Gusto Pocasangre Kneby
2019084040

Examen Parcial #1

19/04/2021

Pregunta 2.

Dada $\Psi(x,y) = e^{x}(x\cos y - y\sin y)$

Determine si es armónica

* A lo largo del examen P.F. significará Por Formulario

$-$P.F. $\rightarrow \dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y^2} = 0$ si la función es armonica

$$\Psi(x,y) = e^{x}(x\cos y - y\sin y)$$

$\rightarrow$ derivando parcialmente (x)

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = e^{x}(x\cos y - y\sin y) + e^{x}(\cos y)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = e^{x}(x\cos y - y\sin y) + 2e^{x}\cos y \quad (1)$$

$\rightarrow$ derivando parcialmente (y)

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = e^{x}\left[-x\sin y - [\sin y + y\cos y]\right]$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = e^{x}\left[-x\cos y - \cos y - [\cos y + y(-\sin y)]\right]$$

$$= e^{x}\left[-x\cos y - 2\cos y + y\sin y\right] \quad (2)$$

Haciendo (1) + (2)

$$e^{x}[x\cos y - y\sin y] + 2e^{x}\cos y + e^{x}[-x\cos y - 2\cos y + y\sin y] \stackrel{?}{=} 0$$

$$e^{x}[\cancel{x\cos y} - \cancel{y\sin y} + \cancel{2\cos y} - \cancel{x\cos y} - \cancel{2\cos y} + \cancel{y\sin y}] \stackrel{?}{=} 0$$

$\rightarrow$ se cancelan los terminos

$\therefore e^{x}[0] \stackrel{?}{=} 0$ ✓

De manera que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u^2}{\partial y^2} = 0$$

R/ La funcion $\Psi(x,y)$ es ármonica ya que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial u^2}{\partial y^2} = 0$

Pregunta 3.

Dado $w = \dfrac{jz + (4-8j)}{z + (2-4j)}$

a. Descomponga el mapeo en mapeos elementales

* P.F.

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \rightarrow \begin{array}{l} a = j \\ b = 4-8j \\ c = 1 \\ d = 2-4j \end{array}$$

Con $\lambda = \frac{a}{c} = j$

$\mu = bc - ad = 4-8j-2j-4 = -10j$

$\alpha = c^2 = 1$

$\beta = 2-4j$

---

* P.F.

$$w = \lambda + \frac{\mu}{\alpha z + \beta} = j + \frac{-10j}{z+2-4j}$$

* Rotación y escalado pueden realizarse simultaneamente y traslaciones en Im y Re también

$\therefore$

$$\begin{cases} z_1 = z + 2 - 4j & \text{mapeo lineal} \\ z_2 = \dfrac{1}{z_1} & \text{mapeo inversión} \\ w = -10j\, z_2 + j & \text{mapeo lineal} \end{cases}$$

*

$\therefore$ Pasos o mapeos

R/

1. Traslación de 2 unidades hacia la derecha → y 4 hacia abajo ↓
2. Mapeo de inversión.
3. Escalado por 10 y rotación en $90°$ o $\frac{\pi}{2}$ sentido del reloj
4. Traslación de 1 unidad hacia arriba ↑

$z_1 = z + 2 - 4j$ $\quad z_3 = z_2 \cdot -10j$

$z_2 = \dfrac{1}{z_1}$ $\quad w = z_3 + j$

$\therefore$ Algebraicamente

b. Indique la imagen de $|z-(3+4j)|=5$ con mapeo w

Primer mapeo z_1

$z_1 = z+2-4j \rightarrow z = z_1 - 2 + 4j$

reemplazando en la region

$|z_1 - 2 + 4j - 3 - 4| = 5 \rightarrow |z_1 - 5| = 5 //$ 1° mapeo

---

Segundo mapeo z_2

P.F. $\alpha = r^2 - |z_0|^2 = 5^2 - 5^2 = 0$

$\therefore$ como $\alpha = 0$

$v = \frac{x_0}{y_0} u - \frac{1}{2y_0}$ con $x_0 = 5$ y $y_0 = 0$ $\therefore$ se multiplica por y_0

$y_0 v = x_0 u - \frac{1}{2} \rightarrow 0 = 5u - \frac{1}{2} \rightarrow u = \frac{1}{10} //$

Se eligen 2 puntos a y b arbitrarios $\begin{cases} 0 \\ 1/5 \end{cases}$

y se obtiene

$|z_2| = |z_2 - 1/5|$ para $u = \frac{1}{10} //$

3

Tercer mapeo z_3

$$z_3 = -10j\, z_2 \rightarrow z_2 = \frac{z_3}{-10j}$$

reemplazando

$$\left|\frac{z_3}{-10j}\right| = \left|\frac{z_3}{-10j} - \underbrace{\frac{-2j}{-10j}}_{1/5}\right| \rightarrow \frac{|z_3|}{\cancel{|-10j|}} = \frac{|z_3+2j|}{\cancel{|-10j|}}$$

$$\therefore \quad |z_3| = |z_3+2j| \quad // \quad 3^{\circ} \text{ mapeo}$$

4° mapeo w

$$w = z_3 + j \rightarrow z_3 = w - j$$

reemplazando

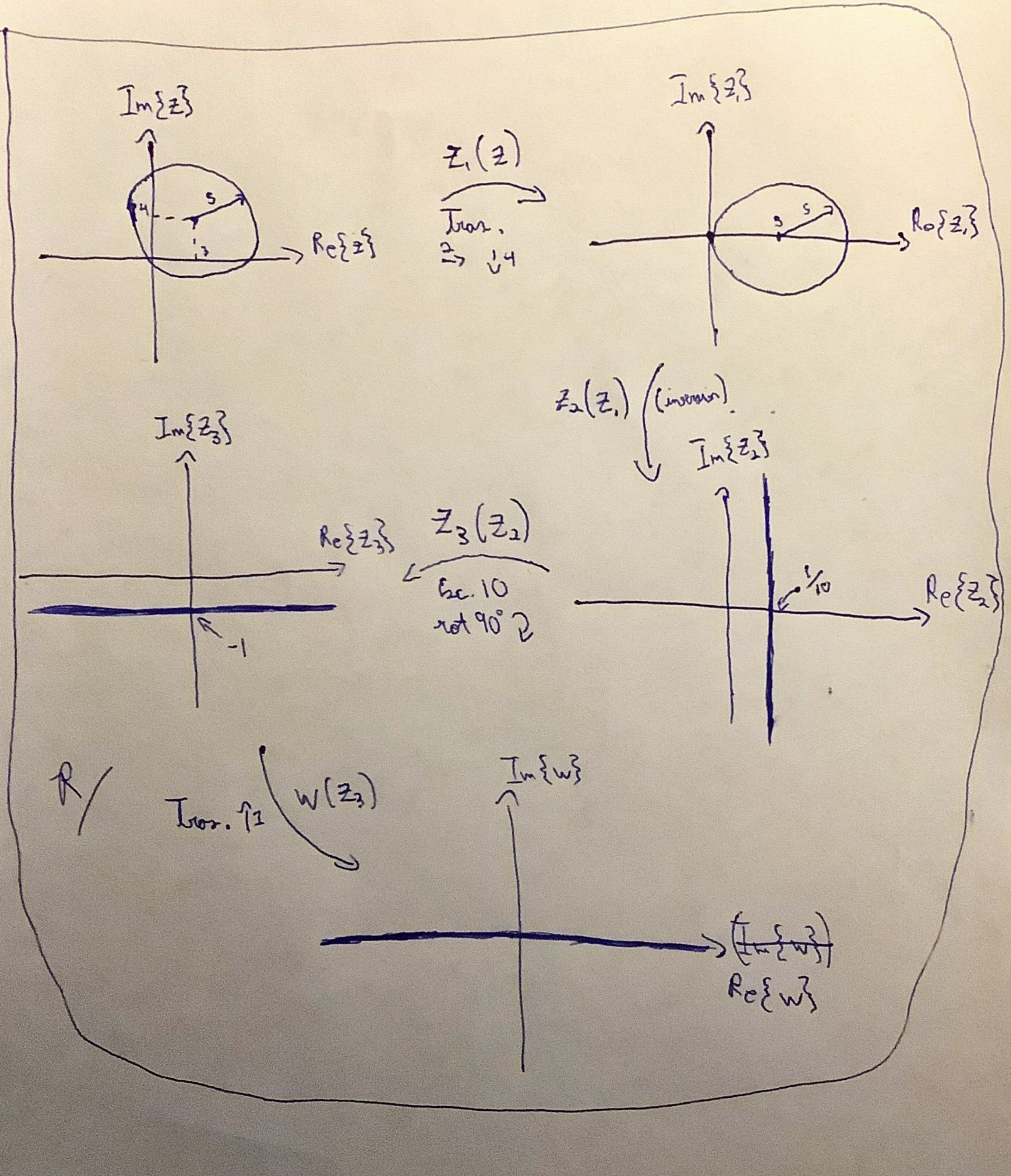
$$|w-j| = |w-j+2j| \rightarrow |w-j| = |w+j| \quad // \quad 4^{\circ} \text{ mapeo}$$

R/ De forma algebraica

$$|z-(3+4j)| = 5 \xrightarrow{z_1(z)} |z_1 - 5| = 5 \xrightarrow{z_2(z_1)} |z_2| = |z_2 - 1/5|$$

$$\xrightarrow{z_3(z_2)} |z_3| = |z_3+2j| \xrightarrow{w(z_3)} |w-j| = |w+j|$$

Ahora gráficamente



Pregunta 4.

Sea $f(x)$ simétrica $\int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2+9)^2}\,dx$

Primero como $\lim\limits_{z \to \infty} \frac{z}{(z^2+9)^2} = 0$

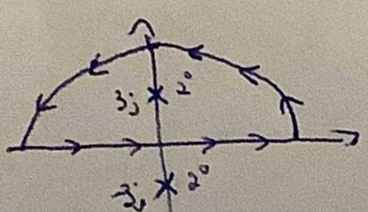
$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \oint_c f(z)\,dz$ & como $f(x)$ es simétrica $\int_0^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\oint_c f(z)\,dz$

Se calculan los polos y se obtiene

$(z^2+9)^2 = 0$ $\rightarrow$ polos $z = 3j$ 2° orden

$(z+3j)^2(z-3j)^2 = 0$ $\quad z = -3j$ 2° orden

Trayectoria de integración



$\rightarrow$ Sólo se considera el polo en $z = 3j$

Por Formulario Teorema de residuos $\rightarrow \oint_c f(z)\,dz = 2\pi j \sum_{i=} a_{-1}^{i}$

$\therefore$ Se calcula el residuo

$$a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \left\{ \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-z_0)^m f(z) \right] \right. \quad \text{con } m = 2$$

$$a_{-1} = \frac{1}{1!} \lim_{z \to 3j} \left[\frac{d}{dz} \left[\frac{1}{(z+3j)^2} \right] \right]$$

$$a_{-1} = \lim_{z \to 3j} \left[-\frac{2}{(x+3j)^3} \right] = \frac{-2}{(6j)^3} = \frac{2}{6^3 j}$$

$\therefore$

$$\oint_c f(z)dz = 2\pi j \cdot a_{-1} = 2\pi \cancel{j} \cdot \frac{2}{6^3 \cancel{j}} = \frac{4\pi}{\underbrace{6 \cdot 6}_{36} \cdot 6} = \frac{4\pi}{216} = \frac{2\pi}{108} = \frac{\pi}{54}$$

$\therefore$

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+4)^2} = \frac{1}{2} \oint_c f(z)dz = \frac{\pi}{54} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{108}$$

$$\boxed{R/ \quad \int_0^\infty \frac{1}{(x^2+9)^2} dx = \frac{\pi}{108}}$$

Pregunta 5. Polos para

$*\ \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1-\sin^2\theta}\, d\theta \longrightarrow \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos^2\theta}\, da$$

$\therefore$ P.F.

$$I = \oint_C f(z)\,dz \quad \text{con} \quad \begin{cases} z = e^{j\theta} \\ d\theta = \dfrac{dz}{jz} \\ \cos\theta = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right) \end{cases} \quad \text{sobre } C: |z| = 1$$

reemplazando estos terminos se obtiene

$$I = \oint_C \frac{1}{\left[\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]^2} \cdot \frac{dz}{jz} = \frac{1}{j}\oint_C \frac{1}{\frac{1}{4}\left(\frac{z^2+1}{z}\right)^2} \cdot \frac{dz}{jz}$$

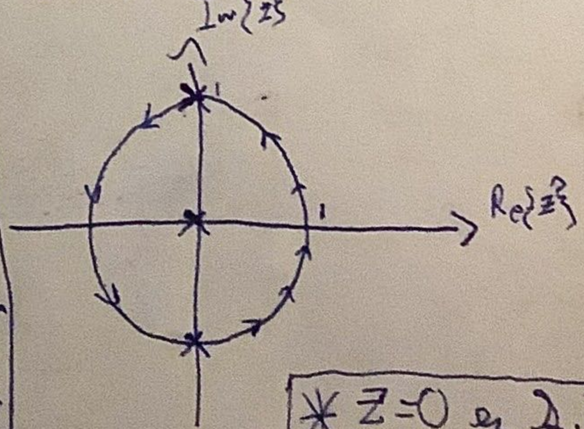
$$= \frac{1}{j}\oint_C \frac{4z^2\,dz}{(z^2+1)^2 z}$$ con la trayectoria $|z| = 1$ se tiene

Desarrollando

$(z^2+1)^2 z = 0$

$(z-j)^2(z+j)^2 z = 0$

$$\text{polos} \begin{cases} z = j \\ z = -j \\ z = 0 \end{cases}$$



R/ Los Polos para calcular los residuos son $\left.\begin{matrix} z = j \\ z = -j \end{matrix}\right\}$ 2° orden

$z = 0$ es singularidad removible

$*\ z = 0$ es S.R. ya que $z^2 \to 0$ cuando $z \to 0$ entonces $f(z) \to 0$ para $z \to 0$

Pregunta 6. Obtenga el desarrollo de Laurent en $z_0=-2$ con ROC anular para $f(z)=\dfrac{1}{z^2(1-z)}$

~~I se saca el menor~~

$$\cancel{f(z) = \frac{-1}{z^2(z-1)}}$$

II Ahora se hacen fracciones parciales

$$\frac{1}{z^2(1-z)} = \frac{A}{z^2} + \frac{B}{(1-z)} + \frac{C}{z}$$

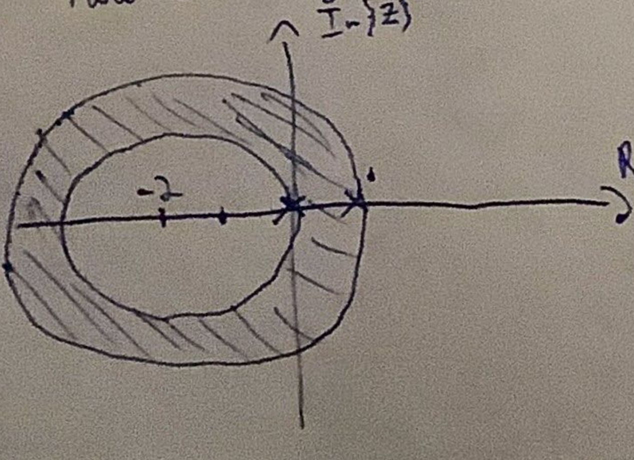
Para $z \to 0$ $\quad A \to 1$

Para $z \to 1$ $\quad B \to 1$

Para $z \to -1$ $\quad 1 \cdot 2C + 2 = 1 \} \; C \to 1$

$$\therefore \frac{1}{z^2(1-z)} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \underbrace{\frac{1}{(1-z)}}_{-\frac{1}{(z-1)}}$$

Para la región



* se toman P.F.

$$\frac{1}{z-a} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(a-z_0)^{n+1}} \quad \text{región interna}$$

$$\frac{1}{z-a} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n} \quad \text{región externa}$$

Entonces se toma R. I. para $\frac{1}{z-1}$ y R.E. para $\frac{1}{z^2}$ y $\frac{1}{z}$

$$\frac{1}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n-1}}{(z+2)^n} \qquad |z+2|>|2|$$

derivando

$$\frac{-1}{z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (2)^{n-1} \cdot (z+2)^{-n-1} \cdot (-n) \qquad |z+2|>|2|$$

$$\frac{1}{z-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2)^2}{(-1)^{n+1}} = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (z+2)^2 \qquad |z+2|>|2|$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{1}{z^2(1-z)} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (z+2)^2 - \sum_{n=1}^{\infty} (2)^{n-1} (z+2)^{-n-1} \cdot (-n) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2)^{n-1}}{(z+2)^n} \right]}$$

R/

para $|2| < |z+2| < |3|$

* Esto se expande y se simplifica
(no dió tiempo)

Pregunta 7.

Dada la funcion $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z^3+j}$

P.F. De Moivre se aplica

a. Determine singularidades y polos

se iguala

$z^3+j=0 \rightarrow z = \sqrt[3]{-j} = \sqrt[3]{e^{-j\pi/2}}$

$$\left\{\begin{array}{l} z = e^{j\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)/n} \quad \text{para } k=0,1,2 \text{ y } n=3 \\ z_1 = e^{-j\pi/6} \\ z_2 = e^{j\left(\pi/2\right)} \\ z_3 = e^{j\left(\frac{7\pi}{6}\right)} \end{array}\right.$$

$$\boxed{R/ \quad \left.\begin{array}{l} z = e^{-j\pi/6} \\ z = e^{j\pi/2} \\ z = e^{j\frac{7\pi}{6}} \end{array}\right\} \text{polos de } 1^{\circ} \text{ orden}}$$

P.F.

$$a_{-1} = \lim_{z \to z_{1,2,3}} \left(\left(z - z_{1,2,3}\right) f(z) \right)$$

no dio tiempo