**Instituto Tecnológico de Costa Rica** **I Semestre 2021**
**Área de Ingeniería Mecatrónica**
**MT-5001 Modelos de Sistemas para Mecatrónica**
**Profesor: Ing. Felipe Meza-Obando.**

**Elaborado por: Ing. José Miguel Barboza Retana**

# Práctica #3. Derivación compleja.

- Resuelva los siguientes problemas utilizando derivación compleja y el concepto de mapeo conforme, para todos los casos asuma que $z = x + jy$:

1) Verifique que la función exponencial $f(z) = e^{az}$, donde $a$ es una constante, satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann y demuestre que $f'(z) = ae^{az}$.

2) Determine cuándo las siguientes funciones son analíticas y encuentre la derivada cuando tenga sentido:
   a) $ze^{z}$
   b) $\sin(4z)$
   c) $zz^*$
   d) $\cos(2z)$

3) Determine el valor que deben tomar las constantes $a$ y $b$ para que la función $w = x^2 + ay^2 - 2xy + j(bx^2 - y^2 + 2xy)$ sea analítica. Para estos valores de $a$ y $b$ encuentre la derivada de $w$ y exprese ambas $w$ y $\frac{dw}{dz}$ como función de $z$.

4) Encuentre una función $v(x, y)$ de tal forma que dada $u(x, y) = 2x(1 - y)$, $f(z) = u + jv$ sea analítica.

5) Dada $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2x$ encuentre la función conjugada $v(x, y)$ tal que $f(z) = u + jv$ sea una función analítica de $z$ en todo el plano $z$.

6) Obtenga una función holomorfa $f(z) = u(x, y) + v(x, y)$ si se tiene que $u(x, y) = y^3 - 3x^2y$ y además se cumple $f(0) = j$.

7) Demuestre que $\phi(x, y) = e^x(x\cos(y) - y\sin(y))$ es una función armónica y encuentre la función conjugada $\psi(x, y)$ que formen una función $f(z)$ analítica. Escriba $f(z = x + jy) = \phi(x, y) + j\psi(x, y)$ como función únicamente de $z$.

8) Demuestre que $u(x, y) = \sin(x)\cosh(y)$ es armónica y encuentre una función conjugada armónica $v(x, y)$ y exprese $u + jv$ como función de $z$.

9) Encuentre las partes real e imaginaria de las funciones:
   a) $z^2 e^{2z}$
   b) $\sin(2z)$

   Además, verifique que sean analíticas y calcule sus derivadas.

10) Determine los puntos en que los siguientes mapeos no son conformes:
   a) $w = z^2 - 1$
   b) $w = 2z^3 - 21z^2 + 72z + 6$
   c) $w = 8z + \frac{1}{2z^2}$