Wendy Gómez Ramírez
2017109745

Guía de estudio semana 10

Transformada de Laplace

1. A partir de la transformada de Fourier deduzca la transformada de Laplace.

$$g(t) = e^{-\sigma t} f(t)$$

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \cdot e^{-\sigma t} f(t)\, dt$$

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sigma + j\omega)t} f(t)\, dt$$

$$s = \sigma + j\omega$$

$$\boxed{F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt}$$

2. A partir de la transformada inversa de Fourier deduzca la transformada inversa de Laplace.

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} G(j\omega)\, d\omega$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} F(\sigma + j\omega)\, d\omega$$

$$g(t) = e^{-\sigma t} f(t)$$

$$e^{-\sigma t} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} F(\sigma + j\omega)\, d\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t}}{e^{-\sigma t}} F(\sigma + j\omega)\, d\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(\sigma+j\omega)}F(\sigma + j\omega)\,d\omega$$

$$s = \sigma + j\omega$$
$$ds = j\,d\omega$$

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_0-j\infty}^{\sigma_0+j\infty} e^{st}F(s)\,ds}$$

El σ_0 se incluye para garantizar la convergencia de la integral impropia.

3. Explique ¿Qué es la transformada bilateral de Laplace? Y que es lo que marca la diferencia respecto de la transformada de Fourier.

La transformada bilateral de Laplace expresa la función f(t) como una suma de un número infinito de términos infinitesimalmente pequeños cuya frecuencia compleja es $s = \sigma + j\omega$. σ gobierna el factor de convergencia de $e^{-\sigma t}$. Al incluir el $e^{-\sigma t}$ valores positivos de σ, garantiza que $e^{-\sigma t}f(t)u(t)$ es absolutamente integrable para casi cualquier f(t). Los valores negativos de σ se necesitan para todo t menor que cero. La transformada bilateral de Laplace existe para un número mayor de funciones que la transformada de Fourier. En una transformada de Laplace, si $\sigma = 0$ se obtiene la transformada de Fourier.

Si la transformada de Laplace no tiene ningún t<0, se convierte en una transformada unilateral de Laplace.

4. ¿Cuál es la ecuación que describe la transformada unilateral de Laplace?

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st}f(t)u(t)\,dt$$

$$\boxed{F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t) u(t)\, dt}$$

Transformada inversa:

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} e^{st} F(s)\, ds}$$

5. Analice $\mathrm{x(t)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{at}}\mathrm{u(t)}$ aplicando al transformada de Fourier y la transformada de Laplace y compare los resultados. Qué relación existe entre la transformada de Fourier y la transformada de Laplace.

Aplicando la transformada de Fourier:

$$X(\sigma + j\omega) = \int_0^{\infty} (e^{-\sigma t} \cdot e^{-at}) e^{-j\omega t}\, dt \quad ; \; X_S(t) = e^{-\sigma t} x(t)$$

$$X(\sigma + j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-(\sigma + j\omega)t} \cdot e^{-at}\, dt = \int_0^{\infty} e^{-(s)t} \cdot e^{-at} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t}\, dt$$

$$X(\sigma + j\omega) = \left.\frac{e^{-(s+a)t}}{-(s+a)}\right|_0^{\infty} = \frac{e^{-\infty}}{-(s+a)} - \frac{e^{0}}{-(s+a)} = \frac{0}{-(s+a)} + \frac{1}{s+a}$$

$$\sigma + a > 0$$
$$\sigma > -a$$

$$\boxed{X(s) = \frac{1}{s+a} \quad para\ \sigma > -a}$$

Aplicando la transformada de Laplace:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} \mathrm{e}^{-\mathrm{at}} \mathrm{u(t)}\ dt = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot e^{-at} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t}\, dt$$

$$X(s) = \left.\frac{e^{-(s+a)t}}{-(s+a)}\right|_0^{\infty} = \frac{e^{-\infty}}{-(s+a)} - \frac{e^{0}}{-(s+a)} = \frac{0}{-(s+a)} + \frac{1}{s+a}$$

$$\boxed{X(s) = \frac{1}{s+a} \;\; para\; \sigma > -a}$$

Ya sea si se aplica la transformada de Fourier o la de Laplace, se obtiene el mismo resultado. En una transformada de Laplace, si $\sigma = 0$ se obtiene la transformada de Fourier.

6. Ahora analice $x(t) = -e^{-at}u(t)$. Que sucede en este caso para ambas transformadas. (Analice la región de convergencia)

Aplicando la transformada de Fourier:

$$X(\sigma + j\omega) = \int_0^{\infty} -(e^{-\sigma t} \cdot e^{-at})e^{-j\omega t}\, dt \quad ; \;\; X_S(t) = e^{-\sigma t}x(t)$$

$$X(\sigma + j\omega) = \int_0^{\infty} -e^{-(\sigma+j\omega)t} \cdot e^{-at}\, dt = -\int_0^{\infty} e^{-(s)t} \cdot e^{-at} dt = -\int_0^{\infty} e^{-(s+a)t}\, dt$$

$$X(\sigma + j\omega) = \left.\frac{e^{-(s+a)t}}{(s+a)}\right|_0^{\infty} = \frac{e^{-\infty}}{(s+a)} - \frac{e^{0}}{(s+a)} = \frac{0}{(s+a)} - \frac{1}{s+a}$$

$$\sigma + a > 0$$
$$\sigma > -a$$

$$\boxed{X(s) = \frac{-1}{s+a} \;\; para\; \sigma > -a}$$

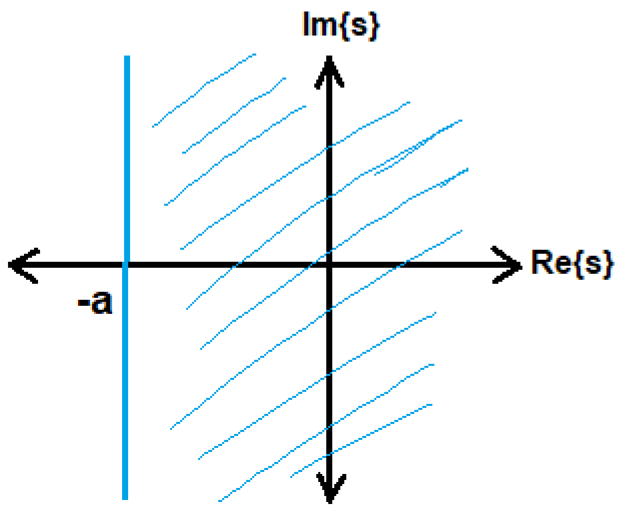
Aplicando la transformada de Laplace:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} -e^{-st} e^{-at} u(t)\;\, dt = -\int_0^{\infty} e^{-st} \cdot e^{-at} dt = -\int_0^{\infty} e^{-(s+a)t}\, dt$$

$$X(s) = \frac{e^{-(s+a)t}}{(s+a)}\bigg|_0^{\infty} = \frac{e^{-\infty}}{(s+a)} - \frac{e^0}{(s+a)} = \frac{0}{(s+a)} - \frac{1}{s+a}$$

$$\boxed{X(s) = \frac{-1}{s+a} \quad para\ \sigma > -a}$$

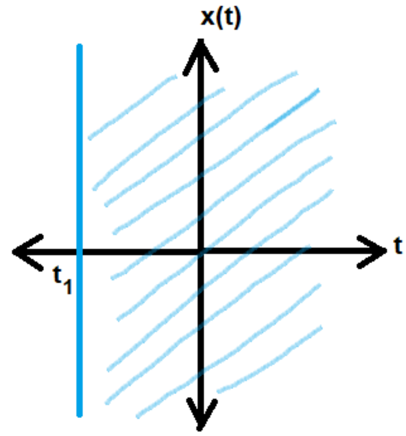


7. ¿Qué es la región de convergencia (ROC)?

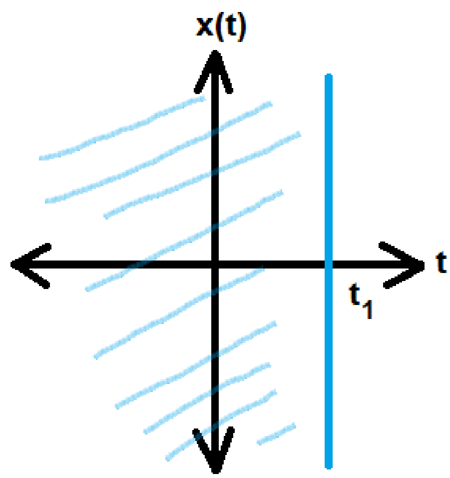
La ROC de una función X(s) consiste en bandas paralelas al eje jω. Para transformadas racionales de Laplace la ROC no contiene ningún polo, esto debido a que la transformada no converge en los polos. Si x(t) es de duración finita y es completamente integrable, la ROC es el plano S.

8. ¿Cuáles son las restricciones específicas para las señales más típicas?

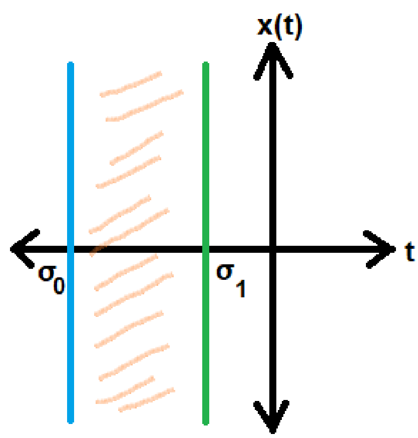
- Si x(t) está en el miembro derecho, es decir, x(t) está antes de t_1. Si la línea $\mathrm{Re}\{S\} = \sigma_0$ está en la ROC, entonces se cumple que todos los valores de $\mathrm{Re}\{S\} > \sigma_0$ están en la ROC.



- Si x(t) es izquierda y $\mathrm{Re}\{S\} = \sigma_0$ está en la ROC, entonces todos los valores de $\mathrm{Re}\{S\} < \sigma_0$ están en la ROC.



- Si se tiene una parte derecha y otra izquierda, la franja común es la Roc.



- Si la transformada de Laplace de x(t) es racional, entonces está limitado por los polos y se extiende hasta infinito y ningún polo está en la ROC.

9. ¿Cómo se puede determinar la transformada inversa de Laplace?

Se utiliza la descomposición en fracciones parciales para poder calcular la transformada inversa de cada una de las partes.

Por ROC, se puede inferir la ROC de cada uno de los términos. Hay dos opciones:

- Roc derecha: $u(t)$
- Roc izquierda: $-f(t)u(-t)$

10. Encuentre la transformada inversa de Laplace para:

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

a. $R\{s\} > -1$

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$

$$A = \lim_{s\to -1} (s+1)\cdot X(s) = 1$$

$$B = \lim_{s\to -2} (s+2)\cdot X(s) = -1$$

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

$$\frac{1}{s+1} \to \sigma > -1$$

$$\frac{1}{s+2} \to \sigma > -2$$

Por formulario:

$$\frac{1}{s-a} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\ e^{at}u(t) \;\; para \;\; \sigma > a$$

$$x(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

$$\boxed{X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\ x(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t) \;\; para \;\; R\{s\} > -1}$$

b. $R\{s\} < -2$

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

Para que se cumpla la ROC:

$$\frac{1}{s+1} \rightarrow \sigma < -1$$

$$\frac{1}{s+2} \rightarrow \sigma < -2$$

Por formulario:

$$\frac{1}{s-a} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\ -e^{at}u(-t) \;\; para \;\; \sigma < a$$

$$x(t) = (-e^{-t} + e^{-2t})u(-t)$$

$$\boxed{X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\ x(t) = (-e^{-t} + e^{-2t})u(t) \;\; para \;\; R\{s\} < -2}$$

c. $-2 < R\{s\} < -1$

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

Para que se cumpla la ROC:

$$\frac{1}{s+1} \rightarrow \sigma < -1$$

$$\frac{1}{s+2} \rightarrow \sigma > -2$$

Por formulario:

$$\frac{1}{s-a} \circ\!\!-\!\!\bullet -e^{at}u(-t) \;\; para \;\; \sigma < a$$

$$\frac{1}{s-a} \circ\!\!-\!\!\bullet\, e^{at}u(t) \;\; para \;\; \sigma > a$$

$$x(t) = \left(-e^{-t}u(-t) - e^{-2t}u(t)\right)$$

$$\boxed{X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \circ\!\!-\!\!\bullet\, x(t) = \left(-e^{-t}u(-t) - e^{-2t}u(t)\right) \;\; para \;\; -2 < R\{s\} < -1}$$

11. ¿Qué es un contorno de Bromwich?

El contorno de Bromwich se utiliza para resolver la integral de Bromwich. Esta integral también se conoce como la integral de inversión compleja y es la fórmula para calcular la transformada inversa de Laplace.

Integral de Bromwich:

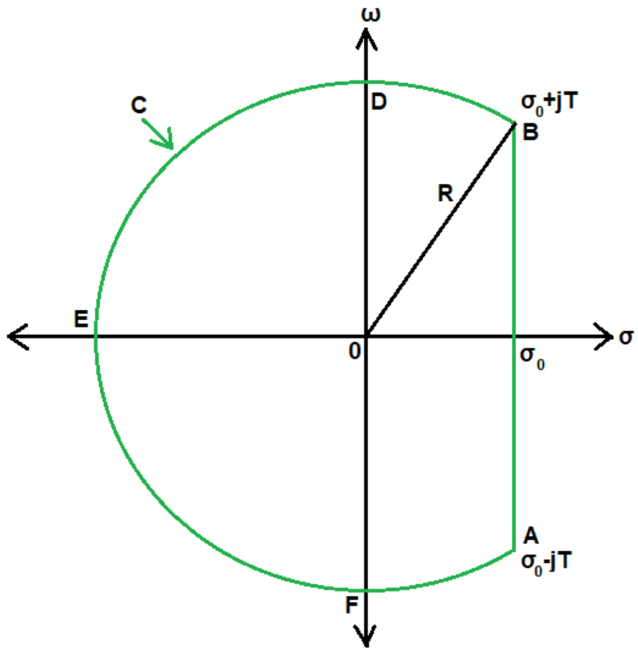
$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} e^{st}F(s)\,ds\,, para\; t > 0$$

Se escoge un contorno de forma que σ_0 quede a la derecha de todas las singularidades.

$$s = \sigma_0 + jy$$

Contorno de Bromwich

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{C} e^{st}F(s)\,ds\,, para\; t > 0$$



$$T = \sqrt{R^2 - \sigma_0^2}$$

$$f(t) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - jT}^{\sigma_0 + jT} e^{st} f(s)\, ds$$

$$f(t) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi j} \left\{ \oint_C e^{st} F(s)\, ds - \int_\Gamma e^{St} F(s)\, ds \right\}$$

Suponiendo que todas las singularidades son polos y están a la izquierda de σ_0:

$$\int_\Gamma e^{St} F(s)\, ds = 0$$

Se utiliza el teorema del residuo para encontrar la otra integral:

$$f(t) = \Sigma residuos\ de\ e^{st} F(s)\ en\ los\ polos\ de\ F(s)$$

Para que la segunda integral se haga cero:

$$|F(s)| < \frac{M}{R^k}$$

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \to El\ orden\ de\ los\ ceros\ es\ menor\ que\ el\ orden\ de\ los\ polos$$

12. Explique cada una de las propiedades de la Transformada de Laplace:

a. Linealidad

La región de convergencia es $R_1 \cap R_2$. Si no hay unión, entonces no hay ROC y por lo tanto, no hay transformada de Laplace.

$$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \alpha_1 X_1(t) + \alpha_2 X_2(t)$$

b. Desplazamiento en el tiempo

$$x(t - t_0) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet e^{-st_0} X(s) \quad \text{ROC=R}$$

Un desplazamiento en el tiempo implica un comportamiento ecponecial en la frecuencia.

c. Desplazamiento en el dominio de s

$$e^{ts_0} x(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet X(s - s_0) \quad \text{ROC=R+Re}\{s_0\}$$

El desplazamiento en el dominio de s produce que crezca la ROC.

Si se produce un desplazamiento en $j\omega_0$(desplazamiento del eje), la ROC queda igual

d. Escalamiento en el tiempo

$$x(at) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right) \quad \text{ROC=R/a}$$

Si a>1: ROC>1 ⇒ la ROC se comprime. 0<ROC<1 ⇒ se da una inversión en el tiempo y un escalamiento.

Si a<1: se da una inversión en el tiempo y un escalamiento.

e. Conjugación

$$x^*(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet X^*(s^*) \quad \text{ROC=R}$$

f. Convolución

$$x_1(t) * x_2(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet X_1(s) X_2(s) \quad \text{ROC=} R_1 \cap R_2$$

g. Diferenciación en el dominio del tiempo

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} \circ\!\!-\!\!-\!\!\bullet\, sX(s) \quad \text{ROC contiene R}$$

h. Diferenciación en el dominio de s

$$-t\big(x(t)\big) \circ\!\!-\!\!-\!\!\bullet\, \frac{\partial X(s)}{\partial s} \quad \text{ROC=R}$$

i. Integración en el dominio del tiempo

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \circ\!\!-\!\!-\!\!\bullet\, \frac{1}{s}X(s) \quad R \cap R_e\{s\} > 0$$

13. ¿Qué es un sistema LTI?

Un sistema LTI es un sistema lineal invariante en el tiempo.

14. Como se llega a la función de transferencia utilizando Laplace

La reacción de un sistema a una señal de entrada se puede calcular a través de la convolución de dicha señal de entrada con la respuesta al impulso del sistema. Debido a la propiedad de convolución de la transformada de Laplace, es posible simplificar el manejo de este operador utilizando la representación de las señales involucradas y la respuesta al impulso en el dominio de la frecuencia

$$y(t) = h(t) * x(t) \circ\!\!-\!\!-\!\!\bullet\, Y(s) = H(s)X(s)$$

H(jω) se le conoce como respuesta en frecuencia del sistema. A H(s) se le denomina función del sistema o función de transferencia del sistema.

15. Explique el concepto de causalidad en un sistema LTI.

La salida de un sistema causal depende sólo de los valores presentes y pasados de la entrada al mismo. Si se usa la suma y la integral de convolución, se puede relacionar esta propiedad con una propiedad correspondiente de la respuesta al impulso de un sistema LTI. En concreto, para que un sistema LTI sea causal, y[n] no debe depender de x[k] para k> n.

Es decir, el impulso h(t) es cero para todo t<0/

16. ¿Qué es la estabilidad en un sistema LTI?

un sistema es estable si cada entrada limitada produce una salida limitada. Para determinar las condiciones bajo las cuales los sistemas LTI son estables, considere una entrada x[n] que está limitada en magnitud:

$$|x[n]| < B \; para \; toda \; n$$

Si:

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x\,[n-k] \right|$$

Si se cumple que:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

entonces y[n] está limitada en magnitud y por consiguiente el sistema es estable.

Un sistema LTI es estable si la región de convergencia contiene el eje jω.

17. Como se aplica transformada de Laplace a un sistema LTI definido por ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes.

No se necesita la respuesta al impulso para conocer la ecuación del sistema. Se necesita saber cómo es su estabilidad y causalidad, además, se necesita conocer la región de convergencia.

$$H(s) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k} = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

18. Compare la transformada bilateral de Laplace con la transformada Unilateral de Laplace.

La transformada unilateral de Laplace se escribe como:

$$x(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}\, dt$$

Cuando en una transformada bilateral, los t<0, entonces la transformada bilateral y la unilateral se van a comportar igual.

19. Para las propiedades de la pregunta 12 explique cuáles son las diferencias más importantes con cada una de ellas al ser aplicadas a la transformada Unilateral de Laplace. (si es que hay diferencia)

Para la transformada unilateral, no se necesita especificar explícitamente la ROC debido a que esta siempre se va a comportar igual (va a ser derecha).

a. Linealidad

Es igual que para la transformada bilateral como la unilateral. La región de convergencia es $R_1 \cap R_2$. Si no hay unión, entonces no hay ROC y por lo tanto, no hay transformada de Laplace

$$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, \alpha_1 X_1(t) + \alpha_2 X_2(t)$$

b. Desplazamiento en el tiempo

Esta propiedad es diferente para la transformada bilateral y la unilateral.

$$Bilateral \;\; \rightarrow \;\; x(t-t_0) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, e^{-st_0}X(s) \quad \text{ROC=R}$$

$$Unilateral \;\; \rightarrow \;\; x(t-t_0)u(t-t_0) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, e^{-st_0}X(s)\,; \quad t_0 \geq 0$$

Un desplazamiento en el tiempo implica un comportamiento ecponecial en la frecuencia.

c. Desplazamiento en el dominio de s (teorema de traslación o modulación exponencial)

Es igual que para la transformada bilateral como la unilateral.

$$e^{ts_0}x(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet X(s-s_0) \quad \text{ROC=R+Re}\{s_0\}$$

El desplazamiento en el dominio de s produce que crezca la ROC.

Si se produce un desplazamiento en $j\omega_0$(desplazamiento del eje), la ROC queda igual

d. Escalamiento en el tiempo

Es igual que para la transformada bilateral como la unilateral.

$$x(at) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{|a|}X\left(\frac{s}{a}\right) \quad \text{ROC=R/a}$$

Si a>1: ROC>1 ⇒ la ROC se comprime. 0<ROC<1 ⇒ se da una inversión en el tiempo y un escalamiento.

Si a<1: se da una inversión en el tiempo y un escalamiento.

e. Conjugación

Es igual que para la transformada bilateral como la unilateral.

$$x^*(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet X^*(s^*) \quad \text{ROC=R}$$

f. Convolución

Es igual que para la transformada bilateral como la unilateral.

$$x_1(t) * x_2(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet X_1(s)X_2(s) \quad \text{ROC=}R_1 \cap R_2$$

g. Diferenciación en el dominio del tiempo

$$Bilateral \quad \rightarrow \quad \frac{\partial x(t)}{\partial t} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet sX(s) \quad \text{ROC contiene R}$$

$$Unilateral \quad \rightarrow \quad \frac{\partial x(t)}{\partial t} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, sX(s) - x(0^-)$$

$$L\{x^{(n)}(t)\} = s^n X(s) - \sum_{i=1}^{n} s^{n-i} X^{(i-1)}(0^-)$$

h. Diferenciación en el dominio de s

Es igual que para la transformada bilateral como la unilateral.

$$-t\big(x(t)\big) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, \frac{\partial X(s)}{\partial s} \quad \text{ROC=R}$$

i. Integración en el dominio del tiempo

$$Bilateral \quad \rightarrow \quad \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, \frac{1}{s} X(s) \quad R \cap R_e\{s\} > 0$$

$$Unilateral \quad \rightarrow \quad \int_{0^-}^{t} x(\tau)\, d\tau \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, \frac{1}{s} X(s)$$