

---

## Práctica #6. Integración compleja.

---

- Resuelva los siguientes problemas utilizando integración:
  - 1) Demuestre que  $\int_C (z + 1)dz = 0$ , donde  $C$  es la frontera del cuadrado con vértices en  $z = 0$ ,  $z = 1$ ,  $z = 1 + j$  y  $z = j$ .
  - 2) Evalúe la integral de contorno  $\oint_C \frac{2z}{(z-1)(z+2)(z+j)} dz$ , donde  $C$  es un contorno que incluye los tres puntos  $z = 1$ ,  $z = -2$  y  $z = -j$
  - 3) Evalúe la integral de contorno  $\oint_C \frac{z^4}{(z-1)^3}$ , donde el contorno  $C$  encierra al punto  $z = 1$ .
  - 4) Evalúe  $\int_C (z^2 + 3z)dz$  a lo largo de los siguientes contornos  $C$  en el plano complejo  $z$ :
    - a) La recta que une  $z = 2$  con  $z = j2$
    - b) La recta que une  $z = 2$  con  $z = 2 + j2$  y luego con  $z = j2$
    - c) El segmento del círculo  $|z| = 2$  desde  $z = 2$  hasta  $z = j2$  en el sentido contrario a las manecillas del reloj
  - 5) Evalúe  $\oint_C (5z^4 - z^3 + 2) dz$  alrededor de los siguientes contornos cerrados  $C$  en el plano complejo  $z$ .
    - a) El círculo  $|z| = 1$
    - b) El cuadrado con vértices en  $0$ ,  $1$ ,  $1 + j$  y  $j$
    - c) La curva que consiste en las parábolas  $y = x^2$  de  $0$  a  $1 + j$  y  $y^2 = x$  de  $1 + j$  a  $0$
  - 6) Evalúe la integral de contorno  $\oint_C \frac{1}{z-4} dz$  donde  $C$  es cualquier curva cerrada simple y el punto  $z = 4$  se encuentra:
    - a) Dentro de  $C$
    - b) Fuera de  $C$

7) Utilice el teorema de Cauchy para evaluar la integral de contorno  $\oint_C \frac{2z}{(2z-1)(z+2)} dz$  donde  $C$  es:

- a) El círculo  $|z| = 1$
- b) El círculo  $|z| = 3$

8) Utilice el teorema de Cauchy para evaluar la integral de contorno  $\oint_C \frac{5z}{(z+1)(z-2)(z+j4)} dz$  donde  $C$  es:

- a) El círculo  $|z| = 3$
- b) El círculo  $|z| = 5$

9) Utilice el teorema de Cauchy para evaluar las siguientes integrales de contorno:

- a)  $\oint_C \frac{z^3+z}{(2z+1)^3} dz$  donde  $C$  es el círculo unitario
- b)  $\oint_C \frac{4z}{(z-1)(z+2)^2} dz$  donde  $C$  es el círculo  $|z| = 3$

10) Evalúe la integral de contorno  $\oint_C \frac{z^3-z^2+z-1}{z^3+4z} dz$  donde  $C$  es:

- a)  $|z| = 1$
- b)  $|z| = 3$

11) Evalúe la integral de contorno  $\oint_C \frac{1}{z^3(z^2+2z+2)} dz$  donde  $C$  es el círculo  $|z| = 3$

12) Evalúe la integral  $\oint_C \frac{z}{z^2+1} dz$  donde  $C$  es:

- a) El círculo  $|z| = \frac{1}{2}$
- b) El círculo  $|z| = 2$

13) Evalúe la integral  $\oint_C \frac{z^2+3jz-2}{z^3+9z} dz$  donde  $C$  es:

- c) El círculo  $|z| = 1$
- d) El círculo  $|z| = 4$

14) Calcule los residuos de todos los polos de la función  $f(z) = \frac{(z^2+2)(z^2+4)}{(z^2+1)(z^2+6)}$  y posteriormente calcule la integral  $\oint_C f(z) dz$  donde  $C$  es:

- a) El círculo  $|z| = 2$
- b) El círculo  $|z - j| = 1$
- c) El círculo  $|z| = 4$

15) Evalúe la integral  $\oint_C \frac{1}{z^2(1+z^2)^2} dz$  donde  $C$  es:

- a) El círculo  $|z| = \frac{1}{2}$
- b) El círculo  $|z| = 2$

16) Utilice el teorema del residuo para evaluar las siguientes integrales de contorno:

- a)  $\oint_C \frac{3z^2+2}{(z-1)^2(z^2+4)} dz$  donde  $C$  es:  $\begin{cases} (i) |z-2| = 2 \\ (ii) |z| = 4 \end{cases}$
- b)  $\oint_C \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)} dz$  donde  $C$  es:  $\begin{cases} (i) |z| = 3 \\ (ii) |z+j| = 2 \end{cases}$
- c)  $\oint_C \frac{1}{(z+1)^3(z-1)(z-2)} dz$  donde  $C$  es:  $\begin{cases} (i) |z| = \frac{1}{2} \\ (ii) |z+1| = 1 \\ (iii) \text{rectángulo con vértices en } \pm j, 3 \pm j \end{cases}$

17) Utilizando una integral de contorno apropiada, evalúe las siguientes integrales reales:

- |   |   |
|---|---|
| a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+x+1} dx$             | f) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)} dx$ |
| b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$           | g) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{3-2\cos\theta+\sin\theta} d\theta$   |
| c) $\int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)^2} dx$            | h) $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4+1} dx$                         |
| d) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta} d\theta$ | i) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+4x+5)^2} dx$          |
| e) $\int_0^{2\pi} \frac{4}{5+4\sin\theta} d\theta$            | j) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{3+2\cos\theta} d\theta$     |