Guía de estudio Semana 4

EL-5002 Modelos de Sistemas para Mecatrónica

1. Encuentre la componente real y la componente imaginaria del mapeo $f(z) = e^z$.
2. Defina los siguientes conceptos:
    a. Vecindad
    b. Punto límite
    c. Conjunto cerrado
    d. Conjunto acotado
    e. Conjunto ilimitado
    f. Puntos interiores, exteriores y frontera
    g. Conjuntos abiertos
    h. Conjuntos conexos
    i. Región abierta o Dominio
    j. Clausura de un conjunto
    k. Región cerrada
3. Encuentre la definición de derivada para variable compleja
4. En el conjunto de números complejos ¿Cómo se puede determinar si una función es derivable o no?
5. ¿Qué es una función analítica?
6. ¿Qué es una función holomorfa?
7. Realice la demostración de las Ecuaciones de Cauchy-Riemann.
8. Exprese las ecuaciones de Cauchy-Riemann en notación polar.
9. ¿Cómo se obtiene la derivada de una función compleja a partir de los resultados obtenidos en las preguntas 7 y 8?
10. Liste las reglas de diferenciación compleja.
11. Para cada una de las siguientes funciones, probar si son derivables y, si lo son, determinar su posible derivada:
    a. $f(z) = z^2$
    b. $f(z) = z^*$
    c. $f(z) = 1/z$
12. Demuestre el siguiente teorema: "Si $f(z)$ es analítica en una región **R**, entonces $f'(z)$, $f''(z)$…son también analíticas en **R.**"
13. Defina lo que es un punto singular.
14. Indique las características de las funciones conjugadas y las funciones armónicas
15. Compruebe que las funciones conjugadas satisfacen la propiedad de ortogonalidad.
16. Dada $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2x$; encuentre la función conjugada $v(x, y)$ tal que $f(z) = u + jv$ es una función analítica de z en todo el plano z.
17. ¿Cuándo un mapeo es conforme? Encuentre dos ejemplos.
18. Determine los puntos en los cuales el mapeo $w = z + \frac{1}{z}$ es conforme.
19. Encuentre las partes real e imaginarias de las funciones
    a. $f(z) = z^2 + e^{2z}$
    b. $f(z) = sen\ 2z$

    Verifique que sean analíticas y encuentre sus derivadas.
20. Revisar series de potencia y su convergencia en variable real.
21. ¿Cómo se define una serie de potencias de variable compleja centrada en z_0?

22. ¿Cómo se trata la convergencia o divergencia de una serie de potencias compleja?
23. Establezca el criterio de la razón de D'Alambert para determinar el radio de convergencia de una serie de potencias.
24. Indique paso a paso como se realiza la expansión de una función f(z) racional en serie de potencias en los casos:
    a. La región de convergencia (ROC) es el interior de un círculo
    b. La región de convergencia (ROC) es el exterior de un círculo
25. Determine la serie de potencias que representa a la función $f(z) = \frac{1}{z-3}$ en las siguientes regiones:
    a. $|z| < 3$; $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$
    b. $|z| > 3$; $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$
    c. $|z-2| < 1$; $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-2)^n$