Wendy Gómez Ramírez
2017109745

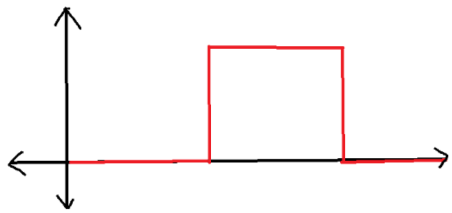
Guía de estudio 7-Señales y Vectores

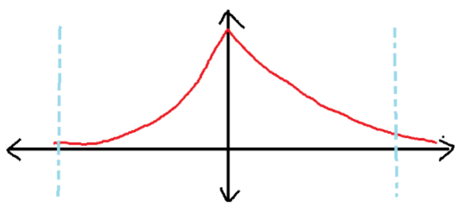
1. ¿Cómo se puede clasificar las señales? Explique la clasificación de:

Las señales se pueden clasificar como señales de energía o potencia y como señales periódicas y no periódicas.

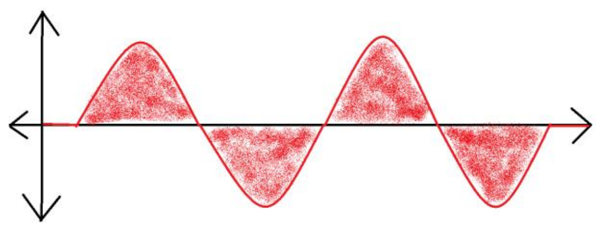
a. Señales de energía y de potencia

Una señal se considera de energía si posee forma de pulso en un lapso finito de tiempo o una señal en un lapso infinito donde la mayor cantidad del área es en un lapso finito de tiempo.





Ejemplo: una señal senoidal no es una señal de energía, pero, un pulso de seno sí lo es.



$$P = |f(t)|^2$$

$$E = \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 \, dt$$

Una señal de energía siempre va a cumplir que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt < \infty$$

Para calcular la potencia media:

$$P = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 \, dt = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 \, dt$$

Para saber si una señal es de potencia; se debe cumplir:

$$0 < \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt < \infty$$

b. Señales periódicas y no periódicas

Señal Periódica: se repite infinitas veces en el tiempo. Se cumple que f(t+1) = f(t). Toda señal periódica es una señal de potencia, si su energía por ciclo es finita.

Ejemplo: sen, cos, tren de pulsos del 555.

Señal no periódica o aperiódica: No existe un valor de t que cumpla que f(t+1) = f(t).

Ejemplo: $sent + sen\sqrt{2}t$. A pesar de que posea el sen, se debe analizar la señal en conjunto y esta no es periódica.

2. Clasifique las siguientes señales en señales de energía o de potencia y encuentre la energía o potencia normalizadas en cada caso. (todas las señales están definidas en el intervalo $-\infty < t < \infty$).

a. cos t + 2 cos 2t

Es una señal periódica por lo que es una señal de potencia

$w_0 = 1\; para\; ambas$

$$w_0 = 1 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$$

$$P = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\cos t + 2\cdot\cos 2t)^2\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (cos^2 t + 2cos2t * cost + 4cos^2(2t))dt$$

$$P = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{1}{2} + \cos 2\,t\right) + (2\cos t + 2\cos 3t) + (2 + \cos 4t)\right] dt$$

$$P = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{t}{2} + \frac{Sen^2 t}{2} + 2Sent + 2\frac{sen(3t)}{3} + 2t + \frac{\sec(4t)}{4}\right)|_0^{2\pi}$$

$$P = \frac{1}{2\Pi}\left(\frac{5t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{5}{2}\frac{2\pi}{2\pi} = \frac{5}{2} = 2{,}5W$$

$$\boxed{P = 2{,}5W}$$

b. $e|{-t}|$

Es una señal de energía.

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{|-t|}\right)^2 dt$$

$$E = \int_{-\infty}^{0} (e^t)^2 \, dt + \int_{0}^{\infty} (e^t)^{-2} \, dt = \int_{-\infty}^{0} e^{2t} \, dt + \int_{0}^{\infty} e^{-2t} \, dt$$

$$\left.\frac{e^{2t}}{2}\right|_{-\infty}^{0} + \left.\frac{e^{-2t}}{2}\right|_{0}^{\infty} = \frac{1}{2} - \frac{e^{-\infty}}{2} + \frac{-e^{-\infty}}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\boxed{E = 1J}$$

c. $e^{j2\pi t}$

$$e^{j2\pi t} = \cos(2\pi t) + jsen(2\pi t)$$

Es una señal de potencia

$$T = \frac{2\pi j}{1} = 2\pi j$$

$$P = \frac{1}{2\pi j} \int_{0}^{2\pi} \left(e^{j2\pi t}\right)^2 dt$$

$$P = \frac{1}{2\pi j} \left[\left.\frac{e^{j4\pi t}}{4}\right|_{0}^{2\pi} \right]$$

$$P = \frac{1}{2\pi j} \left[\frac{e^{j8\pi^2}}{4} - \frac{1}{4} \right]$$

$$\boxed{P = \frac{1}{2\pi j} \left[\frac{e^{j8\pi^2}}{4} - \frac{1}{4} \right]}$$

d. $e^{-|t|} \cos 2t$

Es una señal de energía debido a que el $e^{-|t|}$ hacer que la señal del coseno se atenúe en los extremos.

$$E = \int_{-\infty}^{0} (e^{t}\cos 2\mathrm{t})^2\, dt + \int_{0}^{\infty} (e^{-t}\cos 2\mathrm{t})^2\, dt$$

$$E = \left(\frac{1}{4+1} e^{t}(2sen2t - cos2t)\right)\Bigg|_{-\infty}^{0} + \left(\frac{1}{4+1} e^{-t}(2sen2t - cos2t)\right)\Bigg|_{0}^{\infty}$$

$$E = \left(\frac{1}{5} e^{t}(2sen2t - cos2t)\right)\Bigg|_{-\infty}^{0} + \left(\frac{1}{5} e^{-t}(2sen2t - cos2t)\right)\Bigg|_{0}^{\infty}$$

$$E = \left(\frac{1}{5} e^{t}(2sen2t - cos2t)\right)\Bigg|_{-\infty}^{0} + \left(\frac{1}{5} e^{-t}(2sen2t - cos2t)\right)\Bigg|_{0}^{\infty}$$

$$E = 0 - \left(-\frac{1}{5}\right) + \left(-\frac{1}{5} - 0\right) = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}$$

$$\boxed{E=0}$$

3. ¿Qué es un sistema?

Un sistema es un grupo de objetos que pueden interactuar de forma armónica y que se combinan con el propósito de alcanzar determinado objetivo.

Defina las siguientes clasificaciones de sistemas:

a. Sistema lineal y sistema no lineal

Si se aplica la superposición de dos sistemas, se tiene que cumplir:

$$g_1(t) = F\{f_1(t)\}$$

$$g_2(t) = F\{f_2(t)\}$$

$$F\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} = a_1 g_1(t) + a_2 g_2(t)$$

Si esto no se cumple, entonces el sistema no es lineal.

b. Sistema variante en el tiempo y sistema invariante en el tiempo.

Es variante en el tiempo si un desplazamiento del tiempo en la entrada produce un desplazamiento en la salida.

Ejemplo: $g(t) = 1 + tf(t+1)$

c. Sistema causal y sistema no causal

En un sistema no causal, la salida solo depende de valores futuros. Un sistema causal, la salida depende de valores pasados o presentes.

4. Sea $f(t)$ la entrada de un sistema dado y $g(t)$ su correspondiente salida. A continuación, se dan las relaciones entrada-salida a varios sistemas. Clasifique los sistemas en una o más de las categorías dadas en la pregunta 3:

a. $g(t) = 1 + f(t + 1)$

Sistema no lineal, invariante en el tiempo, no causal.

b. $g(t) = 2tf(t)$

Sistema lineal, variante en el tiempo, causal.

c. $g(t) = 2tf(t)$

Sistema lineal, variante en el tiempo, causal.

d. $g(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$

Sistema lineal, invariante en el tiempo, causal.

5. Matemáticamente ¿cómo se define un vector? ¿cómo se puede relacionar con el concepto de tupla? ¿Se cumple con las propiedades asociativa, conmutativa, elemento opuesto y elemento neutro en vectores?

Un Vector es un conjunto de puntos que tiene magnitud y dirección. Se escribe en términos de n conjunto notable de números.

Un vector es un elemento de una estructura algebraica llamada espacio vectorial (conjunto de elementos con un conjunto de axiomas). Un vector es una tupla de n espacios vectoriales.

Un vector cumple con las propiedades asociatividad, conmutatividad, elemento opuesto y elemento inverso.

6. ¿Qué es un espacio vectorial completo?

Debe existir una coordenada para cada espacio del vector para que cada tupla sea única.

7. Defina los siguientes conceptos para espacios vectoriales de N-dimensiones:

a. Producto punto o escalar.

$$C_{12} = \varphi_1 * \varphi_2 = |\varphi_1||\varphi_2| \cos\theta$$

Es cero cuando $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0$ o $\theta = 90°$

b. Vectores ortogonales

El ángulo entre los vectores es de $90°$

c. Norma vectorial (Euclidean Norm)

$$\left||x|\right| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

d. Representación de vectores a partir de un conjunto ortogonal de vectores base.

Si se tiene un espacio vectorial ortogonal con los tres vectores ortogonales φ_1 , φ_2 , φ_3 . Estos vectores no tienen necesariamente longitud unitaria; no obstante, puede escribirse:

$$\varphi_n * \varphi_m \begin{cases} k_n & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

Donde k_n es el cuadro de la longitud de φ_n. Cualquier vector A_1 en este espacio vectorial se puede representar en la forma:

$$A_1 = A_{11}\varphi_1 + A_{12}\varphi_2 + A_{13}\varphi_3$$

Donde

$$A_{1n} = \frac{A_1\varphi_1}{\varphi_n\varphi_n} = A_1\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_n\varphi_n}\right) = A_1\left(\frac{\varphi_n}{k_n}\right)$$

Para n=1,2,3.

8. Tres vectores expresados en el sistema de coordenadas cartesianos descritos por $\overline{x_1}$; $\overline{x_2}$; $\overline{x_3}$ son:

$$\bar{A} = \overline{x_1} - \overline{x_2} + 5\overline{x_3} \qquad \bar{C} = 3\overline{x_1} + \overline{x_2} + 2\overline{x_3}$$

$$\bar{B} = -\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3} \qquad \bar{D} = \overline{x_1} + 5\overline{x_2} - 4\overline{x_3}$$

a. Determine cuál de los vectores es ortogonal a $\bar{D}$.

$$\bar{A} \cdot \bar{D} = 1 \cdot 1 - 5 - 20 \neq 0$$

$$\bar{B} \cdot \bar{D} = -1 + 5 - 4 = 0$$

$$\bar{C} \cdot \bar{D} = 3 + 5 - 8 = 0$$

$$\boxed{\bar{B}\ y\ \bar{C}\ son\ ortogonales\ al\ vector\ \bar{D}}$$

b. Represente $\bar{A}$ en término de los vectores $\bar{B}$, $\bar{C}$ y $\bar{D}$.

$$\bar{B} = -\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3$$

$$\Rightarrow \bar{x}_1 = -\bar{B} + \bar{x}_2 + \bar{x}_3$$

$$\bar{C} = 3\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + 2\bar{x}_3$$

$$\Rightarrow \bar{C} = 3(-\bar{B} + \bar{x}_2 + \bar{x}_3) + \bar{x}_2 + 2\bar{x}_3$$

$$\bar{C} = -3\bar{B} + 3\bar{x}_2 + 3\bar{x}_3 + \bar{x}_2 + 2\bar{x}_3$$

$$\bar{C} = -3\bar{B} + 4\bar{x}_2 + 5\bar{x}_3$$

$$\bar{x}_2 = \frac{\bar{C} + 3\bar{B} - 5\bar{x}_3}{4}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{\bar{C}}{4} + \frac{3\bar{B}}{4} - \frac{5\bar{x}_3}{4}$$

$$\bar{D} = \bar{x}_1 + 5\bar{x}_2 - 4\bar{x}_3$$

$$\bar{D} = (-\bar{B} + \bar{x}_2 + \bar{x}_3) + 5\left(\frac{\bar{C}}{4} + \frac{3\bar{B}}{4} - \frac{5\bar{x}_3}{4}\right) - 4\bar{x}_3$$

$$\bar{D} = -\bar{B} + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \frac{5\bar{C}}{4} + \frac{15}{4}\bar{B} - \frac{25}{4}\bar{x}_3 - 4\bar{x}_3$$

$$\bar{D} = \bar{x}_2 + \frac{11}{4}\bar{B} + \frac{5}{4}\bar{C} - \frac{37}{4}\bar{x}_3$$

$$\bar{D} = \left(\frac{\bar{C}}{4} + \frac{3\bar{B}}{4} - \frac{5\bar{x}_3}{4}\right) + \frac{11}{4}\bar{B} + \frac{5}{4}\bar{C} - \frac{37}{4}\bar{x}_3$$

$$\bar{D} = \frac{7}{2}\bar{B} + \frac{3}{2}\bar{C} - \frac{21}{2}\bar{x}_3$$

$$\Rightarrow \bar{x}_3 = \frac{2}{21}\left(\frac{7}{2}\bar{B} + \frac{3}{2}\bar{C} - \bar{D}\right)$$

$$\bar{x}_3 = \frac{\bar{B}}{3} + \frac{\bar{C}}{7} - \frac{2\bar{D}}{21}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{\bar{C}}{4} + \frac{3\bar{B}}{4} - \frac{5\bar{x}_3}{4}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{\bar{C}}{4} + \frac{3\bar{B}}{4} - \frac{5}{4}\left(\frac{\bar{B}}{3} + \frac{\bar{C}}{7} - \frac{2\bar{D}}{21}\right)$$

$$\bar{x}_2 = \frac{\bar{C}}{4} + \frac{3\bar{B}}{4} - \frac{5}{12}\bar{B} - \frac{5}{28}\bar{C} + \frac{5}{42}\bar{D}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{3}\bar{B} + \frac{1}{14}\bar{C} + \frac{5}{42}\bar{D}$$

$$\bar{x}_1 = -\bar{B} + \bar{x}_2 + \bar{x}_3$$

$$\bar{x}_1 = -\bar{B} + \left(\frac{1}{3}\bar{B} + \frac{1}{14}\bar{C} + \frac{5}{42}\bar{D}\right) + \left(\frac{\bar{B}}{3} + \frac{\bar{C}}{7} - \frac{2\bar{D}}{21}\right)$$

$$\overline{x_1} = -\frac{1}{3}\bar{B} + \frac{3}{14}\bar{C} + \frac{\bar{D}}{42}$$

$$\bar{A} = \overline{x_1} - \overline{x_2} + 5\overline{x_3}$$

$$\Rightarrow \bar{A} = \left(-\frac{1}{3}\bar{B} + \frac{3}{14}\bar{C} + \frac{\bar{D}}{42}\right) - \left(\frac{1}{3}\bar{B} + \frac{1}{14}\bar{C} + \frac{5}{42}\bar{D}\right) + 5\left(\frac{\bar{B}}{3} + \frac{\bar{C}}{7} - \frac{2\bar{D}}{21}\right)$$

$$\bar{A} = -\frac{1}{3}\bar{B} + \frac{3}{14}\bar{C} + \frac{\bar{D}}{42} - \frac{1}{3}\bar{B} - \frac{1}{14}\bar{C} - \frac{5}{42}\bar{D} + \frac{5}{3}\bar{B} + \frac{5}{7}\bar{C} - \frac{10}{21}\bar{D}$$

$$\boxed{\bar{A} = \bar{B} + \frac{6}{7}\bar{C} - \frac{4}{7}\bar{D}}$$

c. Calcule el cuadrado de la longitud del vector error residual si $\bar{A}$ se representa sólo en términos de $\bar{C}$ y $\bar{D}$.

$$\bar{A} = \overline{x_1} - \overline{x_2} + 5\overline{x_3}$$

$$\Rightarrow \bar{x}_1 = \bar{A} + \bar{x}_2 - 5\bar{x}_3$$

$$\bar{C} = 3\overline{x_1} + \overline{x_2} + 2\overline{x_3}$$

$$\bar{C} = 3(\bar{A} + \bar{x}_2 - 5\bar{x}_3) + \overline{x_2} + 2\overline{x_3}$$

$$\bar{C} = 3\bar{A} + 3\bar{x}_2 - 15\bar{x}_3 + \bar{x}_2 + 2\bar{x}_3$$

$$\bar{C} = 3\bar{A} + 4\bar{x}_2 - 13\bar{x}_3$$

$$\bar{x}_2 = \frac{\bar{C} - 3\bar{A} + 13\bar{x}_3}{4}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{\bar{C}}{4} - \frac{3}{4}\bar{A} + \frac{13}{4}\bar{x}_3$$

$$\Rightarrow \bar{x}_1 = \bar{A} + \left(\frac{\bar{C}}{4} - \frac{3}{4}\bar{A} + \frac{13}{4}\bar{x}_3\right) - 5\bar{x}_3$$

$$\bar{x}_1 = \frac{\bar{A}}{4} + \frac{\bar{C}}{4} - \frac{7}{4}\overline{x_3}$$

$$\bar{D} = \overline{x_1} + 5\overline{x_2} - 4\overline{x_3}$$

$$\bar{D} = \left(\frac{\bar{A}}{4} + \frac{\bar{C}}{4} - \frac{7}{4}\overline{x_3}\right) + 5\left(\frac{\bar{C}}{4} - \frac{3}{4}\bar{A} + \frac{13}{4}\bar{x}_3\right) - 4\overline{x_3}$$

$$\bar{D} = \frac{\bar{A}}{4} + \frac{\bar{C}}{4} - \frac{7}{4}\overline{x_3} + \frac{5}{4}\bar{C} - \frac{15}{4}A + \frac{65}{4}\bar{x}_3 - 4\overline{x_3}$$

$$\bar{D} = \frac{-7}{2}\bar{A} + \frac{3}{2}\bar{C} + \frac{21}{2}\bar{x}_3$$

$$\bar{x}_3 = \frac{2}{21}\left(\bar{D} + \frac{7}{2}\bar{A} - \frac{3}{2}\bar{C}\right)$$

$$\bar{x}_1 = \frac{\bar{A}}{4} + \frac{\bar{C}}{4} - \frac{7}{4}\overline{x_3}$$

$$\bar{x}_1 = \frac{\bar{A}}{4} + \frac{\bar{C}}{4} - \frac{7}{4}\left(\frac{2\bar{D}}{21} + \frac{\bar{A}}{3} + \frac{\bar{C}}{7}\right)$$

$$\bar{x}_1 = \frac{\bar{A}}{4} + \frac{\bar{C}}{4} - \frac{\bar{D}}{6} - \frac{7}{12}\bar{A} - \frac{\bar{C}}{4}$$

$$\bar{x}_1 = \frac{\bar{A}}{3} - \frac{\bar{D}}{6}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{\bar{C}}{4} - \frac{3}{4}\bar{A} + \frac{13}{4}\bar{x}_3$$

$$\bar{x}_2 = \frac{\bar{C}}{4} - \frac{3}{4}\bar{A} + \frac{13}{4}\left(\frac{2\bar{D}}{21} + \frac{\bar{A}}{3} + \frac{\bar{C}}{7}\right)$$

$$\bar{x}_2 = \frac{\bar{C}}{4} - \frac{3}{4}\bar{A} + \frac{13}{42}\bar{D} + \frac{13}{12}\bar{A} + \frac{13}{28}\bar{C}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{\bar{A}}{3} + \frac{5}{7}\bar{C} + \frac{13}{42}\bar{D}$$

$$\bar{B} = -\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3}$$

$$\bar{B} = -\frac{\bar{A}}{3} + \frac{\bar{D}}{6} + \frac{\bar{A}}{3} + \frac{5}{7}\bar{C} + \frac{13}{42}\bar{D} + \frac{2\bar{D}}{21} + \frac{\bar{A}}{3} + \frac{\bar{C}}{7}$$

$$\bar{B} = \frac{\bar{A}}{3} + \frac{6}{7}\bar{C} + \frac{4}{7}\bar{D}$$

$$\bar{A} = \bar{B} + \frac{6}{7}\bar{C} - \frac{4}{7}\bar{D}$$

$$\bar{A} = \frac{\bar{A}}{3} + \frac{6}{7}\bar{C} + \frac{4}{7}\bar{D} + \frac{6}{7}\bar{C} - \frac{4}{7}\bar{D}$$

$$\frac{2}{3}\bar{A} = \frac{12}{7}\bar{C}$$

$$\bar{A} = \frac{18}{7}\bar{C}$$

Si L es el cuadrado de la longitud del vector error residual:

$$L = \left[\sqrt{\left(\frac{18}{7}\bar{C}\right)^2}\right]^2$$

$$\boxed{L = \frac{324}{49}(\bar{C})^2}$$

9. ¿Qué es un espacio funcional?

Es un conjunto de funciones de un conjunto X a un conjunto Y, de una clase dada. Se llama un espacio porque en la mayoría de las aplicaciones, es un espacio topológico o un espacio vectorial.

10. Defina el concepto de funciones linealmente independientes

Sean $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ funciones reales definidas en un intervalo I. Estas funciones son linealmente independientes en I si la relación: Para todo $t \in I$

$$\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) + \alpha_3 f_3(t) = 0; \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R, \ (1)$$

Sólo es posible cuando $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$. En el caso de que se satisfaga (1) con algún $\alpha_i \neq 0$, se dirá que las funciones son linealmente dependientes en I.

11. ¿Cómo se definen las funciones ortogonales? ¿Cómo se expresa el producto interno de dos funciones? ¿Qué significa que un conjunto de funciones esté normalizado?

Dos funciones de valor complejo $\emptyset_1(t)$ y $\emptyset_2(t)$ se definen ortogonales en el intervalo (t_1, t_2) si

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\phi_1(t)\phi_2^*(t)\right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\phi_1^*(t)\phi_2(t)\right) dt = 0$$

Por lo tanto, si los miembros de un conjunto de funciones de valor complejo son mutuamente ortogonales en (t_1, t_2)

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi_n(t)\phi_m^* dt = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ K_n & n = m \end{cases}$$

Se dice que un conjunto de funciones básicas $\phi_n(t)$ está normalizado si:

$$K_n = \int_{t_1}^{t_2} |\phi_n(t)|^2 \; dt = 1 \; para \; todo \; n$$

12. Busque las relaciones de ortogonalidad de componentes $sen\ (n\omega_0 t)$ y $cos\ (n\omega_0 t)$ en un periodo.

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos\,(n\omega_0 t)\, dt = \begin{cases} 0 \; para \; n \neq 0 \\ T \; para \; n = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} sen(n\omega_0 t)\, dt = 0 \; para \; todo \; n$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos\,(n\omega_0 t) * \cos\,(m\omega_0 t) dt = \begin{cases} 0 \; para \; m \neq n \\ \dfrac{T}{2} \; para \; m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} sen(n\omega_0 t) * sen(m\omega_0 t)\, dt = \begin{cases} 0 \; para \; m \neq n \\ \dfrac{T}{2} \; para \; m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} sen(n\omega_0 t) * \cos\,(m\omega_0 t) dt = 0 \; para \; todom \; y \; n$$

13. Para N términos, una función $f(t)$ se puede aproximar por medio de una serie descrita por:

$$\mathrm{f(t)} \approx \sum_{n=1}^{N} \mathrm{fn}\ \phi\mathrm{n(t)}$$

Donde $\phi_n(t)$ es un conjunto de funciones ortogonales adecuada y f_n son los coeficientes de la serie

a. ¿Cómo se encuentra el error cuadrático integral residual después de N términos?

$$\int_{t_1}^{t_2} |En(t)|^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} \left| f(t) - \sum_{n=1}^{N} f_n \varphi_n(t) \right|^2 dt$$

Donde f(t) es la función original.

b. ¿Cómo se puede minimizarse este error?

$$\int_{t_1}^{t_2} |En(t)|^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[f(t) - \sum_{n=1}^{N} f_n \varphi_n(t) \right] \left[f(t) - \sum_{n=1}^{N} f_n \varphi_n(t) \right]^* dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[f(t) f^*(t) - f(t) \left(\sum_{n=1}^{N} f_n \varphi_n(t) \right)^* - f^*(t) \left(\sum_{n=1}^{N} f_n \varphi_n(t) \right) \right.$$

$$\left. + \left(\sum_{n=1}^{N} f_n \varphi_n(t) \right) \left(\sum_{n=1}^{N} f_n{}^* \varphi_n{}^*(t) \right) \right] dt$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty$$

Usando:

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi_n(t) \phi_m^* dt = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ K_n & n = m \end{cases}$$

La ecuación queda como:

$$\int_{t_1}^{t_2} |En(t)|^2 dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 dt$$

$$+ \sum_{n=1}^{N} \left[-f_n^* \int_{t_1}^{t_2} f(t) \phi_n^*(t)\, dt - f_n \int_{t_1}^{t_2} f(t)^* \phi_n(t)\, dt + |f_n|^2 k_n \right]$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 dt + \sum_{n=1}^{N} \left[\left(K_n^{\frac{1}{2}} f_n - \frac{1}{K_n^{\frac{1}{2}}} \int_{t_1}^{t_2} f(t)\phi_n^*(t)\, dt \right) \left(K_n^{\frac{1}{2}} f_n{}^* - \frac{1}{K_n^{\frac{1}{2}}} \int_{t_1}^{t_2} f^*(t)\phi_n(t)\, dt \right) - \left(\frac{1}{K_n^{\frac{1}{2}}} \int_{t_1}^{t_2} f(t)\phi_n^*(t)\, dt \right) \left(\frac{1}{K_n^{\frac{1}{2}}} \int_{t_1}^{t_2} f^*(t)\phi_n(t)\, dt \right) \right]$$

$$\int_{t_1}^{t_2} |En(t)|^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 dt + \sum_{n=1}^{N} \left[\left| K_n^{\frac{1}{2}} f_n - \frac{1}{K_n^{\frac{1}{2}}} \int_{t_1}^{t_2} f(t)\phi_n^*(t)\, dt \right|^2 - \left| \frac{1}{K_n^{\frac{1}{2}}} \int_{t_1}^{t_2} f(t)\phi_n^*(t)\, dt \right|^2 \right]$$

Si se define f_n como:

$$f_n = \frac{1}{k_n} \int_{t_1}^{t_2} f(-l)\phi_n^*(t)\, dt = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)\phi_n^*(t)\, dt}{\int_{t_1}^{t_2} |\phi_n(t)|^2 dt}$$

El error cuadrático integral mínimo en la aproximación por serie ortogonal en el intervalo t_1 a t_2 está dado por

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} |En(t)|^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 dt - \sum_{n=1}^{N} |f_n|^2 k_n}$$