Variable Compleja

Campos de aplicación:
- Movimiento de fluidos
- Transmisión de calor
- Electromagnetismo
- Electroestática
- Análisis senoidal de circuitos
- Aerodinámica

Sistemas Numéricos

Evolución gradual de los sistemas numéricos.

Números Naturales

Enteros positivos (1,2,3,….) [$\mathbb{N}$]. Suma y productos resultan también en números naturales.

Se puede expresar diciendo que: el conjunto de $\mathbb{N}$ es cerrado respecto a la operación de adición y multiplicación.

Un conjunto cerrado tiene su propio límite.

Números Enteros:

$\mathbb{Z}$ incluye el conjunto $\mathbb{N}$, sus opuestos(negativos) y el cero.

Los enteros con la adición y multiplicación forman una estructura algebraica llamada **<u>Anillo.</u>**

$\mathbb{Z}$ es un conjunto cerrado bajo las operaciones de adición, multiplicación y sustracción.

Números Racionales

$\mathbb{Q}$ es el conjunto de todo a aquel número que pueda ser expresado como resultado de la división de dos números enteros, con divisor distinto de cero.

$\mathbb{Z}$ subconjunto de $\mathbb{Q}$ **=>** $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}$ es cerrado bajo las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división, excluyendo la división por cero.

Números Irracionales

$\mathbb{I}$. Los números irracionales son aquellos elementos que no son expresables mediante números racionales usando las operaciones internas del conjunto $\mathbb{Q}$**.**

Los números irracionales se caracterizan por poseer infinitas cifras decimales que no siguen un patrón definido.

Ejemplo

$$\sqrt{2} = 1.41423......$$

$$\pi = 3.14159........$$

Números Reales

Número real es todo elemento perteneciente al conjunto $\mathbb{R}$ formado por la unión de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$.

$\mathbb{R} = \{ \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} \}$

Sistema de Números Complejos

Los números complejos son una extensión de los números reales. Se denota como $\mathbb{C}$.
Tienen la capacidad de representar **todas** las **raíces** de **polinomios.** Esto no es posible con $\mathbb{R}$.

⇒ Hace uso de la unidad imaginaria $j = \sqrt{-1}$

⇒ Número complejo se representa en la forma binomial como $x + jy$ donde x es la parte real y y la imaginaria.

Si $z = x + jy$

z = representa cualquier elemento en $\mathbb{C}$ y es llamado variable compleja

x = Re{z}

y =Im{z}

⇒ Dos números complejos son iguales cuando:

$z_1 = a + jb$ y $z_2 = c + jd$

z_1 y z_2 son iguales si y solo si

a = c y b = d

⇒ Im{z} = 0 ⇒ # real.

Re{z} = 0 ⇒ # imaginario puro.

Notación

Forma rectangular o cartesiana

$z = x + jy$ (ya descrita)

Forma polar:

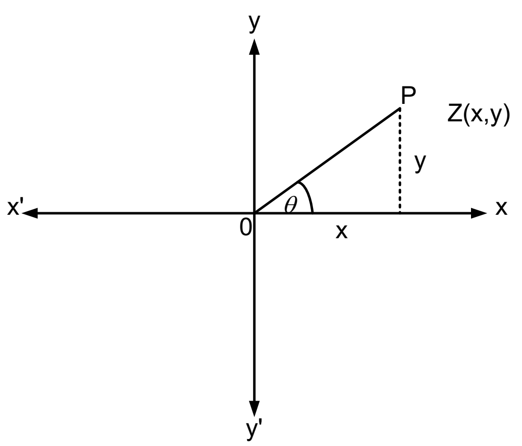
Siendo P un punto en el plano complejo correspondiente a $z = x + jy$, entonces:

$$x = r\cos\theta$$

$$y = rsen\theta$$

Donde $r = \sqrt{x^2 + y^2} = | x + jy |$ y se llama módulo o valor absoluto de z.
Denominación: mod z ó |z|.

θ es el ángulo entre la recta 0P y eje positivo de x.
Se denomina argumento de z ó arg z.



$\theta = \tan^{-1}(y/x)$
En cuadrantes I y IV

$\theta = \tan^{-1}(y/x) + \pi$
En cuadrantes II y III

Identidad de Euler

Demostración a partir de series infinitas de seno, coseno y e^{x}.

$$e^{x} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \cdots\cdots \qquad (1)$$

$$sen(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \cdots\cdots \qquad (2)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \cdots\cdots \qquad (3)$$

Considerando que:

$j^0 = 1$

$j^1 = j$

$j^2 = -1$

$j^3 = -j$

$j^4 = 1$

Generalizando:

$j^{4n} = 1$

$j^{4n+1} = j$

$j^{4n+2} = -1$

$j^{4n+3} = -j$

Asumiendo que las series mantienen su validez cuando $x = j\theta$ y sustituyendo en (1)

$$e^{j\theta} = 1 + \frac{j\theta}{1!} + \frac{(j\theta)^2}{2!} + \frac{(j\theta)^3}{3!} + \frac{(j\theta)^4}{4!} + \frac{(j\theta)^5}{5!} + \cdots\cdots$$

$$e^{j\theta} = 1 + j\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{j\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{j\theta^5}{5!} + \cdots\cdots$$

Agrupando

$$e^{j\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} \cdots\right) + j\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} \cdots\right)$$

$\Rightarrow \boxed{e^{j\theta} = \cos\theta + jsen\theta}$ Fórmula de Euler

La fórmula de Euler también permite interpretar las funciones seno y coseno como variaciones de la función exponencial.

$$\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

$$sen(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

Forma Exponencial de Números Complejos

Considerando

$$e^{j\theta} = \cos\theta + jsen\theta$$

Multiplicando cada miembro por un número real positivo r:

$$re^{j\theta} = r\cos\theta + rjsen\theta$$

Donde:

r y θ se definieron en la forma polar
r = magnitud
θ = ángulo ó argumento

Conjugado de un Número Complejo

Se forma invirtiendo el signo de su componente imaginaria y se denota por medio de un asterisco (z*) o por medio de una línea ($\bar{z}$) .

$z = x + jy = r\angle\theta$ entonces $z^* = x - jy = r\angle -\theta$

$z = -x + jy$ entonces $z^* = -x - jy$

Identidad importante:

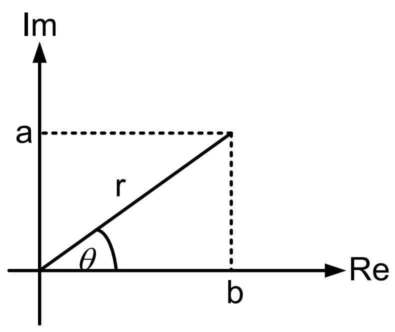
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$$

Representación Gráfica de un Número Complejo

Se representa en el plano de números complejos.

Eje horizontal: componente real.
Eje vertical: componente imaginaria.
El ángulo se mide a partir del eje real positivo.

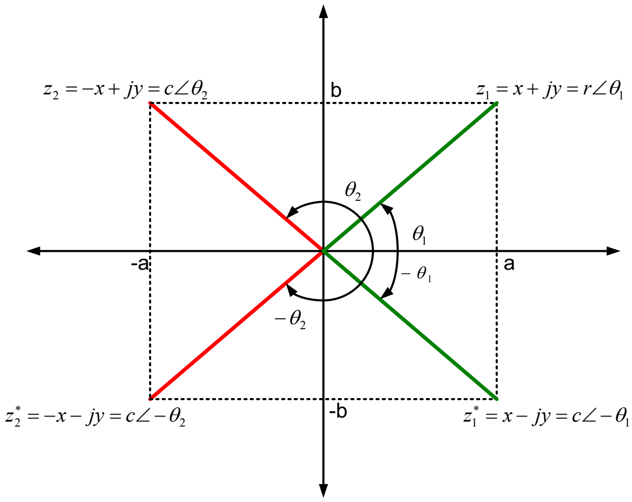


$$z = x + jy$$

$$z = re^{j\theta} = r\angle\theta$$

Resulta común expresar θ como un valor negativo cuando θ se encuentra en el III y IV cuadrantes.

Representación de z_1 y z_2 y sus conjugados.



Propiedades del Valor Absoluto

El valor absoluto o módulo de un número complejo $z = a + jb$ está definida como:

$$|a + jb| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Las siguientes propiedades son validas:

1. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
2. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ si $z_2 \neq 0$
3. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ Desigualdad triangular.
4. $|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$ ó $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

Operaciones Básicas

Suma

Con: $z_1 = x_1 + jy_1$ y $z_2 = x_2 + jy_2$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$

En este caso es más sencillo emplear la notación rectangular.

Ejemplo

$$z_1 = 8 + j16$$
$$z_2 = 12 - j13$$
$$z_1 + z_2 = (8 + 12) + j(16 - 13)$$
$$z_1 + z_2 = 20 + j3$$

Resta

Sigue las mismas reglas que la suma. Si: $z_1 = x_1 + jy_1$ y $z_2 = x_2 + jy_2$ entonces $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$

Multiplicación

Puede realizarse expresando los números en forma tanto rectangular como polar.

Forma rectangular:

$$z_1 z_2 = (x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2)$$

$$z_1 z_2 = x_1 x_2 + jx_1 y_2 + jx_2 y_1 - y_1 y_2$$

$$\boxed{z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + x_2 y_1)}$$

Forma polar:

$$\boxed{z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}}$$

División

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1}$$

Primer paso para dividir números complejos en forma rectangular.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*}$$ ⇒Denominador se reduce a número real

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} * \frac{x_2 - jy_2}{x_2 - jy_2} = \frac{x_1 x_2 - jx_1 y_2 + jx_2 y_1 + y_1 y_2}{x_2^2 - j^2 y_2^2}$$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{j(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}}$$

Notación polar:

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}}$$

<u>Ejemplo</u>:

Tenemos $z_1 = 8 + j10$ y $z_2 = 5 - j4$

Entonces

$$z_1 z_2 = (8 + j10)(5 - j4) = 40 - j32 + j50 + 40$$

$$z_1 z_2 = 80 + j18$$

Considerando notación polar:

$$z_1 = 12.8062\angle 51.34$$

$$z_2 = 6.40\angle -38.66$$

$$z_1 z_2 = (12.80 * 6.40)\angle(51.34 - 38.66)$$

$$z_1 z_2 = 82\angle 12.68$$

Fundamentos Axiomáticos del Sistema de Números Complejos

Es conveniente definir el número complejo como un par ordenado (a, b) de números reales a y b, sometido a ciertas definiciones operacionales:

Igualdad: $(a, b) = (c, d)$ si y solo si $a = c$ y $b = d$,

Suma: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

Producto: $(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$
$m(a, b) = (ma, mb)$

⇒ De las definiciones anteriores se tiene que:
$(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$ se puede asociar con $(a+\mathrm{j}b)$

Donde $\mathrm{j} = (0, 1)$ con $\mathrm{j}^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0)$
y (1,0) es el equivalente al número real 1

⇒ Además el par ordenado (0, 0) corresponde al número real 0

Propiedades

Si z_1, z_2 y z_3 pertenece al conjunto $\mathbb{C}$ de números complejos:

1. $z_1 + z_2$ y $z_1 z_2$ pertenecen a $\mathbb{C}$ — Ley Clausura.
2. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ — Ley conmutativa de la suma
3. $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ — Ley asociativa de la suma
4. $z_1 z_2 = z_2 z_1$ — Ley conmutativa de la multiplicación
5. $z_1 (z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$ — Ley asociativa de la multiplicación
6. $z_1 (z_2 + z_3) = (z_1 z_2 + z_1 z_3)$ — Ley distributiva
7. $z_1 + 0 = 0 + z_1 = z_1$ — 0 ⇒ elemento neutro o idéntico de la suma
   $1\, z_1 = z_1$ — 1 ⇒ elemento neutro o idéntico de la multiplicación
8. Para cualquier número complejo $z_1 \neq 0$ existe un número único en $\mathbb{C}$ tal que $z + z_1 = 0$, z se llama el opuesto o recíproco o inverso de z_1 con respecto a la adición y se denomina $-z_1$.
9. Para cualquier $z_1 \neq 0$ existe un número único z en $\mathbb{C}$ tal que $zz_1 = z_1 z = 1$, z se llama el inverso o recíproco de z_1 con respecto a la multiplicación y se denota por z_1^{-1} ó $1/z_1$.

Se puede observar que elementos del conjunto $\mathbb{C}$ satisfacen las propiedades que se definieron anteriormente para la estructura algebraica de un "*cuerpo*".

Identidades Útiles

$$\pm j^2 = \mp 1$$
$$(-j)(j) = 1$$
$$-j = \frac{1}{j}$$
$$e^{\pm j\pi} = -1$$
$$e^{\pm j\frac{\pi}{2}} = \pm j$$

Si $z = x + jy = r\angle\theta$

$$zz^* = x^2 + y^2 = r^2$$
$$z + z^* = 2x \quad es\ decir \quad \mathrm{Re}\{z\} = \frac{z + z^*}{2}$$
$$z - z^* = j2y \quad es\ decir \quad \mathrm{Im}\{z\} = \frac{z - z^*}{2j}$$
$$\frac{z}{z^*} = 1\angle 2\theta$$

Potencias enteras de un Número Complejo

Para elevar un número complejo a una potencia entera k

$$z^k = (x + jy)^k$$
$$z^k = (re^{j\theta})^k = r^k e^{jk\theta}$$
$$z^k = r^k(\cos(k\theta) + jsen(k\theta))$$

Ejemplo

$$(3 + j4)^4 = (5e^{j53.13^\circ})^4 = 5^4 e^{j212.52^\circ}$$
$$(3 + j4)^4 = 625e^{j212.52^\circ}$$
$$(3 + j4)^4 = -527 - j336$$

Raíces de números complejos

Un número x es llamado raíz k-ésima de un número complejo z si

$$x^k = z \text{ ó } x = z^{\frac{1}{k}}.$$

En este caso estamos resolviendo una ecuación de la forma:

$$x^k - re^{j\theta} = 0$$

$\Rightarrow$ Ecuación de k-ésimo grado $\Rightarrow$ k raíces y x es un número complejo.

Antes de determinar las raíces debemos observar que:

$$re^{j\theta} = re^{j(\theta+2\pi)} = re^{j(\theta+4\pi)} = \cdots$$

Utilizando las ecuaciones anteriores podemos escribir:

$$x_1 = (re^{j\theta})^{1/k} = r^{1/k} e^{j\theta/k}$$

$$x_2 = \left(re^{j(\theta+2\pi)}\right)^{1/k} = r^{1/k} e^{j(\theta+2\pi)/k}$$

$$x_3 = \left(re^{j(\theta+4\pi)}\right)^{1/k} = r^{1/k} e^{j(\theta+4\pi)/k}$$

::

Se puede continuar con el proceso hasta que las raíces empiezan a repetirse, esto sucede cuando el múltiplo de π es igual a $2k$.

<u>En general:</u>

$x = z^{1/k} = r^{1/k} e^{j(\theta+2n\pi)/k}$; n = 0, 1, 2,…, k-1

ó

$x = z^{1/k} = r^{1/k}\left(\cos\left(\dfrac{\theta+2n\pi}{k}\right) + jsen\left(\dfrac{\theta+2n\pi}{k}\right)\right)$; n = 0, 1, 2,…, k-1

<u>Ejemplo</u>:

Obtenga y grafique en el plano complejo las raíces de $(81e^{j60^\circ})^{1/4}$.

$x_1 = (81)^{1/4} e^{j60^\circ/4} = 3e^{j15^\circ} \Rightarrow n$ = 0.

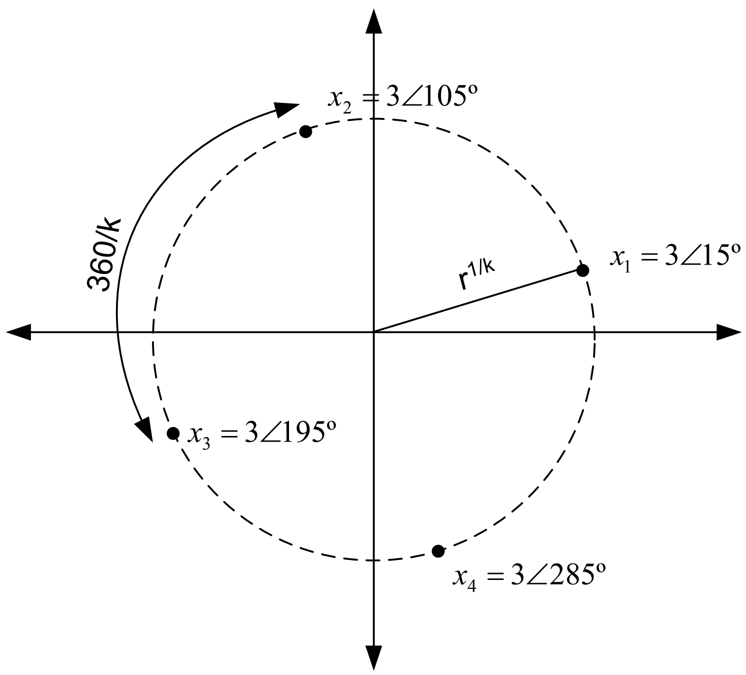
$x_2 = (81)^{1/4} e^{j(60^\circ+360^\circ)/4} = 3e^{j105^\circ} \Rightarrow n$ = 1.

$x_3 = (81)^{1/4} e^{j(60^\circ+720^\circ)/4} = 3e^{j195^\circ} \Rightarrow n$ = 2.

$x_4 = (81)^{1/4} e^{j(60^\circ+1080^\circ)/4} = 3e^{j285^\circ} \Rightarrow n = 3 = k - 1$.

$x_5 = (81)^{1/4} e^{j(60^\circ+1440^\circ)/4} = 3e^{j375^\circ} = 3e^{j15^\circ} \Rightarrow 2n = 2k$ y las raíces empiezan a repetirse.

Ubicación de las raíces:



Observaciones:

1. Las raíces de un número complejo se encuentran sobre un círculo en el plano complejo con radio de $r^{1/k}$.

2. Las raíces se distribuyen uniformemente alrededor del círculo con un ángulo entre raíces adyacentes igual a $2\pi/k$ radianes ó $360º/k$ grados.

Ejemplo
Encontrar las raíces de $(-1 + j)^{1/3}$ y localizarlas gráficamente.

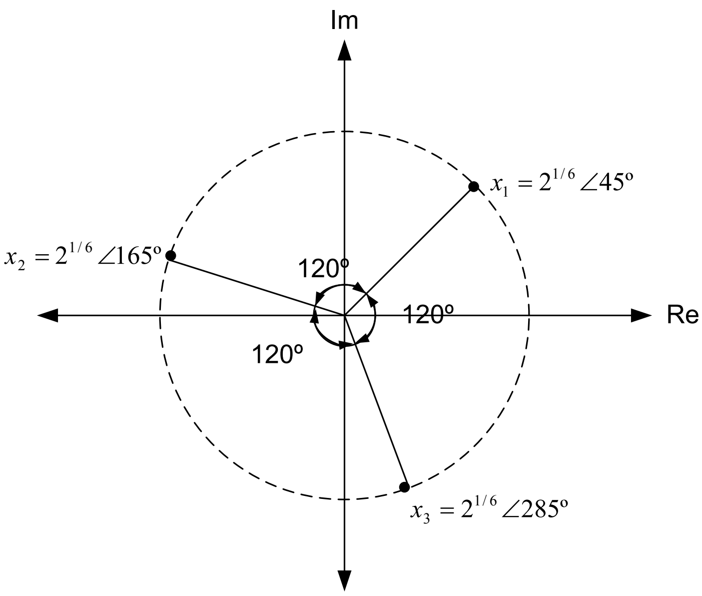
$$-1 + j = \sqrt{2}e^{j135º} = \sqrt{2}e^{j3\pi/4}$$
ó
$$-1 + j = \sqrt{2}(\cos 135º + jsen135º) = \sqrt{2}\left(\cos\left(3\pi/4\right) + jsen\left(3\pi/4\right)\right)$$
Cualquiera de las notaciones se puede utilizar.

Usando: $z = \sqrt{2}e^{j135º}$

$$\Rightarrow (-1 + j)^{1/3} = \sqrt{2}^{1/3} e^{j(135+360*n)/3}$$

n = 0 $\Rightarrow z_1 = 2^{1/6} e^{j45º}$
n = 1 $\Rightarrow z_2 = 2^{1/6} e^{j165º}$
n = 2 $\Rightarrow z_3 = 2^{1/6} e^{j285º}$

También se pueden escribir como:
$$z_1 = 2^{1/6}(\cos 45º + jsen45º)$$
$$z_2 = 2^{1/6}(\cos 165º + jsen165º)$$
$$z_3 = 2^{1/6}(\cos 285º + jsen285º)$$



Definiciones Fundamentales

Cualquier colección de puntos en el plano complejo se denomina conjunto de puntos y cada punto es un miembro o elemento del conjunto.

1. Vecindad: Una vecindad de radio delta, ó δ, de un punto z_0 es el conjunto de todos los puntos z tal que $|z - z_0| < \delta$. Donde δ es cualquier número positivo dado.

Una vecindad reducida es una vecindad donde se omite el punto z_0

$$0 < | z - z_0| < \delta.$$

2. Puntos limites: Un punto z_0 se denomina punto límite o punto de acumulación de un conjunto $\mathbf{A}$, si cada vecindad δ reducida de z_0 contiene puntos de $\mathbf{A}$.

$\Rightarrow$ Como δ puede ser cualquier número positivo entonces $\mathbf{A}$ debe tener infinitos puntos.

$\Rightarrow$ z_0 puede pertenecer o no al conjunto de $\mathbf{A}$.

3. Conjunto cerrado: $\mathbf{A}$ es un conjunto cerrado si cada punto limite de $\mathbf{A}$ pertenece a $\mathbf{A}$, es decir $\mathbf{A}$ contiene todos sus puntos límites.

Ejemplo:

Todos los números z tales que $|z| \leq 1$ es un conjunto cerrado.

4. Conjuntos Acotados: $\mathbf{A}$ es un conjunto acotado si se puede encontrar una constante M tal que $|z| < M$ para cada punto z en $\mathbf{A}$.

Un conjunto acotado y cerrado recibe el nombre de conjunto compacto.

5. Conjunto Ilimitado: es un conjunto que no es acotado.

6. Punto interior, exterior y frontera:

Punto interior: z_0 es un punto interior del conjunto $\mathbf{A}$ si se puede encontrar una vecindad de z_0 cuyos puntos pertenecen todos a $\mathbf{A}$.

Punto Frontera: Si cada vecindad de z_0 contiene puntos que pertenecen a $\mathbf{A}$ y puntos que no pertenecen a $\mathbf{A}$.

Punto exterior: Si z_0 no es punto interior o punto frontera del conjunto $\mathbf{A}$.

7. Conjuntos Abiertos: Es un conjunto que consiste solo en puntos interiores.

Ejemplo:

Si $z \in \mathbb{R}$:

$0 < z < 1$ es un conjunto abierto

$0 < z \leq 1$ no es abierto.

8. Conjuntos Conexos: Un conjunto abierto es conexo si cualquier par de puntos del conjunto pueden ser unidos por segmentos de recta contenidos en $\mathbf{A}$.

9. Región Abierta o Dominio: es un conjunto abierto y conexo.

10. Clausura de un conjunto: Si se agregan al conjunto $\mathbf{A}$ todos los puntos límite de $\mathbf{A}$ se denomina clausura de $\mathbf{A}$ y es un conjunto cerrado.

11. Región Cerrada: es la clausura de una región abierta o dominio.

12. Región: es una región abierta con ninguno, algunos o todos sus puntos límites.

Ejercicios:

Realice las siguientes operaciones. Verifíquelas gráficamente.

a. $(2+j5)+(-3+j2)$

b. $(j3)+2$

c. $z=x+jy$ calcule $z+z^*$

d. $z=x+jy$ calcule $z-z^*$

e. $(2+j2)(-2+j2)$

f. $(3j)(2)$

g. $z=x+jy$ calcule $z*z^*$

h. $z=re^{j\theta}$ calcule z/z^*