Instituto Tecnológico de Costa Rica **I Semestre 2020**
Área de Ingeniería Mecatrónica
MT-5001 Modelos de Sistemas para Mecatrónica
Profesor: Ing. Jaime Mora.

Elaborado por: Ing. José Miguel Barboza Retana

Práctica Semana 15 y 16. Transformada Z.

- Resuelva los siguientes problemas relacionados con la transformada Z y el análisis de sistemas LTI en tiempo discreto:

1) Dada la secuencia $x[n] = \left\{1, 2, \underset{\uparrow}{4}, 3, 2, 1, \frac{1}{2}\right\}$, grafique las secuencias:
   a) $2x[n]$.
   b) $x[-n]$
   c) $x[-2-n]$
   d) $x[2-n]$
   e) $x[-2+n]$
   f) $x[2+n]$

2) Si $x[n] = \left\{1, 2, \underset{\uparrow}{3}, 4\right\}$, exprese las siguientes secuencias en términos de $x[n]$:
   a) $\left\{1, 2, 3, 4, 0, \underset{\uparrow}{0}\right\}$
   b) $\left\{\underset{\uparrow}{0}, 1, 2, 3, 4\right\}$
   c) $\left\{4, \underset{\uparrow}{3}, 2, 1\right\}$
   d) $\left\{4, 3, 2, \underset{\uparrow}{1}\right\}$

3) Represente las siguientes secuencias en términos de rampas $u_r[n]$ y de escalones unitarios $u[n]$:
   a) $x_1[n] = \{1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 0\}$
   b) $x_2[n] = \{1, 2, 3, 4, 4, 4\ 3, 2, 1, 0\}$
   c) $x_3[n] = \{0, 1, 1, 1, 1, 0, 0\}$
   e) $x_4[n] = \left\{4, 3, 2, 1, \underset{\uparrow}{0}, 1, 2, 3, 4\right\}$
   f) $x_5[n] = \left\{-4, -3, -2, -1, \underset{\uparrow}{0}, 1, 2, 3, 4\right\}$

4) Grafique las siguientes funciones e indique cualitativamente qué regiones de convergencia tiene su transformada Z.
   a) $x[n] = \sin(\omega n)u[n]$
   b) $x[n] = u[n+4] - u[n-2]$
   c) $x[n] = u[-n-2]$
   d) $x[n] = u_r[n] - 2u_r[n-5] + u_r[n-10]$

e) $x[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-|n|}$
f) $x[n] = u_r[n+5]u[-n-5]$

5) Encuentre las regiones del plano z donde las siguientes series convergen:

a) $\sum_{n=-2}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} z^{-n}$
b) $\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1+(-1)^n}{2}\right] z^{-n}$
c) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{-n+2} z^{n}$
d) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{|n|} \cos\left[\frac{\pi}{4}n\right] z^{n}$

6) Encuentre la transformada Z de:

$$x[n] = \frac{u[n-2]}{4^n}$$

Con su respectiva ROC.

7) Sea:

$$x[n] = (-1)^n u[n] + a^n u[-n-n_0]$$

Encuentre para qué valores de a y n_0, la ROC de $X(z)$ es $1 < |z| < 2$.

8) Encuentre la transformada Z de:

$$x[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\left[\frac{\pi}{4}n\right] & n \leq 0 \\ 0 & n > 0 \end{cases}$$

Indique los polos, ceros y su ROC.

9) Para las siguientes expresiones identifique los ceros y los polos finitos e infinitos.

a) $\frac{z^{-1}\left(1-\frac{1}{2}^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}^{-1}\right)}$

b) $\frac{(1-z^{-1})(1-2z^{-1})}{(1-3z^{-1})(1-4z^{-1})}$

c) $\frac{z^{-2}(1-z^{-1})}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)}$

10) Si $x[n]$ es absolutamente sumable y tiene transformada Z racional, con un polo en $\frac{1}{2}$, entonces, podría $x[n]$ ser:

a) ¿Una señal finita?
b) ¿Una señal izquierda?
c) ¿Una señal derecha?
d) ¿Una señal bilateral?

11) Sea:

$$x[n] = \frac{1 - \frac{1}{4}z^{-2}}{\left(1 + \frac{1}{4}z^{-2}\right)\left(1 + \frac{5}{4}z^{-1} + \frac{3}{8}z^{-2}\right)}$$

Indique cuántas y cuáles regiones son posibles para $X(z)$.

12) Sea $x[n]$ una señal con transformada Z racional $X(z)$, que tiene un polo en $z = \frac{1}{2}$. Se sabe además que:

$$x_1[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n x[n]$$

Es absolutamente sumable, pero

$$x_2[n] = \left(\frac{1}{8}\right)^n x[n]$$

No es absolutamente sumable. Con esta información indique si $x[n]$ es izquierda, derecha, bilateral o finita.

13) Utilizando la definición de la transformada Z inversa, encuentre la secuencia en el tiempo discreto equivalente a:

$$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 + 2z^{-1})} \quad ROC: |z| > 2$$

14) Encuentre la transformada Z inversa de:

a) $X(z) = \cos(z)$
b) $X(z) = \sin(z)$

Sabiendo que en ambos casos el círculo unitario del plano z se encuentra en la ROC.

15) Encuentre por división polinomial la transformada Z inversa de:

$$X(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}$$

Para ROC: $|z| > \frac{1}{3}$ y para ROC: $|z| < \frac{1}{3}$.

16) Encuentre la transformada Z inversa de:

$$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 + 2z^{-1})}$$

Para todas las posibles regiones de convergencia por medio de la descomposición en fracciones parciales.

17) Encuentre la transformada Z inversa de:

$$X(z) = \frac{1}{256}\left[\frac{256 - z^{-8}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}\right], \;\; ROC: |z| > 0$$

18) Para la ventana rectangular:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq k \\ 0 & en\ el\ resto \end{cases}$$

Sea:

$$g[n] = x[n] - x[n-1]$$

a) Encuentre una expresión para $g[n]$ y su transformada Z.
b) Encuentre la transformada Z de $x[n]$ considerando que:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} g[k]$$

19) Demuestre que dos términos polinomiales simples complejos conjugados y una ROC externa a los polos, dan origen a la señal:

$$\frac{A}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{A^*}{1 - p_1^* z^{-1}} \Rightarrow \begin{aligned} &2|A||p_1|^n \cos[n\angle p_1 + \angle A]\, u[n] \\ &= 2|p_1|^n Re\{A\} \cos[n\angle p_1] - 2|p_1|^n Im\{A\} \sin[n\angle p_1] \end{aligned}$$

20) Dada la señal triangular:

$$g[n] = u_r[n] - 2u_r[n-a] + u_r[n-2a]$$

Si $x[n]$ es una ventana rectangular:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq k \\ 0 & en\ el\ resto \end{cases}$$

Encuentre los valores de k y n_0 en términos de a necesarios para que se cumpla:

$$g[n] = x[n] * x[n-n_0]$$

Encuentre la transformada Z de $g[n]$ directamente de su definición y utilizando la propiedad de convolución.

21) Para las siguientes funciones de transferencia de sistemas discretos, si se sabe que estos son estables indique si además son causales:

a) $\frac{1-\frac{4}{3}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}{z^{-1}\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}$

b) $\frac{z-\frac{1}{2}}{z^2+\frac{1}{2}z-\frac{3}{16}}$

c) $\frac{z+1}{z+\frac{4}{3}-\frac{1}{2}z^{-2}-\frac{2}{3}z^{-3}}$

22) Un sistema LTI tiene función de transferencia $H(z)$ y respuesta al impulso $h[n]$. Se sabe:

a) $h[n]$ es real.
b) $h[n]$ es derecha.
c) $\lim_{z\to\infty} H(z) = 1$
d) $H(z)$ tiene dos ceros.
e) $H(z)$ tiene uno de sus polos en una ubicación no real en el círculo $|z| = \frac{3}{4}$

¿Es el sistema causal? ¿Es estable?

23) Encuentre la transformada Z unilateral de las siguientes señales:

a) $x_1[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n+5]$
b) $x_2[n] = \delta[n+3] + \delta[n] + 2^n u[-n]$
c) $x_3[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$

24) Un sistema de entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ se rige por la ecuación de diferencias:

$$y[n-1] + 2y[n] = x[n]$$

a) Determine la respuesta de entrada cero al sistema si $y[-1] = 2$

b) Encuentre la respuesta de estado cero si su entrada es $x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$

c) Determine la salida del sistema para $n \geq 0$ si $y[-1] = 2$ y $x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$

25) Determine la restricción que debe haber en $r = |z|$ para que cada una de las siguientes sumas converja.

a) $\sum_{n=-1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} z^{-n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{-n+1} z^{n}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1+(-1)^n}{2}\right] z^{-n}$

d) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} \cos\left[\frac{\pi}{4}n\right] z^{-n}$

26) Encuentre la transformada Z de la siguiente señal y especifique su región de convergencia.

$$x[n] = \left(\frac{1}{5}\right)^n u[n-3]$$

27) Considere la señal:

$$x[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n \cos\left[\frac{\pi}{4}n\right] & n \leq 0 \\ 0 & n > 0 \end{cases}$$

Determine los polos y la ROC de $X(z)$.

28) Para cada una de las siguientes expresiones algebraicas para la transformada Z de una señal, determine el número de ceros en el plano z finito y el número de ceros en el infinito.

a) $\frac{z^{-1}\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}$

b) $\frac{(1-z^{-1})(1-2z^{-1})}{(1-3z^{-1})(1-4z^{-1})}$

c) $\frac{z^{-2}(1-z^{-1})}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)}$

29) Sea $x[n]$ una señal absolutamente sumable con transformada Z racional $X(z)$. Si se sabe que $X(z)$ tiene un polo en $z = \frac{1}{2}$, $x[n]$ podría ser:

a) Una señal de duración finita.
b) Una señal izquierda.
c) Una señal derecha.

d) Una señal bilateral.

30) Suponga que la expresión algebraica para la transformada Z de $x[n]$ es:

$$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{4}z^{-2}}{\left(1 + \frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{5}{4}z^{-1} + \frac{3}{8}z^{-2}\right)}$$

¿Cuantas regiones de convergencia diferentes corresponderían a $X(z)$?

31) Sea $x[n]$ una señal cuya transformada Z racional $X(z)$ contiene un polo en $z = \frac{1}{2}$. Dado que:

$$x_1[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n x[n]$$

Es absolutamente sumable y:

$$x_2[n] = \left(\frac{1}{8}\right)^n x[n]$$

No es absolutamente sumable, determine si $x[n]$ es izquierda, derecho o bilateral.

32) Utilizando expansión en fracciones parciales y la siguiente relación:

$$a^n u[n] \Rightarrow \frac{1}{1 - az^{-1}};\ |z| > |a|$$

Determine la transformada inversa de:

$$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 + 2z^{-1})};\ |z| > 2$$

33) Considere la siguiente expresión algebraica para la transformada Z $X(z)$ de una señal $x[n]$:

$$X(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}$$

a) Suponiendo que la ROC es $|z| > \frac{1}{3}$, use división polinomial para determinar los valores de $x[0]$, $x[1]$ y $x[2]$.
b) Suponiendo que la ROC es $|z| < \frac{1}{3}$, use división polinomial para determinar los valores de $x[0]$, $x[-1]$ y $x[-2]$.

34) Determine la transformada Z inversa de:

$$X(z)=\frac{1}{1024}\left[\frac{1024-z^{-10}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right],\qquad |z|>0$$

35) Considere la señal triangular:

$$g[n]=\begin{cases} n-1 & 2\leq n\leq 7\\ 13-n & 8\leq n\leq 12\\ 0 & con\ otro\ valor\end{cases}$$

a) Determine el valor de n_0 tal que:

$$g[n]=x[n]*x[n-n_0]$$

Donde $x[n]$ es una ventana rectangular para $0\leq n\leq 5$.

b) Utilice la propiedad de convolución y desplazamiento junto con la $X(z)$ determina en el problema anterior para encontrar $G(z)$. Verifique que su respuesta satisface el teorema del valor inicial.

36) Sea:

$$y[n]=\left(\frac{1}{9}\right)^n u[n]$$

Determine dos señales distintas tales que cada una tenga una transformada Z $X(z)$ que satisfaga las siguientes dos condiciones:

a) $\frac{[X(z)+X(-z)]}{2}=Y(z^2)$

b) $X(z)$ tiene sólo un cero y sólo un polo en el plano z.

37) Considere las siguientes funciones de transferencia para sistemas LTI estables. Sin utilizar la transformada Z inversa, determine en cada caso si el sistema correspondiente es causal o no lo es.

a) $\frac{1-\frac{4}{3}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}{z^{-1}\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}$

b) $\frac{z-\frac{1}{2}}{z^2+\frac{1}{2}z-\frac{3}{16}}$

c) $\frac{z+1}{z+\frac{4}{3}-\frac{1}{2}z^{-2}-\frac{2}{3}z^{-3}}$

38) Suponga que se conocen los siguientes cinco datos acerca de un sistema LTI S particular con respuesta al impulso $h[n]$ y transformada Z $X(z)$:

a) $h[n]$ es real.

b) $h[n]$ es derecha.

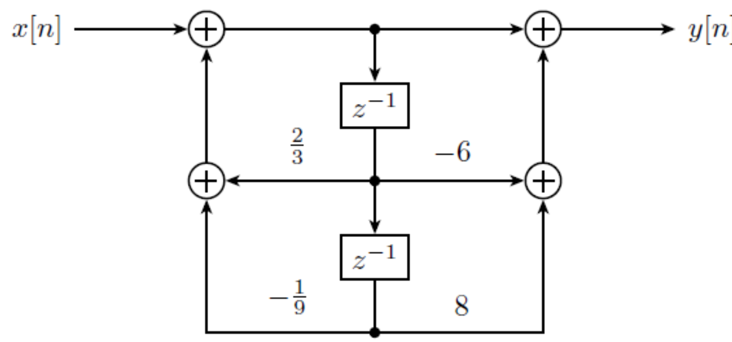
c) $\lim_{z\to\infty} H(z)=1$

d) $H(z)$ tiene dos ceros.

e) $H(z)$ tiene un de sus polos en una ubicación no real en el círculo definido por $|z| = \frac{3}{4}$

¿El sistema S es causal? ¿Es estable?

39) Considere un sistema LTI causal cuya entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ están relacionadas mediante el diagrama de bloques mostrada en la figura.



a) Determine una ecuación de diferencias que relacione a $y[n]$ con $x[n]$.
b) ¿El sistema es estable?

40) Determine la transformada Z de cada una de las siguientes secuencias. Dibuje el diagrama de polos y ceros e indique la región de convergencia. Indique también si existe o no la transformada de Fourier de la secuencia.

a) $\delta[n+5]$
b) $\delta[n-5]$
c) $(-1)^n u[n]$
d) $\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} u[n+3]$
e) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{n} u[-n-2]$
f) $\left(\frac{1}{4}\right)^{n} u[3-n]$
g) $2^n u[-n] + \left(\frac{1}{4}\right)^{n} u[n-1]$
h) $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} u[n-2]$

41) Usando el método indicado, determine la secuencia asociada con cada una de las siguientes transformadas Z:

a) Por fracciones parciales: $X(z) = \frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{5}{2}z^{-1}+z^{-2}}$ y $x[n]$ es absolutamente sumable.

b) Por división polinomial: $X(z) = \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$ y $x[n]$ es derecha.

c) Por fracciones parciales: $X(z) = \frac{3}{z-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}z^{-1}}$ y $x[n]$ es absolutamente sumable.

42) Una secuencia derecha $x[n]$ tiene transformada Z:

$$X(z) = \frac{3z^{-10} + z^{-7} - 5z^{-2} + 4z^{-1} + 1}{z^{-10} - 5z^{-7} + z^{-3}}$$

Determine $x[n]$ para $n < 0$.

43) Considere una señal $y[n]$ que está relacionada con dos señales $x_1[n]$ y $x_2[n]$ mediante:

$$y[n] = x_1[n+3] * x_2[-n+1]$$

Donde:

$$x_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \qquad x_2[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

Utilice las propiedades de la transformada Z para encontrar $Y(z)$.

44) Se conoce lo siguiente sobre la señal $x[n]$ discreta con transformada Z $X(z)$:

a) $x[n]$ es real y derecha.
b) $X(z)$ tiene exactamente dos polos.
c) $X(z)$ tiene exactamente dos ceros en el origen.
d) $X(z)$ tiene un polo en $z = \frac{1}{2}e^{\frac{j\pi}{3}}$
e) $X(1) = \frac{8}{3}$

Determine $X(z)$ y especifique su respuesta al impulso.

45) Determine la función de transferencia para un sistema LTI causal con ecuación de diferencias:

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] = x[n]$$

Encuentre $y[n]$ si $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$.

46) Un sistema LTI causal está descrito por la ecuación de diferencias:

$$y[n] = y[n-1] + y[n-2] + x[n-1]$$

a) Encuentre la función de transferencia $H(z)$ e indique su región de convergencia.

b) Encuentre la respuesta a la muestra unitaria de este sistema.
c) Posiblemente haya encontrado que este sistema es inestable. Encuentre una respuesta estable (no causal) a la muestra unitaria que satisfaga la ecuación de diferencias.

47) Considere un sistema LTI con entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ para cual:

$$y[n-1] - \frac{5}{2}y[n] + y[n+1] = x[n]$$

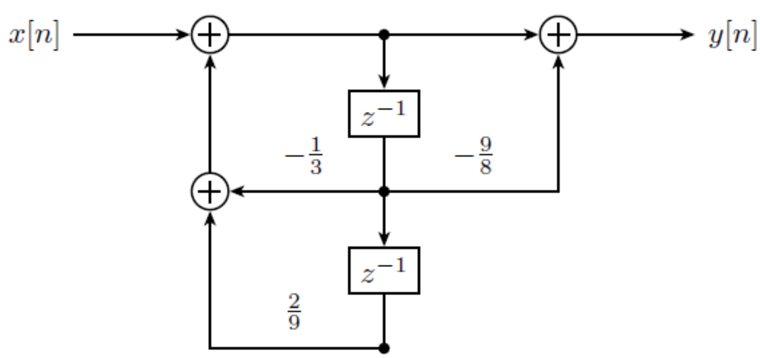
El sistema puede ser o puede no ser estable o causal.
Considerando el diagrama de polos y ceros asociado a esta ecuación de diferencias, determine tres posibles respuestas a la muestra unitaria. Demuestre que cada una de ellas satisface la ecuación de diferencias.

48) Considere un sistema lineal discreto, invariante en el tiempo, con entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ para el cual:

$$y[n-1] - \frac{10}{3}y[n] + y[n+1] = x[n]$$

Si el sistema es estable, determine la respuesta a la muestra a la muestra unitaria.

49) La entrada $x[n]$ y la salida $y[n]$ de un sistema LTI causal están relacionadas a través del diagrama de bloques mostrada en la figura.



a) Determine una ecuación de diferencias que relacione $y[n]$ con $x[n]$.
b) ¿Es estable el sistema?

50) Determine la transformada Z unilateral para cada una de las secuencias del problema 42).

51) Considere las siguientes dos señales:

$$x_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u[n+1]$$
$$x_2[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^{n} u[n]$$

Sean $X_{1_u}(z)$ y $X_1(z)$ respectivamente las transformadas Z unilateral y bilateral de $x_1[n]$ y sean $X_{2_u}(z)$ y $X_2(z)$ respectivamente las transformadas Z unilateral y bilateral de $x_2[n]$.

a) Determine $g[n] = x_1[n] * x_2[n]$ utilizando las transformadas Z bilaterales.

b) Determine $q[n] = x_1[n] * x_2[n]$ para $n \geq 0$, utilizando las transformadas Z unilaterales. Observe que $g[n]$ y $q[n]$ no son idénticas para $n \geq 0$.

52) Para cada una de las siguientes ecuaciones de diferencias, y para la entrada y la condición inicial asociadas, determine las respuestas a entrada cero y estado cero, usando la transformada Z unilateral.

a) $y[n] + 3y[n-1] = x[n]$
$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} u[n]$
$y[-1] = 1$

b) $y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - \frac{1}{2}x[n-1]$
$x[n] = u[n]$
$y[-1] = 0$

c) $y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - \frac{1}{2}x[n-1]$
$x[n] = u[n]$
$y[-1] = 1$