Examen II: Modelos de Sistemas para Mecatrónica

Wendy Gómez Ramírez
2017109745

Pregunta 1

1) $x(t)$ es real

2) $x(t) = 0$ para $t \leq 0$

3) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Re\{X(j\omega)\} e^{j\omega t} d\omega = |t| e^{-|t|}$

Por formulario, Si $x(t)$ es real:

$$X(j\omega) = X^{*}(-j\omega)$$

Cualquier señal se puede separar en la suma de dos señales; una par y una impar. Por formulario:

$$Ev\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]$$

Esta expresión corresponde a la parte par de la señal.

Como la señal $x(t)$ del ejercicio es real, esto implica que:

$$Ev\{x(t)\} = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$$

Como esto corresponde a la parte real de la señal, la transformada va a ser la parte real de la señal $X(j\omega)$, es decir:

$$\frac{x(t) + x(-t)}{2} \longleftrightarrow Re\{X(j\omega)\}$$

Por el formulario:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

Esta es la formula de la transformada inversa, que implica que la transformada inversa de $X(j\omega)$ es $x(t)$.

En el punto 3 del enunciado se tiene que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Re\{X(j\omega)\}\, e^{j\omega t}\, d\omega = |t|\, e^{-|t|}$$

Esto quiere decir que la transformada inversa de $Re\{X(j\omega)\}$ es $|t|\, e^{-|t|}$

Además, según lo analizado anteriormente, tambien se tenía que:

$$\frac{x(t) + x(-t)}{2} \longleftrightarrow Re\{X(j\omega)\}$$

Por lo tanto, igualando las dos soluciones de la transformada inversa:

$$|t|\, e^{-|t|} = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$$

Como se indica en el enunciado que $x(t) = 0$ para $t \leq 0$, esto implica que $x(-t)$ va a ser cero para todos los valores de $t > 0$

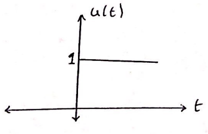
Por lo tanto:

$$|t|\, e^{-|t|} = \frac{x(t) + \cancel{x(-t)}^{\,0}}{2}$$

$$|t|\, e^{-|t|} = \frac{x(t)}{2}$$

$$2|t|\, e^{-|t|} = x(t)$$

Esto también se puede expresar utilizando una función impulso unitario $u(t)$:



Esta función va a provocar que todos los valores menores que cero sean cero, por lo que se puede quitar el valor absoluto y la función quedaría de la forma:

$$x(t) = 2|t|\, e^{-|t|}$$

$$x(t) = 2t\, e^{|t|} u(t)$$

Por lo tanto, la expresión de forma cerrada para $x(t)$ es:

$$\boxed{x(t) = 2t\, e^{|t|} u(t)}$$

Pregunta 2

Esta pregunta no se realiza debido a que se entregaron todas las tutorías.

Pregunta 3

Sistema Causal y estable
Función racional $H(s)$

1) $H(1) = 0{,}2$
2) Entrada: $u(t) \Rightarrow$ Salida: absolutamente integrable.
3) Entrada: $t\,u(t) \Rightarrow$ Salida: no absolutamente integrable
4) $\frac{d^2h(t)}{dt^2} + 2\frac{dh(t)}{dt} + 2h(t) \rightarrow$ duración finita
5) $H(s)$ tiene un cero en el infinito.

Cuando la entrada es: $u(t)$

$$x_1(t) = u(t)$$

Por el formulario:

$$u(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s} \qquad \sigma > 0$$

Por lo tanto, la transformada de la señal $x_1(t)$ es:

$$X_1(s) = \frac{1}{s} \quad \text{para } \sigma > 0$$

$$\sigma = Re\{s\}$$

La función de transferencia del sistema es:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \begin{matrix} \rightarrow \text{Salida} \\ \rightarrow \text{Entrada} \end{matrix}$$

La transformada de Laplace de la salida ($y_1(t)$) para la entrada $x_1(t)$ va a ser:

$$Y_1(s) = H(s)\, X_1(s)$$

Según se indica en el punto 2 del enunciado, la salida es absolutamente integrable para $x_1(t) = u(t)$. Debido a esto, la función de transferencia $H(s)$ debe tener un cero en $s=0$ para que se cancele con el polo de $X_1(s)$ en $s=0$ y de este modo la salida $Y_1(s)$ sea absolutamente integrable.

Para la entrada: $t\,u(t)$

$$x_2(t) = t\,u(t)$$

Por el formulario:

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{s^n}$$

Por lo tanto, la transformada de la señal $x_2(t)$ es:

$$X_2(s) = \frac{1}{s^2} \quad \text{para } \sigma > 0$$

La transformada de Laplace de la salida $y_2(t)$ para la entrada $x_2(t)$ va a ser

$$Y_2(s) = H(s)\, X_2(s)$$

Según se indica en el punto 3 del enunciado, La salida no es absolutamente integrable. Debido a esto, $H(s)$ no puede tener 2 ceros en $s=0$ porque si los tuviera, se cancelarían con los dos polos de $X_2(s)$ en $s=2$ y esto haría a la salida $Y_2(s)$ absolutamente integrable y no lo es.

En el punto 4 del enunciado se observa una señal de duración finita que está dada por:

$$g(t) = \frac{d^2h(t)}{dt^2} + 2\frac{dh(t)}{dt} + 2h(t)$$

Según la propiedad de diferenciación del formulario:

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; s^n X(s)$$

Por lo tanto, aplicando la transformada de Laploce a la señal $q(t)$:

$$q(t) = \frac{d^2h(t)}{dt^2} + 2\frac{dh(t)}{dt} + 2h(t)$$

$$\mathcal{L}\{q(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d^2h(t)}{dt^2} + 2\frac{dh(t)}{dt} + 2h(t)\right\}$$

Por la propiedad de lineolidad

$$Q(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{d^2h(t)}{dt^2}\right\} + 2\,\mathcal{L}\left\{\frac{dh(t)}{dt}\right\} + 2\,\mathcal{L}\{h(t)\}$$

Aplicando la propiedad de diferenciación:

$$Q(s) = s^2H(s) + 2sH(s) + 2H(s)$$

$$Q(s) = (s^2+2s+2)H(s)$$

$$H(s) = \frac{Q(s)}{s^2+2s+2}$$

Como en el enunciado se indica que $q(t)$ es de duración finita, este no va a tener polos en el infinito en el plano S.

Como $H(s)$ es una función racional, una transformada racional de Laplace se puede expresar por el producto de polos y ceros de la forma:

$$X(s) = M\frac{\prod_{i=1}^{R}(s-\beta_i)}{\prod_{j=1}^{R}(s-q_i)}$$

Por lo tanto, $H(s)$ se puede expresar de la forma:

$$H(s) = \frac{M\prod_{i=1}^{N}(s-\beta_i)}{s^2+2s+2}$$

Donde la expresión del numerador representa el producto de los ceros de la señal $Q(s)$, con M como constante.

Por lo que se indica en el punto 5 del enunciado, el denominador de $H(s)$ debe de ser de un grado mayor que el numerador para que se cumpla esta condición. Por lo tanto, solo puede haber un cero de grado 1.

$$H(s) = \frac{M(s-Bi)}{s^2+2s+2}$$

Con el análisis del punto 2 del enunciado, se determinó que H(s) debe tener un cero en $s=0$, por lo tanto:

$$H(s) = \frac{M(s)}{s^2+2s+2}$$

En el punto 1 del enunciado se indica que $H(1)=0,2$. Por lo tanto, evaluando este punto:

$$H(1) = \frac{M(1)}{1^2+2(1)+2} = 0,2$$

$$\frac{M}{1+2+2} = 0,2$$

$$\frac{M}{5} = 0,2$$

$$M = 0,2 \cdot 5$$

$$M = 1$$

Por lo tanto, la función de H(s) va a ser:

$$H(s) = \frac{s}{s^2+2s+2}$$

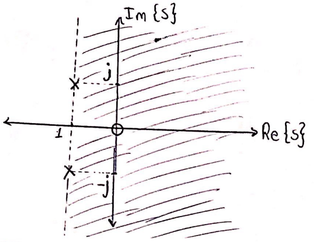
$$s = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2-4(1)(2)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm j2}{2} = -1 \pm j$$

La función H(s) tiene dos polos simples en $s = -1 \pm j$

Se sabe que el sistema es causal y estable. Para que un sistema sea causal, la ROC debe ser derecha. Para que un sistema sea estable, la ROC debe contener el eje imaginario.

Por lo tanto, $H(s)$ y su región de convergencia son:

$$H(s) = \frac{s}{s^2+2s+2} \qquad ROC: \sigma > -1$$



Pregunta 4

$$y(n) - \frac{1}{2} y(n-1) + \frac{1}{4} y(n-2) = x(n)$$

La función del sistema es de la forma

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \begin{array}{l} \rightarrow \text{salida} \\ \rightarrow \text{entrada.} \end{array}$$

Aplicando la propiedad de desplazamiento en n que se observa en el formulario:

$$x(n-k) \circ\!\!-\!\!\bullet \; z^{-k} X(z)$$

$$y(n) - \frac{1}{2} y(n-1) + \frac{1}{4} y(n-2) = x(n)$$

$$\Rightarrow \; Y(z) - \frac{1}{2} z^{-1} Y(z) + \frac{1}{4} z^{-2} Y(z) = X(z)$$

$$Y(z)\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1} + \frac{1}{4} z^{-2}\right) = X(z)$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1} + \frac{1}{4} z^{-2}}$$

Por lo tanto, la función del sistema es:

$$\boxed{H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1} + \frac{1}{4} z^{-2}}}$$

Parte 2

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

Por la tabla de transformadas

$$a^n u(n) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{1 - a z^{-1}} \qquad |z| > |a|$$

$$x(n) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \Rightarrow Y(z) = H(z)\, X(z).$$

$$Y(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1} + \frac{1}{4} z^{-2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}$$

$$Y(z) = \frac{A}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} + \frac{B z^{-1} + C}{1 - \frac{1}{2} z^{-1} + \frac{1}{4} z^{-2}}$$

$$A = \lim_{z \to \frac{1}{2}} \cancel{\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right)} \frac{1}{\cancel{\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right)} \left(1 - \frac{1}{2} z^{-1} + \frac{1}{4} z^{-2}\right)} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}(2) + \frac{1}{4}(2)^2}$$

$$A = \frac{1}{1 - 1 + \frac{1}{4} \cdot 4} = 1$$

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1} + \frac{1}{4} z^{-2}\right)} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right)} = \frac{A}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} + \frac{B z^{-1} + C}{1 - \frac{1}{2} z^{-1} + \frac{1}{4} z^{-2}}$$

$$1 = A\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1} + \frac{1}{4} z^{-2}\right) + B z^{-1}\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right) + C\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right)$$

→ Si z^{-1} tiende a cero:

$$1 = A + C$$

$$1 = 1 + C$$

$$0 = C$$

$\Rightarrow$ Si z^{-1} tiende a i:

$$1 = A\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + B(1)\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \cancel{C}^{\nearrow 0}$$

$$1 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{B}{2}$$

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{B}{2}$$

$$1 = \frac{3}{4} + \frac{B}{2}$$

$$1 - \frac{3}{4} = \frac{B}{2}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{B}{2}$$

$$\frac{1}{2} = B$$

$$Y(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{z^{-1}/2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}}$$

Por la tabla de transformadas:

$$a^n u(n) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

$$a^n \operatorname{sen}(w_o n) u(n) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{az^{-1} \operatorname{sen}(w_o)}{1 - 2az^{-1}\cos w_o + a^2 z^{-2}}$$

Para la segunda fórmula:

$$a = \frac{1}{2}$$

$$\cos(w_o) = \frac{1}{2} \Rightarrow w_o = \frac{\pi}{3}$$

$$\operatorname{sen}(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$ $\leftarrow$ Se debe multiplicar por $\frac{2}{\sqrt{3}}$ para que de 1.

$$y(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\frac{1}{2}z^{-1}\operatorname{sen}(\pi/3) \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}}{1 - 2 \cdot \frac{1}{2}z^{-1}\cos(\pi/3) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 z^{-2}}$$

$$\Rightarrow y(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}\right)^n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}n\right) u(n)$$

$$\boxed{y(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)\left[1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}n\right)\right]}$$