ITCR -

Modelos de Sistemas para Mecatrónica

Examen Parcial 2

Prof. Felipe Meza Obando

Ernesto Pocasangre Kreling
2019084090

17/06/2021

Pregunta 2.

Se conocen los datos

* $X(s)$ tiene exactamente 2 polos

* $X(s)$ tiene un polo en $s=-1+j$ //

* $x(t)$ es real

---

→ Como $x(t) \in \mathbb{R}$

$$X(s) = X^*(s^*)$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Por Formulario} \\ x(t) \in \mathbb{R} \rightarrow X(s) = X^*(s^*)\end{array}}$$

$\therefore \; X(s_1) = X^*(s_1^*)$

Esto quiere decir que el segundo polo de $X(s)$ es el conjugado de $s=-1+j$ que es $s_2 = -1-j$ //

---

* Se representará la transformada de manera racional

* Apartir de los datos anteriores, y sabiendo que

$X(s)$ no tiene ceros en el plano $s$ finito

se llega a la propuesta de

$$X(s) = \frac{k}{\underbrace{(s+1-j)}_{s=-1+j}\underbrace{(s+1+j)}_{s=-1-j}}$$

$\boxed{k \text{ ya que un polinomio de mayor grado tiene ceros}}$

Con la siguiente premisa

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = 8$$

Por formulario

$$\boxed{X(s)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt}$$

se puede observar que corresponde a la transformada evaluada en $s=0$

$\therefore$

$$X(0)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{0}dt = 8$$

usando la expresión propuesta y reemplazando $s=0$

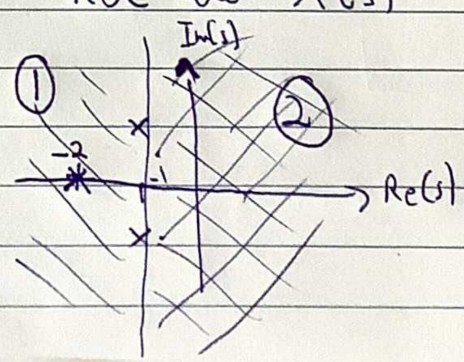
$$X(0)=\frac{K}{(1-j)(1+j)}=\frac{K}{1^2+\cancel{j}-\cancel{j}-j^2}=\frac{K}{1--1}=\frac{K}{2}=8$$

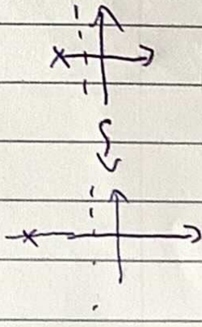
De manera que $K=16$ //

$$\boxed{R/_a \quad X(s)=\frac{8}{(s+1-j)(s+1+j)}}$$

* Como $e^{2t}x(t)$ representa un desplazamiento en el tiempo de 2 o $X(s-2)$ y no es integrable absolutamente aquí, $\sigma=-2$ no se encuentra en ROC de $X(s)$

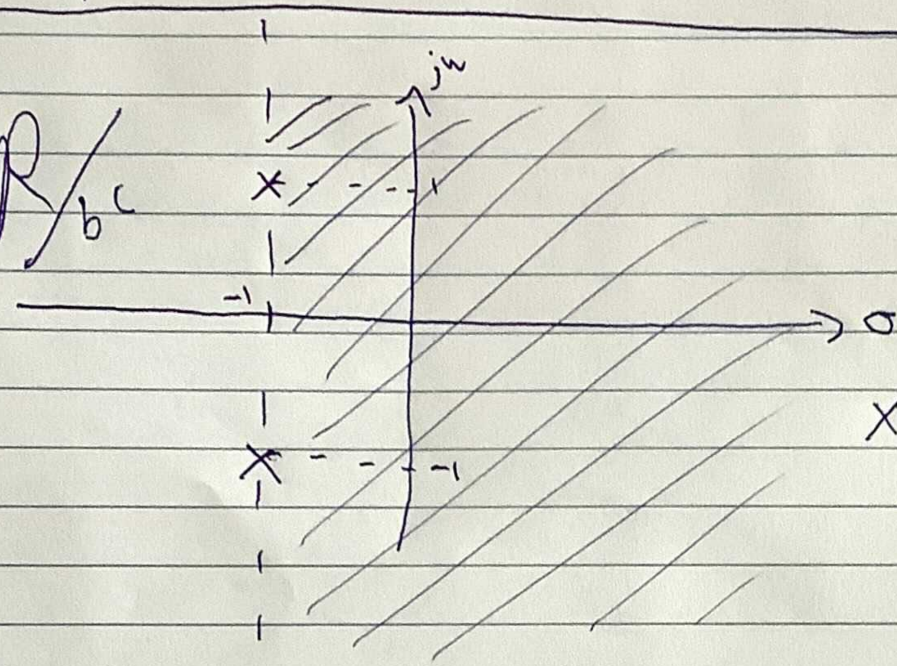
* Las posibles ROC son



Entonces la region 1 de $\sigma < -1$ es descartada y se queda con 2 de $\sigma > -1$

R/ b)




ROC: $\sigma > -1$

$$X(s) = \frac{8}{(s+1-j)(s+1+j)}$$

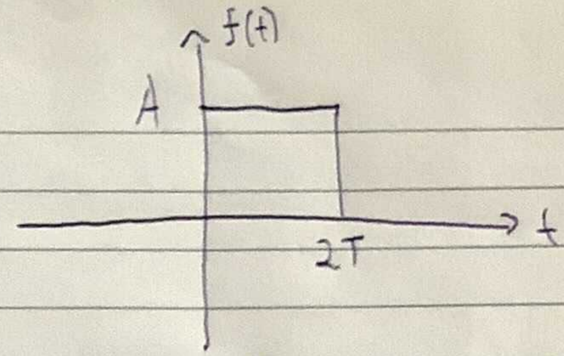
d. Es $X(s)$ absolutamente integrable?

* $x(t)e^{-\sigma t}$ debe ser absolutamente integrable para que esto suceda

* Recuerda que es absolutamente integrable en la ROC

R/ Es absolutamente integrable en la ROC $\sigma > 1$

Pregunta 3.




La función $f(t)$

a) demostrar que $F(jw) =$

$$2ATe^{-jwT} S_a(wt)$$

---

Se observa un $e^{-jwT}$ en $F(jw)$ de manera que se puede tomar como un desplazamiento en el tiempo con $\tau = T$

Por Formulario

$$\boxed{x(t-\tau) = e^{-jw\tau} X(jw)}$$

---

$\therefore$

$$\cancel{f'(t) = f(t-T) =}$$

$$f'(t-T) = f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, e^{-jwT} 2AT S_a(wt)$$

---

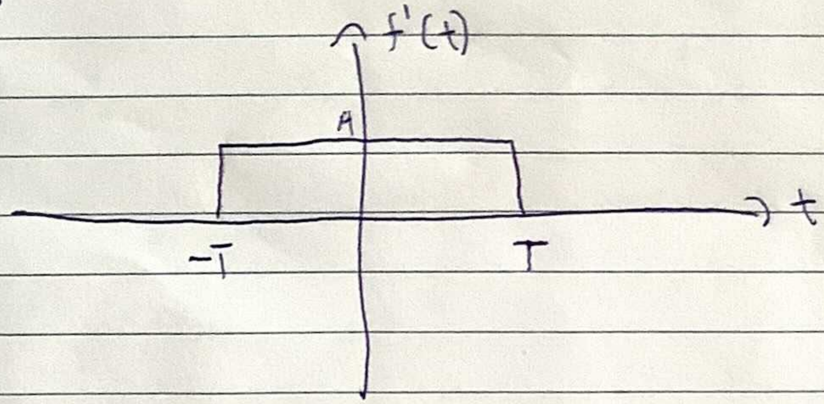
Ahora haciendo $t = t + T$ se tiene

$$f'(t) = f(t+T) = 2AT S_a(wt)$$

---

Por formulario $X(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-jwt} dt$

y graficando $f'(t)$ se tiene



Aplicando la definición se llega a

$$X'(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-jwt}dt = \cancel{\int_{-\infty}^{-T} 0\, e^{-jwt}dt}^{\,0} + \int_{-T}^{T} A e^{-jwt}dt + \cancel{\int_{T}^{\infty} 0\, e^{-jwt}dt}^{\,0}$$

$$= \int_{-T}^{T} A e^{-jwt} = A\int_{-T}^{T} e^{-jwt}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{* Por Formulario Integral 50} \\ \int e^{ax} = \frac{1}{a}e^{ax}\end{array}}$$

$$= A\left[\frac{1}{-jw}e^{-jwt}\Big|_{-T}^{T}\right] = A\left[\frac{e^{-jwT}-e^{jwT}}{-jw}\right] = A\left[\frac{e^{jwT}-e^{-jwT}}{jw}\right]$$

reacomodando $X(jw) = \frac{2A}{w}\left[\frac{e^{jwT}-e^{-jwT}}{2j}\right]$

$$\boxed{\text{* Por Formulario } \operatorname{sen}(w) = \frac{e^{jw}-e^{-jw}}{2j}}$$

$\therefore \quad X'(jw) = \frac{2A}{w}\operatorname{sen}(wT)$ multiplicando por $T/T$

$X'(jw) = 2AT\frac{\operatorname{sen}(wT)}{wT}$ y $\boxed{Sa(x) = \frac{\sin x}{x}}$

$\therefore$

$$X'(jw) = 2AT\, Sa(wT)$$

Entonces resumiendo

$$f'(t) = f(t+T)$$

& $$f'(t) \circ\!\!\longrightarrow\!\!\bullet \; 2AT\,sa(wT)$$

realizando un desplazamiento de T en el tiempo

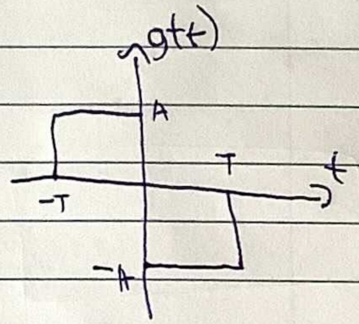
$$f'(t) \circ\!\!\longrightarrow\!\!\bullet \; 2AT\,sa(wT) = F'(jw)$$

$$f(t) = f'(t-T) \circ\!\!\longrightarrow\!\!\bullet \; X'(jw)\cdot e^{-jwT} = F(w)$$

$$f(t) \circ\!\!\longrightarrow\!\!\bullet \; e^{-jwT}\cdot 2AT\,sa(wT) = F(jw)$$

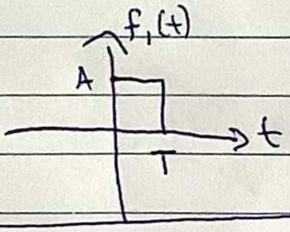
$$\boxed{R/.\; F(jw) = 2AT\,e^{-jwT}\,sa(wT)}$$

b. Exprese $g(t)$ en términos de $f(t)$



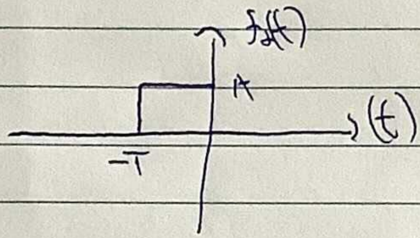

* primero se escala en el tiempo

$$f_1(t) = f(2t)$$



Ahora se hace una inversión en el tiempo

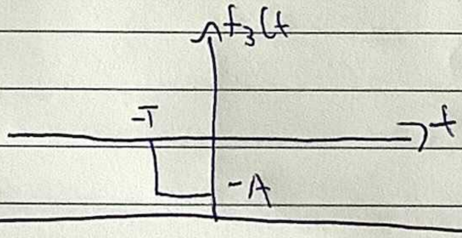
con $t = -t$ ⇝ $f_2(t) = f_1(-t)$




---

Por último se resta o se invierte en amplitud

$f_3(t) = -f_2(t) = -f_1(-t) = -f(-2t)$




---

De manera que $g(t) = f_3(t) + f_1(t) = f(2t) - f(-2t)$

$$\boxed{R/\ g(t) = f(2t) - f(-2t)}$$

---

c. determine $G(\omega)$

* Por formulario por linealidad

$$\mathcal{F}\{g(t)\} = \mathcal{F}\{f(2t)\} - \mathcal{F}\{f(-2t)\}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{2} F\left(\frac{j\omega}{2}\right) - \frac{1}{2} F\left(\frac{-j\omega}{2}\right)$$

* Por Formulario

$x(at) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$

$x(-t) \circ\!\!-\!\!\circ X(-j\omega)$

* $F(j\omega) = 2AT e^{-j\omega T} Sa(\omega T)$

$\therefore F\left(\frac{j\omega}{2}\right) = 2AT e^{\frac{-j\omega T}{2}} Sa\left(\frac{\omega T}{2}\right)$

& $F\left(\frac{-j\omega}{2}\right) = 2AT e^{\frac{j\omega T}{2}} Sa\left(\frac{-\omega T}{2}\right)$

Reemplazando en $G(j\omega)$ se tiene

$$G(j\omega) = \frac{1}{\cancel{2}}\left[\cancel{2}AT e^{\frac{-j\omega T}{2}} Sa\left(\frac{\omega T}{2}\right) - \cancel{2}AT e^{\frac{j\omega T}{2}} Sa\left(\frac{-\omega T}{2}\right)\right]$$

* Sa es par ya que $\frac{-\omega T}{2} \in \mathbb{R}$ & P.F. $x(t) = x(-t)$ si $X(j\omega) \in \mathbb{R}$

$\therefore$

$$G(j\omega) = AT\, Sa\left(\frac{\omega T}{2}\right)\left[e^{\frac{-j\omega T}{2}} - e^{\frac{j\omega T}{2}}\right]$$

$$G(j\omega) = AT\, Sa\left(\frac{\omega T}{2}\right)(-2j)\underbrace{\left[\frac{e^{\frac{j\omega T}{2}} - e^{\frac{-j\omega T}{2}}}{2j}\right]}_{sen\left(\frac{\omega T}{2}\right)}$$

R/

$$\boxed{G(j\omega) = -2j\, AT\, Sa\left(\frac{\omega T}{2}\right) sen\left(\frac{\omega T}{2}\right)}$$

Pregunta 4

$$X(z) = \frac{10 z^{-1}}{2z^{-2} - 3z^{-1} + 1}$$

a) $x(n)$ causal indique ROC de $X(z)$ y determine $x(n)$ de $n=0$ a $n=4$

Para el denominador sea $u = z^{-1}$

$2u^2 - 3u + 1$

$\underbrace{(u-1)(u-\tfrac{1}{2})}$

$*$ $\boxed{u^2 - \tfrac{1}{2}u - u + \tfrac{1}{2}}$ mitad entonces es $\boxed{2(u-1)(u-\tfrac{1}{2})}$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1$$

$$u_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) \pm 1}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 1}{4}$$

$u_1 = 1 \qquad u_2 = \tfrac{1}{2}$

Entonces $X(z) = \dfrac{10 z^{-1}}{2(z^{-1}-1)(z^{-1}-\tfrac{1}{2})} = \dfrac{5 z^{-1}}{(z^{-1}-1)(z^{-1}-\tfrac{1}{2})}$

Ahora se descompone por fracciones parciales

$$\frac{A}{z^{-1}-1} + \frac{B}{z^{-1}-\tfrac{1}{2}} = \frac{5 z^{-1}}{(z^{-1}-1)(z^{-1}-\tfrac{1}{2})}$$

$\boxed{A(z^{-1}-\tfrac{1}{2}) + B(z^{-1}-1) = 5 z^{-1}}$

si $z^{-1} \to 1$

$A(1-\tfrac{1}{2}) = 5$

$A = \dfrac{5}{1/2} = 10$ //

si $z^{-1} \to \tfrac{1}{2}$

$B(\tfrac{1}{2}-1) = 5 \cdot \tfrac{1}{2}$

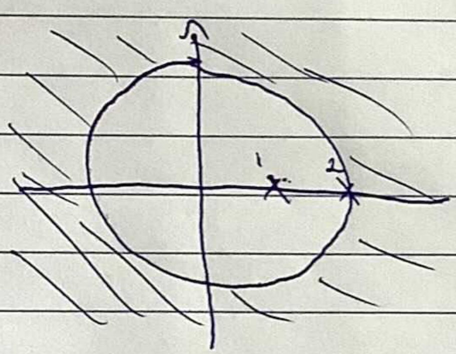
$B = \dfrac{5/\cancel{2}}{-1/\cancel{2}} = -5$ //

$$X(z) = 5\left[\frac{2}{z^{-1}-1} - \frac{1}{z^{-1}-1/2}\right]$$

* si $x(n)$ es causal es una región externa al círculo de ROC

* polos $\frac{1}{z}-1=0 \rightarrow z=1$ $\frac{1}{z}-\frac{1}{2}=0 \rightarrow z=2$

---




R/ ROC para $X(z)$ causal es

$|z|>2$

---

Division de Polinomio

$\boxed{\frac{1}{z^{-1}-1}}$

$$\begin{array}{r|l} 1 & -1+z^{-1} \\ \hline -(1-z^{-1}) & \underbrace{-1-z^{-1}-z^{-2}} \\ z^{-1} & \\ -(z^{-1}-z^{-2}) & \text{sigue esa forma} \\ z^{-2} & \\ -(z^{-2}-z^{-3}) & \\ z^{-3} & \end{array}$$

$$\frac{1}{z^{-1}-1} = \sum_{n=0}^{\infty} -1\, z^{-n}$$

$\boxed{\frac{-1}{z^{-1}-1/2}}$

$$\begin{array}{r|l} -1 & -\frac{1}{2}+z^{-1} \\ \hline -(-1+z^{-1}2) & \underbrace{2+2^{2}z^{-1}+2^{3}z^{-2}} \\ -2z^{-1} & \\ -(-2z^{-1}+2^{2}z^{-2}) & \text{sigue esa forma} \end{array}$$

$$\frac{-1}{z^{-1}-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1}\cdot 2\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n}2\, z^{-n}$$

$$\therefore \quad X(z) = 5\left[2\sum_{n=0}^{\infty} -1 z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot 2^{n} z^{-n}\right]$$

simplificando se unen las sumatorias

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 10\left[2^{n}-1\right] z^{-n}$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} X[n] z^{-n}$$

$\boxed{* \text{ con } X[n] = 10[2^{n}-1]}$

---

$\therefore$

| $n$ | $x[n]$ |
|---|---|
| 0 | $10[1-1]=0$ |
| 1 | $10[2^1-1]=10$ |
| 2 | $10[2^2-1]=30$ |
| 3 | $10[2^3-1]=70$ |
| 4 | $10[2^4-1]=150$ |

R/

---

b. Ahora para anticausal se invierte el orden en la división para (región interna)

$$\begin{array}{r|l} 1 & z^{-1}-1 \\ \hline -(1-z) & \underbrace{z+z^2+z^3}_{\text{patrón}} \\ z & \\ -(z-z^2) & \\ z^2 & \\ (z^2-z^3) & \end{array} \qquad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} z^{n}}$$

$$\begin{array}{r|l} 1 & z^{-1}-1/2 \\ \hline -(1-\frac{z}{2}) & \underbrace{z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{2^2}}_{\text{patrón}} \\ \frac{z}{2} & \\ -(\frac{z}{2}-\frac{z^2}{4}) & \\ \frac{z^2}{4} & \end{array} \qquad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n}}{2^{n-1}}}$$

$$X(z) = 5\left[\frac{2}{z^{-1}-1} - \frac{1}{z^{-1}-1/2}\right]$$

$$\therefore \quad X(z) = 5\left[\sum_{h=1}^{\infty} 2z^{h} + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{2^{h-1}} z^{h}\right]$$ con cambio de variable $h=-n$

$$X(z) = 10\left[\sum_{n=-\infty}^{-1} (1-2^{n}) z^{-n}\right] = \sum_{n=-\infty}^{-1} 10(1-2^{n}) z^{-n}$$

De manera que $x[n] = (1-2^{n}) \cdot 10$

| $n$ | $x[n]$ |
|---|---|
| 0 | $(1-2^{0})10 = 0$ |
| -1 | $(1-2^{-1})10 = (1-\frac{1}{2})10 = (\frac{1}{2})10 = \frac{10}{2}$ |
| -2 | $(1-2^{-2})10 = (1-\frac{1}{4})10 = (\frac{3}{4})10 = \frac{30}{4}$ |
| -3 | $(1-2^{-3})10 = (1-\frac{1}{8})10 = (\frac{7}{8})10 = \frac{70}{8}$ |
| -4 | $(1-2^{-4})10 = (1-\frac{1}{16})10 = (\frac{15}{16}) \cdot 10 = \frac{150}{16}$ |

R/

| $n$ | $x[n]$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| -1 | $10/2 = 5$ |
| -2 | $30/4 = 15/2$ |
| -3 | $70/8 = 35/4$ |
| -4 | $150/16 = 75/8$ |

Pregunta 6.

$X(s) = \dfrac{s+2}{s-2}$ $\quad \underbrace{x(t)=0 \ , t>0}_{\text{anticausal}}$

$y(t) = -\frac{2}{3} e^{2t} u(-t) + \frac{1}{3} e^{-t} u(t)$

$a=2 \qquad a=-1$

Por formulario $\begin{cases} -e^{at} u(-t) \circ\!\!-\!\!\bullet \ \dfrac{1}{s-a} & \sigma < a \\ e^{at} u(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \ \dfrac{1}{s-a} & \sigma > a \end{cases}$

$\therefore$ Por linealidad

$Y(s) = \underbrace{\frac{2}{3} \frac{1}{s-2}}_{\sigma < 2} + \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s+1}}_{\sigma > -1}$

$Y(s) = \frac{1}{3}\left[\frac{2s + \cancel{2} + s - \cancel{2}}{(s-2)(s+1)}\right] = \frac{\cancel{3}s}{\cancel{3}(s-2)(s+1)}$

$Y(s) = \dfrac{s}{(s-2)(s+1)}$ $\quad \boxed{\text{para } -1 < \sigma < 2}$

---

R/ ROC

$\underbrace{X(s) = \frac{s+2}{s-2}}_{\sigma < 2}$ $\qquad Y(s) = \underbrace{\frac{s}{(s-2)(s+1)}}_{-1 < \sigma < 2}$

*anticausal

13

~~Pregunta 5.~~ se sabe que

$$H(S) = \frac{Y(S)}{X(S)} = \frac{\frac{S}{\cancel{(S-2)}(S+1)}}{\frac{(S+2)}{\cancel{(S-2)}}} = \frac{S}{(S+1)(S+2)}$$

Por formulario

$$x_1(t) * x_2(t) \rightsquigarrow \quad \overset{ROC}{\geq R_1 \cap R_2}$$

$ROC_1 \quad ROC_2$

$$\therefore \quad ROC_H \cap ROC_x \leq ROC_Y$$

$$\sigma > -2 \leq -1 < \sigma < 2$$

$$\rightarrow ROC_H \rightarrow \sigma > -1 \text{ de } (S+1)$$

R/

$$\boxed{H(S) = \frac{S}{(S+1)(S+2)} \qquad ROC \quad \sigma > -1}$$

Aplicando fracciones parciales

$$\frac{A}{(s+2)} + \frac{B}{(s+1)} = \frac{s}{(s+2)(s+1)} \qquad (s+2)B + (s+1)A = s$$

si $s=-1$ | si $s=-2$
--- | ---
$1B = s$ | $-A = s$
$\cancel{B = s/1 \quad 1 = s}$ | $A = -s \rightarrow$
$B = s = -1$ | $A = -s = 2$

$$H(s) = \frac{s}{s+1} - \frac{s}{s+2} = \frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s+2}$$

por linealidad

$$\boxed{* \ \frac{1}{s-a} \bullet\!-\!\circ \ e^{at}u(t)}$$

$$h(t) = 2e^{-2t}u(t) - e^{-t}(u(t))$$

$$\boxed{R/ \ h(t) = 2e^{-2t}u(t) - e^{-t}u(t)}$$

d. $x(t)=e^{3t} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(s)=\frac{1}{s-3}$

Como

$$Y(s)=X(s)\cdot H(s)$$

$$Y(s)=\frac{1}{s-3}\cdot\frac{s}{(s+1)(s+2)}$$

$$Y(s)\ \frac{s}{(s-3)(s+1)(s+2)}$$

* fracciones parciales

* $\bullet\!\!-\!\!\circ$ no tiempo

$$y(t)=\boxed{\quad\quad\quad}$$