Wendy Gómez Ramírez
2017109745

Guía de estudio semana 10

Transformada de Fourier

1. Matemáticamente, ¿qué es una transformada?

Una transformada es toda función que mapea un conjunto X en otro conjunto o sobre sí mismo.

Para la transformada de Fourier, es una integral que se utiliza para transformar una función del dominio del tiempo a una función en el dominio de la frecuencia.

2. Considere una función aperiódica $f(t)$, y una función periódica $f_T(t)$ en la cual se repite $f(t)$ cada T segundos y la serie de Fourier de $f_T(t)$ cuando $T \to \infty$, para deducir la Integral de Fourier.

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \quad ; \quad con\ \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

$$\omega_n = n\omega_0$$

$$F(\omega_n) = TF_n \qquad \Rightarrow \qquad F_n = \frac{1}{T} F(j\omega)|_{\omega=\omega_0 n}$$

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} F(\omega_n) e^{jn\omega\, t}$$

$$F(\omega_n) = \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-jn\omega\, t} dt$$

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$$

$$F_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n) e^{jn\omega\, t} \frac{\Delta\omega}{2\pi}$$

Por definición de una integral ordinaria de Riemann:

$$\lim_{T\to\infty} f_T(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n) e^{jn\omega\, t} \Delta\omega$$

La integral de la transformada de Fourier es:

$$\boxed{F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega\, t}\, dt}$$

3. Defina la transformada de Fourier y la transformada inversa de Fourier.

La transformada de Fourier es un cambio de variable de tiempo a frecuencia

Se calcula como:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega\, t}\, dt$$

Se puede expresar como:

$$\mathcal{F}\{f(t)\}$$

$$f(t) \circ\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\bullet F(j\omega)$$

La transformada inversa de Fourier es un cambio de variable en la frecuencia al tiempo.

Se calcula como:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega\, t}\, d\omega$$

Se expresa como:

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\}$$

$$F(j\omega) \;\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\circ\; f(t)$$

4. ¿Cómo se pueden expresar los coeficientes de la serie de Fourier en términos de la Transformada de Fourier?

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j\omega_0 kt}$$

$$\Delta\omega = \omega_0 = 2\pi|T_P$$

$$C_k = \frac{1}{T_p}\int_{\frac{-T_p}{2}}^{\frac{T_p}{2}} x(t)e^{-j\omega_0 kt}dt = \frac{1}{T_p}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega_0 kt}dt$$

Si se define $X(j\omega)$ como una función envolvente de los coeficientes $T_p C_k$, que se expresa por

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

Entonces los puntos c_k pueden verse como muestras cada $\omega_0 k$ de dicha función:

$$\boxed{c_k = \frac{1}{T_p} \cdot X(jk\omega_0)}$$

5. Compare los espectros de frecuencia de una señal periódica y una señal aperiódica.

En las series de Fourier, definidas para señales periódicas, las componentes espectrales existen solo para frecuencias discretas relacionadas armónicamente $k\omega_0$. Ahora con la Transformada de Fourier se obtiene un espectro continuo para una señal aperiódica en el dominio de la frecuencia. La relación

$$c_k = \frac{1}{T_p} \cdot X(jk\omega_0)$$

indica entonces que si la función no periódica x(t) es finita y se utiliza para construir una señal periódica $\tilde{x}(t)$ de periodo T_p, donde no hay traslapes, entonces los coeficientes de la serie de Fourier para $\tilde{x}(t)$ son proporcionales a muestras tomadas de la transformada de Fourier $\mathscr{F}\{x(t)\}$ a las frecuencias $k\omega_0$.

6. Indique las condiciones de convergencia de la Transformada de Fourier.

Condiciones de Dirichlet:

- f(t) tiene un número finito de máximos y mínimos en cualquier intervalo de tiempo finito.
- f(t) tiene solo un número finito de discontinuidades finitas en cualquier intervalo de tiempo finito.
- f(t) es absolutamente integrable, es decir, $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt < \infty$

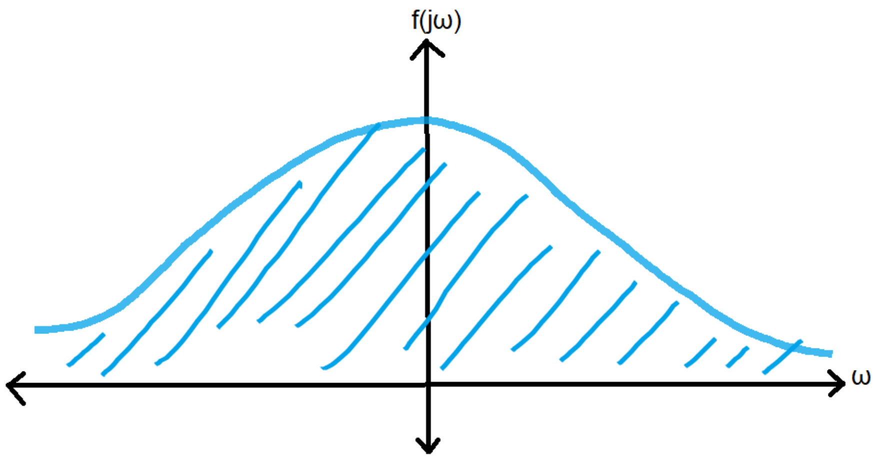
Estas condiciones son suficientes, pero no necesarias; es decir, si se cumplen, la transformada de Fourier converge; si no se cumplen, la transformada de Fourier puede que converge o puede que no.

7. ¿A qué se le denomina función de densidad espectral?

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\; e^{j\omega\, t}\, d\omega$$

Función de densidad espectral

Representa f(t) como una sumatoria continua de funciones exponenciales cuyas frecuencias están en el intervalo de $-\infty$ hasta ∞.



La curva representa la función en el dominio del tiempo. Cada punto de jω indica el peso relativo de cada componente de frecuencia. Si se integra en un intervalo, se obtiene el impacto de la onda de frecuencias en un intervalo en específico.

Una función de energía finita puede ser descrita por una función de densidad espectral continua que se obtiene tomando la transformada de Fourier de dicha señal.

8. Defina la propiedad de escala de una función impulso unitario.

$$\delta(at) = \frac{1}{a}\delta(t)$$

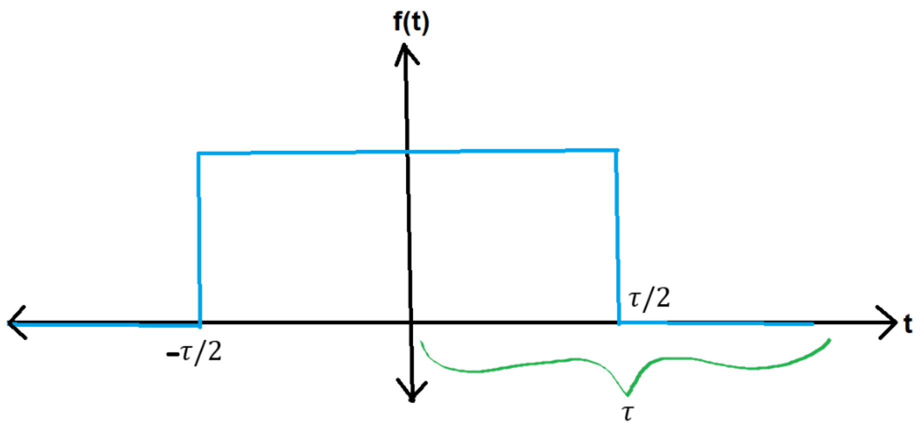
Para $\delta(f)$ donde $\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi}$

$$\delta\left(\frac{w}{2\pi}\right) = 2\pi\delta(\omega)$$

Esto es un escalamiento de 2π utilizando un delta Dirac.

9. Encontrar la función de densidad espectral de un pulso cuadrado de amplitud V, ancho τ y centrada en el origen, es decir:

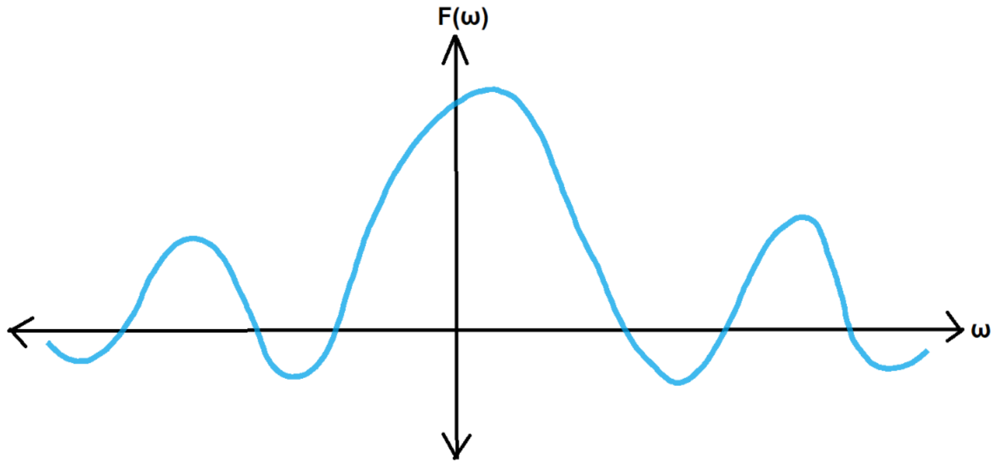
$$f(t) = V\,rec\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} V & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0 & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$



$$F(\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V \cdot e^{-j\omega t}\tau = \left.\frac{ve^{-j\omega t}}{j\omega}\right|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = V\left(\frac{e^{-\frac{j\omega\tau}{2}} - e^{-\frac{j\omega\tau}{2}}}{-j\omega}\right)$$

$$F(\omega) = V\left(\frac{e^{-\frac{j\omega\tau}{2}} - e^{-\frac{j\omega\tau}{2}}}{2j}\right) \cdot \frac{2}{\omega} \cdot \frac{\tau/2}{\tau/2} = \frac{V\,\mathrm{sen}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\omega\,{}^{\tau}/_{2}} \cdot \tau$$

$$\boxed{F(\omega) = V\tau sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}$$



10. Determine los coeficientes de la serie de Fourier exponencial si la función dada en el inciso (9) se repite cada 4 segundos.

$$c_k = \frac{1}{T_p} \cdot X(jk\omega_0)$$

$$T_p = 4s$$

$$F(\omega) = V\tau sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$F(k\omega_0) = V\tau sa\left(\frac{k\omega_0\tau}{2}\right)$$

$$\omega_0 = 2\pi T_p = 2\pi(4) = 8\pi$$

$$F(k\omega_0) = V\tau sa\left(\frac{8\pi k\tau}{2}\right) = V\tau sa(4\pi k\tau)$$

$$\Rightarrow c_k = \frac{1}{4} \cdot V\tau sa(4\pi k\tau)$$

$$\boxed{c_k = \frac{1}{4} \cdot V\tau sa(4\pi k\tau)}$$

11. Determine el Teorema de Parseval para señales de energía.

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(t) \, dt$$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(j\omega) e^{-j\omega t} d\omega \right] dt$$

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(j\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} \, dt \right] d\omega$$

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(j\omega) F(j\omega) \, d\omega$$

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\omega)|^2 \, d\omega$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\omega)|^2 \, d\omega}$$

12. Encuentre la Transformada de Fourier de una señal de tensión eléctrica dada por $f(t) = e^{-at} u(t) \; \forall \; a > 0$. A partir de la respuesta encontrada determine la energía suministrada por esa señal a una resistencia de 1Ω.

$$F(j\omega) = \int_{0}^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt$$

$$F(j\omega) = \int_{0}^{\infty} e^{-at - j\omega t} dt = \int_{0}^{\infty} e^{-t(a + j\omega)} dt$$

$$\boxed{F(j\omega) = \frac{a - j\omega}{a^2 + \omega^2}}$$

$$E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 \, d\omega$$

$$|F(j\omega)| = \frac{1}{a^2 + \omega^2}\left[\sqrt{a^2+\omega^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$$

$$E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}\right)^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{a^2 + \omega^2}\, d\omega$$

$$E = \frac{1}{2\pi a}\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2\pi a}[\tan^{-1}(\infty) - \tan^{-1}(-\infty)]$$

$$E = \frac{1}{2\pi a}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{2\pi a}$$

$$\boxed{E = \frac{1}{2a}}$$