Wendy Gómez Ramírez
2017109745

Guía de estudio Semana 4

1. Encuentre la componente real y la componente imaginaria del mapeo $f(z)$ = e^z.

Como z=x+jy; el mapeo se puede escribir de la forma:

$$f(z) = e^z = e^{x+jy} = e^x e^{jy}$$

Por formulario se sabe que $e^{j\theta} = \cos\theta + jsen\theta$; por lo tanto, el mapeo quedaría como:

$$f(z) = e^x e^{jy} = e^x(\cos y + jseny) = e^x \cos y + je^x seny$$

Por lo tanto:

Componente Real: $e^x \cos y$

Componente Imaginaria: $e^x seny$

2. Defina los siguientes conceptos:

a. Vecindad: Es el conjunto de todos los puntos z que estén dentro de un círculo de radio δ alrededor de Z_0 ($|z- Z_0|< \delta$).
b. Punto límite: Un punto Z_0 se denomina punto límite o punto de acumulación de un conjunto A, si cada vecindad de δ reducida de Z_0 contiene puntos de A. Es decir, que contiene la circunferencia o parte que ella.
c. Conjunto cerrado: El conjunto A contiene todos los puntos límites ($|z|\leq 1$)
d. Conjunto acotado: El conjunto A es un conjunto es acotado si se encuentra una constante M tal que $|z|<M$ para cada punto de Z en A.
e. Conjunto ilimitado: Es un conjunto que no es cotado.
f. Puntos interiores, exteriores y frontera: En un conjunto A, Z_0 es un punto exterior si no pertenece a A; un punto frontera si en cada vecindad de Z_0 hay puntos que pertenecen a A y otros que no; y un punto interior si en una vecindad de Z_0 todos los puntos pertenecen a A.

g. Conjuntos abiertos: Es un conjunto que solo tiene puntos interiores, no contiene puntos frontera. Es decir:

$$0 < |Z - Z_0| < \delta$$

h. Conjuntos conexos: Es un conjunto abierto en el que cualquier par de puntos se pueden unir por una recta que pasa dentro del conjunto.
i. Región abierta o dominio: Es un conjunto abierto y conexo.
j. Clausura de un conjunto: Es un conjunto al que se le agregan todos los valores límites. Es decir:

$$0 < |Z - Z_0| \leq \delta$$

k. Región cerrada: Es la clausura de una región abierta o dominio.

3. Encuentre la definición de derivada para variable compleja.

$$\left| L - \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| < E$$

Donde $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ define la vecindad. Si esta ecuación se cumple, entonces, el concepto de derivada para números complejos es:

$$\boxed{L = f_s{}'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \left[\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right]}$$

4. En el conjunto de números complejos ¿Cómo se puede determinar si una función es derivable o no?

Una función en números complejos es derivable cuando esta es analítica. Una función es analítica en un punto Z_0 si existe una vecindad tal que cada punto de la vecindad exista la derivada de f(z). Para que una función sea analítica, debe cumplir con las ecuaciones de Cauchy Riemann, las cuales son:

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy} \quad \wedge \quad \frac{du}{dy} = \frac{-dv}{dx}$$

Donde:

w=f(z)

z=x+jy

w=f(z)=u(x,y) + jv(x,y)

5. ¿Qué es una función analítica?

Una función es analítica en un punto Z_0 si existe una vecindad tal que cada punto de la vecindad exista la derivada de f(z). La función es analítica en un punto z_0 si la función se puede expresar por medio de una serie de Taylor centrada en z_0, lo que conduce a que sea infinitamente diferenciable, y por lo tanto, holomorfa.

6. ¿Qué es una función holomorfa?

Una función f(z) se denomina holomorfa, anal´ıtica3, o regular en una región abierta (o dominio) G ⊆ C si es diferenciable en todo punto de G.

7. Realice la demostración de las Ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Para x:

$$z - z_0 = \Delta x$$

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{f(z_0 + \Delta x) - f(z_0)}{\Delta x}\right]$$

Se tiene que f(z) = w = u + jv; u(x,y),v(x,y).

Reescribiendo la ecuación de la derivada:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) + jv(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0) - jv(x_0, y_0)}{\Delta x}\right]$$

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + j\,\frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x}\right]$$

$$f'(z_0) = \left[\frac{du}{dx} + j\,\frac{dv}{dx}\right]_{x=x_0, y=y_0} (1)$$

Para y:

$$z - z_0 = j\Delta y$$

$$f'(z_0) = \left[\frac{1}{j}\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dy}\right]_{x=x_0, y=y_0} (2)$$

Igualando ambos $f'(z_0)$ [(1) y (2)]:

$$\frac{du}{dx} + j\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dy} - j\frac{du}{dy}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy} \quad ; \quad \frac{du}{dy} = \frac{-dv}{dx}$$

8. Exprese las ecuaciones de Cauchy-Riemann en notación polar.

$$z = re^{j\theta}$$

$$f(z) = u(r,\theta) + jv(r,\theta)$$

$$f'(z) = e^{-j\theta}\left(\frac{du}{dr} + j\frac{dv}{dr}\right) = e^{-j\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{du}{d\theta} - \frac{j}{r}\frac{du}{d\theta}\right)$$

$$\frac{du}{dr} = \frac{1}{r}\frac{dv}{d\theta} \quad ; \quad \frac{dv}{dr} = \frac{-1}{r}\frac{du}{d\theta}$$

9. ¿Cómo se obtiene la derivada de una función compleja a partir de los resultados obtenidos en las preguntas 7 y 8?

Primero se debe separar la parte real y la parte imaginaria de la función y comprobar que cumpla con las ecuaciones de Cauchy Riemann. Si es así, se deriva normalmente como los números naturales.

10. Liste las reglas de diferenciación compleja.

Asumiendo que f(z), g(z) y h(z) son funciones analíticas.

1) $\frac{d}{dz}\{f(z) \pm g(z)\} = \frac{df(z)}{dz} \pm \frac{dg(z)}{dz} = f'(z) \pm g'(z)$

2) $\frac{d}{dz}\{cf(z)\} = c\frac{df(z)}{dz} = cf'(z); c = constante$

3) $\frac{d}{dz}\{f(z)g(z)\} = f(z)\frac{dg((z)}{dz} + g(z)\frac{df(z)}{dz} = f(z)g'(z) + f'(z)g(z)$

4) $\frac{d}{dz}\left\{\frac{f(z)}{g(z)}\right\} = \frac{g(z)\frac{df(z)}{dz} - f(z)\frac{dg(z)}{dz}}{(g(z))^2}$

5) w=f(h) y h=g(z)
$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dh}\frac{dh}{dz} = f'(h)\frac{dh}{dz} = f'\{g(z)\} * g'(z)$

6) w=f(z) => z=f^{-1}(w)

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{\frac{dz}{dw}}$$

7) z=f(t) y w=g(t); t=parámetro

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw/_{dt}}{dz/_{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

8) $f^{(n+1)}(z) = \left[f^{(n)}(z)\right]'; n = 1,2,3, \ldots$

11. Para cada una de las siguientes funciones, probar si son derivables y, si lo son, determinar su posible derivada:

a. $f(z) = z^2$

$$z = x + jy$$

$$f(z) = z^2 = (x + jy)^2 = x^2 + j2xy - y^2 = x^2 - y^2 + j2xy$$

Verificando si la función es derivable:

$$\frac{du}{dx} = 2x \qquad \frac{du}{dy} = -2y$$

$$\frac{dv}{dy} = 2x \qquad \frac{dv}{dx} = 2y$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy} \quad ; \quad \frac{du}{dy} = \frac{-dy}{dx} \quad Sí\ es\ derivable$$

Derivando:

$$\boxed{f'(z) = 2z}$$

b. $f(z) = z^*$

$$z = x + jy \ => z^* = x - jy$$

$$f(z) = z^* = x - jy$$

$$\frac{du}{dx} = 1 \qquad \frac{dv}{dy} = -1$$

$$\boxed{\frac{du}{dx} \neq \frac{dv}{dy} \quad => No\ es\ deribable\ debido\ a\ que\ no\ es\ analítica}$$

c. $f(z) = {}^{1}/_{z}$

$$f(z) = (re^{j\theta})^{-1} = \frac{e^{-j\theta}}{r} = \frac{cos\theta}{r} - j\frac{sen\theta}{r}$$

$$\frac{du}{dr} = \frac{1}{r}\frac{dv}{d\theta} => \frac{-cos\theta}{r^2} = \frac{-cos\theta}{r^2}$$

$$\frac{dv}{dr} = \frac{1}{r}\frac{du}{d\theta} => \frac{sen\theta}{r^2} = \frac{sen\theta}{r^2}$$

Sí es derivable, ya que es analítica

Derivando:

$$\boxed{f'(z) = (-1)z^{-2} = \frac{-1}{z^2}}$$

12. Demuestre el siguiente teorema: "Si $f(z)$ es analítica en una región R, entonces $f'(z)$, $f''(z)$…son también analíticas en R."

$$\nabla \mathrm{u(x,y)} = \left[\frac{du(x,y)}{dx}, \frac{du(x,y)}{dy}\right]$$

$$\nabla \mathrm{v(x,y)} = \left[\frac{dv(x,y)}{dx}, \frac{dv(x,y)}{dy}\right]$$

$$\nabla \mathrm{v(x,y)} = \left[-\frac{du(x,y)}{dy}, \frac{du(x,y)}{dx}\right]$$

$$\nabla \mathrm{u(x,y)} * \nabla \mathrm{v(x,y)} = \frac{du(x,y)}{dx} * \frac{dv(x,y)}{dx} + \frac{du(x,y)}{dy} * \frac{dv(x,y)}{dy}$$
$$= \frac{-du(x,y)}{dx} * \frac{du(x,y)}{dy} + \frac{du(x,y)}{dy} * \frac{du(x,y)}{dx} = 0$$

Si la función es analítica, entonces:

$$f''[z] = [f'(z)]' = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + j\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$f''(z) = [f'(z)]' = \frac{1}{j}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - j\frac{\partial_v^2}{\partial y^2}$$

13. Defina lo que es un punto singular.

Un punto singular de una función es un punto donde la función es continua pero la derivada en dicho punto es discontinua (más exactamente tiene una discontinuidad).

14. Indique las características de las funciones conjugadas y las funciones armónicas.

Un par de funciones de valor y variables reales u(x,y) y v(x,y) se denominan funciones conjugadas si satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Estas funciones son ortogonales en el sentido de que las curvas en el plano (x, y) definidas por u(x, y) =cte y v(x, y) =cte, forman siempre ángulos rectos entre sí.

Una función se denomina armónica si satisface la ecuación de Laplace:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} = 0 \quad ; \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{d^2 y}{dy^2} = 0$$

15. Compruebe que las funciones conjugadas satisfacen la propiedad de ortogonalidad.

$u(x, y) = v(x, y) = cte$ representan curvas de nivel, que siempre son ortogonales al gradiente de la superficie.

$$\nabla \mathrm{u}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \left[\frac{du(x,y)}{dx}, \frac{du(x,y)}{dy}\right]$$

$$\nabla \mathrm{v}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \left[\frac{dv(x,y)}{dx}, \frac{dv(x,y)}{dy}\right]$$

Utilizando las ecuaciones de Cauchy Riemann se obtiene que:

$$\nabla \mathrm{v}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \left[-\frac{du(x,y)}{dy}, \frac{du(x,y)}{dx}\right]$$

Ahora, el producto escalar de ambos gradientes es:

$$\nabla \mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{y}) * \nabla \mathrm{v}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \frac{du(x,y)}{dx} * \frac{dv(x,y)}{dx} + \frac{du(x,y)}{dy} * \frac{dv(x,y)}{dy}$$
$$= \frac{-du(x,y)}{dx} * \frac{du(x,y)}{dy} + \frac{du(x,y)}{dy} * \frac{du(x,y)}{dx} = 0$$

Lo que implica que los gradientes de u y v son ortogonales entre sí, que es equivalente a que las curvas de nivel son también ortogonales entre sí.

16. Dada $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2x$; encuentre la función conjugada $v(x, y)$ tal que f(z) = $u + jv$ es una función analítica de z en todo el plano z.

$$u(x,y) = x^2 - y^2 + 2x$$

$$\frac{du}{dx} = 2x + 2 => \int (2x+2)dy = \int \frac{dv}{dy} = 2xy + 2y + F(x) = V$$

$$\frac{du}{dy} = -2y => \frac{-dv}{dx} = -\int (2y)dx = 2xy + F(Y) = V$$

$$\boxed{V = 2xy + 2y}$$

En términos de z:

$$f(z) = u + jv \quad ; \quad z = x + jy$$

$$f(z) = x^2 - y^2 + 2x + j2xy + j2y$$

$$f(z) = (x + jy)^2 + 2x + j2y$$

$$\boxed{f(z) = z^2 + 2z}$$

17. ¿Cuándo un mapeo es conforme? Encuentre dos ejemplos.

Un mapeo es conforme cuando el valor del ángulo formado entre dos curvas en z es el mismo en el plano w. Además, si f(t) es analítica, entonces el mapeo w=f(z) define un mapeo conforme excepto donde f’(z)=0.

Dos ejemplos de mapeo conforme sin los mapeos lineales y los mapeos bilineales.

18. Determine los puntos en los cuales el mapeo $w = z + 1/z$ es conforme.

Considerando que

$$z = x + jy$$

$$w = u + jv$$

Trabajando en notación polar:

$$z = re^{j\theta} = r(cos\theta jsen\theta) = rcos\theta + jrsen\theta$$

$$=> u = rcos\theta \quad ; \quad v = rsen\theta \quad (1)$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(cos\theta - jsen\theta) = \frac{cos\theta}{r} - \frac{jsen\theta}{r}$$

$$=> u = \frac{cos\theta}{r} \quad ; \quad v = \frac{-sen\theta}{r}$$

De (1)

$$\frac{du}{dr} = cos\theta \qquad \frac{dv}{dr} = sen\theta$$

$$\frac{1}{r}\frac{du}{d\theta} = cos\theta \qquad \frac{-1}{r}\frac{dv}{d\theta} = sen\theta$$

De (2)

$$\frac{du}{dr} = \frac{-cos\theta}{r^2} \qquad \frac{dv}{dr} = \frac{sen\theta}{r^2}$$

$$\frac{1}{r}\frac{du}{d\theta} = \frac{-cos\theta}{r^2} \qquad \frac{-1}{r}\frac{dv}{d\theta} = \frac{sen\theta}{r^2}$$

$$w' = 1 - \frac{1}{z^2}$$

$$\boxed{El\ mapeo\ es\ conforme\ en\ todos\ los\ puntos\ excepto\ z = \pm 1{,}0}$$

19. Encuentre las partes real e imaginarias de las funciones. Verifique que sean analíticas y encuentre sus derivadas.

a. $f(z) = z^2 + e^{2z}$

$$f(z) = u + jv$$

$$z = x + jy$$

$$f(z) = z^2 + e^{2z} = (x + jy)^2 + e^{2(x+jy)}$$

$$f(z) = x^2 - y^2 + j2xy + e^{2x} * e^{j2y}$$

$$f(z) = x^2 - y^2 + j2xy + e^{2x} * (cos2y + jsen2y)$$

$$f(z) = (x^2 - y^2 + e^{2x} * cos2y) + j(2xy + e^{2x} * sen2y)$$

$$\boxed{\begin{gathered} => u = x^2 - y^2 + e^{2x} * cos2y \\ => v = 2xy + e^{2x} * sen2y \end{gathered}}$$

Utilizando las ecuaciones de Cauchy Riemann

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy} \quad ; \quad \frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} = 2x + 2e^{2x}\cos(2y)$$

$$\frac{dv}{dy} = 2x + 2e^{2x}cos(2y)$$

$$\frac{du}{dy} = -2y - 2e^{2x}sen2y$$

$$-\frac{dv}{dx} = -[2y + 2e^{2x}sen2y] = -2y - 2e^{2x}sen2y$$

=>la función es analítica

Por lo tanto, la derivada de la función es:

$$\boxed{f'(z) = 2z + 2e^{2z}}$$

b. $f(z) = sen(2z)$

$$f(z) = u + jv$$

$$z = x + jy$$

$$f(z) = \frac{e^{j2z} - e^{-j2z}}{2j} = \frac{e^{j2(x+jy)} - e^{-j2(x+jy)}}{2j} = \frac{e^{j2x}e^{-2y} - e^{-j2x}e^{2y}}{2j}$$

$$f(z) = \frac{e^{j2x}e^{-2y}}{2j} - \frac{e^{-j2x}e^{2y}}{2j} = \frac{e^{-2y}(cos2x + jsen2x)}{2j} - \frac{e^{2y}(cos2x - jsen2x)}{2j}$$

$$f(z) = \frac{e^{-2y}cos2x}{2j} + \frac{e^{-2y}sen2x}{2} - \frac{e^{2y}cos2x}{2j} + \frac{e^{2y}sen2x}{2}$$

$$f(z) = \frac{e^{-2y}sen2x}{2} + \frac{e^{2y}sen2x}{2} - j\frac{e^{-2y}cos2x}{2} + j\frac{e^{2y}cos2x}{2}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} => u = \dfrac{e^{-2y}sen2x}{2} + \dfrac{e^{2y}sen2x}{2} \\ => v = -\dfrac{e^{-2y}cos2x}{2} + \dfrac{e^{2y}cos2x}{2} \end{array}}$$

Utilizando las ecuaciones de Cauchy Riemann

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy} \quad ; \quad \frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{2e^{-2y}cos2x}{2} + \frac{2e^{2y}cos2x}{2} = e^{-2y}cos2x + e^{2y}cos2x$$

$$\frac{dv}{dy} = -\frac{(-2)e^{-2y}cos2x}{2} + \frac{(2)e^{2y}cos2x}{2} = e^{-2y}cos2x + e^{2y}cos2x$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{(-2)e^{-2y}sen2x}{2} + \frac{(2)e^{2y}sen2x}{2} = -e^{-2y}sen2x + e^{2y}sen2x$$

$$-\frac{dv}{dx} = -\left(\frac{2e^{-2y}sen2x}{2} - \frac{2e^{2y}sen2x}{2}\right) = -e^{-2y}sen2x + e^{2y}sen2x$$

=>la función es analítica

Por lo tanto, la derivada de la función es:

$$\boxed{f'(z) = 2\cos{(2z)}}$$

20. Revisar series de potencia y su convergencia en variable real.

Para los números reales, una serie de potencias alrededor de c es una serie de la forma:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$$

Los números a_0, a_1, …son llamados los coeficientes de la serie. Al punto c se le conoce como centro de convergencia de la serie de potencias.

Para la convergencia de una serie de potencias, se tienen las siguientes opciones:

- La serie converge en x=c. R=0.
- La serie converge para todo x número real. R=+∞.

- Existe un R donde la serie converge absolutamente para todo x tal que |x-c|<R y diverge para todo x al que |x-c|>R.

Donde R es el radio de convergencia.

21. ¿Cómo se define una serie de potencias de variable compleja centrada en z_0?

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

22. ¿Cómo se trata la convergencia o divergencia de una serie de potencias compleja?

$$S_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(z)$$

Si se cumple que $\lim_{n\to\infty} S_n(z) = S(z)$ la serie converge.

Si no se cumple que $\lim_{n\to\infty} U_n(z) = 0$ la serie diverge. Pero si se cumple, no se puede asegurar que converge.

También se puede utilizar la razón de D'Alambert para averiguar la convergencia de una serie.

23. Establezca el criterio de la razón de D'Alambert para determinar el radio de convergencia de una serie de potencias.

Esta razón establece que sí existe un valor de R, la serie va a converger dentro de |z|<R o bien |z|>R. El valor de R se calcula como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n : R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_n + 1} \right|$$

24. Indique paso a paso como se realiza la expansión de una función f(z) racional en serie de potencias en los casos:

a. La región de convergencia (ROC) es el interior de un círculo.

Si se tiene una función f(z) de la forma:

$$f(z) = \frac{1}{z - a}$$

Se realiza una división polinomial de la forma:

$$\begin{array}{r|l} 1 & -a+z \\ \hline & \end{array}$$

Cuando ya se observe un patrón, se puede colocar este como la expansión de la serie de potencias o con este formar la serie.

b. La región de convergencia (ROC) es el exterior de un círculo.

Se tiene una función f(z) de la forma:

$$f(z) = \frac{1}{z-a}$$

Se realiza una división polinomial de la forma:

$$\begin{array}{r|l} 1 & z-a \\ \hline & \end{array}$$

Cuando ya se observe un patrón, se puede colocar este como la expansión de la serie de potencias o con este formar la serie.

25. Determine la serie de potencias que representa a la función $f(z) = \frac{1}{z-3}$ en las siguientes regiones:

a. $|z| < 3; \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

$$\begin{array}{l|l} 1 & -3+z \\ \hline -\left[1-\frac{z}{3}\right] & \frac{-1}{3} - \frac{z}{3^2} - \frac{z^2}{3^3} \\ \hline \frac{z}{3} & \\ -\left[\frac{z}{3} - \frac{z^2}{3^2}\right] & \\ \hline \frac{z^2}{3^2} & \\ -\left[\frac{z^2}{3^2} - \frac{z^3}{3^3}\right] & \\ \hline \frac{z^3}{3^3} & \end{array}$$

$$\boxed{f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^n}{3^{n+1}}\right) \ para\ la\ región\ |z| < 3}$$

b. $|z| > 3; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{z^n}$

$$\begin{array}{l|l}
1 & z-3 \\ \hline
-\left[1-\frac{3}{z}\right] & \frac{1}{z}+\frac{3}{z^2}+\frac{3^2}{z^3} \\ \hline
\frac{3}{z} & \\ \hline
-\left[\frac{3}{z}-\frac{3^2}{z^2}\right] & \\ \hline
\frac{3^2}{z^2} & \\ \hline
-\left[\frac{3^2}{z^2}-\frac{3^3}{z^3}\right] & \\ \hline
\frac{3^3}{z^3} &
\end{array}$$

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3^n}{z^{n+1}}\right) \ para\ la\ región\ |z| > 3}$$

c. $|z-2| < 1; \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-2)^n$

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{(z-z_0)-(a-z_0)} = \frac{1}{z_i - a_i}$$

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{(z-z_0)-1} = \frac{1}{z_i - 1}$$

$$|z_i| = |z-2|$$

$$\begin{array}{l|l}
1 & -1+z_i \\ \hline
-[1-z_i] & -1-z_i-z_i^2 \\ \hline
z_i & \\ \hline
-[z_i-z_i^2] & \\ \hline
z_i^2 & \\ \hline
-[z_i^2-z_i^3] & \\ \hline
z_i^3 &
\end{array}$$

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} z_i^n$$

$$\boxed{f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} (z-2)^n \quad para\ la\ región\ |z-2| < 1.}$$