Formulario

EL-4703 Señales y Sistemas

Escuela de Ingeniería Electrónica
Instituto Tecnológico de Costa Rica
Prof.: Dr. Pablo Alvarado Moya
Prof.: M.Sc. José Miguel Barboza Retana

$$\sum_{n=0}^{M} \alpha^n = \frac{1-\alpha^{M+1}}{1-\alpha} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha}, \quad |\alpha| < 1$$

$$\operatorname{sen}(A \pm B) = \operatorname{sen}(A)\cos(B) \pm \cos(A)\operatorname{sen}(B) \qquad \cos(A \pm B) = \cos(A)\cos(B) \mp \operatorname{sen}(A)\operatorname{sen}(B)$$

$$\cos^2(A) = \frac{1}{2}(1+\cos(2A)) \qquad \operatorname{sen}^2(A) = \frac{1}{2}(1-\cos(2A))$$

$$\operatorname{sen}(A)\operatorname{sen}(B) = \frac{1}{2}\left(\cos(A-B) - \cos(A+B)\right) \qquad \cos(A)\cos(B) = \frac{1}{2}\left(\cos(A-B) + \cos(A+B)\right)$$

$$\operatorname{sen}(A)\cos(B) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(A-B) + \operatorname{sen}(A+B)\right) \qquad \tan(A) = \operatorname{sen}(A)/\cos(A)$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\cos(A)\right)} \qquad \cos\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\cos(A)\right)}$$

$$e^{j\omega} = \cos(\omega) + j\operatorname{sen}(\omega) \qquad \tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$$

$$\cos(\omega) = \frac{e^{j\omega} + e^{-j\omega}}{2} \qquad \operatorname{sen}(\omega) = \frac{e^{j\omega} - e^{-j\omega}}{2j}$$

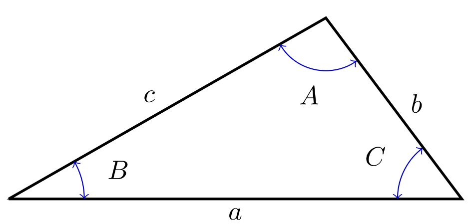
$$\operatorname{senh}(\omega) = \frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{2} \qquad \cosh(\omega) = \frac{e^{\omega} + e^{-\omega}}{2}$$

Ley de los senos

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

Ley de los cosenos

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$



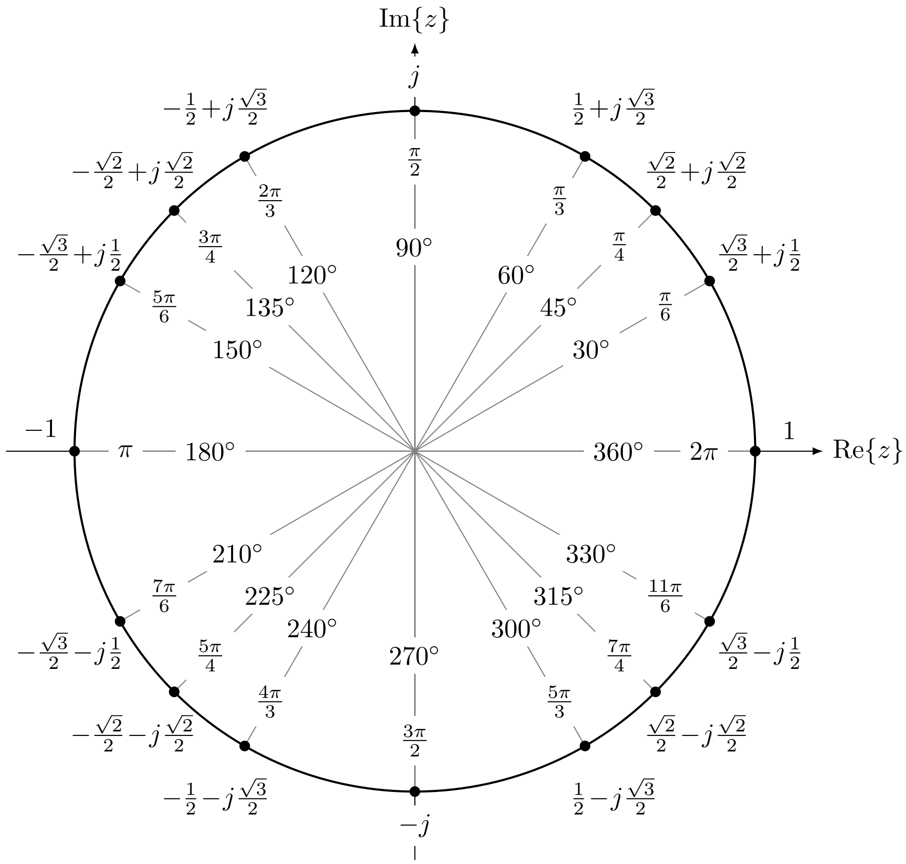
Teorema de De Moivre

$$\left(re^{j\theta}\right)^p = r^p e^{jp\theta} \rightarrow \left(re^{j\theta}\right)^{1/n} = \left[re^{j(\theta+2k\pi)}\right]^{1/n} = r^{1/n}e^{j(\theta+2k\pi)/n}\,; n,k,p \in \mathbb{Z},\ k \in [0,1,...,n-1]$$

Logaritmo de un número complejo

$$\begin{aligned} \operatorname{Ln}\left(re^{j\theta}\right) &= \ln r + j\theta \\ \ln\left(re^{j\theta}\right) &= \operatorname{Ln}\left(re^{j\theta}\right) + j2k\pi \\ &= \ln r + j(\theta + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Posiciones del círculo unitario $|z| = 1$



Integrales (C es una constante cualquiera)

$$\int f(z)\,dz = F(z) \quad \Rightarrow \quad F'(z) = f(z)$$

$$\int z^n\,dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} + C;\; n \neq -1$$

$$\int z^{-1}\,dz = \ln z + C$$

$$\int e^{az}\,dz = \frac{e^{az}}{a} + C$$

$$\int z e^{az}\,dz = \frac{e^{az}}{a^2}\,(az-1) + C$$

$$\int \operatorname{sen}(az)\,dz = -\frac{\cos(az)}{a} + C$$

$$\int z\operatorname{sen}(az)\,dz = \frac{1}{a^2}\,[\operatorname{sen}(az) - az\cos(az)] + C$$

$$\int \cos(az)\,dz = \frac{\operatorname{sen}(az)}{a} + C$$

$$\int z\cos(az)\,dz = \frac{1}{a^2}\,[\cos(az) + az\operatorname{sen}(az)] + C$$

$$\int \operatorname{sen}^2(az)\,dz = \frac{1}{2}z - \frac{1}{4a}\operatorname{sen}(2az) + C$$

$$\int \cos^2(az)\,dz = \frac{1}{2}z + \frac{1}{4a}\operatorname{sen}(2az) + C$$

$$\int \ln(az)\,dz = z(\ln az) - z + C$$

$$\int \frac{1}{z^2+a^2}\,dz = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{z}{a}\right) + C$$

Descomposición en funciones simétricas

$$f(t) = f_e(t) + f_o(t), \qquad f_e(t) = f_e(-t), \quad f_o(t) = -f_o(-t)$$
$$f_e(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2} \qquad f_o(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2}$$

Mapeos

$z = x + jy \longrightarrow w = u + jv$

Círculo centrado en z_0 y radio r:	$\lvert z - z_0\rvert = r$
Recta mediatriz al segmento entre a y b:	$\lvert z - a\rvert = \lvert z - b\rvert$
Mapeo lineal:	$w = \alpha z + \beta$
Mapeo de inversión:	$w = 1/z$

Mapeo de rectas: $\lvert z - a\rvert = \lvert z - b\rvert$	Mapeo de círculos: $\lvert z - z_0\rvert = r$
Sea $\beta = \lvert a\rvert^2 - \lvert b\rvert^2$: Si $\beta = 0 : v = \dfrac{\operatorname{Re}\{a-b\}}{\operatorname{Im}\{a-b\}} u$ Si $\beta \neq 0 : \lvert w - w_0\rvert = r_w$ con: $r_w = \left\lvert\dfrac{a-b}{\beta}\right\rvert, w_0 = \dfrac{(a-b)^*}{\beta}$	Sea $\alpha = r^2 - \lvert z_0\rvert^2$: Si $\alpha = 0 : v = \dfrac{x_0}{y_0} u - \dfrac{1}{2y_0}$ Si $\alpha \neq 0 : \lvert w - w_0\rvert = r_w$ con: $r_w = \left\lvert\dfrac{r}{\alpha}\right\rvert, w_0 = \dfrac{-z_0^*}{\alpha}$

Mapeo bilineal:	$w = \dfrac{az+b}{cz+d} = \lambda + \dfrac{\mu}{\alpha z + \beta}$, $\lambda = a/c$, $\mu = bc - ad$, $\alpha = c^2$, $\beta = cd$
Mapeo exponencial:	$w = e^z = e^{x+jy} = e^x e^{jy}$

Derivación compleja

Para $f(z = x + jy) = u(x, y) + jv(x, y)$.
Ecuaciones de Cauchy Riemann:

$$\exists f'(z) \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - j\frac{\partial u}{\partial y}$$

Funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ conjugadas si cumplen Ec. Cauchy-Riemann.
Función armónica: $\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0$
Mapeo conforme: $\exists f'(z), f'(z) \neq 0$

Series

Radio de convergencia R y razón de D'Alembert para $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$: $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

Serie de Taylor: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{n!} f^{(n)}(z_0)$

Serie de Laurent: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$

Residuo: $a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \left\{ \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-z_0)^m f(z)\right] \right\}$

$$\begin{aligned}
e^z &= 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots \frac{z^n}{n!} + \ldots && ;\ |z| < \infty \\
\operatorname{sen} z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots && ;\ |z| < \infty \\
\cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots && ;\ |z| < \infty
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{z-a} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n} & \text{para } |z-z_0| > |a-z_0| \\ \displaystyle -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(a-z_0)^{n+1}} & \text{para } |z-z_0| < |a-z_0| \end{cases}$$

Integración compleja

Teorema de la integral de Cauchy: $\oint_C f(z)\,dz = 0$ si $\exists f'(z)$ dentro y sobre C.

Fórmula de la integral de Cauchy: $\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = f^{(n)}(z_0)\frac{2\pi j}{n!}$

Teorema del residuo: $\oint_C f(z)\,dz = 2\pi j \sum_{i=1}^{n} a_{-1}^{(i)}$

Evaluación de integrales reales

- Caso 1: Integrales impropias

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \oint_C f(z)\,dz \Leftrightarrow \lim_{z\to\infty} z f(z) = 0, \qquad C: \text{trayectoria de integración semicircular}$$

- Caso 2: Integrales de funciones reales trigonométricas

$$\int_0^{2\pi} G(\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)\,d\theta = \oint_C f(z)\,dz \qquad \text{con } z = e^{j\theta}, d\theta = \frac{dz}{jz}$$

$C:$ es el círculo unitario $|z| = 1$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2j}\left(z - \frac{1}{z}\right), \quad \cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

Series de Fourier

Producto interno: $\langle u_k(t), x(t)\rangle = \int_a^b {u_k}^*(t)x(t)\,dt$

Norma: $||x(t)||^2 = \langle x(t), x(t)\rangle$

$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k u_k(t)$ con $\{u_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ una base funcional ortogonal, $c_k \in \mathbb{C}$.

Generalizada: $c_k = \dfrac{\langle u_k(t), x(t)\rangle}{\|u_k(t)\|^2}$

Fourier exponencial compleja (para funciones periódicas de periodo T_p).

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 kt} \qquad c_k = \frac{1}{T_p}\int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{-j\omega_0 kt}x(t)\,dt$$

Fourier cosenoidales desfasadas

$$x(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{c}_k \cos(\omega_0 kt + \theta_k) \qquad \tilde{c}_k = 2|c_k|,\ \theta_k = \angle c_k,\ k > 0$$

Fourier trigonométrica

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\omega_0 kt) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{sen}(\omega_0 kt)\\
c_k &= \frac{a_k - jb_k}{2}, \qquad a_k = 2\operatorname{Re}\{c_k\}, b_k = -2\operatorname{Im}\{c_k\}\\
a_k &= \frac{2}{T_p}\int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t)\cos(\omega_0 kt)\,dt = 2|c_k|\cos(\theta_k)\\
b_k &= \frac{2}{T_p}\int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t)\operatorname{sen}(\omega_0 kt)\,dt = -2|c_k|\operatorname{sen}(\theta_k)
\end{aligned}$$

Propiedades de la Serie de Fourier (periodo T_p, $\omega_0 = 2\pi/T_p$)

Propiedad	Señal en el tiempo	Coeficientes
	$x(t)$	c_k
	$x_1(t)$	c_{1_k}
	$x_2(t)$	c_{2_k}
Linealidad	$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$	$\alpha_1 c_{1_k} + \alpha_2 c_{2_k}$
Simetría par	$x(t) = x(-t)$	$c_k = \dfrac{2}{T_p}\displaystyle\int_0^{\frac{T_p}{2}} x(t)\cos(\omega_0 k t)\, dt$
		$c_k \in \mathbb{R}$
Simetría impar	$x(t) = -x(-t)$	$c_k = -\dfrac{2j}{T_p}\displaystyle\int_0^{\frac{T_p}{2}} x(t)\,\mathrm{sen}(\omega_0 k t)\, dt$
		$c_k \in j\mathbb{R}$
Función real	$x(t) \in \mathbb{R}$	$c_k = {c^*}_{-k}$
Desplazamiento temporal	$x(t-\tau)$	$e^{-j\omega_0 k \tau} c_k$
Conjugación	$x^*(t)$	${c^*}_{-k}$
Inversión en el tiempo	$x(-t)$	c_{-k}
Escalamiento en el tiempo	$x(\alpha t)$, $\alpha > 0$	c_k
Convolución periódica	$\displaystyle\int_{T_p} x_1(\tau) x_2(t-\tau)\, d\tau$	$T_p c_{1_k} c_{2_k}$
Multiplicación	$x_1(t) x_2(t)$	$\displaystyle\sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{1_l} c_{2_{k-l}}$
Diferenciación	$\dfrac{dx(t)}{dt}$	$jk\omega_0 c_k$
Integración	$\displaystyle\int_{-\infty}^{t} x(t)\, dt$, $c_0 = 0$	$\dfrac{c_k}{jk\omega_0}$
Relación de Parseval	$\dfrac{1}{T_p}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T_p} \lvert x(t)\rvert^2\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lvert c_k \rvert^2$	

Transformada de Fourier

Transformada directa: $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt$

Transformada inversa: $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$

Algunas Transformadas de Fourier

Nombre	Señal en el tiempo	Transformada
Transformación	$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$	$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt$
Impulso unitario	$\delta(t)$	1
Escalon unitario	$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
Impulso rectangular	$\frac{1}{\tau}[u(t-t_0) - u(t-t_0-\tau)]$	$e^{-j\omega\left(t_0+\frac{\tau}{2}\right)}\,\mathrm{sa}(\omega\tau/2)$
Exponencial	$e^{-at}u(t)$, $\mathrm{Re}\{a\} > 0$	$\frac{1}{a+j\omega}$
Exponencial por rampa	$e^{-at}tu(t)$, $\mathrm{Re}\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a+j\omega)^2}$
Laplaciana	$e^{-a\lvert t\rvert}$, $\mathrm{Re}\{a\} > 0$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$
Exponencial compleja	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
Constante	c	$2\pi c\delta(\omega)$
Función periódica*	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi c_k\delta(\omega-k\omega_0)$ $c_k = \frac{1}{T}X_T(j\omega_0 k)$; $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$
Función muestreada	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\delta(t-kT)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j\omega - jk\omega_0)$; $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$
Impulso gaussiano	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^2}$	$e^{-\frac{1}{2}(\omega\sigma)^2}$
Seno	$\mathrm{sen}(\omega_0 t)$	$\frac{\pi}{j}\left[\delta(\omega-\omega_0) - \delta(\omega+\omega_0)\right]$
Coseno	$\cos(\omega_0 t)$	$\pi\left[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)\right]$

* Para la función periódica $x(t)$ se asume que $X_T(j\omega)$ es la transformada de Fourier de un único periodo de $x(t)$.

Propiedades de la Transformada de Fourier

Propiedad	Señal en el tiempo	Transformada
	$x(t)$	$X(j\omega)$
	$x_1(t)$	$X_1(j\omega)$
	$x_2(t)$	$X_2(j\omega)$
Linealidad	$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$	$\alpha_1 X_1(j\omega) + \alpha_2 X_2(j\omega)$
Simetría par	$x(t) = x(-t)$	$2\int_0^\infty x(t)\cos(\omega t)\,dt$ $X(j\omega) \in \mathbb{R}$
Simetría impar	$x(t) = -x(-t)$	$-2j\int_0^\infty x(t)\,\mathrm{sen}(\omega t)\,dt$ $X(j\omega) \in j\mathbb{R}$
Función real	$x(t) \in \mathbb{R}$	$X(j\omega) = X^*(-j\omega)$
Dualidad	$X(jt)$	$2\pi x(-\omega)$
Desplazamiento temporal	$x(t-\tau)$	$e^{-j\omega\tau}X(j\omega)$
Desplazamiento en frecuencia	$e^{j\omega_0 t}x(t)$	$X(j\omega - j\omega_0)$
Modulación	$\cos(\omega_0 t)x(t)$	$\frac{1}{2}X(j\omega - j\omega_0) + \frac{1}{2}X(j\omega + j\omega_0)$
Conjugación	$x^*(t)$	$X^*(-j\omega)$
Inversión en el tiempo	$x(-t)$	$X(-j\omega)$
Escalamiento en el tiempo	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$
Convolución	$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)\,d\tau$	$X_1(j\omega)X_2(j\omega)$
Multiplicación	$x_1(t)x_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}X_1(j\omega) * X_2(j\omega)$
Diferenciación	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j\omega X(j\omega)$
	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$(j\omega)^n X(j\omega)$
	$tx(t)$	$j\frac{d}{d\omega}X(j\omega)$
Integración	$\int_{-\infty}^{t} x(t)\,dt$	$\frac{1}{j\omega}X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$
Relación de Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert x(t)\rvert^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lvert X(j\omega)\rvert^2\,d\omega$	

Transformada de Laplace

Bilateral: $X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt$ Inversa: $x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}\,ds$

Propiedades de la Transformada Bilateral de Laplace

Propiedad	Señal en el tiempo	Transformada	ROC
	$x(t)$	$X(s)$	R
	$x_1(t)$	$X_1(s)$	R_1
	$x_2(t)$	$X_2(s)$	R_2
Linealidad	$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$	$\alpha_1 X_1(s) + \alpha_2 X_2(s)$	$\geq R_1 \cap R_2$
Función real	$x(t) \in \mathbb{R}$	$X(s) = X^*(s^*)$	R
Desplazamiento temporal	$x(t-\tau)$	$e^{-s\tau}X(s)$	R
Desplazamiento en s	$e^{s_0 t}x(t)$	$X(s-s_0)$	$R + s_0$
Conjugación	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	R
Inversión en el tiempo	$x(-t)$	$X(-s)$	$-R$
Escalamiento en el tiempo	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{s}{a}\right)$	R/a
Convolución	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$	$\geq R_1 \cap R_2$
Diferenciación	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s)$	$\geq R$
	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$s^n X(s)$	$\geq R$
	$-tx(t)$	$\frac{d}{ds}X(s)$	R
Integración	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{s}X(s)$	$\geq R \cap \{\sigma > 0\}$

Transformadas Bilaterales de Laplace de funciones elementales

Señal	Transformada	ROC	Señal	Transformada	ROC
$\delta(t)$	1	todo s	$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\sigma > 0$
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\sigma < 0$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\sigma > 0$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(-t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\sigma < 0$	$e^{at}u(t)$	$\frac{1}{s-a}$	$\sigma > a$
$-e^{at}u(-t)$	$\frac{1}{s-a}$	$\sigma < a$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}u(t)$	$\frac{1}{(s-a)^n}$	$\sigma > a$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}u(-t)$	$\frac{1}{(s-a)^n}$	$\sigma < a$	$\delta(t-\tau)$	$e^{-s\tau}$	todo s
$[\cos(\omega_0 t)]u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\sigma > 0$	$[\mathrm{sen}(\omega_0 t)]u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\sigma > 0$
$[e^{at}\cos(\omega_0 t)]u(t)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega_0^2}$	$\sigma > a$	$[e^{at}\,\mathrm{sen}(\omega_0 t)]u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s-a)^2+\omega_0^2}$	$\sigma > a$
$\frac{d^n}{dt^n}\delta(t)$	s^n	todo s			

Transformada Unilateral de Laplace: $X(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt$

Propiedades de la Transformada Unilateral de Laplace

Propiedad	Señal en el tiempo	Transformada	ROC
	$x(t) = x(t)u(t)$	$X(s)$	R
	$x_1(t) = x_1(t)u(t)$	$X_1(s)$	R_1
	$x_2(t) = x_2(t)u(t)$	$X_2(s)$	R_2
Linealidad	$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$	$\alpha_1 X_1(s) + \alpha_2 X_2(s)$	$\geq R_1 \cap R_2$
Función real	$x(t) \in \mathbb{R}$	$X(s) = X^*(s^*)$	R
Desplazamiento temporal	$x(t-\tau), \tau > 0$	$e^{-s\tau}X(s)$	R
Desplazamiento en s	$e^{s_0 t}x(t)$	$X(s-s_0)$	$R + s_0$
Conjugación	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	R
Escalamiento en el tiempo	$x(at), a > 0$	$\frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right)$	R/a
Convolución	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$	$\geq R_1 \cap R_2$
Diferenciación	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s) - x(0^-)$	$\geq R$
Diferenciación múltiple	$\frac{d^n}{dt^n}x(t)$	$s^n X(s)$	
		$-\sum_{i=1}^{n} s^{n-i}x^{(i-1)}(0^-)$	
Diferenciación en s	$-tx(t)$	$\frac{d}{ds}X(s)$	R
Integración	$\int_{0^-}^{t} x(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{s}X(s)$	$\geq R \cap \{\sigma > 0\}$
Teorema de valor inicial	$x(0^+)$	$\lim_{s\to\infty} sX(s)$	
Teorema de valor final	$\lim_{t\to\infty} x(t)$	$\lim_{s\to 0} sX(s)$	

Transformadas Unilaterales de Laplace de funciones elementales

Señal	Transformada	ROC	Señal	Transformada	ROC
$\delta(t)$	1	todo s	1	$\frac{1}{s}$	$\sigma > 0$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n}$	$\sigma > 0$	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\sigma > a$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}$	$\frac{1}{(s-a)^n}$	$\sigma > a$	$\delta(t-\tau), \tau > 0$	$e^{-s\tau}$	todo s
$\cos(\omega_0 t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\sigma > 0$	$\operatorname{sen}(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\sigma > 0$
$e^{at}\cos(\omega_0 t)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega_0^2}$	$\sigma > a$	$e^{at}\operatorname{sen}(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{(s-a)^2+\omega_0^2}$	$\sigma > a$
$\frac{d^n}{dt^n}\delta(t)$	s^n	todo s			

Transformada z

Propiedades de la transformada z bilateral.

Propiedad	Dominio n	Dominio z	ROC
Notación	$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}$	$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$	$R = \{z \mid r_2 < \lvert z\rvert < r_1\}$
	$x_1[n]$	$X_1(z)$	R_1
	$x_2[n]$	$X_2(z)$	R_2
Linealidad	$a_1x_1[n] + a_2x_2[n]$	$a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$	por lo menos $R_1 \cap R_2$
Desplazamiento en n	$x[n-k]$	$z^{-k}X(z)$	$R\setminus\{0\}$ si $k > 0$ y $R\setminus\{\infty\}$ si $k < 0$
Escalado en z	$\alpha^n x[n]$	$X(\alpha^{-1}z)$	$\lvert\alpha\rvert r_2 < \lvert z\rvert < \lvert\alpha\rvert r_1$
Reflexión en n	$x[-n]$	$X(z^{-1})$	$\frac{1}{r_1} < \lvert z\rvert < \frac{1}{r_2}$
Conjugación	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R
Parte real	$\mathrm{Re}\{x[n]\}$	$\frac{1}{2}[X(z) + X^*(z^*)]$	Incluye R
Parte imaginaria	$\mathrm{Im}\{x[n]\}$	$\frac{1}{2}[X(z) - X^*(z^*)]$	Incluye R
Derivación en z	$nx[n]$	$-z\frac{dX(z)}{dz}$	$r_2 < \lvert z\rvert < r_1$
Convolución	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	Por lo menos $R_1 \cap R_2$
Teorema del valor inicial	Si $x[n]$ es causal	$x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z)$	

Propiedades de la transformada z unilateral.

Notación	$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}$	$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$	$R = \{z \mid \lvert z\rvert > r_2\}$
Retardo temporal	$x[n-k], k > 0$	$z^{-k}X(z) + \sum_{n=1}^{k} x[-n]z^{n-k}$	$R \setminus \{0\}$
Adelanto temporal	$x[n+k], k > 0$	$z^{k}X(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x[n]z^{k-n}$	R
Teorema del valor final		$\lim_{n\to\infty} x[n] = \lim_{z\to1}(z-1)X(z)$	

Transformada z bilateral de algunas funciones comunes

Señal $x[n]$	Transformada z, $X(z)$	ROC
$\delta[n]$	1	Plano z
$u[n]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$a^n u[n]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$na^n u[n]$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$-(a^n)u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$-n(a^n)u[-n-1]$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$\cos(\omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{1-z^{-1}\cos\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\operatorname{sen}(\omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{z^{-1}\operatorname{sen}\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$a^n\cos(\omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{1-az^{-1}\cos\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0+a^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > a$
$a^n\operatorname{sen}(\omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{az^{-1}\operatorname{sen}\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0+a^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > a$

Transformada z unilateral de algunas funciones comunes

Señal $x[n]$	Transformada z, $X(z)$	ROC
$\delta[n]$	1	Plano z
1	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
a^n	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
na^n	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$\cos(\omega_0 n)$	$\dfrac{1-z^{-1}\cos\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\operatorname{sen}(\omega_0 n)$	$\dfrac{z^{-1}\operatorname{sen}\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$a^n\cos(\omega_0 n)$	$\dfrac{1-az^{-1}\cos\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0+a^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$a^n\operatorname{sen}(\omega_0 n)$	$\dfrac{az^{-1}\operatorname{sen}\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0+a^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$