Wendy Gómez Ramírez
2017109745

Guía de estudio semana 10

Transformada de Laplace

1. A partir de la transformada de Fourier deduzca la transformada de Laplace.

$$g(t) = e^{-\sigma t} f(t)$$

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \cdot e^{-\sigma t} f(t)\, dt$$

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sigma + j\omega)t} f(t)\, dt$$

$$s = \sigma + j\omega$$

$$\boxed{F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt}$$

2. A partir de la transformada inversa de Fourier deduzca la transformada inversa de Laplace.

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} G(j\omega)\, d\omega$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} F(\sigma + j\omega)\, d\omega$$

$$g(t) = e^{-\sigma t} f(t)$$

$$e^{-\sigma t} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} F(\sigma + j\omega)\, d\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t}}{e^{-\sigma t}} F(\sigma + j\omega)\, d\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(\sigma+j\omega)} F(\sigma + j\omega)\, d\omega$$

$$s = \sigma + j\omega$$
$$ds = j\, d\omega$$

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} e^{st} F(s)\, ds}$$

El σ_0 se incluye para garantizar la convergencia de la integral impropia.

3. Explique ¿Qué es la transformada bilateral de Laplace? Y que es lo que marca la diferencia respecto de la transformada de Fourier.

La transformada bilateral de Laplace expresa la función f(t) como una suma de un número infinito de términos infinitesimalmente pequeños cuya frecuencia compleja es $s = \sigma + j\omega$. σ gobierna el factor de convergencia de $e^{-\sigma t}$. Al incluir el $e^{-\sigma t}$ valores positivos de σ, garantiza que $e^{-\sigma t} f(t)u(t)$ es absolutamente integrable para casi cualquier f(t). Los valores negativos de σ se necesitan para todo t menor que cero. La transformada bilateral de Laplace existe para un número mayor de funciones que la transformada de Fourier. En una transformada de Laplace, si $\sigma = 0$ se obtiene la transformada de Fourier.

Si la transformada de Laplace no tiene ningún t<0, se convierte en una transformada unilateral de Laplace.

4. ¿Cuál es la ecuación que describe la transformada unilateral de Laplace?

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t) u(t)\, dt$$

$$\boxed{F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t) u(t)\, dt}$$

Transformada inversa:

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} e^{st} F(s)\, ds}$$

5. Analice $\mathrm{x(t)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{at}}\mathrm{u(t)}$ aplicando al transformada de Fourier y la transformada de Laplace y compare los resultados. Qué relación existe entre la transformada de Fourier y la transformada de Laplace.

Aplicando la transformada de Fourier:

$$X(\sigma + j\omega) = \int_0^{\infty} (e^{-\sigma t} \cdot e^{-at}) e^{-j\omega t}\, dt \quad ; \; X_S(t) = e^{-\sigma t} x(t)$$

$$X(\sigma + j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-(\sigma + j\omega)t} \cdot e^{-at}\, dt = \int_0^{\infty} e^{-(s)t} \cdot e^{-at} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t}\, dt$$

$$X(\sigma + j\omega) = \left. \frac{e^{-(s+a)t}}{-(s+a)} \right|_0^{\infty} = \frac{e^{-\infty}}{-(s+a)} - \frac{e^{0}}{-(s+a)} = \frac{0}{-(s+a)} + \frac{1}{s+a}$$

$$\sigma + a > 0$$
$$\sigma > -a$$

$$\boxed{X(s) = \frac{1}{s+a} \;\; para\; \sigma > -a}$$

Aplicando la transformada de Laplace:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} \mathrm{e}^{-\mathrm{at}} \mathrm{u(t)}\;\, dt = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot e^{-at} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t}\, dt$$

$$X(s) = \frac{e^{-(s+a)t}}{-(s+a)}\bigg|_0^\infty = \frac{e^{-\infty}}{-(s+a)} - \frac{e^0}{-(s+a)} = \frac{0}{-(s+a)} + \frac{1}{s+a}$$

$$\boxed{X(s) = \frac{1}{s+a} \;\; para\; \sigma > -a}$$

Ya sea si se aplica la transformada de Fourier o la de Laplace, se obtiene el mismo resultado. En una transformada de Laplace, si $\sigma = 0$ se obtiene la transformada de Fourier.

6. Ahora analice $\mathrm{x(t) = -e^{-at}u(t)}$. Que sucede en este caso para ambas transformadas. (Analice la región de convergencia)

Aplicando la transformada de Fourier:

$$X(\sigma + j\omega) = \int_0^\infty -(e^{-\sigma t} \cdot e^{-at})e^{-j\omega t}\, dt \quad ; \;\; X_S(t) = e^{-\sigma t}x(t)$$

$$X(\sigma + j\omega) = \int_0^\infty -e^{-(\sigma+j\omega)t} \cdot e^{-at}\, dt = -\int_0^\infty e^{-(s)t} \cdot e^{-at} dt = -\int_0^\infty e^{-(s+a)t}\, dt$$

$$X(\sigma + j\omega) = \frac{e^{-(s+a)t}}{(s+a)}\bigg|_0^\infty = \frac{e^{-\infty}}{(s+a)} - \frac{e^0}{(s+a)} = \frac{0}{(s+a)} - \frac{1}{s+a}$$

$$\sigma + a > 0$$
$$\sigma > -a$$

$$\boxed{X(s) = \frac{-1}{s+a} \;\; para\; \sigma > -a}$$

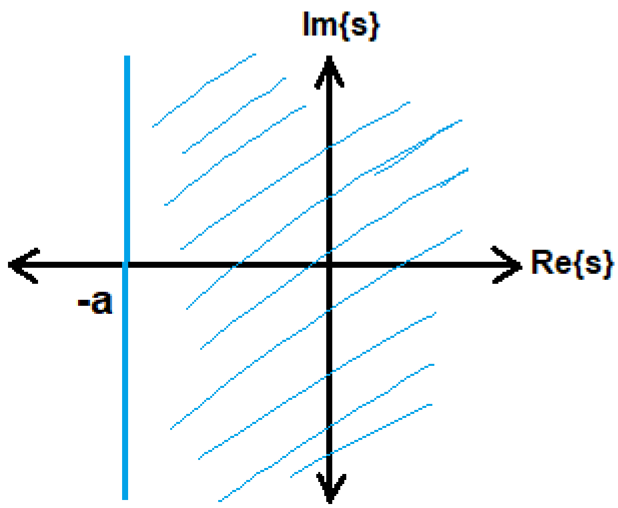
Aplicando la transformada de Laplace:

$$X(s) = \int_{-\infty}^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^\infty -e^{-st}\mathrm{e^{-at}u(t)}\;\, dt = -\int_0^\infty e^{-st} \cdot e^{-at} dt = -\int_0^\infty e^{-(s+a)t}\, dt$$

$$X(s) = \left.\frac{e^{-(s+a)t}}{(s+a)}\right|_0^{\infty} = \frac{e^{-\infty}}{(s+a)} - \frac{e^{0}}{(s+a)} = \frac{0}{(s+a)} - \frac{1}{s+a}$$

$$\boxed{X(s) = \frac{-1}{s+a} \quad para\ \sigma > -a}$$

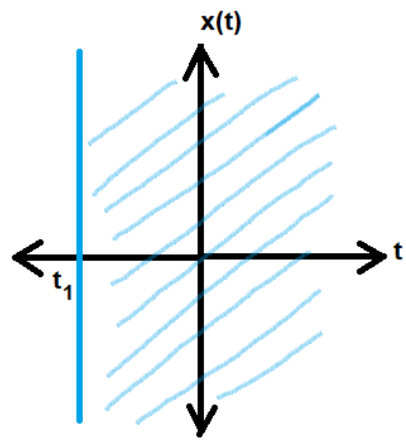


7. ¿Qué es la región de convergencia (ROC)?

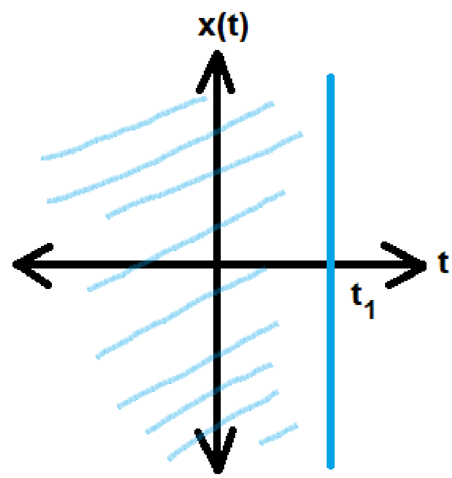
La ROC de una función X(s) consiste en bandas paralelas al eje jω. Para transformadas racionales de Laplace la ROC no contiene ningún polo, esto debido a que la transformada no converge en los polos. Si x(t) es de duración finita y es completamente integrable, la ROC es el plano S.

8. ¿Cuáles son las restricciones específicas para las señales más típicas?

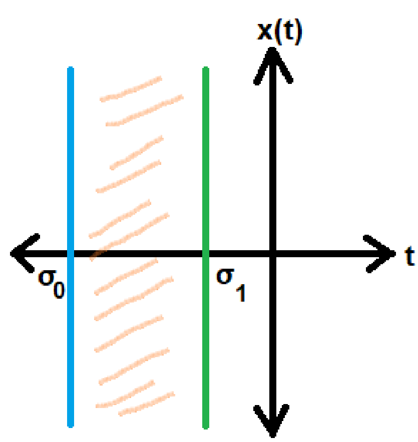
- Si x(t) está en el miembro derecho, es decir, x(t) está antes de t_1. Si la línea $\mathrm{Re}\{S\} = \sigma_0$ está en la ROC, entonces se cumple que todos los valores de $\mathrm{Re}\{S\} > \sigma_0$ están en la ROC.



- Si x(t) es izquierda y $\mathrm{Re}\{S\} = \sigma_0$ está en la ROC, entonces todos los valores de $\mathrm{Re}\{S\} < \sigma_0$ están en la ROC.



- Si se tiene una parte derecha y otra izquierda, la franja común es la Roc.



- Si la transformada de Laplace de x(t) es racional, entonces está limitado por los polos y se extiende hasta infinito y ningún polo está en la ROC.

9. ¿Cómo se puede determinar la transformada inversa de Laplace?

Se utiliza la descomposición en fracciones parciales para poder calcular la transformada inversa de cada una de las partes.

Por ROC, se puede inferir la ROC de cada uno de los términos. Hay dos opciones:

- Roc derecha: $u(t)$
- Roc izquierda:$-f(t)u(-t)$

10. Encuentre la transformada inversa de Laplace para:

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

a. $R\{s\} > -1$

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$

$$A = \lim_{s \to -1} (s+1) \cdot X(s) = 1$$

$$B = \lim_{s \to -2} (s+2) \cdot X(s) = -1$$

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

$$\frac{1}{s+1} \to \sigma > -1$$

$$\frac{1}{s+2} \to \sigma > -2$$

Por formulario:

$$\frac{1}{s-a} \circ\!\!-\!\!-\!\!\bullet\, e^{at}u(t) \;\; para \;\; \sigma > a$$

$$x(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

$$\boxed{X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \circ\!\!-\!\!-\!\!\bullet\; x(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t) \;\; para \;\; R\{s\} > -1}$$

b. $R\{s\} < -2$

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

Para que se cumpla la ROC:

$$\frac{1}{s+1} \rightarrow \sigma < -1$$

$$\frac{1}{s+2} \rightarrow \sigma < -2$$

Por formulario:

$$\frac{1}{s-a} \circ\!\!-\!\!-\!\!\bullet -e^{at}u(-t) \;\; para \;\; \sigma < a$$

$$x(t) = (-e^{-t} + e^{-2t})u(-t)$$

$$\boxed{X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \circ\!\!-\!\!-\!\!\bullet\; x(t) = (-e^{-t} + e^{-2t})u(t) \;\; para \;\; R\{s\} < -2}$$

c. $-2 < R\{s\} < -1$

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

Para que se cumpla la ROC:

$$\frac{1}{s+1} \rightarrow \sigma < -1$$

$$\frac{1}{s+2} \rightarrow \sigma > -2$$

Por formulario:

$$\frac{1}{s-a} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet -e^{at}u(-t) \;\; para \;\; \sigma < a$$

$$\frac{1}{s-a} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet e^{at}u(t) \;\; para \;\; \sigma > a$$

$$x(t) = \left(-e^{-t}u(-t) - e^{-2t}u(t)\right)$$

$$\boxed{X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet x(t) = \left(-e^{-t}u(-t) - e^{-2t}u(t)\right) \;\; para \;\; -2 < R\{s\} < -1}$$