Instituto Tecnológico de Costa Rica **I Semestre 2021**
Área Académica de Ingeniería Mecatrónica
MT-5001 Modelos de Sistemas para Mecatrónica
Profesor: Ing. Felipe Meza-Obando

Elaborado por: Ing. José Miguel Barboza Retana

Práctica #2. Funciones de Variable Compleja.

- Resuelva los siguientes problemas cortos relacionados con mapeos lineales:

1) Encuentre las ecuaciones de las siguientes rectas en el plano z para la forma cartesiana $y = mx + b$:
   a) $|z - 2 + j| = |z - j + 3|$
   b) $|z + z^* + 4j(z - z^*)| = 6$

2) Encuentre el punto de intersección y el ángulo de intersección de las rectas: $|z - 1 - j| = |z - 3 + j|$ y $|z - 1 + j| = |z - 3 - j|$

3) Dado $w = jz + 4 - j3$, encuentre la imagen de la línea $6x + y = 22$ bajo este mapeo.

4) Demuestre que el mapeo $w = (1 - j)z$ mapea la región $y > 1$ del plano z en la región $u + v > 2$ del plano w.

5) Bajo el mapeo $w = jz + j$ demuestre que el semiplano $x > 0$ del plano z se transforma en el semiplano $v > 1$ del plano w.

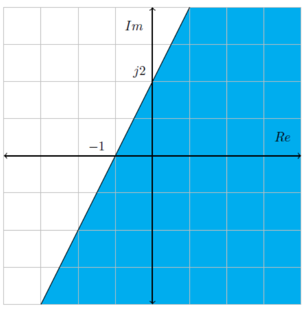
6) Encuentre la región imagen en el plano w correspondiente a la franja $x > 0, 0 < y < 2$ del plano z bajo el mapeo $w = jz + 1$.

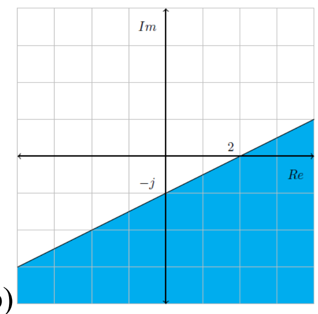
7) Encuentre la imagen de cada una de las siguientes curvas bajo el mapeo lineal $w = (j + \sqrt{3})z + j\sqrt{3} - 1$:

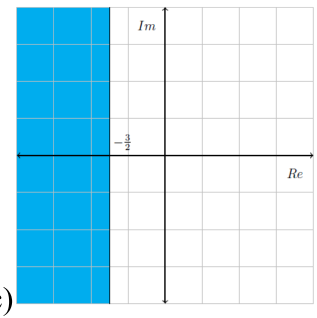
   a) $y = 0$
   b) $x = 0$
   c) $x^2 + y^2 = 1$
   d) $x^2 + y^2 + 2y = 1$

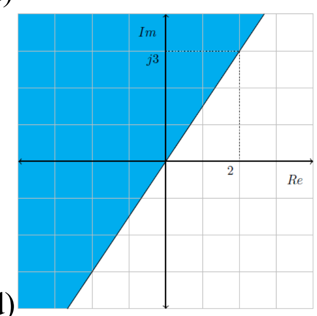
8) El mapeo $w = \alpha z + \beta$, mapea el punto $z = 1 + j$ en el punto $w = j$ y el punto $z = -1$ en el punto $w = 1 + j$.
   a) Encontrar α y β
   b) Encontrar la región del plano w correspondiente al semiplano superior $Im\{z\} > 0$
   c) Encontrar la región del plano w correspondiente al disco $|z| < 2$
   d) Encuentre los puntos fijos del mapeo

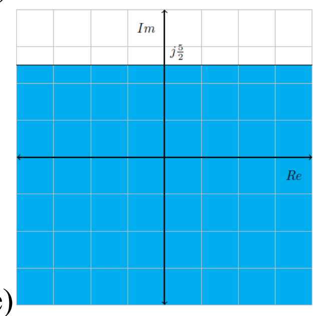
9) Determine a que se transforma la región sombreada de las siguientes figuras a partir de la evaluación de la función $f(z) = 3e^{j\frac{3\pi}{2}}z + \sqrt{2}e^{j\frac{3\pi}{4}}$

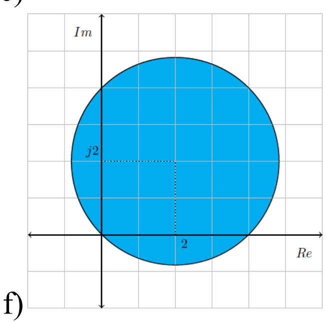
a) 

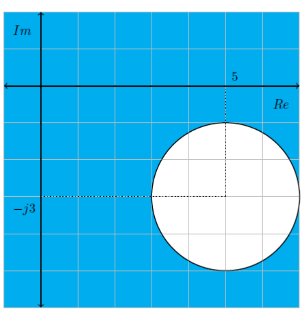
b) 

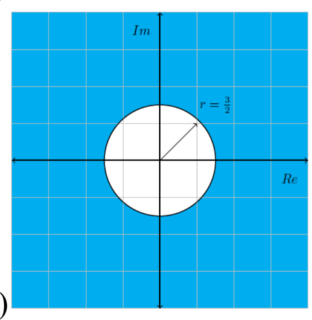
c) 

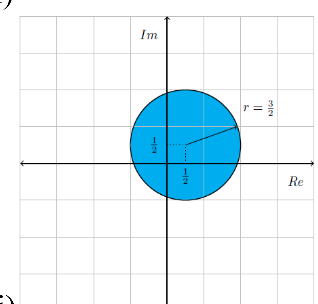
d) 

e) 

f) 

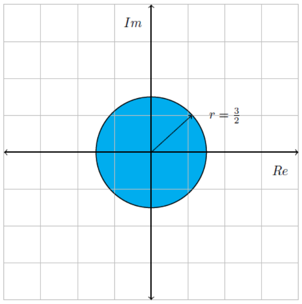
g) 

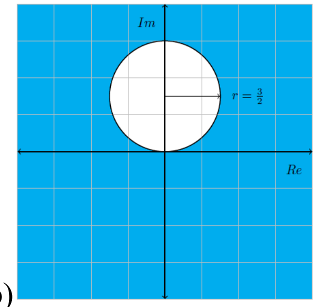
h) 

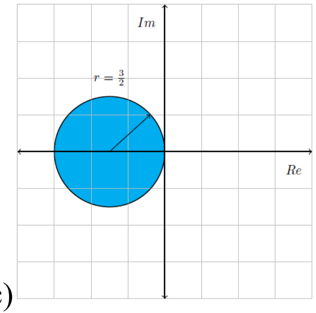
i) 

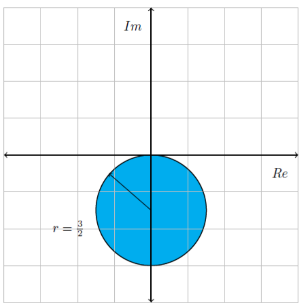
- Resuelva los siguientes problemas cortos relacionados con mapeos de inversión:

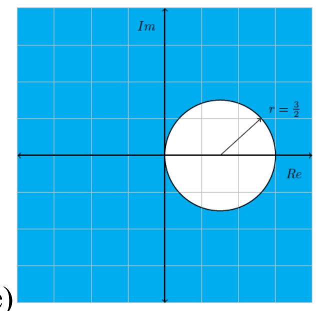
10) Obtenga a que se transforman las regiones sombreadas de las siguientes figuras al evaluar la función $f(z) = \frac{1}{z}$ en cada caso.

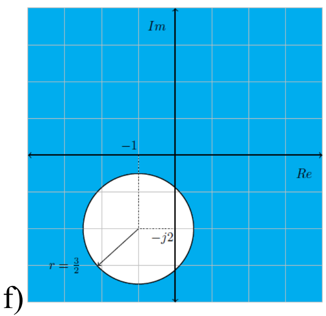
a) 

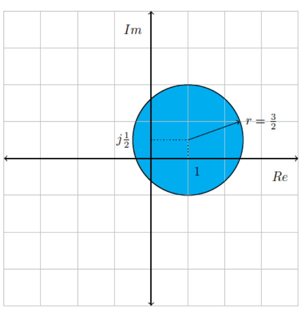
b) 

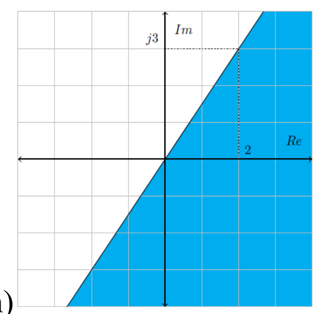
c) 

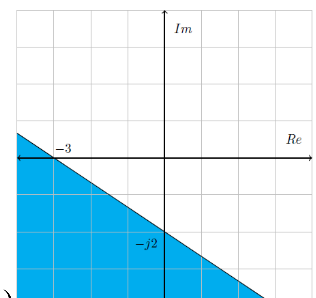
d) 

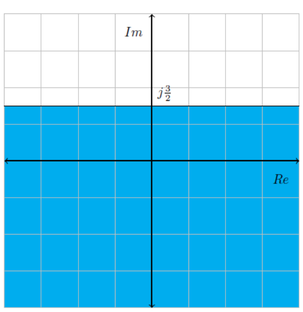
e) 

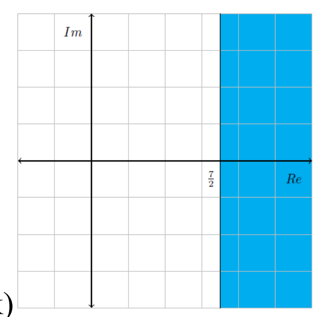
f) 

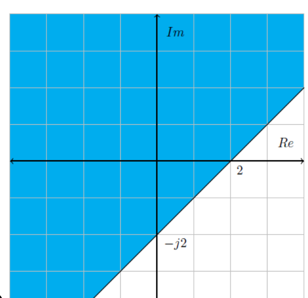
g) 

h) 

i) 

j) 

k) 

l) 

- Encuentre la imagen en el plano $w = {}^{1}/_{z}$ de:

11) El círculo $\left|z + \frac{3}{4} + j\right| = \frac{7}{4}$
12) El disco $|z - a| \leq a$, con $a \in \mathbb{R}, a > 0$

- Resuelva los siguientes problemas utilizando mapeos bilineales:

13) Encuentre un mapeo bilineal que mapee $z = 0$ en $w = j$, $z = -j$ en $w = 1$ y $z = -1$ en $w = 0$ y encuentre las imágenes en el plano complejo w de las rectas $Re\{z\} = cte$ e $Im\{z\} = cte$. Además, determine los puntos fijos del mapeo.

14) Dado el mapeo bilineal $w = \frac{1+j}{z}$:
   a) Indique las operaciones involucradas
   b) Encuentre las imágenes de $z = 1, z = 1 - j$ y $z = 0$
   c) Encuentre la imagen del interior del círculo unitario $|z| < 1$
   d) Encuentre las imágenes de las rectas $x = y$ y $x + y = 1$
   e) Encuentre los puntos fijos del mapeo

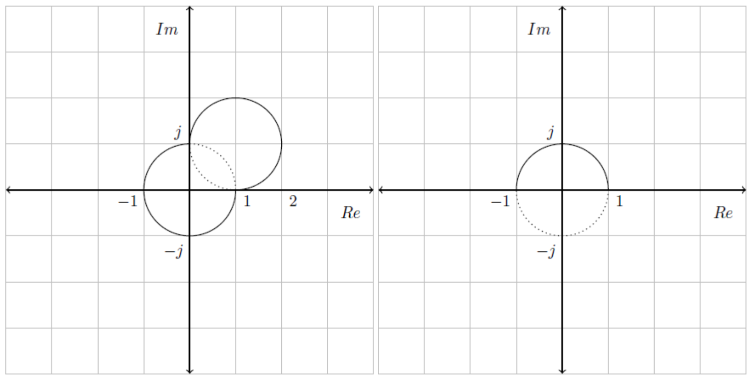
15) Dado el mapeo bilineal $w = \frac{z+1}{z-1}$, encuentre la imagen del arco semicircular $x^2 + y^2 = 1$ para $x \leq 0$, descrito del punto $(0, -1)$ al punto $(0,1)$.

16) Encuentre a que mapea $w = \frac{z+j}{z-3}$ la región del plano z entre las rectas $x = y$ y $y = 0$ con $x < 0$. Encuentre también, qué construcción geométrica en el plano z corresponde al círculo unitario del plano w.

17) Si $w = \frac{z-j}{z+j}$ encuentre y dibuje la imagen en el plano w correspondiente al interior del círculo $|z| = 2$ en el plano z.

18) Demuestre que bajo el mapeo $w = \frac{2jz}{z+j}$ los arcos circulares o rectas que pasan por $z = 0$ y $z = j$ en el plano z son mapeados en arcos circulares o rectas que pasan por $w = 0$ y $w = j$ en el plano w. Encuentra la imagen de la región $\left|z - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$ y luego $|z| < |z - j|$ en el plano w.

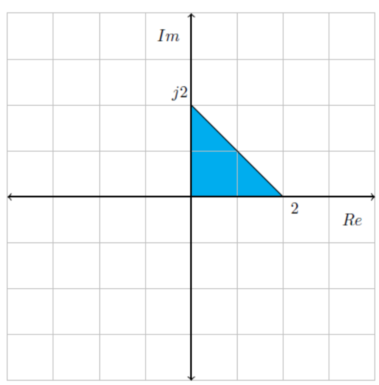
19) Encuentre un mapeo bilineal $w = f(z)$ que transforme la curva A mostrada a la izquierda de la figura, en la curva B del plano w mostrada a la derecha. Se sabe que la sección de la curva A ubicada sobre $|z - 1 - j| = 1$ es transformada en el segmento de recta que une -1 y 1 en el plano w.



20) Encuentre la imagen en el plano w de las siguientes regiones bajo el mapeo exponencial $w = e^z$:

a) $x > 0$
b) $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$
c) $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi$
d) $\frac{1}{2}\pi \leq y \leq \pi, 0 \leq x < \infty$

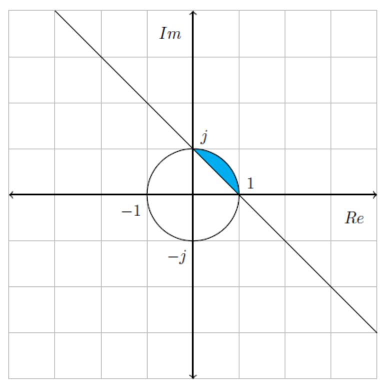
21) Encuentre la imagen de siguiente figura al aplicar el mapeo cuadrático $w = z^2$



22) El mapeo $w=\frac{z-j}{z+j}$ se utiliza para transformar la región $R1$ del plano z especificada por $|Re\{z\}|\leq 1$ y $|Im\{z\}|\leq 1$:

a) Grafique la región $R1$
b) Determine el mapeo inverso de $w=f(z)$
c) Separe el mapeo en transformaciones elementales
d) Encuentra la imagen en el plano w de la región $R1$
e) Indique dónde el mapeo no es conforme
f) Determine los puntos fijos del mapeo

23) Dado el mapeo $w=\frac{z-j}{z-1}$ determine los siguiente:
a) El mapeo inverso
b) Los puntos donde el mapeo es conforme y donde no lo es
c) Las transformaciones elementales que realiza el mapeo
d) La región del plano w correspondiente a la región del plano z mostrada en la siguiente figura:

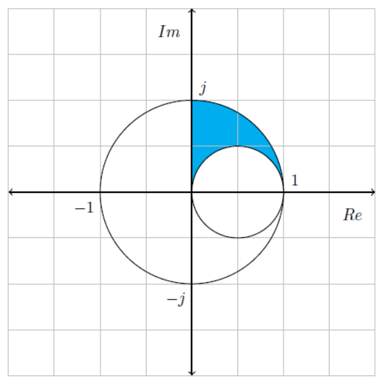


24) Dado el mapeo $w=\frac{2z+2j}{z-1}$ y las regiones $R1: x-y\leq 1$ y $R2: |z|\leq 1$ en el plano complejo z, encuentre lo siguiente:
a) El mapeo inverso
b) Las transformaciones elementales que aplica el mapeo
c) La gráfica de las regiones $R1$, $R2$
d) La imagen en el plano w de cada región del punto anterior
e) Verifique que la imagen de $R1\cap R2$ es igual a la intersección de las imágenes de $R1$ y $R2$

25) Dado el mapeo complejo $w = \frac{(1+j3)z-1-j}{\frac{1}{2}z+1+j\frac{1}{2}}$ y las regiones $R1: Im\{z\} \geq 1$ y $R2: |z-2-j| \leq 2$ en el plano z, encuentre lo siguiente:

a) El mapeo inverso
b) Las transformaciones elementales que aplica el mapeo
c) La grafica de las regiones $R1$, $R2$
d) La imagen en el plano w de cada región del punto anterior
e) Verifique que la imagen de $R1 \cap R2$ es igual a la intersección de las imágenes de $R1$ y $R2$

26) La región sombreada en la siguiente figura se transforma utilizando la función de variable compleja $w = f(z) = \frac{1-jz}{z-j}$. Determine su correspondiente imagen en el plano w después de aplicar el mapeo.



27) La región sombreada en la siguiente figura se transforma utilizando la función de variable compleja $w = f(z) = -(1+j)\frac{z-1}{z+1}$. Determine su correspondiente imagen en el plano w después de aplicar el mapeo.