ni se rota. Como se tiene un $+j$, la recta se mueve una unidad hacia arriba del eje Imaginario



La ecuación de esta región está dada por:

$$|z_1-j|<|z_1-2j|$$

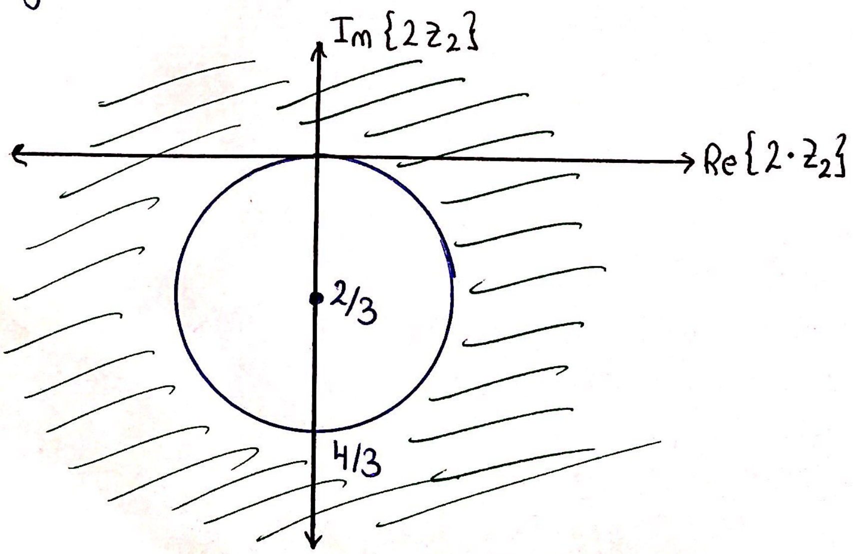
Después, para el mapeo de inversión se sabe que una recta que no pasa por el origen se mapea a un círculo que pasa por el origen. Además, el círculo va a pasar por el punto inverso de donde la recta interseca el eje.



La ecuación de esta región es

$$\left| z_2 + j/3 \right| > \frac{1}{3}$$

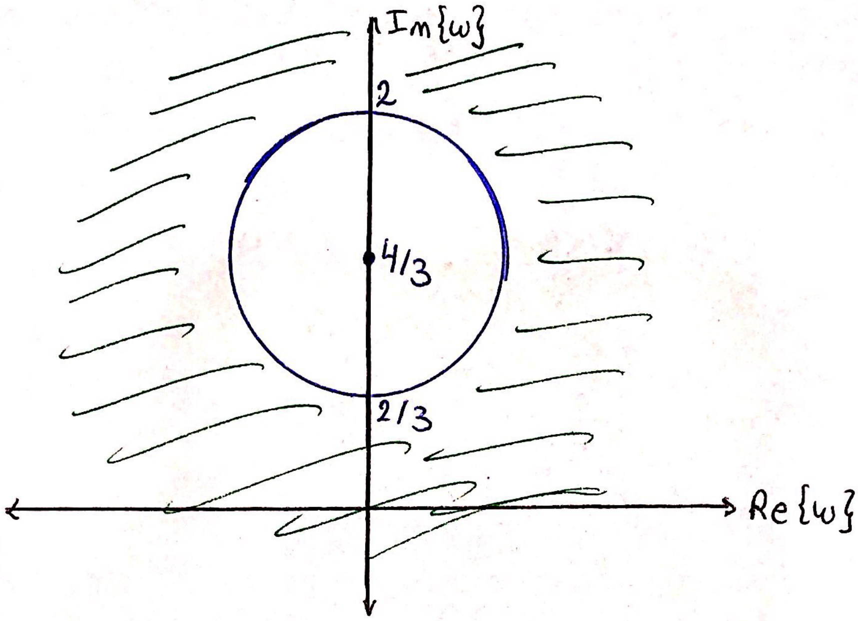
Por último, para el mapeo ω se tiene que $\omega = 2z_2 + 2j$. Esto implica que se va a escalar por 2 y se va a mover dos unidades hacia arriba en el eje imaginario



La ecuación de esta región es:

$$\left|\omega+\frac{2}{3}\right|>\frac{2}{3}$$

Luego, esta región se desplaza $+2j$ y con esto se obtiene el mapeo final

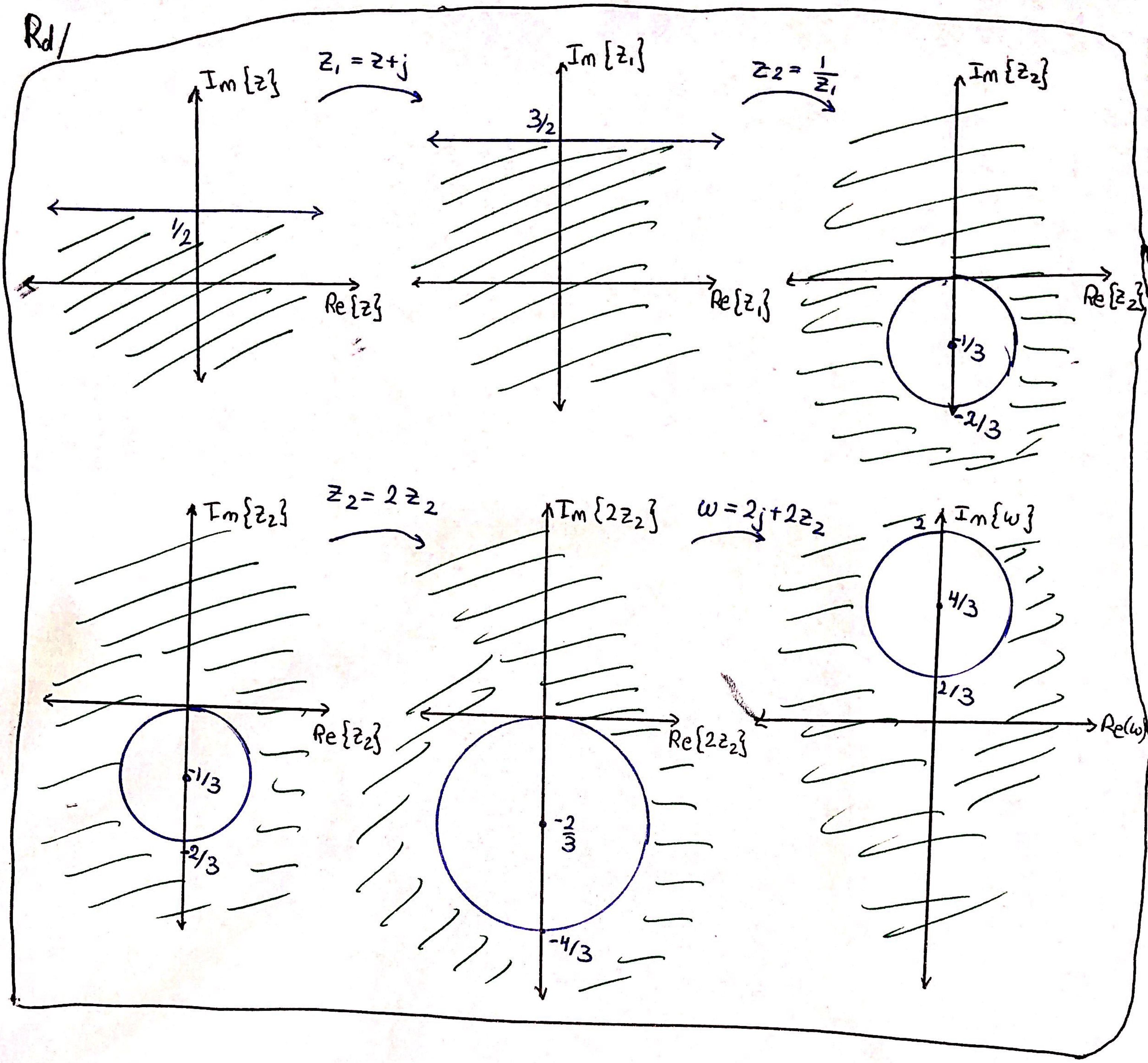


La ecuación de la región final es

$$\left|\omega-\frac{4}{3}j\right|>\frac{2}{3}$$

Por lo tanto, los mapeos paso a paso son:

Rd/



Im{z}
1/2
Re{z}
z_1 = z+j
Im{z_1}
3/2
Re{z_1}
z_2 = 1/z_1
Im{z_2}
Re{z_2}
-1/3
-2/3
Im{z_2}
Re{z_2}
-1/3
-2/3
z_2 = 2z_2
Im{2z_2}
Re{2z_2}
-2/3
-4/3
ω = 2j+2z_2
2
Im{ω}
4/3
2/3
Re(ω)

PREGUNTA 5

$$x_c(t) = \begin{cases} A\cos(\omega_c t) & -\frac{\varepsilon}{2} < t < \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 & \frac{\varepsilon}{2} < t < T_o - \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

Parte A

Por formulario se sabe que una serie de Fourier trigonométrica se expresa como:

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{K=1}^{\infty} a_K \cos(\omega_0 K t) + \sum_{K=1}^{\infty} b_K \operatorname{sen}(\omega_0 K t)$$

Donde:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_p}$$

$$C_K = \frac{a_K - j b_K}{2}$$

$$a_K = \frac{2}{T_p}\int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t)\cos(\omega_0 K t)\,dt$$

$$b_K = \frac{2}{T_p}\int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t)\operatorname{sen}(\omega_0 K t)\,dt$$

$$T_p = T_o - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = T_o$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_p} = \frac{2\pi}{T_o}$$

$$a_K = \frac{2}{T_0}\left[\int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} A\cos(\omega_c t)\cos(\omega_0 K t)\,dt + \int_{\varepsilon/2}^{-\varepsilon/2+T_0} 0\cdot\cos(\omega_0 K t)\,dt\right]$$

$$a_K = \frac{2A}{T_0}\int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} \cos(\omega_c t)\cos(\omega_0 K\, t)\,dt$$

Por las relaciones de ortogonalidad se sabe que:

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega_0 t)\cdot\cos(m\,\omega_0\, t)\,dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ T/2 & m = n \end{cases}$$

Por lo tanto,

Si $\omega_c \neq \omega_0 K$

$\Rightarrow a_K = 0$

Si $\omega_c = \omega_0 K$

$$\Rightarrow a_K = \frac{2A}{T_0}\cdot\frac{\varepsilon}{2} = \frac{A\varepsilon}{T_0}$$

$$b_K = \frac{2}{T_0}\left[\int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\varepsilon/2} A\cos(\omega_c t)\cdot \operatorname{sen}(\omega_0 K t)\,dt + \int_{\varepsilon/2}^{T_0-\frac{\varepsilon}{2}} 0\cdot \operatorname{sen}(\omega_0 K t)\,dt\right]$$

$$b_K = \frac{2A}{T_0}\int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\varepsilon/2} \cos(\omega_c t)\cdot \operatorname{sen}(\omega_0 K t)\,dt$$

Por relaciones de ortogonalidad se sabe que:

$$\int_{-T/2}^{T/2} \operatorname{sen}(n\omega_0 t)\cos(m\omega_0 t)\,dt = 0 \quad \text{para todo } m \text{ y } n$$

Por lo tanto:

$$b_K = 0$$

$$a_0 = C_0 \Rightarrow K = 0$$

$$a_0 = \frac{\frac{2}{T_0}\left[\int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} A\cos(\omega_c t)\cos(\omega_0 K t)\,dt - j\int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} A\cos(\omega_c t)\cdot \operatorname{sen}(\omega_0 K t)\,dt\right]}{2}$$

$$a_0 = \frac{\frac{2A}{T_0}\int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} \cos(\omega_c t)\cdot 1\,dt - j0}{2}$$

$$a_0 = \frac{A}{T_0}\int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} \cos(\omega_c t)\,dt$$

$$a_0 = \frac{A}{T_0}\left(\frac{\operatorname{sen}(\omega_c t)}{\omega_c}\right)\Bigg|_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2}$$

$$a_0 = \frac{A}{T_0\omega_c}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_c \varepsilon}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(-\frac{\omega_c \varepsilon}{2}\right)\right)$$

Como $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$

$$a_0 = \frac{A}{T_0 \omega_c}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_c \varepsilon}{2}\right) - -\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_c \varepsilon}{2}\right)\right)$$

$$a_0 = \frac{2A}{T_0 \omega_c} \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_c \varepsilon}{2}\right)$$

La serie de Fourier Trigonométrica de $x_{periodicac}(t)$ es:

$$x_{pc} = x_{periodicac}(t)$$

$$x_{pc} = a_0 + \sum_{K=1}^{\infty} a_K \cos(\omega_0 K t) + \sum_{K=1}^{\infty} \cancel{b_K}^{0} \operatorname{sen}(\omega_0 K t)$$

$$\omega_0 = 2\pi / T_0$$

Para $\omega_c = \omega_0 K$

$$x_{periodicac}(t) = \frac{2A}{T_0 \omega_c} \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_c \varepsilon}{2}\right) + \sum_{K=1}^{\infty} \frac{A\varepsilon}{T_0} \cdot \cos\left(\frac{2\pi K t}{T_0}\right)$$

Para $\omega_c \neq \omega_0 K$

$$x_{periodicac}(t) = \frac{2A}{T_0 \omega_c} \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_c \varepsilon}{2}\right)$$

Parte b

Por formulario se sabe que una serie de Fourier exponencial se expresa como

$$x(t) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} C_K e^{j\omega_0 K t}$$

$$C_K = \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{-j\omega_0 K t} x(t)\, dt$$

Del punto A se sabe que:

$$T_p = T_o$$

$$\omega_o = \frac{2\pi}{T_o}$$

$$C_K = \frac{1}{T_o}\left[\int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\varepsilon/2} A\cos(\omega_c t)\, e^{-j\omega_o K t}\, dt + \int_{\varepsilon/2}^{T_o-\frac{\varepsilon}{2}} 0 \cdot e^{-j\omega_o K t}\, dt\right]$$

$$C_K = \frac{A}{T_o}\int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} \cos(\omega_c t)\, e^{-j\omega_o K t}\, dt$$

Por la tabla de integrales

$$\int e^{bx}\cos(ax)\,dx = \frac{1}{a^2+b^2}\, e^{bx}\left(a\,\mathrm{sen}(ax) + b\cos(ax)\right)$$

Por lo tanto:

$$C_K = \frac{A}{T_o}\left[\frac{1}{\omega_c^{\,2} + (-j\omega_o K)^2}\, e^{-j\omega_o K t}\left(\omega_c\,\mathrm{sen}(\omega_c t) + (-j\omega_o K)\cos(\omega_c t)\right)\right]\Bigg|_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}}$$

$$C_K = \frac{A}{T_o}\left(\frac{1}{\omega_c^{\,2} + (\omega_o K)^2}\right)\left[j\, e^{-j\omega_o K t}\left(\frac{\omega_c\,\mathrm{sen}(\omega_c t)}{j} + (-\omega_o K)\cos(\omega_c t)\right)\right]\Bigg|_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}}$$

$$C_K = \frac{A}{T_o}\left(\frac{j}{\omega_c^{\,2} + (\omega_o K)^2}\right)\left[e^{-j\omega_o K t}\left(-j\omega_c\,\mathrm{sen}(\omega_c t) - \omega_o K\cos(\omega_c t)\right)\right]\Bigg|_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}}$$

$$C_K = -\frac{A}{T_o}\left(\frac{j}{\omega_c^{\,2} + (\omega_o K)^2}\right)\left[e^{-j\omega_o K t}\left(j\omega_c\,\mathrm{sen}(\omega_c t) + \omega_o K\cos(\omega_c t)\right)\right]\Bigg|_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\varepsilon/2}$$

Si $\omega_c = \omega_0 K$

$$\Rightarrow C_K = \frac{-A}{T_0}\left(\frac{j}{2\omega_c^2}\right)\left[\omega_c\, e^{-j\omega_0 K t}\left(j\,\text{sen}(\omega_c t) + \cos(\omega_c t)\right)\right]\Bigg|_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2}$$

Por formulario:

$$e^{j\omega} = \cos(\omega) + j\,\text{sen}(\omega)$$

$$C_K = \left(\frac{-jA\omega_c}{2T_0\omega_c^2}\right)\left(e^{-j\omega_0 K t} \cdot e^{j\omega_c t}\right)\Bigg|_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2}$$

como $\omega_c = \omega_0 K$

$$C_K = \left(\frac{-jA}{2T_0\omega_c}\right)\left(e^{-j\omega_c t} \cdot e^{j\omega_c t}\right)\Bigg|_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2}$$

$$C_K = \left(\frac{-jA}{2T_0\omega_c}\right)\left(e^{-j\omega_c t + j\omega_c t}\right)\Bigg|_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} = \left(\frac{-jA}{2T_0\omega_c}\right)(e^0)$$

$$C_K = \left(\frac{-jA}{2T_0\omega_c}\right) \quad \text{Si } \omega_c = \omega_0 K.$$

Si $\omega_c \neq \omega_0 K$

$$\cancel{\left(C_K = -jA\right)}$$

$$C_K = \frac{-A}{T_0}\left(\frac{j}{\omega_c^2 + (\omega_0 K)^2}\right)\left[e^{-j\omega_0 K t}\left(j\omega_c\,\text{sen}(\omega_c t) + \omega_0 K \cos(\omega_c t)\right)\right]\Bigg|_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}}$$

$$C_K = \frac{-A}{T_o}\left(\frac{j}{\omega_c^2+(\omega_0 K)^2}\right)\cdot\left[e^{\frac{-j\omega_0 K\varepsilon}{2}}\left(j\omega_c \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_c\varepsilon}{2}\right)+\omega_0 K\cos\left(\frac{\omega_c\varepsilon}{2}\right)\right)-e^{\frac{j\omega_0 K\varepsilon}{2}}\cdot\right.$$

$$\left.\left(j\omega_c \operatorname{sen}\left(-\frac{\omega_c\varepsilon}{2}\right)+\omega_0 K\cos\left(\frac{-\omega_c\varepsilon}{2}\right)\right)\right]$$

Como

$\cos(x) = \cos(-x)$

$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$

$$C_K = \frac{-A}{T_o}\left(\frac{j}{\omega_c^2+(\omega_0 K)^2}\right)\cdot\left[e^{\frac{-j\omega_0 K\varepsilon}{2}}\left(j\omega_c \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_c\varepsilon}{2}\right)+\omega_0 K\cos\left(\frac{\omega_c\varepsilon}{2}\right)\right)-e^{\frac{j\omega_0 K\varepsilon}{2}}\cdot\right.$$

$$\left.\left(-j\omega_c \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_c\varepsilon}{2}\right)+\omega_0 K\cos\left(\frac{-\omega_c\varepsilon}{2}\right)\right)\right]$$

$$C_K = \frac{-A}{T_o}\left(\frac{j}{\omega_c^2+(\omega_0 K)^2}\right)\cdot\left[e^{\frac{-j\omega_0 K\varepsilon}{2}}\cdot j\omega_c \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_c\varepsilon}{2}\right)+e^{\frac{-j\omega_0 K\varepsilon}{2}}\cdot\omega_0 K\cos\left(\frac{\omega_c\varepsilon}{2}\right)+\right.$$

$$\left.e^{\frac{j\omega_0 K\varepsilon}{2}}\cdot j\omega_c \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_c\varepsilon}{2}\right)-e^{\frac{j\omega_0 K\varepsilon}{2}}\cdot\omega_0 K\cos\left(\frac{\omega_c\varepsilon}{2}\right)\right]$$

$$C_K = \frac{-A}{T_o}\left(\frac{j}{\omega_c^2+(\omega_0 K)^2}\right)\cdot\left[j\omega_c \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_c\varepsilon}{2}\right)\cdot\left(e^{\frac{-j\omega_0 K\varepsilon}{2}}+e^{\frac{j\omega_0 K\varepsilon}{2}}\right)+\omega_0 K\cos\left(\frac{\omega_c\varepsilon}{2}\right)\cdot\right.$$

$$\left.\left(e^{\frac{-j\omega_0 K\varepsilon}{2}}-e^{\frac{j\omega_0 K\varepsilon}{2}}\right)\right]$$

Por formulario:

$$\cos(\omega) = \frac{e^{j\omega}+e^{-j\omega}}{2}$$

$$\operatorname{sen}(\omega) = \frac{e^{j\omega}-e^{-j\omega}}{2j}$$

$$C_K = \frac{-A}{T_0}\left(\frac{j}{{w_c}^2+(w_0K)^2}\right)\cdot\left[2jw_c \operatorname{sen}\left(\frac{w_c\varepsilon}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{w_0K\varepsilon}{2}\right) + -2jw_0K\cos\left(\frac{w_c\varepsilon}{2}\right)\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{w_0K\varepsilon}{2}\right)\right]$$

(~~Por las relaciones de ortogonalidades~~)

$$C_K = \frac{-A}{T_0}\left(\frac{2j\cdot j}{{w_c}^2+(w_0K)^2}\right)\cdot\left[w_c \operatorname{sen}\left(\frac{w_c\varepsilon}{2}\right)\cos\left(\frac{w_0K\varepsilon}{2}\right) - w_0K\cos\left(\frac{w_c\varepsilon}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{w_0K\varepsilon}{2}\right)\right]$$

$$C_K = +\frac{2A}{T_0}\left(\frac{1}{{w_c}^2+{w_0}^2K^2}\right)\left[w_c \operatorname{sen}\left(\frac{w_c\varepsilon}{2}\right)\cos\left(\frac{w_0K\varepsilon}{2}\right) - w_0K\cos\left(\frac{w_c\varepsilon}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{w_0K\varepsilon}{2}\right)\right]$$

Como:

$$x(t) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} C_K e^{jw_0Kt}$$

Si $w_c = w_0K$

$$x_{periodica}C(\epsilon) = \sum_{K=-\infty}^{\infty}\left(\frac{-jA}{2T_0w_c}\right)e^{jw_0Kt}$$

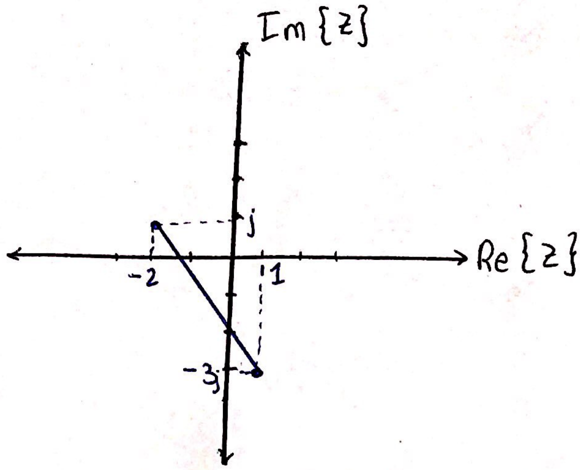
Si $w_c \neq w_0K$

$$x_{periodica}C(\epsilon) = \sum_{K=-\infty}^{\infty}\left[\frac{2A}{T_0}\left(\frac{1}{{w_c}^2+{w_0}^2K^2}\right)\left(w_c \operatorname{sen}\left(\frac{w_c\varepsilon}{2}\right)\cos\left(\frac{w_0K\varepsilon}{2}\right) - w_0K\cos\left(\frac{w_c\varepsilon}{2}\right)\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{w_0K\varepsilon}{2}\right)\right)\right]e^{jw_0Kt}$$

Con $w_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ para ambos casos.

Pregunta 6

$w = f(z) = z^2$



$w = z^2$

$w = u + jv$

$z = x + jy$

$w = z^2 = (x+jy)(x+jy)$

$w = (x^2 - y^2) + (yxj + yxj)$

$w = (x^2 - y^2) + j2xy$

Como $w = u + jv$

$u + jv = (x^2 - y^2) + j2xy$

Comparando las partes reales y las imaginarias:

$u = x^2 - y^2$

$\cancel{v = 2}$ $v = 2xy$

Parte a

Para el punto $z = -2+j$

$z = x + jy$

$x = -2$
$y = 1$

$u = x^2 - y^2 = (-2)^2 - (1)^2 = 3$

$v = 2xy = 2(-2)(1) = -4$

$w = u + jv = 3 + -j4$

Para el punto $z = 1-3j$

$z = x + jy$

$x = 1$
$y = -3$

$u = x^2 - y^2 = (1)^2 - (-3)^2 = -8$

$v = 2xy = 2(1)(-3) = -6$

$w = u + jv = -8 - 6j$

La imagen de los puntosen el plano w debidoal mapeo $w = z^2$ es:

$z = -2+j \Rightarrow w = 3 - 4j$

$z = 1-3j \Rightarrow w = -8 - 6j$

Parte b

Para la recta

$$m = \frac{-3-1}{1--2} = \frac{-4}{3}$$

$$b = y - mx = (1) - \left(\frac{-4}{3}\right)(-2) = -\frac{5}{3}$$

$$y = \frac{-4}{3}x - \frac{5}{3}$$

Parametrizando:

$$x = t$$

$$y = -\frac{4}{3}t - \frac{5}{3}$$

Como $u = x^2 - y^2$, sustituyendo x y y:

$$u = (t)^2 - \left(-\frac{4}{3}t - \frac{5}{3}\right)^2 = t^2 - \left(\frac{16t^2}{9} + \frac{40t}{9} + \frac{25}{9}\right)$$

$$u = t^2 - \frac{16t^2}{9} + - \frac{40t}{9} - \frac{25}{9}$$

$$u = \frac{-7}{9}t^2 - \frac{40t}{9} - \frac{25}{9}$$

Como $v = 2xy$, sustituyendo x y y:

$$v = 2(t)\left(-\frac{4}{3}t - \frac{5}{3}\right) = 2t\left(-\frac{4}{3}t - \frac{5}{3}\right)$$

$$v = \frac{-8}{3}t^2 - \frac{10}{3}t$$

$$0 = -\frac{8}{3}t^2 - \frac{10}{3}t - v$$

$$0 = \frac{8}{3}t^2 + \frac{10}{3}t + v$$

$$0 = 8t^2 + 10t + 3v$$

$$0 = t^2 + \frac{10t}{8} + \frac{3v}{8}$$

$$0 = t^2 + \frac{5t}{4} + \frac{3v}{8}$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-\left(\frac{5}{4}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 - 4(1)\left(\frac{3v}{8}\right)}}{2}$$

$$t = -\frac{5}{8} \pm \frac{\sqrt{\frac{25}{16} - \frac{3}{2}v}}{2}$$

Sustituyendo en la ecuación de u

$$u = -\frac{7}{9}t^2 - \frac{40t}{9} - \frac{25}{9}$$

$$\cancel{u = -\frac{7}{9}\left(-\frac{5}{8} \pm \sqrt{25}\right)}$$

La imagen de la recta en el plano w es:

$$\boxed{u = -\frac{7}{9}\left(-\frac{5}{8} \pm \frac{\sqrt{\frac{25}{16} - \frac{3}{2}v}}{2}\right)^2 - \frac{40}{9}\left(-\frac{5}{8} \pm \frac{\sqrt{\frac{25}{16} - \frac{3}{2}v}}{2}\right) - \frac{25}{9}}$$

PREGUNTA 7

$$\oint_C \frac{\operatorname{sen}^6 z}{\left(z-\frac{\pi}{6}\right)^3}\,dz \qquad \text{Si } C \text{ es el círculo } |z|=1$$

$\frac{\pi}{6} < 1 \Rightarrow$ el círculo contiene este punto

Hay un polo de orden 3 en $z=\frac{\pi}{6}$

$$\oint_C f(z)dz = \oint_\gamma \frac{\operatorname{sen}^6 z}{\left(z-\frac{\pi}{6}\right)^3}\,dz$$

Donde γ es un círculo centrado en $z=\frac{\pi}{6}$. Escribiendo $f_1(z) = \operatorname{sen}^6 z$

entonces

$$\oint_C f(z)dz = \oint_\gamma \frac{f_1(z)}{\left(z-\frac{\pi}{6}\right)^3}\,dz$$

Utilizando la fórmula de la integral de cauchy

Por formulario:

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = f^{(n)}(z_0)\frac{2\pi j}{n!}$$

$$\oint_C f(z)dz = \frac{2\pi j}{2!}\left[\frac{d^2}{dz^2} f_1(z)\right]\Bigg|_{z=\frac{\pi}{6}}$$

$$\oint_C f(z)dz = \pi j\left[\frac{d^2}{dz^2}\operatorname{sen}^6 z\right]\Bigg|_{z=\frac{\pi}{6}}$$

$$\oint_C f(z)dz = \pi j \left[\frac{d}{dz} \left(6 \operatorname{sen}^5 z\right) \right]_{z=\frac{\pi}{6}}$$

$$\oint_C f(z)dz = \pi j \left[30 \operatorname{sen}^4 z \right] \Big|_{z=\frac{\pi}{6}}$$

$$\oint_C f(z)dz = \pi j \left[30 \cdot \frac{1}{16} \right] = \pi j \cdot \frac{15}{8}$$

$$\boxed{\oint_C f(z)dz = \oint_C \frac{\operatorname{sen}^6 z}{\left(z - \frac{\pi}{6}\right)^3} dz = \frac{15 \pi j}{8}}$$