

---

## Respuestas #5. Series complejas.

---

- 1) a)  $j + z - jz^2 - z^3 + jz^4 + \dots$   
b)  $\frac{1}{z} + \frac{j}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \frac{j}{z^4} + \frac{1}{z^5} + \dots$   
c)  $1 - (z - 1 - j) + (z - 1 - j)^2 - (z - 1 - j)^3 + \dots$
- 2) a)  $z - z^3 + z^5 - z^7 + \dots$   
b)  $1 + z - z^2 - z^3 + z^4 + z^5 - z^6 - z^7 \dots$
- 3) a)  $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(z - 1) + \frac{1}{8}(z - 1)^2 - \frac{1}{16}(z - 1)^3$ , radio de convergencia 2  
b)  $\frac{1}{4} - \frac{1}{16}(z - 1)^2 + \frac{1}{64}(z - 1)^4 - \frac{1}{256}(z - 1)^6$ , radio de convergencia 2  
c)  $-j\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 + j)(z - 1 - j) - \frac{3}{4}(z - 1 - j)^2 + \frac{1}{2}(j - 1)(z - 1 - j)^3$ , radio de convergencia  $\sqrt{2}$
- 4) a) 1  
b) 1  
c)  $\sqrt{5}$   
Porque  $z = j$  es una singularidad de  $f(z)$
- 5) a)  $z^3 + z^2 + \frac{z}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!z} + \frac{1}{5!z^2} + \dots$  para  $0 < |z| < \infty$   
b)  $a^3 e^{1/a} + (z - a)(3a^2 e^{1/a} - a e^{1/a}) + \frac{1}{2!}(z - a)^2 \left(6a e^{1/a} - 4e^{1/a} - \frac{1}{a^2} e^{1/a}\right) + \dots$   
para  $|z - a| < |a|$
- 6) a)  $\frac{1}{z} + 2 + 3z + 4z^2 + \dots$  para  $0 < |z| < 1$   
b)  $\frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{(z-1)} + 1 - (z - 1) + (z - 1)^2 - \dots$  para  $0 < |z| < 1$

7) a)  $\dots + \frac{1}{(5!)z^3} - \frac{1}{(3!)z} + z$   
 b)  $z - \frac{1}{(3!)z} + \frac{1}{(5!)z^3} - \dots$   
 c)  $a^2 \sin\left(\frac{1}{a}\right) + zf'(a) + \dots$

8)

9)  $\frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} + \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} z^n$

10) Tiene 3 posibles regiones de convergencia

a)  $|z - (1 + j)| < 1$

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z - 1 - j)^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5} + j\frac{2}{5}\right)^{n+1} (z - 1 - j)^n$$

b)  $1 < |z - (1 + j)| < \sqrt{5}$

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z - 1 - j)^n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (1 + j2)^{n-1} (z - 1 - j)^{-n}$$

c)  $|z - (1 + j)| > \sqrt{5}$

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (z - 1 - j)^{-n} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (1 + j2)^{n-1} (z - 1 - j)^{-n}$$

11) a) 1) Puntos regulares infinitos.

Cero de orden 2 en  $z = -3$

No hay singularidades esenciales

No hay polos

2) Puntos regulares infinitos

No hay ceros

Singularidad esencial en  $z = 1$

No hay polos

3) Puntos regulares infinitos, no hay ceros

No hay singularidades esenciales

Polo de cuarto orden en  $z = 1 + j$

4) Puntos regulares infinitos, cero de orden 2 en  $z = -j$

No hay singularidades esenciales

No hay polos

a) 1) No aplica, 2) residuo:  $-1$ , 3) residuo:  $\frac{1}{2}$ , 4) No aplica

12) a) No tiene ceros en el plano finito  $z$

Singularidades en  $z = \pm 1$  y  $z = \frac{1 \pm j}{\sqrt{2}}$ , todos son polos simples

b) Singularidad removible en  $z = 1$

No tiene ceros finitos

Singularidades en  $z = -1$  y  $z = \sqrt{\frac{1}{2}}(1 \pm j)$ , todos son polos simples

c) Singularidad removible en  $z = 1$

Singularidades en  $z = -1$  y  $z = \sqrt{\frac{1}{2}}(1 \pm j)$ , todos son polos simples

Ceros en  $z = 1 + \pi k$ , para cualquier  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \neq 0$ .

d) Singularidades en  $z = \pm 1$  y  $z = \sqrt{\frac{1}{2}}(1 \pm j)$ , todos son polos de tercer orden

No tiene ceros.

13) a)  $z = 0$ , polo doble

b)  $z = j$ , polo simple;  $z = -j$ , polo doble

c)  $z = \pm 1$ ,  $z = \pm j$ , polos simples

d)  $z = \pm j\pi$ , polos simples

e)  $z = 1$ , singularidad esencial

f)  $z = 1$ , cero simple;  $z = \pm j$ , polos simples

g)  $z = -j$ , cero simple;  $z = 3$ , polo simple;  $z = -2$ , polo de segundo orden

h)  $z = 2 \pm j$ , cero simple;  $z = 0$ , polo de segundo orden

14) a)  $\frac{z}{2!} - \frac{z^3}{4!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$  (singularidad removible)

b)  $\frac{1}{z^3} + \frac{1}{z} + \frac{z}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{4!} + \frac{z^7}{5!} \dots$  (polo de tercer orden)

15) a)

b)

c)

d)

16) a)

b)

17) a) polos simples  $z = -1$ ,  $z = 2$ ; residuos  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{5}{3}$

b) polo simple  $z = 1$ , polo doble  $z = 0$ ; residuos  $-1$ ,  $1$

c) polos simples  $z = 1$ ,  $z = j3$ ,  $z = -j3$ ; residuos  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{5}{12}(3 - j)$ ,  $\frac{5}{12}(3 + j)$

d) polos simples  $z = 0$ ,  $z = j2$ ,  $z = -j2$ ; residuos  $-\frac{1}{4}$ ,  $-\frac{3}{8} + j\frac{3}{4}$ ,  $-\frac{3}{8} - j\frac{3}{4}$

e) polo de quinto orden  $z = 1$ ; residuo  $19$

f) polo de segundo orden  $z = 1$ ; residuo  $4$

g) polo simple; residuo  $\frac{1}{2}$

h) polo simple; residuo  $-\pi$

i) polo doble; residuo  $-\frac{j}{4}$